

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK CONE RECTANGULAR

SKRIPSI

**OLEH
AGUSTIA AYU RAHMAWATI
NIM. 19610012**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK CONE RECTANGULAR

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Agustia Ayu Rahmawati
NIM. 19610012**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK CONE RECTANGULAR

SKRIPSI

Oleh
Agustia Ayu Rahmawati
NIM. 19610012

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 22 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Dosen Pembimbing II



Juhari, M.Si.
NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrudin Rozi, M.Si.
NIP. 19800827 200801 1 012

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG METRIK CONE RECTANGULAR

SKRIPSI

Oleh
Agustia Ayu Rahmawati
NIM. 19610012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

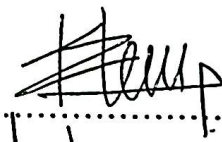
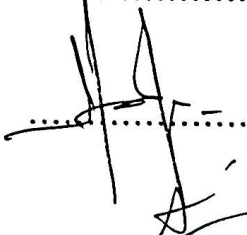
Tanggal 17 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Juhari, M.Si.


.....

.....

.....

.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrud Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Agustia Ayu Rahmawati

NIM : 19610012

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan Pada Ruang Metrik Cone Rectangular

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2026



Agustia Ayu Rahmawati

NIM. 19610012

MOTO

“ Tidak semua orang terlahir dengan kemudahan tetapi tiap langkah kecil yang kamu pilih hari ini bisa menjadi privilege masa depanmu.”

(Shafa' Salsabila)

“Hari ini mungkin tidak mudah, besok bisa jadi akan lebih susah. Namun, aku yakin, *one day*, insyaAllah datang hari yang indah.”

(Muyassaroh)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini dipersembahkan dengan rasa hormat dan syukur yang mendalam kepada:

Kedua orang tua tercinta, Bapak Sugeng Santoso dan Ibu Endang Susiani, yang menjadi pilar utama dalam hidup penulis. Terima kasih karena selalu mengiringi setiap langkah penulis dengan doa-doa terbaiknya, sumber kekuatan, kepercayaan yang besar, kasih sayang yang menjadi penerang dan pembuka jalan kemudahan bagi penulis dalam menyelesaikan studi ini.

Saudara-saudara tersayang, Yanuar Eko Nur Rochman, Anita Dewi Kusumaningrum, dan Rizka Septya Wulansari selaku kakak-kakak penulis, dan juga kepada Fajar Kurniawan Aprilian selaku adik penulis. Terima kasih karena selalu memberikan dukungan, dorongan semangat, dan memberikan nasihat serta motivasi terbaik sehingga penulis mampu melewati setiap tantangan dalam penyusunan skripsi ini hingga selesai.

Dosen-dosen yang saya hormati, terima kasih atas segala bimbingan, ilmu, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan selama penulis menjalani masa perkuliahan hingga menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Serta teman-teman penulis, terima kasih karena selalu ada untuk membantu penulis ketika mengalami kesulitan, serta senantiasa menyemangati di setiap fase perjuangan dalam menyelesaikan perkuliahan hingga skripsi ini.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan memanjatkan puji dan syukur ke hadirat Allah SWT, atas limpahan berkah, rahmat, dan hidayat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat Kelengkapan pada Ruang Metrik Cone Rectangular”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat yang harus dipenuhi oleh mahasiswa program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang untuk memperoleh gelar sarjana.

Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang menjadi teladan utama bagi umatnya dalam bentuk pribadi yang taat, cerdas, dan berakhlak mulia. Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan rasa terimakasih yang mendalam kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan, bimbingan, motivasi, serta bantuan hingga skripsi ini dapat diselesaikan. Adapun ucapan terimakasih tersebut disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, ilmu, serta motivasi yang berharga selama proses penulisan skripsi.
5. Juhari, M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, motivasi, dan ilmu pengetahuan yang sangat membantu dalam penyusunan skripsi.
6. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajar, membimbing, dan mendidik dengan penuh keikhlasan. Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka dengan pahala yang setimpal.

7. Orang tua dan seluruh keluarga penulis atas perhatian, dukungan, doa, semangat, dan kasih sayang, nasehat, serta motivasi yang tiada henti, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh mahasiswa angkatan 2019 dan teman-teman seperjuangan yang senantiasa memberikan pengetahuannya, motivasi dan dukungannya kepada penulis.

Penulis berharap, segala bantuan dan dukungan yang diberikan oleh semua pihak mendapatkan balasan yang setimpal dari Allah SWT. Semoga skripsi ini bermanfaat dan membawa keberkahan bagi semua pihak yang membacanya.

Malang, 17 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO.....	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR SIMBOL	xi
ABSTRAK.....	xii
ABSTRACT	xiii
مستخلص البحث.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	4
BAB II KAJIAN TEORI	6
2.1 Teori Pendukung	6
2.1.1 Ruang Metrik	6
2.1.2 Ruang Bernorma.....	7
2.1.3 Ruang Banach.....	11
2.1.4 Cone.....	12
2.1.5 Ruang Metrik Cone	15
2.1.6 Ruang Metrik Cone Rectangular	17
2.2 Kajian Integrasi Pengembangan Ilmu Pengetahuan	18
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	19
BAB III METODE PENELITIAN	23
3.1 Jenis Penelitian.....	23
3.2 Pra Penelitian.....	23
3.3 Tahapan Penelitian	23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1 Sifat Barisan di Ruang Metrik Cone Rectangular	25
4.2 Kelengkapan Ruang Metrik Cone Rectangular.....	32
4.3 Integrasi Kelengkapan Ruang Metrik Cone Rectangular Berdasarkan Surah Ali-Imron: 189-191	37
BAB V PENUTUP	40
5.1 Kesimpulan.....	40
5.2 Saran.....	40
DAFTAR PUSTAKA	41
RIWAYAT HIDUP	42

DAFTAR SIMBOL

E	: Ruang Banach real
$\subset$	: Simbol himpunan bagian (subset)
$\times$	: Operasi perkalian
d	: Fungsi Metrik
d_c	: Fungsi Metrik Cone
d_{cr}	: Fungsi Metrik Cone Rectangular
$\ \cdot\ $	: Norma (norm)
$\lim$	: Limit
P	: Cone
$\text{int } P$	: Interior dari Cone
θ	: Elemen nol dalam vektor
K	: Konstanta cone normal
$\leq$	: Relasi urutan parsial “kurang dari atau sama dengan”
$<$	: Relasi urutan parsial “kurang dari”
$\ll$	: Relasi urutan parsial “elemen interior”
c	: Vektor sebarang di E dengan $\theta \ll c$
c'	: Vektor di E dengan $0 \ll c \ll d_{cr}(x, y)$

ABSTRAK

Rahmawati, Agustia Ayu. 2026. **Sifat Kelengkapan pada Ruang Metrik Cone Rectangular**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing I: Dr. Hairur Rahman, M.Si.; Pembimbing II: Juhari, M.Si.

Kata kunci: Ruang Metrik Cone Rectangular, Kelengkapan, Barisan Cauchy, Cone Normal

Ruang metrik cone rectangular merupakan generalisasi dari ruang metrik cone dengan perbedaan utama pada aksioma ketiga, yaitu ketaksamaan segitiga yang diganti menjadi ketaksamaan rectangular. Penelitian ini bertujuan membuktikan sifat kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular melalui pendekatan studi literatur. Langkah penyelesaian diawali dengan membuktikan sifat-sifat barisan, meliputi ketunggalan nilai limit menggunakan metode kontradiksi dan karakterisasi barisan Cauchy melalui norma pada cone normal. Selanjutnya, kelengkapan ruang metrik cone rectangular (X, d_{cr}) dibuktikan dengan membuktikan barisan Cauchy pada ruang tersebut konvergen.

ABSTRACT

Rahmawati, Agustia Ayu. 2026. **The Completeness Property in Rectangular Cone Metric Spaces**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor I: Dr. Hairur Rahman, M.Si.; Advisor II: Juhari, M.Si.

Keywords: Rectangular Cone Metric Space, Completeness, Cauchy Sequence, Normal Cone

Cone rectangular metric spaces are a generalization of cone metric spaces, with the main difference lying in the third axiom, where the triangle inequality is replaced by the rectangular inequality. This study aims to establish the completeness property of cone rectangular metric spaces through a literature review approach. The analysis begins by proving several properties of sequences, including the uniqueness of limits using the method of contradiction and the characterization of Cauchy sequences through the norm induced by a normal cone. Furthermore, the completeness of a cone rectangular metric space (X, d_{cr}) is established by proving that every Cauchy sequence in the space converges.

