

ANALISIS DINAMIK MODEL *GENERAL, SUSCEPTIBLE, EXPOSED, FANATIC* PADA PENYEBARAN PERILAKU FANATISME

SKRIPSI

**OLEH
HASNA MUTIARA PUTRI BUDIMAN
NIM. 220601110076**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

ANALISIS DINAMIK MODEL *GENERAL, SUSCEPTIBLE, EXPOSED, FANATIC* PADA PENYEBARAN PERILAKU FANATISME

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Hasna Mutiara Putri Budiman
NIM. 220601110076**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

ANALISIS DINAMIK MODEL *GENERAL, SUSCEPTIBLE, EXPOSED, FANATIC* PADA PENYEBARAN PERILAKU FANATISME

SKRIPSI

Oleh
Hasna Mutiara Putri Budiman
NIM. 220601110076

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 22 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIPPPK. 19901006 202521 2 056

Dosen Pembimbing II



Dr. Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002



Mengetahui,
Dekan Fakultas Studi Matematika

Dr. Fachrudin Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

ANALISIS DINAMIK MODEL *GENERAL, SUSCEPTIBLE, EXPOSED, FANATIC* PADA PENYEBARAN PERILAKU FANATISME

SKRIPSI

Oleh
Hasna Mutiara Putri Budiman
NIM. 220601110076

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 15 Juni 2026

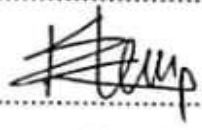
Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji 1 : Juhari, M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji 3 : Dr. Ach. Nashichuddin, M.A


.....

.....

.....

.....



Mengetahui,
Kepala Program Studi Matematika


Dr. Fachrudin Rozi, M.Si

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Hasna Mutiara Putri Budiman
NIM : 220601110076
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* Pada Penyebaran Perilaku Fanatisme

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Hasna Mutiara Putri Budiman
220601110076

MOTO

”Sebab Tuhan telah berjanji, setelah sempit ada kemudahan”

-Bersenja Gurau, Raim Laode-

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirraahim

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa memberikan pertolongan dan kemudahan kepada penulis dalam melewati segala proses penyelesaian skripsi ini.

Dengan penuh rasa syukur, karya ini penulis persembahkan kepada: Kedua orang tua, keluarga dan adik tercinta di surga, yang tidak pernah berhenti memberikan doa, dukungan, kepercayaan, serta kasih sayang tanpa syarat. Terima kasih atas setiap pengorbanan dan kesabaran yang menjadi kekuatan bagi penulis untuk terus melangkah hingga mencapai titik ini.

Sahabat, teman-teman terdekat, dan teman seperjuangan, yang telah hadir dan menjadi bagian dari perjalanan penulis selama masa perkuliahan. Terima kasih atas kebersamaan, perhatian, dukungan, bantuan, serta semangat yang diberikan dalam menghadapi berbagai tantangan hingga karya ini dapat terselesaikan. Setiap cerita, tawa, dan pengalaman yang dibagikan bersama menjadi kenangan berharga serta salah satu kekuatan yang membantu penulis bertahan dan terus berkembang hingga mencapai titik ini.

Untuk diri saya sendiri, terima kasih telah bertahan dan terus melangkah melewati berbagai kesulitan, kehilangan, ketidakpastian, kegagalan, dan kekecewaan. Terima kasih karena tidak menyerah, serta tetap percaya bahwa Allah SWT telah menyiapkan rencana yang jauh lebih indah.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpah Rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyusun skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* Pada Perilaku Fanatisme”. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menjadi pembimbing umat manusia dari masa kegelapan menuju kehidupan yang penuh cahaya melalui ajaran Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu tahapan dalam proses penyelesaian studi untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunan proposal ini, penulis menyadari adanya dukungan, arahan, serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., CAHRM., CRMP, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan pengetahuan, arahan, masukan, serta motivasi dalam penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan pengetahuan, arahan, masukan, serta motivasi dalam penyusunan skripsi ini.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Penguji yang telah memberikan pengetahuan, arahan, masukan, serta motivasi dalam penyusunan skripsi ini.
7. Juhari, M.Si, selaku Anggota Penguji 1 yang telah memberikan pengetahuan, arahan, masukan, serta motivasi dalam penyusunan skripsi ini.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan selama masa perkuliahan.
9. Kedua orang tua dan seluruh keluarga, yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta kasih sayang yang menjadi sumber kekuatan bagi penulis dalam proses penyusunan skripsi ini.
10. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2022, yang telah berjuang bersama selama masa perkuliahan.

Semoga Allah SWT memberikan balasan yang terbaik atas segala bantuan dan kebaikan yang telah diberikan. Penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya apabila masih terdapat banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Adapun kritik dan saran sangat diharapkan oleh penulis agar skripsi ini dapat menjadi lebih baik lagi.