مسنخلص البحث

رحماواتي, أغوستيا أيو. ٢٠٢٦. خاصية الإكمال في الفضاء المتري المخروطي المستطيل. البحث العلمي. قسم الرياضيات, كليات العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بالانج. المشرف (١) الدكتور. خير الرحمن, الماجستير في العلوم (٢) جوهري, الماجستير في العلوم

الكلمات الأساسية: الفضاء المتري المخروطي المستطيل, الاكمال, متابعة كوشي, المخروط العادي

يُعدّ فضاء المقياس المخروطي المستطيل تعميماً لفضاء المقياس المخروطي, ويكمن الاختلاف الرئيسي في البديهية الناثثة, وهي استبدال متباينة المثلث بمتباينة المستطيل. هدفت هذه الدراسة إلى إثبات خاصية اكتمال فضاء المقياس المخروطي المستطيل من خلال مراجعة الأدبيات. بدأت خطوة الخطوة الحل بإثبات خصائص المتتالية, بما في ذلك تفرد اللقيمة الحدية باستخدام طريقة التناقض, وتوصيف متتالية كوشي من خلال المعيار على المخروط العمودي. بعد ذلك, ثبت اكتمال فضاء المقياس المخروطي المستطيل (X, d_{cr}) بوضع شرطحدّي أدنى للمقياس, اقتضى ثبات متتالية كوشي, مما يثبت تقاربها في هذا الفضاء.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang metrik sebagai salah satu konsep penting dalam analisis fungsional yang telah banyak digunakan dalam teori matematika. Ruang metrik dapat juga dikatakan sebagai pengukur jarak antara dua objek. Dalam kehidupan sehari-hari contoh yang dapat diambil adalah pada pengukuran jarak antara dua orang yang sedang mengantre. Ruang metrik merupakan himpunan yang dilengkapi dengan suatu metrik, yaitu fungsi yang mengukur jarak antar elemen dengan memenuhi aturan-aturan yang ditentukan oleh metrik tersebut. Pasangan (X, d) adalah ruang metrik di mana X merupakan himpunan dan d merupakan metrik pada X , yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in X$. Syarat suatu fungsi d dapat dikatakan sebagai metrik jika memenuhi empat sifat berikut: yang pertama, d bernilai real, berhingga, dan non-negatif, yang kedua menetapkan syarat identitas, di mana $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, yang ketiga memenuhi sifat simetri, di mana $d(x, y) = d(y, x)$, dan kemudian yang ke empat memenuhi sifat ketaksamaan segitiga dengan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Kreyszig, 1978).

Ruang metrik telah banyak dikembangkan oleh peneliti terdahulu, salah satu pengembangan dari konsep ini adalah ruang metrik cone. Pada tahun 2007 Huang dan Zhang memperkenalkan ruang metrik cone dalam penelitiannya, dimana mereka mengembangkan konsep dalam ruang metrik menjadi ruang metrik cone. Ruang metrik cone menggunakan ruang Banach sebagai dasar metriknya dan

memperkenalkan struktur tambahan berupa cone (kerucut). Cone sendiri merupakan salah satu struktur dalam ruang Banach yang memenuhi syarat-syarat tertentu untuk mengatur konsep jarak dan limit dalam suatu ruang . Kemudian pada tahun 2009, Azam dkk. memperkenalkan konsep ruang metrik cone rectangular dan beberapa titik tetap di dalamnya. Ruang metrik cone rectangular merupakan generalisasi lanjutan dari ruang metrik cone. Namun dalam penelitian tersebut para peneliti mengubah ketaksamaan segitiga menjadi ketaksamaan rectangular (Azam dkk., 2009).

Kelengkapan merupakan salah satu syarat utama dalam pembuktian teorema titik tetap di ruang metrik, ruang metrik cone, maupun ruang metrik cone rectangular. Suatu ruang dapat dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di ruang tersebut konvergen ke limit di dalamnya. Berdasarkan pada hal tersebut penulis ingin mempelajari kelengkapan dalam ruang metrik cone rectangular. Dengan pendekatan ini, diharapkan penelitian ini dapat memberikan pemahaman lebih lanjut mengenai struktur ruang metrik cone rectangular dalam matematika.

Kajian tentang pengembangan ilmu matematika terus dilakukan oleh para peneliti untuk mendapatkan penemuan-penemuan baru serta untuk membuktikan kebenaran dari pernyataan yang didapatkan. Sebelum melakukan pengembangan perlu diketahui konsep dasar dari apa yang akan diteliti. Seperti yang dijelaskan dalam Q.S. Ali-Imron: 189-191 (Kemenag, 2022).

Artinya: *“Milik Allahlah kerajaan langit dan bumi. Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), “Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Maha Suci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka””* (Q.S. Ali-Imron: 189-191).

Ayat di atas sering dikaitkan dengan pengembangan ilmu pengetahuan, terutama dalam mendorong manusia untuk merenungkan dan menggali ilmu dari alam semesta. Dalam ayat tersebut mendorong manusia untuk memahami alam, fenomena di langit dan bumi, serta hukum-hukum yang mengatur alam semesta, yang kemudian menjadi dasar dalam pengembangan ilmu pengetahuan modern. Manusia memiliki kewajiban untuk memperdalam ilmu guna mencari dan membuktikan kebenaran. Hal ini di dasarkan pada anugerah kecerdasan dan akal yang dimiliki secara sempurna. Dengan mendalami ilmu, manusia dapat mencapai hakikat dari apa yang dicari. Selain itu, penting untuk membagikan ilmu kepada sesama agar pengetahuan tersebut dapat terus berkembang dan memberikan manfaat yang lebih luas bagi kehidupan. Ayat ini juga menginspirasi para ilmuwan muslim untuk meneliti dan mencari hikmah dari penciptaan alam.

Pengembangan ilmu pengetahuan memerlukan pemahaman mendalam tentang dasar-dasar ilmu tersebut. Seperti dalam ilmu matematika dasar-dasar seperti logika, konsep bilangan, fungsi, ruang, dan struktur merupakan pondasi penting yang digunakan untuk mengembangkan teori-teori baru. Pemahaman yang kuat tentang dasar-dasar ini memungkinkan ilmuwan untuk menganalisis, merumuskan, dan memperluas konsep-konsep yang lebih kompleks, seperti dalam bidang geometri, analisis, atau topologi. Sehingga pengetahuan dasar menjadi pondasi untuk membangun dan menerapkan matematika dalam ilmu pengetahuan lain.

Alam semesta diciptakan oleh Sang Pencipta dengan hukum-hukum dan aturan dasar yang presisi, menciptakan sebuah keteraturan dan keseimbangan. Dalam matematika, keteraturan ini tergambarkan melalui konsep kelengkapan, di

mana setiap barisan Cauchy pasti memiliki limit dan tujuan akhir yang tetap di dalam ruangnya. Melalui penelitian ini penulis ingin mempelajari kelengkapan tersebut sebagai representasi matematis dari kesempurnaan rancangan Sang Pencipta. Diharapkan dapat menjadi dasar bagi pengembangan yang lebih luas.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana pembuktian sifat kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular dan ketunggalan titik limit pada ruang metrik cone rectangular yang lengkap?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan paparan latar belakang dan rumusan masalah di atas, tujuan pada penelitian ini adalah untuk membuktikan sifat kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular dan ketunggalan titik limit pada ruang metrik cone rectangular yang lengkap.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih baik mengenai konsep ruang metrik cone rectangular serta memberikan gambaran mengenai bagaimana kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular. Selain itu, diharapkan penelitian ini dapat memberi tambahan ilmu dan wawasan untuk penelitian yang lebih lanjut lainnya.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini topik yang dibahas adalah tentang kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular. Sehingga pembahasan ini hanya akan menjelaskan

beberapa definisi yang berkaitan dengan cone, ruang metrik cone, dan juga ruang metrik cone rectangular.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Sebelum masuk pada pembahasan mengenai kelengkapan ruang metrik cone rectangular, perlu dipahami terlebih dahulu konsep-konsep dasar yang membangun struktur ruang tersebut.

2.1.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1 (Ruang Metrik) (Kreyszig, 1978)

Ruang metrik merupakan pasangan (X, d) , di mana X merupakan himpunan tak kosong dan d merupakan suatu metrik pada X , yaitu fungsi jarak yang terdefinisi pada $X \times X$, untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi:

(M1) d bernilai real, berhingga, dan non-negatif.

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri).