Malang, 15 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	iv
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Persamaan Diferensial	8
2.2 Persamaan Diferensial Non-Linear	8
2.3 Sistem Persamaan Diferensial	9
2.4 Sistem Dinamik	10
2.5 Analisis Dinamik	10
2.5.1 Titik Kesetimbangan	10
2.5.2 Linierisasi	11
2.5.3 Matriks Jacobi	12
2.5.4 Nilai Eigen	12
2.5.5 Bifurkasi	13
2.5.6 Bilangan Reproduksi Dasar	15
2.6 Fanatisme Golongan Menurut Islam	16
2.7 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	20
BAB III METODE PENELITIAN	23
3.1 Jenis Penelitian	23
3.2 Diagram Alir	23
3.3 Tahapan Penelitian	24
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1 Penyusunan Model	25
4.1.1 Mendefinisikan Variabel dari Diagram Kompartemen	25
4.1.2 Penyederhanaan Model Matematis	25
4.2 Analisis Dinamik Model GSEF pada Penyebaran Fanatisme	28
4.2.1 Menentukan Titik Kesetimbangan	29

4.2.2 Menentukan Analisis Kestabilan.....	51
4.2.3 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0^*).....	60
4.3 Simulasi Dinamik Model GSEF pada Penyebaran Fanatisme	63
4.4 Fanatisme Dalam Sudut Pandang Matematika dan Islam.....	67
BAB V KESIMPULAN.....	69
5.1 Kesimpulan	69
5.2 Saran.....	71
DAFTAR PUSTAKA.....	72
LAMPIRAN.....	74
RIWAYAT HIDUP	75

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Definisi Variabel Model GSEF	25
Tabel 4.2 Tabel Kriteria Routh-Hurwitz	54
Tabel 4.3 Hasil Titik Kesetimbangan	62
Tabel 4.4 Nilai Parameter Model SEF	63
Tabel 4.5 Nilai Awal Model SEF	64

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model GSEF	20
Gambar 4.1 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 1	36
Gambar 4.2 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 2	36
Gambar 4.3 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 3	37
Gambar 4.4 Ilustrasi Lemma 3 dan Lemma 4	48
Gambar 4.5 Grafik Dua Cabang Solusi	59
Gambar 4.7 Grafik Penyebaran Fanatisme Ketika $\beta_3 = 0.1$	65
Gambar 4.8 Grafik Perbandingan Penyebaran Fanatisme	65

DAFTAR SIMBOL

- $G(t)$: Populasi individu yang belum menunjukkan kecenderungan perilaku fanatisme pada waktu t
- $S(t)$: Populasi individu yang memiliki ketertarikan terhadap kelompok fanatik pada waktu t
- $E(t)$: Populasi individu yang telah menerima pengaruh dari kelompok fanatik tetapi belum aktif menyebarkan ke luar kelompok pada waktu t
- $F(t)$: Populasi individu yang telah mencapai tingkat fanatisme yang tinggi, aktif dalam kelompok fanatik dan berperan menyebarkan ideologi kepada individu lain pada waktu t
- Λ : Laju pertumbuhan disebabkan oleh kelahiran
- μ : Laju kematian alami
- β_1 : Laju perpindahan individu dari kelompok G ke kelompok S
- β_2 : Laju perpindahan individu dari kelompok S ke kelompok E
- β_3 : Laju perpindahan individu dari kelompok E ke kelompok F
- γ_1 : Laju pemulihan individu dari kelompok S ke kelompok G melalui proses pembinaan dan peningkatan kesadaran
- γ_2 : Laju pemulihan individu dari kelompok E ke kelompok G melalui proses pembinaan dan peningkatan kesadaran
- γ_3 : Laju pemulihan individu dari kelompok F ke kelompok G melalui proses pembinaan dan peningkatan kesadaran
- T : Total populasi
- C : Total populasi yang terpengaruh fanatisme

ABSTRAK

Budiman, Hasna Mutiara Putri. 2026. **Analisis Dinamik Model *General, Susceptible Exposed, Fanatic* pada Perilaku Fanatisme**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Model GSEF, Analisis Dinamik, Titik Keseimbangan, Bifurkasi Mundur, Fanatisme

Penelitian ini membahas analisis dinamik model *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* (GSEF) pada penyebaran perilaku fanatisme. Pada penelitian ini dilakukan analisis dinamik model GSEF untuk mendapatkan gambaran yang valid mengenai dinamika penyebaran fanatisme dalam populasi. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dinamika penyebaran perilaku fanatisme serta menganalisis pengaruh parameter laju penularan terhadap arah dinamika sistem. Tahapan penelitian diawali dengan menentukan titik keseimbangan dan menganalisis kestabilannya menggunakan matriks Jacobi dan kriteria Routh-Hurwitz, kemudian menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik dengan memvariasikan nilai parameter β_3 menggunakan nilai awal yang ditentukan untuk mengetahui ilustrasi dinamika penyebaran fanatisme. Hasil penelitian diperoleh lima titik keseimbangan, yaitu tiga titik keseimbangan bebas fanatisme P_0^* , P_1^* dan P_2^* , serta dua titik keseimbangan endemik P_3^{+*} dan P_3^{-*} . Titik keseimbangan P_1^* bersifat stabil asimtotik ketika $R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$, sedangkan P_2^* bersifat stabil asimtotik ketika $R_2 > 1$, $R_d \geq 1$, dan $R_0 < 1$. Selain itu, ditemukan fenomena bifurkasi mundur pada model yang menunjukkan bahwa menurunkan bilangan reproduksi dasar di bawah satu saja tidak cukup untuk mengeliminasi fanatisme dari populasi, karena kondisi awal populasi dan nilai parameter turut menentukan arah dinamika sistem. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin besar nilai β_3 , sistem semakin cepat konvergen menuju titik keseimbangan endemik dengan proporsi individu fanatik yang lebih tinggi, meskipun dalam jangka panjang ketiga kurva menunjukkan pola penurunan yang sama hingga mendekati nol. Penelitian ini dapat digunakan sebagai upaya untuk menentukan strategi pengendalian penyebaran perilaku fanatisme dalam populasi.

ABSTRACT

Budiman, Hasna Mutiara Putri. 2026. **Dynamic Analysis of the General, Susceptible, Exposed, Fanatic Model of Fanatical Behavior.** Undergraduate. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Fanatic Behavior, GSEF Model, Equilibrium Point, Stability Analysis, Basic Reproduction Number, Backward Bifurcation.

This study discusses the dynamical analysis of the General, Susceptible, Exposed, Fanatic (GSEF) model for the spread of fanatic behavior. In this study, a dynamical analysis of the GSEF model was conducted to obtain a valid representation of the dynamics of fanaticism spread within a population. The objective of this research is to investigate the dynamics of fanatic behavior transmission and to analyze the influence of transmission rate parameters on the direction of the system dynamics. The research procedure begins with determining the equilibrium points and analyzing their stability using the Jacobian matrix and the Routh Hurwitz criterion, followed by the determination of the basic reproduction number using the Next Generation Matrix method. Numerical simulations were then performed by varying the value of parameter β_3 while using predetermined initial values to illustrate the dynamics of fanaticism spread. The results reveal five equilibrium points, consisting of three fanaticism-free equilibrium points, P_0^* , P_1^* , and P_2^* , and two endemic equilibrium points, P_3^{*+} and P_3^{*-} . The equilibrium point P_1^* is asymptotically stable when $R_1 > 1$ and $R_2 < 1$, whereas P_2^* is asymptotically stable when $R_2 > 1$, $R_d \geq 1$, and $R_0 < 1$. Furthermore, a backward bifurcation phenomenon was identified in the model, indicating that reducing the basic reproduction number below one alone is insufficient to eliminate fanaticism from the population, since the initial population conditions and parameter values also determine the direction of the system dynamics. The numerical simulation results show that larger values of β_3 cause the system to converge more rapidly toward the endemic equilibrium point with a higher proportion of fanatic individuals, although in the long term all three curves exhibit the same declining pattern and approach zero. This study may serve as a basis for developing strategies to control the spread of fanatic behavior within a population.

مستخلص البحث

بوديمان، حسنى موتيارا بوتري. ٢٠٢٦. تحليل الديناميكي لنموذج «العام، القابل للتأثر، المعرض، المتعصب» في سلوك المتعصب. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ملانج. المشرفان (١) الدكتورة هيني ويداياني، الماجستير في العلوم. (٢) الدكتور أحمد نا صح الدين، ماجستير في التربية.

الكلمات المفتاحية: نموذج $GSEF$ ، التحليل الديناميكي، نقطة التوازن، التفرع العكسي، التعصب