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

Contoh 2.2

Misalkan $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan bilangan rasional dengan fungsi $d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$ adalah metrik pada $\mathbb{Q}$, sehingga $(\mathbb{Q}, d)$ adalah ruang metrik.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$, maka $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

Jadi, $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

2. Akan ditunjukkan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $d(x, y) = 0$ maka $x = y$

Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$d(x, y) = |x - y| = 0 \text{ maka } x = y$$

($\Rightarrow$) Jika $x = y$ maka $d(x, y) = 0$

Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$, dengan $x = y$, maka

$$d(x, y) = |x - y| = 0$$

Jadi, $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

3. Akan ditunjukkan $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$, maka:

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

Jadi, $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$.

4. Akan ditunjukkan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Ambil $x, y, z \in \mathbb{Q}$, maka:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Jadi, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Dengan demikian, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Q}, d)$ adalah ruang metrik.

2.1.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma X merupakan ruang vektor yang dilengkapi fungsi $\|\cdot\|$ bernilai real atau kompleks, sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$, norma dari x dituliskan sebagai $\|x\|$. Berikut adalah definisi norma dan sifat-sifatnya.

Definisi 2.3 (Ruang Bernorma) (Kreyszig, 1978)

Misalkan X merupakan ruang vektor atas lapangan himpunan bilangan real. Fungsi $\|\cdot\|$ dari X ke $\mathbb{R}$ disebut sebagai norma pada X apabila untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai skalar memenuhi:

1. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$,
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap $x \in X$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y, z \in X$, (ketaksamaan segitiga).

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ yang disebut sebagai ruang bernorma.

Contoh 2.4

Buktikan bahwa Ruang Euclid $(\mathbb{R}^n, \|d\|)$ adalah Ruang Bernorma dengan norm yang didefinisikan:

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|d_1|^2 + \dots + |d_n|^2}$$

Bukti.

Diambil sembarang $d, e \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ dan $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Akan dibuktikan bahwa $\|d\|$ memenuhi empat aksioma norm.

1. $\|x\| \geq 0$

Didefinisikan $\|d\| = (\sum_{i=1}^n |d_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, di mana

$$\|d\| = |d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_n|^2$$

Karena $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{R}$. Maka:

$d_i \geq 0, \forall i, |d_i|^2 \geq 0$ dan $(\sum_{i=1}^n |d_i|^2) \geq 0$, sehingga

$$\left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right) \geq 0, \forall i.$$

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\Rightarrow$) Diketahui $\|d\| = 0$, akan dibuktikan $d = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\text{dikuadratkan})$$

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right) = 0$$

$$|d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_n|^2 = 0$$

Untuk $|d_i|^2 \geq 0, \forall i$ jika dan hanya jika $|d_i|^2 > 0, \forall i$ atau $|d_i|^2 = 0, \forall i$.

Andaikan $|d_i|^2 > 0, \forall i$ yang mengakibatkan penjumlahan dari sigmanya bernilai positif.

Perhatikan bahwa $|d_i|^2 = 0, \forall i$ memenuhi $d_i = 0, \forall i$.

($\Leftarrow$) Diketahui $d_i = 0, \forall i$. Akan dibuktikan $\|d\| = 0$

Perhatikan bahwa

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n |0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|d\| = \left(\sum_{i=1}^n 0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|d\| = (0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|d\| = 0$$

$$3. \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \|\alpha d\| &= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\alpha d_1|^2 + |\alpha d_2|^2 + \dots + |\alpha d_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\alpha|^2 |d_1|^2 + |\alpha|^2 |d_2|^2 + \dots + |\alpha|^2 |d_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((|\alpha|^2)(|d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_n|^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} (|d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| (|d_1|^2 + |d_2|^2 + \dots + |d_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \|d\| \end{aligned}$$

$$4. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y, z \in X$$

Perhatikan bahwa:

$$\|d + e\| = \left(\sum_{i=1}^n |d_i + e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (1)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan minkowski,

$$\left(\sum_{i=1}^n |d_i + e_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |e_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk $p = 2$ maka (1) berlaku

$$\left(\sum_{i=1}^n |d_i + e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |d_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n |e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|d + e\| \leq \|d\| + \|e\|$$

Dengan demikian, maka $\|d\|$ merupakan norm pada $\mathbb{R}^n$ dan $(\mathbb{R}^n, \|d\|)$ merupakan ruang bernorma. ■

2.1.3 Ruang Banach

Pada subbab ini akan dibahas tentang ruang Banach, di mana ruang ini berkaitan dengan barisan konvergen dan barisan Cauchy pada norma. Berikut akan diberikan definisi barisan konvergen dan Cauchy, karena kedua konsep ini sangat penting untuk mendefinisikan sifat kelengkapan pada suatu ruang bernorma.

Definisi 2.5 Barisan Konvergen (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke suatu $x \in X$, apabila untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_\varepsilon$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Definisi 2.6 Titik limit (Kreyszig, 1978)

Misalkan barisan (x_n) di ruang bernorma X adalah barisan konvergen, maka ada $x \in X$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dalam hal ini akan dinotasikan dengan $x_n \rightarrow x$ dan x disebut limit pada (x_n) .

Definisi 2.7 Barisan Cauchy (Mutaqin, 2008)

Barisan (x_n) di X dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_\varepsilon$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definisi 2.8 Ruang Bernorma Lengkap (Mutaqin, 2008)

Ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ dapat disebut sebagai ruang yang lengkap yaitu ruang Banach apabila untuk setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu elemen di X .

2.1.4 Cone

Definisi 2.9 Cone (Bahtiar dkk., 2014)

Misalkan E adalah ruang Banach real dan himpunan $P \subseteq E$ dengan $P \neq \emptyset$. P disebut cone apabila memenuhi:

1. P himpunan tertutup, tak kosong, dan $P \neq \{0\}$,
2. Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$ dan $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$,
3. Jika $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = 0$.

Contoh 2.10

Misalkan himpunan $Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Himpunan Q adalah cone.

1. Jelas bahwa $Q \neq \{0\}$ dan $Q \neq \emptyset$, sebab $Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Selain itu, Q merupakan himpunan tertutup karena memuat semua titik limitnya.
2. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$, dan $x, y \in Q$ sehingga $x, y \geq 0$ jelas bahwa $ax \geq 0$ dan $by \geq 0$ sedemikian sehingga $ax + by \geq 0$. Jadi dapat disimpulkan $ax + by \in Q$.
3. Ambil sebarang $x \in Q$ dan $-x \in Q$, karena $Q = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ sehingga hanya $0 \in Q$ yang memenuhi $-x \in Q$ oleh karena itu $-x = 0$ sama artinya dengan $x = 0$.

Dengan demikian, terbukti bahwa himpunan Q adalah cone.

Definisi 2.11 Persekitaran- ε (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan titik $\varepsilon > 0$ dan $a \in M$ dengan $M \subseteq X$. Persekitaran- ε dari a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid |x - a| < \varepsilon\}$.

Definisi 2.12 Interior (Maharani, 2025)

x_0 disebut sebagai titik interior dari himpunan $M \subseteq X$ apabila M adalah persekitaran dari x_0 . Interior M disimbolkan dengan $IntM$ adalah himpunan semua titik interior M .

Definisi 2.13 Relasi Urutan Cone (Bahtiar dkk., 2014)

Untuk sebarang cone $P \subseteq E$ dengan E merupakan ruang Banach real, berlaku relasi urutan sebagai berikut.

1. $y - x \in P$ jika dan hanya jika $x \leq y$, untuk setiap $x, y \in E$.
2. $y - x \in P$ jika dan hanya jika $x < y$ tetapi $y \neq x$, untuk setiap $x, y \in E$.
3. $y - x \in IntP$ jika dan hanya jika $x \ll y$.

Definisi 2.14 Cone Normal (Setiawan dkk., 2020)

Himpunan P dikatakan cone normal apabila terdapat bilangan $K > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in E$, dengan $0 \leq x \leq y$ berlaku

$$\|x\| \leq K\|y\|.$$

Selanjutnya bilangan positif K disebut konstanta normal dari P .

Contoh 2.15

Diberikan $A = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\}$. Himpunan A adalah cone normal dengan konstanta normal $K = 1$. Pertama, akan ditunjukkan himpunan A adalah cone.

1. Jelas $A \neq \emptyset$, dan $A \neq \{0\}$, karena

$$A = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\}$$

Selanjutnya, jelas A tertutup, karena A memuat semua titik limitnya.

2. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$, dan $x', y' \in A$ dengan $x' = (x_1, y_1)$ dan $y' = (x_2, y_2)$ sehingga

$$\begin{aligned} ax' + by' &= a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) \\ &= (ax_1, ay_1) + (bx_2, by_2) \\ &= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2). \end{aligned}$$

Karena $ax_1 + bx_2 \geq 0$ dan $ay_1 + by_2 \geq 0$ maka $ax' + by' \in A$.

3. Ambil sembarang $x' \in A$, dengan $x' = (x_1, y_1)$, dan $-x' \in A$ dengan $-x' = -1(x_1, y_1) = (-x_1, -y_1)$ menurut definisi dari A hanya $(0,0)$ yang memenuhi $-x = (-x_1, -y_1)$ oleh karena itu $(-x_1, -y_1) = (0,0)$ sama artinya dengan $-x' = 0$ sehingga $x' = 0$.

Berdasarkan pembuktian di atas terbukti bahwa A adalah cone. Kemudian akan ditunjukkan cone A adalah normal. Ambil sembarang $a, b \in P$, misalkan $a = (a_1, b_1)$ dan $b = (a_2, b_2)$ dengan $a_1, b_1, a_2, b_2 \geq 0$. Selanjutnya untuk $0 \leq a \leq b$, akan dibuktikan ada $K > 0$ sedemikian hingga $\|a\| < K\|b\|$.

Diberikan norma pada $\mathbb{R}^2$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ berlaku

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Untuk $0 \leq a \leq b$,

$$b - a \in A \Leftrightarrow (a_2, b_2) - (a_1, b_1) = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) \in A$$

berarti

$$a_2 - a_1 \geq 0 \Leftrightarrow a_2 \geq a_1$$

dan

$$b_2 - b_1 \geq 0 \Leftrightarrow b_2 \geq b_1.$$

Akan ditunjukkan $\|a\| \leq \|b\|$. Perhatikan bahwa

$$\|a\| = \|(a_1, b_1)\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

dan

$$\|b\| = \|(a_2, b_2)\| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Karena $a_2 \geq a_1$ dan $b_2 \geq b_1$ sehingga $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ berarti $\|a\| \leq \|b\|$. Jadi terbukti bahwa himpunan A adalah cone normal.

2.1.5 Ruang Metrik Cone

Pada bagian ini akan dijelaskan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik cone rectangular.

Definisi 2.16 Ruang Metrik Cone

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong. Definisikan fungsi, yaitu $d_c: X \times X \rightarrow E$, di mana untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi:

(MC1) $d_c(x, y) \geq \theta$ dan $d_c(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$, di mana θ merupakan suatu vector bernilai 0.

(MC2) $d_c(x, y) = d_c(y, x)$ (simetri).

(MC3) $d_c(x, y) \leq d_c(x, z) + d_c(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

Fungsi d_c disebut metrik cone pada X dan pasangan (X, d_c) disebut ruang metrik cone.

Contoh 2.17

Diberikan $F = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in F: x, y \geq 0\}$, dan $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan $d_c: X \times X \rightarrow F$ dengan $d_c(x, y) = \{|x - y|, \alpha|x - y|\}$ dengan $\alpha \geq 0$ akan ditunjukkan (X, d_c) adalah ruang metrik cone.

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$,

1. $d_c(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$, karena $|x - y| \geq 0$ dan $\alpha|x - y| \geq 0$ sehingga $d_c(x, y) = \theta \in P$ sama artinya dengan $\theta \leq d_c(x, y)$

$$d_c(x, y) = \theta \Leftrightarrow (|x - y|, \alpha|x - y|) = \theta \Leftrightarrow |x - y| = \theta$$

dan

$$d_c(x, y) = \theta \Leftrightarrow (|x - y|, \alpha|x - y|) = \theta \Leftrightarrow |x - y| = \theta.$$

2. $|x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x|$ selanjutnya

$$d_c(|x - y|, \alpha|x - y|) = (|x - y|, \alpha|y - x|) = d_c(y, x).$$

Jadi terbukti $d_c(x, y) = d_c(y, x)$

3. Akan dibuktikan $d_c(x, y) \leq d_c(x, z) + d_c(z, y)$, menurut definisi

$$d_c(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|),$$

$$d_c(x, z) = (|x - z|, \alpha|x - z|),$$

$$d_c(z, y) = (|z - y|, \alpha|z - y|),$$

maka

$$d_c(x, z) + d_c(z, y) = (|x - z|, \alpha|x - z|) + (|z - y|, \alpha|z - y|)$$

$$= (|x - z| + |z - y|, \alpha|x - z| + \alpha|z - y|)$$

$$= [|x - z| + |z - y|, \alpha(|x - z| + |z - y|)]$$

$$d_c(x, z) + d_c(z, y) - d_c(x, y)$$

$$= [|x - z| + |z - y|, \alpha(|x - z| + |z - y|)]$$

$$- (|x - y|, \alpha|x - y|)$$

$$= [|x - z| + |z - y| - |x - y|, \alpha(|x - z| + |z - y| - |x - y|)]$$

$$- \alpha|x - y|]$$

$$= [|x - z| + |z - y|$$

$$- |x - y|, \alpha(|x - z| + |z - y| - |x - y|)].$$

Akan dibuktikan $(|x - z| + |z - y| - |x - y|) \geq 0$

$$|x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|,$$

Sehingga $|x - z| + |z - y| \geq |x - y|$ jika dan hanya jika $(|x - z| + |z - y| - |x - y|) \geq 0$ sehingga

$$\alpha(|x - z| + |z - y|) - |x - y| \geq 0$$

Dengan $\alpha \geq 0$ sehingga

$$d_c(x, z) + d_c(z, y) - d_c(x, y) \in P.$$

Oleh karena itu

$$d_c(x, y) \leq d_c(x, z) + d_c(z, y)$$

Jadi pasangan (X, d_c) adalah ruang metrik cone (Bahtiar dkk., 2014).

2.1.6 Ruang Metrik Cone Rectangular

Pada penelitiannya, Azam dkk. (2009) mengembangkan ruang metrik cone menjadi ruang metrik cone rectangular. Pada penulisannya, E melambangkan ruang Banach real, dan P adalah cone.

Definisi 2.18 Ruang Metrik Cone Rectangular

Misalkan X suatu himpunan tak kosong dan $d_{cr}: X \times X \rightarrow E$ adalah fungsi yang memenuhi bahwa untuk semua $x, y \in X$ berlaku:

$$(MCR1) \quad d_{cr}(x, y) \geq \theta \text{ dan } d_{cr}(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y.$$

$$(MCR2) \quad d_{cr}(x, y) = d_{cr}(y, x) \text{ (simetri).}$$

$$(MCR3) \quad d_{cr}(x, y) \leq d_{cr}(x, z) + d_{cr}(z, w) + d_{cr}(w, y) \text{ untuk semua titik } w, z \in X - \{x, y\} \text{ (ketaksamaan rectangular).}$$

Maka d_{cr} disebut metrik cone rectangular pada X , dan pasangan (X, d_{cr}) disebut ruang metrik cone rectangular.

2.2 Kajian Integrasi Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Ruang metrik cone rectangular adalah konsep matematis yang memberikan struktur jarak dan keterhubungan antara titik-titik dalam ruangnya. Struktur tersebut memperluas konsep ruang metrik dengan memperkenalkan nilai-nilai metrik. Cone ini memberikan kerangka untuk mengukur jarak dalam sistematis yang lebih kompleks. Salah satu aplikasi penting dari ruang metrik adalah dalam memodelkan sistem dengan keteraturan tertentu, di mana konvergensi menuju titik tetap mencerminkan stabilitas atau kondisi akhir sistem. Keteraturan dalam analisis ruang metrik cone rectangular sejalan dengan kandungan surah Al-Qamar, yang menyatakan bahwa segala sesuatu diciptakan dengan ukuran tertentu. Ayat ini mengajarkan bahwa Allah telah menetapkan hukum-hukum pasti sebagai dasar keberadaan dan dinamika alam semesta. Yang di mana arti dari Q.S Al-Qamar: 49 adalah sebagai berikut (Kemenag, 2022).

“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”(Q.S. Al-Qamar: 49).

Kandungan ayat ini juga menekankan bahwa manusia harus memahami dan menerima ketetapan Allah sambil tetap berusaha menjalankan perannya dalam kehidupan. Dalam konteks matematika, ini tercermin dalam usaha manusia menggunakan alat analisis untuk memahami dan mengoptimalkan fenomena alam, seperti perilaku energi atau sistem kompleks lainnya. Dengan demikian, ayat ini tidak hanya menguatkan keimanan pada qadha dan qadar, tetapi juga menghubungkan antara keteraturan matematika dan kebesaran ciptaan Allah. Melalui pemahaman ini, manusia dapat melihat hubungan yang harmonis antara ilmu pengetahuan dan keimanan sebagai bagian dari penghayatan terhadap hukum-hukum Allah di alam semesta.

Dalam konteks ilmu pengetahuan, ayat ini mendorong penghargaan terhadap ilmu seperti astronomi dan matematika, yang dapat membantu memahami pola keteraturan benda langit. Dalam penelitian ruang metrik cone rectangular, keteraturan orbit benda langit menjadi analogi struktur matematis di mana jarak antar elemen diatur dengan prinsip tertentu, seperti simetri dan ketaksamaan persegi panjang. Harmoni antar elemen dalam ruang ini mencerminkan harmoni alam sebagaimana dijelaskan dalam ayat tersebut. Pola pergerakan benda langit juga menggambarkan kekonvergenan, di mana barisan elemen mendekati limit tertentu, serupa dengan fase bulan yang berulang menuju pola tertentu. Konsep ini relevan untuk memodelkan fenomena alami seperti stabilitas orbit. Orbit matahari dan bulan dapat dianggap sebagai titik tetap dinamis yang menjaga keharmonisan sistem. Penelitian yang mengaitkan ayat ini dengan ruang metrik cone memberikan kontribusi filosofis dan ilmiah dengan mengintegrasikan nilai spiritual dan konsep matematis, menunjukkan bahwa struktur matematika adalah refleksi dari keteraturan ilahiah. Dengan demikian, ayat ini tidak hanya memberikan pandangan spiritual tetapi juga mendorong pengembangan ilmu pengetahuan sebagai sarana memahami kebesaran Allah. Penelitian ini memperkaya pendekatan interdisipliner, menjembatani nilai agama dan ilmu eksakta dalam satu kerangka yang saling melengkapi.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi terkait dengan topik penelitian yang akan dibahas.

Definisi 2.19 Ruang Metrik Cone Rectangular Konvergen (Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular, (x_n) merupakan barisan pada (X, d_{cr}) dan $x \in (X, d_{cr})$. Untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n > n_0$,

$$d_{cr}(x_n, x) \ll c.$$

Sehingga barisan (x_n) konvergen ke x dan x adalah limit dari (x_n) .

Definisi 2.20 Ruang Metrik Cone Rectangular barisan Cauchy (Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) adalah ruang metrik cone rectangular dan (x_n) adalah barisan pada (X, d_{cr}) . Untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n > n_0$,

$$d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c.$$

Sehingga barisan (x_n) disebut barisan Cauchy pada (X, d_{cr}) .

Definisi 2.21 Ruang Metrik Cone Rectangular Lengkap

Apabila setiap barisan Cauchy konvergen di (X, d_{cr}) , maka (X, d_{cr}) dapat dikatakan sebagai ruang metrik cone rectangular yang lengkap.

Selanjutnya definisi tersebut akan digunakan dalam penelitian ini untuk membuktikan beberapa teorema dan lemma berikut.

Lemma 2.22 Ketunggalan Limit pada Ruang Metrik Cone Rectangular (Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan (x_n) merupakan barisan di X . Jika (x_n) merupakan barisan Cauchy dan barisan konvergen, maka limit dari (x_n) bernilai tunggal.

Lemma 2.23 Cone Normal pada Ruang Metrik Cone Rectangular (Jleli & Samet, 2009)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan P merupakan cone normal. Misalkan (x_n) adalah sebuah barisan di X , maka $x_n \rightarrow x$ ketika $n \rightarrow \infty$ jika dan hanya jika $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$ ketika $n \rightarrow \infty$.

Lemma 2.24 Barisan Cauchy di Ruang Metrik Cone Rectangular (Jleli & Samet, 2009)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan P merupakan cone normal. Misalkan (x_n) adalah suatu barisan di X . Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika

$$d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$$

ketika $n, m \rightarrow \infty$.

Teorema 2.25 (Setiawan dkk., 2020)

Jika (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular, maka setiap barisan Cauchy di (X, d_{cr}) memiliki nilai limit yang tunggal.

Teorema 2.26 Ruang Metrik Cone Rectangular Lengkap (Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan E merupakan ruang Banach. Jika ada $c' \in E$ dengan $0 \ll c'$ yang memenuhi $c' \ll d_{cr}(x, y)$ untuk setiap titik $x, y \in X$, maka (X, d_{cr}) lengkap.

Teorema 2.27 (Jleli & Samet, 2009)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular yang lengkap dan P merupakan cone normal dengan konstanta normal $K > 0$. Misalkan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X dan terdapat n_0 sehingga

1. $x_n \neq x_m$ untuk semua $n, m > n_0$,
2. x_n, x merupakan suatu titik di X untuk semua $n > n_0$,
3. x_n, y merupakan suatu titik di X untuk semua $n > n_0$,
4. $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$ ketika $n \rightarrow \infty$,

Maka $x = y$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kualitatif. Metode kualitatif merupakan pendekatan yang melibatkan studi pustaka melalui pengumpulan informasi yang relevan dengan topik penelitian. proses ini mencakup pengumpulan bahan seperti buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang mendukung, sehingga informasi yang diperoleh menjadi lebih lengkap.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum melakukan penelitian langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan sumber bacaan seperti jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan terkait dengan topik sebagai acuan penelitian.
2. Menentukan rumusan masalah, tujuan penelitian, serta manfaat penelitian.
3. Membuat latar belakang serta mempelajari materi terkait topik penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian adalah sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi ruang metrik cone rectangular sebagai objek penelitian.
2. Mengumpulkan dan menganalisis teori pendukung yang berhubungan dengan penelitian.
3. Membuktikan sifat-sifat barisan di ruang metrik cone rectangular.
4. Membuktikan ketunggalan nilai limit barisan Cauchy di ruang metrik cone rectangular.

5. Membuktikan ruang metrik cone rectangular bersifat lengkap.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat Barisan di Ruang Metrik Cone Rectangular

Sebelum membuktikan sifat kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular, akan dibuktikan terlebih dahulu lemma mengenai ketunggalan nilai limit pada ruang metrik cone rectangular, sebagaimana dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 4.1 Ketunggalan Limit pada Ruang Metrik Cone Rectangular

(Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan (x_n) merupakan barisan di X . Jika (x_n) merupakan barisan Cauchy dan barisan konvergen, maka limit dari (x_n) bernilai tunggal.

Bukti.

Misalkan (x_n) adalah barisan konvergen dan barisan Cauchy di X . Kemudian, asumsikan bahwa barisan (x_n) memiliki dua limit, yaitu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$. Akan ditunjukkan bahwa $x = y$.

Karena (x_n) konvergen ke x , maka berdasarkan Definisi 2.19, ambil sebarang $c \in E$ dengan $\theta \ll c$. Karena (x_n) konvergen ke x , maka terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > n_1$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x) \ll \frac{c}{3}.$$

Selanjutnya, karena (x_n) konvergen ke y , dengan cara yang serupa, ambil sebarang $c \in E$ dengan $\theta \ll c$. Karena (x_n) konvergen ke x , maka terdapat $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > n_2$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, y) \ll \frac{c}{3}.$$

Lalu, karena (x_n) merupakan barisan Cauchy, berdasarkan Definisi 2.20, maka terdapat $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > n_3$ berlaku

$$d_{cr}(x_m, x_n) \ll \frac{c}{3}.$$

Pilih $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, di mana n_1 berkaitan dengan kekonvergenan ke x , n_2 berkaitan dengan kekonvergenan ke y , dan n_3 berkaitan dengan barisan Cauchy.

Dengan menggunakan aksioma ketiga pada Definisi 2.18, diperoleh

$$d_{cr}(x, y) \leq d_{cr}(x, x_n) + d_{cr}(x_n, x_{n+1}) + d_{cr}(x_{n+1}, y) \ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c.$$

Jadi, untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$d_{cr}(x, y) \ll c.$$

Karena $c \in E$ dengan $\theta \ll c$ dipilih secara sebarang, maka berdasarkan sifat cone pada ruang Banach, harus berlaku

$$d_{cr}(x, y) = \theta.$$

Hal ini berarti $x = y$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa limit dari barisan (x_n) bernilai tunggal. ■

Pada Lemma 4.1 telah menunjukkan bahwa nilai limit barisan Cauchy dan barisan konvergen bersifat tunggal. Selanjutnya, dengan menambahkan syarat bahwa P merupakan cone normal, konvergensi barisan dapat dikarakterisasi melalui norma sebagaimana yang dinyatakan pada lemma berikut.