تتناول هذه الدراسة التحليل الديناميكي لنموذج النموذج العام، القابل، المكشوف، والمتعصب ($GSEF$) لانتشار السلوك المتعصب. في هذه الدراسة، تم إجراء تحليل ديناميكي لنموذج $GSEF$ للحصول على صورة صحيحة لديناميكيات انتشار التعصب في السكان. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد ديناميكيات انتشار السلوك المتعصب وتحليل تأثير معلمات معدل النقل على اتجاه ديناميكيات النظام. بدأت مرحلة البحث بتحديد نقطة التوازن وتحليل استقرارها باستخدام مصفوفة جاكوبي ومعايير روث-هورويتز، ثم تحديد العدد التناسلي الأساسي باستخدام طريقة مصفوفة الجيل القادم. بعد ذلك، أجريت محاكاة رقمية عن طريق تغيير قيمة معامل β_3 باستخدام القيمة الابتدائية المحددة لإيجاد توضيح لديناميكيات انتشار التعصب. حصلت نتائج الدراسة على خمس نقاط توازن، وهي ثلاث نقاط توازن خالية من التعصب، P_0^* ، P_1^* ، و P_2^* ، بالإضافة إلى نقطتي توازن متوطنتين هما P_3^{*+} و P_3^{*-} . تكون نقطة التوازن ل P_1^* مستقرة تقاربياً عندما يكون $R_1 > 1$ و $R_2 > 1$ ، بينما P_2^* يكون مستقر تقاربياً عندما يكون $R_d \geq 1$ ، و $R_0 < 1$. بالإضافة إلى ذلك، تم العثور على ظاهرة انقسام رجعي في النموذج أظهرت أن خفض عدد التكاثر الأساسي إلى أقل من واحد لم يكن كافياً للقضاء على التعصب في السكان، حيث أن الحالة الأولية للسكان وقيمة المعلمات تحددان أيضاً اتجاه ديناميكيات النظام. ظهرت نتائج المحاكاة العددية أنه كلما زادت قيمة β_3 ، كلما اقترب النظام بسرعة نحو نقطة توازن متوطنة مع نسبة أكبر من الأفراد المتعصبين، رغم أن المنحنيات الثلاثة ظهر نفس نمط الانحدار إلى الاقتراب من الصفر. أمكن استخدام هذا البحث كجهد لتحديد استراتيجيات للسيطرة على انتشار السلوك المتعصب في السكان.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fanatisme merupakan keyakinan seseorang terhadap sesuatu yang ditunjukkan dengan sikap yang berlebihan dan meyakini bahwa kelompoknya benar serta mengabaikan argumen yang bertentangan dengan pendiriannya (Risman, 2022). Sikap ini membuat seseorang sulit bersikap adil, mudah emosi, dan beresiko merugikan kelompok lain. Fanatisme umumnya ditandai oleh ketertutupan terhadap informasi baru, intoleransi terhadap perbedaan, dan pembelaan kepada kelompoknya (Lesmana & Syafiq, 2022). Fanatisme yang tidak terkendali dapat berkembang menjadi sikap ekstrem, hal ini bisa membuat seseorang mudah terpengaruh. Pada berbagai lingkungan, fanatisme juga dapat merusak sikap toleran dan menyebabkan perselisihan.

Menurut pandangan Islam, sikap fanatisme yang berlebihan merupakan perilaku yang tidak diperbolehkan karena dapat menyebabkan munculnya perpecahan, tindakan ekstrem, serta berkurangnya objektivitas dalam memandang kebenaran. Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 159 yang berbunyi:

“sesungguhnya orang-orang yang memecah belah agamanya dan mereka menjadi (terpecah) dalam golongan-golongan, sedikit pun engkau (Nabi Muhammad) tidak bertanggung jawab terhadap mereka. Sesungguhnya urusan mereka hanya kepada Allah. Kemudian, Dia akan memberitahukan kepada mereka apa yang telah mereka perbuat.”(Kemenag RI, 2022)

Pada Tafsir Ath-Thabari, ayat ini berkaitan dengan orang-orang yang berpaling dari ajaran agama yang benar kemudian memecahnya menjadi berbagai kelompok dan aliran. Ath-Thabari menyampaikan berbagai pendapat ulama yang menjelaskan

bahwa ayat tersebut merujuk pada kaum Yahudi dan Nasrani, karena mereka memecah ajaran Nabi Ibrahim menjadi berbagai golongan dengan menambahkan agama baru sehingga timbul perbedaan dan menjadikan umat saling bertentangan. Selain itu, tafsir Ath-Thabari menyebutkan pendapat ulama lain yang menegaskan bahwa ayat ini juga berlaku untuk umat Nabi Muhammad SAW yang membuat ajaran baru dalam agama. Mereka adalah golongan yang mengikuti hawa nafsu, mengabaikan ayat-ayat yang jelas, dan justru menjadikan ayat-ayat yang sesat sebagai landasan bagi kaum yang menyimpang. Hal tersebut bukan merupakan tanggung jawab Nabi Muhammad SAW melainkan Allah sendiri yang akan menghukum kaum-kaum dari golongan sesat tersebut sesuai amal perbuatan pada hari kiamat (Thalib, 2022).

Fenomena seperti ini bisa juga muncul di kalangan generasi muda, terutama di era media sosial yang memperkuat penyebaran pandangan keagamaan yang sempit dan eksklusif. Menurut Romli (2019) generasi muda sekarang lebih aktif di dunia digital, sehingga lebih mudah terpapar narasi keagamaan yang kaku dan memecah belah. Pola interaksi ini menyebabkan sebagian remaja membentuk pandangan yang tidak seimbang antara keberagaman, toleransi, dan pemahaman yang moderat. Kondisi ini menunjukkan bahwa fanatisme tidak hanya terdapat di lingkungan keagamaan tertentu, tetapi juga berkembang melalui dinamika sosial yang melibatkan teknologi dan budaya digital. Situasi ini perlu diperhatikan karena berdampak langsung terhadap cara generasi muda memahami perbedaan dan hidup bersama dalam masyarakat.

Dampak dari penyebaran ideologi ekstrem ini dapat terlihat dalam berbagai konflik sosial di Indonesia. Konflik yang terjadi adalah konflik antar ras atau suku,

konflik antar kelompok beragama seperti pembakaran gereja atau masjid, penjarahan, tawuran, pembunuhan, dan pemerkosaan di Kalimantan (Hanafi, 2018). Adapun fenomena ekstrem yang baru terjadi di Indonesia yaitu, ledakan yang terjadi di SMA Negeri 72 Jakarta. Pada laman berita peristiwa tersebut menyebabkan banyak siswa terluka dan memicu kekhawatiran mengenai kecenderungan perilaku kekerasan serta potensi radikalisasi pada peserta didik. Petugas menyatakan pelaku ledakan tersebut merupakan siswa aktif di sekolah tersebut, namun tidak ditemukan hubungan dengan jaringan pada kelompok tertentu. Pada kasus ini menyatakan bahwa remaja rentan terhadap tindakan ekstrem karena pengaruh media sosial. Oleh karena itu, pentingnya pengawasan terhadap remaja, peningkatan literasi digital, serta penguatan nilai-nilai moderasi beragama di kalangan generasi muda.

Pemerintah telah meluncurkan berbagai upaya pencegahan radikalisme yang telah di cantumkan dalam laman Kementrian agama. Pada laman Kementrian Agama, pencegahan telah dilakukan pada generasi muda melalui penguatan pendidikan karakter, pendalaman tentang moderasi beragama dan pengawasan terhadap lingkungan sosial maupun media sosial. Selain itu, kerja sama antara pemerintah, lembaga pendidikan dan masyarakat cukup penting untuk membangun ketahanan ideologis generasi muda.

Secara matematis upaya untuk memahami dinamika perilaku fanatisme adalah dengan menggunakan analisis dinamik. Castillo chavez & Song (2013) menggunakan model matematika *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* (GSEF) untuk memahami dinamika perilaku fanatisme. Model tersebut terbagi menjadi empat subpopulasi, yaitu *General (G)* atau kelompok umum yang belum

menunjukkan kecenderungan perilaku fanatisme, *Susceptible* (*S*) atau kelompok rentan yang mulai memiliki ketertarikan terhadap kelompok fanatik, *Exposed* (*E*) atau kelompok terpapar yang telah menerima pengaruh dari kelompok fanatik tetapi belum aktif menyebarkan ke luar kelompok, dan *Fanatic* (*F*) atau kelompok fanatik yang telah mencapai tingkat fanatisme yang tinggi, aktif dalam kelompok fanatik dan berperan menyebarkan ideologi kepada individu lain. Pada setiap subpopulasi memiliki karakteristik yang berbeda. Kelompok rentan (*S*) adalah individu yang menunjukkan ketertarikan berlebihan namun belum terlibat aktif, kelompok terpapar (*E*) adalah individu yang telah menerima pengaruh fanatisme secara lebih intens dan hanya berperan sebagai penerima pengaruh, kelompok fanatik (*F*) adalah individu yang menunjukkan perilaku fanatisme secara berlebihan, ditandai dengan ketertarikan yang kuat terhadap ideologi serta memiliki kecenderungan untuk aktif menyebarkan pengaruh tersebut kepada individu lain. Strategi yang dapat digunakan untuk menurunkan jumlah kelompok yang berperilaku fanatik, yaitu program edukasi dan rehabilitasi.

Penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan fanatisme lebih banyak menggunakan perspektif sosial, psikologis, dan politik. Beberapa penelitian telah menggunakan pendekatan pemodelan matematika yang mengkaji penyebaran fanatisme sebagai suatu proses dinamika populasi. Diantaranya model epidemiologi SIR (Yong & Azah, 2018), yang memandang penyebaran fanatisme sebagai proses penularan sosial antarindividu, sebagaimana diterapkan pada pemodelan fanatisme politik dalam pemilihan umum di Indonesia. Selain itu, pendekatan analisis dinamik telah diterapkan pada fenomena fanatisme K-Pop (Asni dkk, 2024). Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan terdapat penurunan

jumlah individu yang terpengaruh fanatisme, namun perilaku adiktif tetap berubah-ubah dan tingkat pemulihan cenderung mengalami penurunan. Pada penelitian tersebut belum mengikutsertakan faktor kematian. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk memahami faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran perilaku fanatisme serta dinamika perkembangan menggunakan analisis dinamik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis dinamik model GSEF pada perilaku fanatisme yang telah disederhanakan?
2. Bagaimana hasil simulasi numerik model matematika dinamika perilaku fanatisme berdasarkan variasi parameter model yang digunakan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah di ajukan, berikut merupakan tujuan penelitian pada penelitian ini:

1. Menganalisis dinamika model GSEF pada perilaku fanatisme yang telah disederhanakan.
2. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik pada model matematika dinamika perilaku fanatisme dan menilai pengaruh perubahan parameter terhadap dinamika sistem.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi dalam upaya pencegahan penyebaran perilaku fanatisme sehingga dapat menjadi rujukan dalam mengurangi jumlah individu yang terpengaruh perilaku fanatisme ekstrem.