Lemma 4.2 Cone Normal pada Ruang Metrik Cone Rectangular

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular, dan P merupakan cone normal. Misalkan (x_n) sebuah barisan di X . Maka, $x_n \rightarrow x$ ketika $n \rightarrow \infty$ jika dan hanya jika

$$\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$$

ketika $n \rightarrow \infty$.

Bukti.

Lemma 4.2 akan dibuktikan dalam dua arah.

($\Rightarrow$) Jika $x_n \rightarrow x$, maka $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$ ketika $n \rightarrow \infty$ dengan menggunakan Definisi 2.5. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena P merupakan cone, maka $\text{int}(P) \neq \emptyset$, sehingga terdapat $e \in \text{int}(P)$. Tanpa mengurangi keumuman, e dinormalisasi sedemikian sehingga $\|e\| = 1$.

Pilih $c = \frac{\varepsilon}{K}e$. Karena $\text{int}(P)$ tertutup terhadap perkalian skalar positif dan $\frac{\varepsilon}{K} > 0$, maka $c \in \text{int}(P)$, yang berarti $\theta \ll c$. Selain itu, norma dari c adalah

$$\|c\| = \left\| \frac{\varepsilon}{K} e \right\| = \frac{\varepsilon}{K} \|e\| = \frac{\varepsilon}{K} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{K},$$

sehingga $K\|c\| = \varepsilon$.

Karena $x_n \rightarrow x$, berdasarkan Definisi 2.19, untuk $c = \frac{\varepsilon}{K}e$ dengan $\theta \ll c$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x) \ll c.$$

Berdasarkan Definisi 2.13, karena $d_{cr}(x_n, x) \ll c$ maka

$$c - d_{cr}(x_n, x) \in \text{int}(P) \subset P.$$

Berdasarkan Definisi 2.18 dan Definisi 2.13, didapatkan

$$\theta \leq d_{cr}(x_n, x) \leq c.$$

Karena P merupakan cone normal dengan konstanta $K > 0$, maka dari $\theta \leq d_{cr}(x_n, x) \leq c$ diperoleh

$$\|d_{cr}(x_n, x)\| \leq K\|c\| = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ dipilih secara sembarang dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|d_{cr}(x_n, x)\| \leq \varepsilon$ untuk semua $n \geq n_0$, maka disimpulkan bahwa

$$\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$$

ketika $n \rightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Jika $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$, maka $x_n \rightarrow x$.

Akan ditunjukkan bahwa $x_n \rightarrow x$ dengan menggunakan Definisi 2.19 untuk membuktikannya. Ambil sebarang $c \in E$ dengan $\theta \ll c$, yang berarti $c \in \text{int}(P)$.

Berdasarkan Definisi 2.11, karena $\text{int}(P)$ merupakan himpunan terbuka dalam E , terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$B(c, \delta) = \{y \in E \mid \|y - c\| < \delta\} \subset \text{int}(P).$$

Pilih $\delta' = \frac{\delta}{2}$, sehingga $\delta' > 0$. Karena $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$, untuk $\delta' > 0$ tersebut terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\|d_{cr}(x_n, x)\| < \delta' = \frac{\delta}{2}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $c - d_{cr}(x_n, x) \in \text{int}(P)$ untuk setiap $n \geq n_0$. Ambil sebarang $z \in E$ dengan

$$\|z - (c - d_{cr}(x_n, x))\| < \delta'.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} \|z - c\| &= \|z - (c - d_{cr}(x_n, x)) + d_{cr}(x_n, x)\| \\ &\leq \|z - (c - d_{cr}(x_n, x))\| + \|d_{cr}(x_n, x)\| \\ &< \delta' + \delta' \end{aligned}$$

$$= \delta$$

Jadi $\|z - c\| < \delta$, yang berarti $z \in B(c, \delta) \subset \text{int}(P)$. Kemudian karena setiap z dalam bola $B(c - d_{cr}(x_n, x), \delta')$ memenuhi $z \in \text{int}(P)$, maka

$$B(c - d_{cr}(x_n, x), \delta') \subset \text{int}(P).$$

Hal ini berarti $c - d_{cr}(x_n, x)$ merupakan titik interior dari P , yaitu

$$c - d_{cr}(x_n, x) \in \text{int}(P).$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.13, diperoleh

$$d_{cr}(x_n, x) \ll c.$$

Karena $c \in \text{int}(P)$ dengan $\theta \ll c$ dipilih secara sebarang dan ada $n_0 \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $d_{cr}(x_n, x) \ll c$ untuk semua $n \geq n_0$, maka berdasarkan Definisi 2.19 disimpulkan bahwa $x_n \rightarrow x$ ketika $n \rightarrow \infty$.

Dengan demikian, karena kedua arah telah terbukti, sehingga $x_n \rightarrow x$ jika dan hanya

$$\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$$

ketika $n \rightarrow \infty$. ■

Berdasarkan Lemma 4.2, konvergensi barisan (x_n) ekuivalen dengan $\|d_{cr}(x_n, x)\| \rightarrow 0$. Dengan memperhatikan sifat tersebut dan dengan syarat P cone normal, berikut diberikan karakterisasi barisan Cauchy di ruang metrik cone rectangular.

Lemma 4.3 Barisan Cauchy di Ruang Metrik Cone Rectangular

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular dan P merupakan cone normal. Misalkan (x_n) suatu barisan di X . Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$.

Bukti.

Lemma 4.3 akan dibuktikan dalam dua arah.

($\Rightarrow$) Jika (x_n) barisan Cauchy di (X, d_{cr}) , maka $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$.

Akan ditunjukkan bahwa $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$ dengan menggunakan Definisi 2.5. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena P merupakan cone, maka $\text{int}(P) \neq \emptyset$, sehingga terdapat $e \in \text{int}(P)$. Tanpa mengurangi keumuman, e dinormalisasi sedemikian sehingga $\|e\| = 1$.

Pilih $c = \frac{\varepsilon}{K}e$. Karena $\text{int}(P)$ tertutup terhadap perkalian skalar positif dan $\frac{\varepsilon}{K} > 0$, maka $c \in \text{int}(P)$, yang berarti $\theta \ll c$. Selain itu, norma dari c adalah

$$\|c\| = \left\| \frac{\varepsilon}{K}e \right\| = \frac{\varepsilon}{K} \|e\| = \frac{\varepsilon}{K} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{K},$$

sehingga $K\|c\| = \varepsilon$.

Karena (x_n) adalah barisan Cauchy, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x_m) \ll c.$$

Karena $d_{cr}(x_n, x_m) \ll c$, diperoleh $c - d_{cr}(x_n, x_m) \in P$, yang berarti

$$\theta \leq d_{cr}(x_n, x_m) \leq c.$$

Karena P merupakan cone normal dengan konstanta $K > 0$, diperoleh

$$\|d_{cr}(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ dipilih secara sebarang, dapat disimpulkan bahwa $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Jika $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$, maka (x_n) barisan Cauchy di (X, d_{cr})

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy. Akan digunakan Definisi 2.20 untuk membuktikannya. Ambil sebarang $c \in E$ dengan $\theta \ll c$, artinya $c \in \text{int}(P)$. Berdasarkan Definisi 2.11, karena $\text{int}(P)$ merupakan himpunan terbuka dalam E , terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga

$$B(c, \delta) = \{y \in E \mid \|y - c\| < \delta\} \subset \text{int}(P).$$

Pilih $\delta' = \frac{\delta}{2}$. Karena $\|d_{cr}(x_n, x_m)\| \rightarrow 0$, berdasarkan Definisi 2.5, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku

$$\|d_{cr}(x_n, x_m)\| < \delta' = \frac{\delta}{2}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $c - d_{cr}(x_n, x_m) \in \text{int}(P)$ untuk setiap $n, m \geq n_0$. Ambil sembarang $z \in E$ dengan

$$\|z - (c - d_{cr}(x_n, x_m))\| < \delta'.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} \|z - c\| &= \|z - (c - d_{cr}(x_n, x_m)) + d_{cr}(x_n, x_m)\| \\ &\leq \|z - (c - d_{cr}(x_n, x_m))\| + \|d_{cr}(x_n, x_m)\| \\ &< \delta' + \delta' \\ &= \delta \end{aligned}$$

Jadi $\|z - c\| < \delta$, yang berarti

$$z \in B(c, \delta) \subset \text{int}(P).$$

Karena $B(c - d_{cr}(x_n, x_m), \delta')$ memenuhi $z \in \text{int}(P)$, maka

$$B(c - d_{cr}(x_n, x_m), \delta') \subseteq \text{int}(P).$$

Hal ini berarti $c - d_{cr}(x_n, x_m)$ merupakan titik interior dari P , yaitu

$$c - d_{cr}(x_n, x_m) \in \text{int}(P),$$

atau ekuivalen dengan

$$d_{cr}(x_n, x_m) \ll c.$$

Selanjutnya, karena $c \in \text{int}(P)$ dengan $\theta \ll c$ dipilih secara sebarang dan terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $d_{cr}(x_n, x_m) \ll c$ untuk semua $n, m \geq n_0$, disimpulkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy di (X, d_{cr}) .