1.5 Batasan Masalah

Supaya pembahasan yang dipaparkan lebih terarah, maka dibuat batasan masalah sebagai berikut:

1. Model yang digunakan pada tugas akhir ini merujuk pada Castillo-chavez & Song (2013), yaitu:

$$\frac{dG}{dt} = \Lambda - \beta_1 G \frac{C}{T} + \gamma_1 S + \gamma_2 E + \gamma_3 F - \mu G$$

$$\frac{dS}{dt} = \beta_1 G \frac{C}{T} - \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \gamma_1 S - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_2 E - \mu E$$

$$\frac{dF}{dt} = \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_3 F - \mu F$$

$$T = G + S + E + F$$

$$C = S + E + F$$

Diagram kompartemen untuk model dapat dilihat di BAB 2.

2. Lingkup dari populasi yang diamati adalah daerah yang konstan atau tertutup, dimana pada daerah tersebut tidak terjadi migrasi dan keluar dari populasi, kecuali dari kelahiran atau kematian alami.
3. Semua individu baru lahir termasuk ke dalam kelompok umum (G).
4. Kompartemen umum (G) dinyatakan sebagai $G = 1 - S - E - F$.
5. Setiap kompartemen populasi memiliki kemungkinan terjadi kematian secara alami (μ).
6. Perpindahan antar populasi hanya terjadi sesuai mekanisme model, yaitu dari ($G \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow F$).

7. Setiap subpopulasi (S, E, F) memiliki tingkat pemulihan (γ) di setiap individu yang pulih akan kembali langsung ke (G) .
8. Individu dalam kelompok fanatik (F) memiliki kemungkinan untuk pulih dan kembali ke kelas G .

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Zill, 2009).

Persamaan diferensial memiliki dua jenis, diantaranya:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu variabel bebas.

$$\frac{dy}{dx} = y - x \quad (2.1)$$

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau beberapa variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Secara umum, persamaan diferensial merupakan persamaan yang menggambarkan keterkaitan antara suatu fungsi dengan turunan-turunannya dan dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \quad (2.3)$$

y^n merupakan turunan ke- n yang menunjukkan orde pada suatu persamaan diferensial.

2.2 Persamaan Diferensial Non-Linear

Persamaan diferensial nonlinier merupakan persamaan diferensial yang tidak memenuhi sifat linieritas. Menurut Zill (2009) persamaan diferensial nonlinier

umumnya berfokus pada sifat solusi, kestabilan, dan sistem dinamik pada bentuk modelnya. Zill (2009) menjelaskan bahwa suatu persamaan dikatakan nonlinier jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:

1. Mengandung variabel tak bebas atau turunannya muncul dalam pangkat selain satu,

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0 \quad (2.4)$$

2. Terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya,

$$(1 - y)y' + 2y = e^x \quad (2.5)$$

3. Bentuknya tidak dapat ditulis dalam bentuk linier sebagai berikut:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (2.6)$$

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan n persamaan diferensial, dengan $n \geq 2$ yang melibatkan beberapa variabel terikat yang saling berhubungan (Zill, 2009). Secara sistematis, bentuk umum sistem persamaan diferensial dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan variabel bebas yang terikat terhadap variabel bebas t , sehingga $x_1 = x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

2.4 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah pendekatan pemodelan dan simulasi yang menggunakan komputer, yang diciptakan oleh Jay Forrester pada dekade 1950-an di *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Pada awalnya, metode ini dirancang untuk membantu para manajer dalam memahami sistem yang kompleks dan berubah-ubah, dan saat ini telah luas digunakan di berbagai bidang seperti manajemen, ekonomi, ilmu pengetahuan, ekologi, serta psikologi. Sistem dinamik meneliti hubungan antarvariabel dalam sebuah sistem, serta bagaimana struktur dalamnya mempengaruhi tingkah laku dan evolusi sistem sepanjang waktu (Almamalik dkk, 2023).

Menurut Arrowsmith (1990) sistem dinamik yang bersifat diskrit direpresentasikan ke dalam bentuk persamaan yang berbeda, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$x_{t+1} = f(x), \text{ di mana } t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Apabila variabel waktu t merupakan anggota himpunan bilangan riil, sistem dinamik bersifat kontinu yang dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.9)$$

2.5 Analisis Dinamik

2.5.1 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah keadaan di mana suatu sistem tidak berubah seiring berjalannya waktu atau tetap sama dalam jangka waktu tertentu (Strogatz, 2018). Perhatikan persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Dari persamaan di atas, F dan G merupakan fungsi kontinu dari x dan y . Titik (x^*, y^*) dari (x, y) disebut sebagai titik kritis dari sistem persamaan (2.10), sehingga $F(x^*, y^*) = 0 = G(x^*, y^*)$. Titik kesetimbangan diperoleh ketika titik tersebut berada pada kondisi konstan terhadap t maka, titik kesetimbangan akan tercapai ketika $\frac{dx}{dt} = 0 = \frac{dy}{dt}$.

2.5.2 Linierisasi

Linierisasi dilakukan untuk menyusun matriks jacobii dengan cara menghitung turunan pertama dari sistem persamaan diferensial terhadap setiap variabel keadaan pada titik kesetimbangan. Proses ini dapat mengubah sistem yang awalnya nonlinier menjadi linier yang sederhana sehingga mudah untuk dianalisis. Pada buku karya DiPrima & Boyce (2012) terdapat sistem nonlinier yaitu $F(x, y)$ dan $G(x, y)$, untuk mencari solusi dari persamaan tersebut membutuhkan Deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x^*, y^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x^*, y^*) + \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\tag{2.11}$$

Jika $(x - x^*) = u_1$ dan $(y - y^*) = u_2$ disubstitusikan ke dalam persamaan (2.11), maka diperoleh $\frac{dx}{dt} = \frac{du_1}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{du_2}{dt}$ pada kondisi setimbang $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)u_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)u_2 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)u_1 + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)u_2\end{aligned}\tag{2.12}$$

2.5.3 Matriks Jacobi

Matriks Jacobi merupakan matriks yang tersusun atas turunan parsial pertama dari fungsi. Matriks ini digunakan untuk melakukan linierisasi sistem nonlinier di sekitar titik kesetimbangan sehingga kestabilan lokal titik kesetimbangan dapat dianalisis melalui nilai eigennya. Sistem hasil linierisasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(\vec{X}) = A_0(\vec{X})\tag{2.13}$$

dengan

$$\vec{X} = (u_1, u_2)^T$$

sehingga

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}\tag{2.14}$$

2.5.4 Nilai Eigen

Pada sistem persamaan diferensial linier, nilai eigen sangat penting dalam menentukan bentuk umum solusi dan perilaku dinamika di sekitar titik kesetimbangan. Nilai eigen digunakan ketika menyelesaikan sistem persamaan linier orde satu yang dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$Ax = \lambda x\tag{2.15}$$

Dengan A merupakan matriks koefisien yang berordo $n \times n$, dan x adalah vektor yang bergantung pada waktu. Simbol λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari

matriks A dan x merupakan vektor eigen dari matriks A . Persamaan (2.15) dapat ditulis sebagai:

$$Ax = \lambda I \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) ekuivalen dengan

$$(A - \lambda I) = 0 \quad (2.17)$$

Dengan I merupakan matriks identitas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Untuk menentukan nilai eigen, diperlukan solusi tak nol, maka dari persamaan (2.20) jika dan hanya jika:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) adalah persamaan karakteristik dari matriks A . Karena persamaan ini merupakan polinomial derajat n , maka matriks A memiliki tepat sebanyak n nilai eigen.

2.5.5 Bifurkasi

Menurut Strogatz (2018), pada sistem dinamik non linier sering dijumpai adanya transisi dari keadaan stabil ke keadaan tidak stabil, maupun sebaliknya. Fenomena ini dikenal sebagai bifurkasi. Misalkan diberi sistem dinamik sebagai berikut

$$\dot{x} = f(x, \phi)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ merupakan suatu variabel dan $\phi \in \mathbb{R}$ adalah parameter bifurkasi. Perubahan nilai parameter ϕ dapat menyebabkan perubahan sifat kualitatif sistem, seperti perubahan kestabilan maupun jumlah titik kesetimbangan. Oleh

karena itu, bifurkasi dapat didefinisikan sebagai perubahan kualitatif pada solusi sistem akibat variasi parameter.

Pada model epidemiologi, bifurkasi memiliki peran penting dalam menjelaskan perubahan dinamika penyebaran. Salah satu fenomena bifurkasi yang sering muncul adalah *backward bifurcation*. *Backward bifurcation* adalah kondisi di mana titik kesetimbangan bebas penyakit dan kedua titik kesetimbangan endemik dapat stabil meskipun nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu ($R_0 < 1$). *Backward bifurcation* biasanya ditandai dengan adanya titik kesetimbangan positif yang lebih dari satu serta munculnya titik balik pada diagram bifurkasi, yaitu titik di mana dua cabang saling bertemu.

Menurut Gumel (2012) *backward bifurcation* terjadi ketika ekuilibrium bebas penyakit yang stabil dapat berdampingan dengan ekuilibrium endemik yang juga stabil pada kondisi $R_0 < 1$, sehingga pengendalian penyakit menjadi lebih kompleks. Untuk menentukan arah bifurkasi secara analitik, dapat digunakan pendekatan *center manifold*. Castillo-chavez & Song (2013) memberikan kriteria berikut untuk menentukan arah bifurkasi: Misalkan sistem memiliki satu nilai eigen nol dan nilai eigen lainnya memiliki bagian real negatif. Didefinisikan konstanta:

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$b = \sum_{k,l=1}^n v_k w_l \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}$$

dengan v dan w masing-masing adalah vektor eigen kiri dan kanan dari matriks Jacobian sistem yang bersesuaian dengan nilai eigen nol dan ϕ adalah parameter bifurkasi.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka sistem mengalami *backward bifurcation* di $\phi = 0$.