Dengan demikian, karena kedua arah terbukti, maka benar bahwa (x_n) dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $d_{cr}(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$. ■

4.2 Kelengkapan Ruang Metrik Cone Rectangular

Berdasarkan sifat-sifat barisan yang telah dibuktikan pada Subbab 4.1, pada subbab ini akan dibuktikan hasil utama penelitian ini, yaitu ketunggalan nilai limit barisan Cauchy dan syarat cukup yang menjamin kelengkapan ruang metrik cone rectangular. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di ruang metrik cone rectangular memiliki nilai limit yang tunggal.

Teorema 4.4 (Setiawan dkk., 2020)

Jika (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular, maka setiap barisan Cauchy di (X, d_{cr}) memiliki nilai limit yang tunggal.

Bukti.

Misalkan (x_n) adalah sembarang barisan Cauchy di (X, d_{cr}) . Akan dibuktikan bahwa (x_n) memiliki limit yang tunggal.

Misalkan (x_n) konvergen ke $x \in X$ dan ke $y \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $x = y$. Karena $x_n \rightarrow x$, untuk setiap $c \gg 0$ terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x) \ll \frac{c}{3}.$$

Karena $x_n \rightarrow y$, untuk setiap $c \gg 0$ terdapat $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_2$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, y) \ll \frac{c}{3}.$$

Karena (x_n) adalah barisan Cauchy, terdapat $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq n_3$ berlaku

$$d_{cr}(x_m, x_n) \ll \frac{c}{3}.$$

Ambil $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Karena x, x_n, x_{n+1}, y adalah titik-titik yang berbeda di X , dengan menerapkan aksioma ketiga dari Definisi 2.18 diperoleh

$$d_{cr}(x, y) \leq d_{cr}(x, x_n) + d_{cr}(x_n, x_{n+1}) + d_{cr}(x_{n+1}, y).$$

Karena $n \geq n_1$, maka

$$d_{cr}(x, x_n) \ll \frac{c}{3}.$$

Karena $n, n+1 \geq n_3$, maka

$$d_{cr}(x_n, x_{n+1}) \ll \frac{c}{3}.$$

Karena $n+1 \geq n_2$, maka

$$d_{cr}(x_{n+1}, y) \ll \frac{c}{3},$$

sehingga

$$d_{cr}(x, y) \ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c.$$

Karena $c \gg 0$ dipilih sembarang, maka berlaku $d_{cr}(x, y) \ll c$ untuk semua $c \gg 0$ sehingga $d_{cr}(x, y) = 0$ dan berdasarkan aksioma metrik cone rectangular, diperoleh $x = y$. Dengan demikian, setiap barisan Cauchy di (X, d_{cr}) memiliki limit yang tunggal. ■

Selanjutnya, karena dalam Teorema 4.4 menunjukkan bahwa nilai limit pada barisan Cauchy di ruang metrik cone rectangular nilai limitnya tunggal,

maka diberikan teorema mengenai kelengkapan ruang metrik cone rectangular, yang merupakan hasil utama penelitian ini.

Teorema 4.5 Ruang Metrik Cone Rectangular Lengkap (Setiawan dkk., 2020)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular. Misalkan E merupakan ruang Banach, jika terdapat $c' \in E$ dengan $0 \ll c'$ yang memenuhi $c' \ll d_{cr}(x, y)$ untuk setiap titik $x, y \in X$, maka (X, d_{cr}) pasti lengkap.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy di X konvergen di X . Misalkan (x_n) adalah sebarang barisan Cauchy di X . Berdasarkan Definisi 2.20, untuk setiap $c \in E$ dengan $\theta \ll c$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c,$$

untuk setiap $n > n_0$ dan $m \in \mathbb{N}$.

Pilih $c = c'$. Karena $\theta \ll c'$, maka untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c'.$$

Selanjutnya, misalkan ada $n > n_0$ sedemikian sehingga $x_n \neq x_{n+m}$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Karena x_n dan x_{n+m} adalah titik-titik yang berbeda di X , dari yang diketahui didapatkan

$$c' \ll d_{cr}(x_n, x_{n+m}).$$

Dari $d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c'$ dan $c' \ll d_{cr}(x_n, x_{n+m})$ didapatkan bahwa

$$d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c' \ll d_{cr}(x_n, x_{n+m}),$$

yang merupakan suatu kontradiksi, karena tidak mungkin suatu elemen kurang dari dirinya sendiri. Oleh karena itu, asumsi $x_n \neq x_{n+m}$ tidak berlaku, sehingga $x_n = x_{n+m}$, untuk setiap $n > n_0$ dan $m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) dimulai dari n_0 , yaitu $x_n = x_{n_0+1}$ untuk setiap $n > n_0$. Dengan demikian,

(x_n) konvergen ke $x_{n_0+1} \in X$. Karena (X_n) adalah barisan Cauchy di X dan telah terbukti konvergen di X , maka (X, d_{cr}) adalah ruang metrik cone rectangular yang lengkap. ■

Pada teorema 4.6 terbukti sifat kelengkapan pada ruang metrik cone rectangular. Selanjutnya, diberikan teorema yang menjamin ketunggalan titik limit suatu barisan Cauchy pada ruang metrik cone rectangular yang lengkap dengan cone normal.

Teorema 4.6 (Jleli & Samet, 2009)

Misalkan (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular yang lengkap, P merupakan cone normal dengan konstanta normal $K > 0$. Misalkan (x_n) merupakan barisan Cauchy di X dan terdapat n_0 sehingga

1. $x_n \neq x_m$ untuk semua $n, m > n_0$.
2. x_n, x merupakan suatu titik di X untuk semua $n > n_0$.
3. x_n, y merupakan suatu titik di X untuk semua $n > n_0$.
4. $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$ ketika $n \rightarrow \infty$.

Maka $x = y$.

Bukti.

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $0 \ll c$ dengan E merupakan ruang Banach. Perhatikan bahwa, karena (x_n) adalah barisan Cauchy di (X, d_{cr}) , maka terdapat $v_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > v_1$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x_m) \ll c.$$

Karena $x_n \rightarrow x$, maka terdapat $v_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > v_2$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, x) \ll c.$$

Karena $x_n \rightarrow y$, maka terdapat $v_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > v_3$ berlaku

$$d_{cr}(x_n, y) \ll c.$$

Selanjutnya, ambil

$$v = \max(v_1, v_2, v_3)$$

dan pilih

$$n > m > \max\{n_0, v\}.$$

Berdasarkan kondisi (1) pada Teorema 4.6, diperoleh $x_n \neq x_m$. Karena $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$, sedangkan titik-titik x dan y berbeda $x \neq y$, maka untuk n yang cukup besar berlaku $x_n \neq x$ dan $x_n \neq y$. Dengan demikian, untuk setiap $n, m > \max\{n_0, v\}$, titik-titik x, x_n, x_m, y adalah titik-titik yang berbeda di X . Oleh karena itu, akan digunakan aksioma ketiga pada Definisi 2.18, sehingga diperoleh

$$d_{cr}(x, y) \leq d_{cr}(x, x_n) + d_{cr}(x_n, x_m) + d_{cr}(x_m, y).$$

Karena $d_{cr}(x, x_n) \ll c$, $d_{cr}(x_n, x_m) \ll c$, dan $d_{cr}(x_m, y) \ll c$, maka berlaku

$$\theta \leq d_{cr}(x, y) \leq 3c.$$

Karena P adalah cone normal dengan konstanta normal $K > 0$, dari $\theta \leq d_{cr}(x, y) \leq 3c$ diperoleh

$$\|d_{cr}(x, y)\| \leq k\|3c\| = 3k\|c\|.$$

Karena $c \in E$ dengan $0 \ll c$ dipilih secara sebarang, nilai $\|c\|$ dapat dibuat sekecil mungkin, sehingga

$$\|d_{cr}(x, y)\| = \theta.$$

Akibatnya $d_{cr}(x, y) = \theta$, dan berdasarkan aksioma pada Definisi 2.11, didapatkan $x = y$. Dengan demikian, telah ditunjukkan bahwa $x = y$. ■

4.3 Integrasi Kelengkapan Ruang Metrik Cone Rectangular Berdasarkan Surah Ali-Imron: 189-191

Tanda-tanda kebesaran Allah SWT terlihat dari kekuasaan-Nya atas penciptaan bumi dan langit juga pada fenomena terjadinya siang dan malam. Tanda-tanda ini hanya dapat dipahami oleh para *ulil albab*, yakni orang-orang yang senantiasa mengingat Allah SWT dan merenungkan ciptaan-Nya sebagaimana yang tertulis pada Q.S. Ali-Imron: 189-191 (Kemenag, 2022).

Artinya: *“Milik Allahlah kerajaan langit dan bumi. Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), “Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Maha Suci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka””* (Q.S. Ali-Imron: 189-191).

Pada Q.S. Ali-Imron: 189, Allah SWT menegaskan bahwa Dialah pemilik segala sesuatu dan berkuasa untuk berbuat segala sesuatu sehingga tidak ada siapapun yang dapat melemahkan-Nya (Katsir, 2014). Hukum-hukum alam yang melandasi kebiasaan-kebiasaan (*sunnatullah*), pada hakikatnya ditetapkan dan diatur oleh Allah Yang Maha Hidup lagi Maha Mengelola (*Al-Qayyum*) segala sesuatu (Shihab, 2012). Hakikat ini kemudian ditegaskan pada Q.S. Ali-Imron: 190 dengan salah satu bukti kebenarannya adalah mengajak manusia untuk berpikir karena *“sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi ”*, yaitu pada ciptaan-Nya yang dapat dijangkau oleh indera manusia berupa bintang-bintang, daratan, lautan, gunung-gunung, tumbuhan, binatang, barang tambang, serta berbagai macam warna, makanan, dan bebauan juga *“pergantian malam dan siang”*. Pergantian malam dan siang ini mencakup tiga hal, yaitu saling bergantian dan menyusul, perbedaan durasi panjang-pendek, serta proses keseimbangan.

Terkadang siang lebih pendek dan malam lebih panjang, lalu masing-masing menjadi seimbang. Setelah itu, salah satu mengambil masa dari yang lain, sehingga yang pendek memanjang dan yang panjang (karena diambil) menjadi pendek (Katsir, 2014).

Semua itu merupakan ketetapan Allah SWT, sehingga pada firman-Nya tertulis “*terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi ulil albab*”, yakni orang-orang yang memiliki akal murni (Shihab, 2012). Kata *al-albab* adalah bentuk jamak dari *lubb* yaitu saripati dari sesuatu. *Ulil albab* adalah orang-orang yang akalnya murni dan tidak terhalangi oleh berbagai ide yang mengaburkan (bagaikan kulit yang menutupi), yang dapat menyebabkan kerancuan dalam proses berpikir. Melalui perenungan terhadap fenomena alam semesta, mereka dapat menemukan bukti yang nyata mengenai keesaan dan kekuasaan Allah SWT (Shihab, 2012). Kemudian pada Q.S. Ali-Imron: 191 dijelaskan sebagian ciri-ciri dari yang disebut dengan *ulil albab*. Mereka adalah setiap orang baik laki-laki maupun perempuan yang senantiasa mengingat Allah SWT baik ketika bekerja maupun istirahat, dalam keadaan berdiri, duduk, berbaring, atau bagaimanapun. Mereka kemudian memikirkan tentang penciptaan (yaitu kejadian dan sistem kerja) langit dan bumi, kemudian menyimpulkan dengan berkata “*Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Maha Suci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka*”.

Q.S. Ali-Imron: 189 menegaskan bahwa seluruh kekuasaan atas bumi dan langit adalah milik Allah SWT, di mana dalam matematika hal ini dapat dikaitkan dengan adanya keteraturan dan kepastian pada sifat-sifat yang berlaku di ruang metrik cone rectangular. Kemudian Q.S. Ali-Imron: 190 memberikan dorongan

kepada manusia untuk merenungkan keteraturan alam, seperti pada pergantian malam dan siang, yang sejalan dengan gagasan tentang barisan Cauchy yang teratur menuju limitnya dalam penelitian ini. Sementara itu, pada Q.S. Ali-Imron: 191 menekankan bahwa orang yang berakal tidak pernah menganggap ciptaan Allah SWT sia-sia. Berkaitan dengan hal tersebut, kelengkapan ruang metrik cone rectangular dalam penelitian ini menunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy pasti memiliki limit di dalam ruang tersebut, yang menggambarkan bahwa dalam keteraturan yang diciptakan Allah tidak ada kesia-siaan maupun ketidaksempurnaan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembuktian pada berdasarkan pembuktian Teorema 4.7, terbukti bahwa (X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular yang lengkap. Selanjutnya, pada Teorema 4.8 terbukti ketunggalan titik limit pada ruang metrik cone rectangular yang lengkap.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, topik penelitian tentang ruang metrik cone rectangular ini masih banyak yang belum dibahas, sehingga topik ini dapat dikembangkan lagi dengan mengkaji sifat-sifat lain seperti teorema titik tetap, kontraksi pada ruang metrik cone rectangular lengkap, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Azam, A., Arshad, M., & Beg, I. (2009). Banach contraction principle on cone rectangular metric spaces. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 3(2), 236–241. <https://doi.org/10.2298/AADM0902236A>
- Bahtiar, A. R., Abrori, M., & Malahayati, M. (2014). Konsep Dasar Ruang Metrik Cone. *Jurnal Fourier*, 3(2), 115. <https://doi.org/10.14421/fourier.2014.32.115-129>
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*.
- Jleli, M., & Samet, B. (2009). The Kannan's Fixed Point Theorem In A Cone Rectangular Metric Space. Dalam *J. Nonlinear Sci. Appl* (Vol. 2, Nomor 3). <http://www.tjnsa.com>
- Kemenag. (2022). *Qur'an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/67?from=1&to=30>.
- Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley.
- Maharani, D. (2025). *Penjelajahan Ruang dalam Analisis Fungsional*. UIN Maliki Press.
- Mutaqin, A. (2008). *Ekivalensi Norm-n di Ruang l^p* . Institut Teknologi Bandung.
- Setiawan, S. E., Sunarsini, & Sadjidon. (2020). Completeness and Fixed Point Theorem in Cone Rectangular Metric Spaces. *Journal of Physics: Conference Series*, 1490(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1490/1/012009>

RIWAYAT HIDUP



Agustia Ayu Rahmawati, biasa dipanggil Agustia atau Tia. Lahir di Sampit pada tanggal 15 Agustus 2001. Tinggal di Tamiang Layang, Kabupaten Barito Timur, Provinsi Kalimantan Tengah. Ia merupakan anak ke empat dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Sugeng Santoso dan Ibu Endang Susiani. Penulis menempuh pendidikan mulai dari taman kanak-kanak di TK Kartika Batu dan lulus pada tahun 2007, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 5 Menteng dan lulus pada tahun 2013, kemudian melanjutkan ke sekolah menengah pertama di SMP Negeri 8 Palangka Raya dan lulus pada tahun 2016, kemudian melanjutkan lagi ke sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Tamiang Layang dan lulus pada tahun 2019. Selanjutnya pada tahun 2019 penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Agustia Ayu Rahmawati
NIM : 19610012
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan pada Ruang Metrik Cone Rectangular
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	1 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	31 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal	2.
3.	4 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	15 November 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	20 Januari 2025	Seminar Proposal	5.
6.	21 Januari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	3 Februari 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	4 Februari 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	18 Februari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	9.
10.	20 Februari 2025	ACC Seminar Proposal	10.
11.	27 Februari 2025	Seminar Proposal	11.
12.	6 Maret 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	5 Maret 2026	Konsultasi Bab IV	13.
14.	5 Mei 2026	Konsultasi Bab IV	14.
15.	12 Mei 2026	ACC Seminar Hasil	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	13 Mei 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16. <i>[Signature]</i>
17.	18 Mei 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	17. <i>[Signature]</i>
18.	22 Mei 2026	Seminar Hasil	18. <i>[Signature]</i>
19.	25 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19. <i>[Signature]</i>
20.	10 Juni 2026	ACC Sidang Skripsi	20. <i>[Signature]</i>
21.	17 Juni 2026	ACC Keseluruhan	21. <i>[Signature]</i>

Malang, 17 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrud Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012