2.5.6 Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Driessche & Watmough (2008) bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan rata-rata jumlah individu yang terpengaruh karena hasil dari individu terpengaruh dalam populasi yang sepenuhnya rentan. Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk mengukur potensi awal suatu fenomena yang menyebar dalam suatu populasi. Nilai R_0 dikategorikan ke dalam tiga kondisi, yaitu:

1. $R_0 < 1$ pada kondisi ini individu yang terpengaruh berkurang dari waktu ke waktu.
2. $R_0 = 1$ pada kasus ini tidak berubah (stabil) atau konstan.
3. $R_0 > 1$ pada kasus ini setiap individu yang terpengaruh meningkat, dalam kondisi ini sistem cenderung menuju keadaan endemik.

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh menggunakan *Next Generation Matrix* (NGM). Pada pendekatan ini, sistem dinamika dibagi ke dalam dua komponen, yaitu matriks F yang merupakan laju munculnya individu terpengaruh fanatisme baru dan matriks V merupakan laju perpindahan individu keluar dari kompartemen terpengaruh fanatisme karena pemulihan, kematian, atau proses transisi lain. Matriks F dan V merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} E_0 \right] \text{ dan } V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} E_0 \right] \quad (2.20)$$

Matriks generasi berikutnya ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1} \quad (2.21)$$

Matriks $\mathbf{K}$ dikatakan juga sebagai matriks *Next Generation*. Kemudian, radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks $\mathbf{K}$ merupakan nilai bilangan reproduksi populasi rentan menurut Driessche & Watmough (2008) sehingga $R_0 = \rho(\mathbf{K}) = \rho(\mathbf{FV}^{-1})$.

2.6 Fanatisme Golongan Menurut Islam

Fanatisme atau *ta'assub* dalam Islam mengacu pada sikap yang terlalu berlebihan dalam keyakinan, pendirian, atau amalan hingga melebihi batas-batas yang ditentukan oleh syariat. Menurut Khader dkk (2016) secara etimologis kata fanatik berarti memiliki keyakinan yang berlebihan hingga melebihi batas, dan istilah ini sering disamakan dengan *taksub* yaitu sikap yang sangat ketergantungan pada satu pandangan hingga sulit menerima kebenaran dari pihak lain. Fanatisme juga dianggap sebagai perilaku ekstrem yang membuat seseorang menolak pandangan yang berbeda dan tetap memegang pendapat yang diyakininya, meskipun tidak didukung oleh dalil yang kuat.

Sikap fanatik adalah sikap yang terlalu ekstrem dan sebaiknya dihindari. Bahkan dalam hal kebaikan, jika seseorang bersikap fanatik, maka hasilnya tetap tidak baik. Islam adalah agama yang menjunjung prinsip tengah-tengah, sehingga mampu menyeimbangkan antara kedua ekstrem tersebut. Dalam berbagai konteks, Islam mengajarkan konsep keseimbangan, mulai dari cara mengatur kehidupan awal hingga sikap dan perilaku manusia sehari-hari. Menurut Pasaribu (2025) ada beberapa jenis *ta'assub* yang sering muncul, diantaranya:

1. *Ta'assub Hizbi*

Ta'assub hizbi merupakan fanatik kelompok atau golongan yang muncul ketika seseorang menganggap kelompok tertentu sebagai yang paling benar. Mereka membela kelompoknya meskipun salah, merendahkan kelompok lain, dan kelompoknya tidak boleh dikritik. Sikap ini dapat membuat perselisihan semakin tajam karena seseorang menilai semua yang bukan golongannya sebagai salah.

2. *Ta'assub Qaumi*

Ta'assub qaumi merupakan fanatik suku atau keturunan yang terjadi ketika seseorang membanggakan suku atau keturunannya secara berlebihan dan menolak kebenaran dari suku lain.

3. *Ta'assub Madzhabi*

Ta'assub madzhabi merupakan fanatik pada pemahaman agama tertentu. Sikap ini terjadi ketika seseorang membela pandangan keagamaan secara ekstrem. Mereka menjadikan madzhabnya sebagai standar mutlak kebenaran dan menganggap madzhab lain salah.

4. *Ta'assub Fikri*

Ta'assub fikri merupakan seseorang yang meyakini bahwa pendapat pribadi adalah satu-satunya yang benar, sehingga menolak pandangan apa pun yang berbeda.

5. *Ta'assub pada Tokoh Tertentu*

Ta'assub ini merupakan seseorang yang menganggap seorang tokoh sebagai sosok yang tidak boleh dikritik dan selalu benar. Sikap ini menyebabkan

seseorang mengikuti tokoh tersebut tanpa berpikir dan menutup diri dari kebenaran.

Pasaribu (2025) menjelaskan bahwa *ta'assub* juga dipengaruhi oleh beberapa faktor yang mendorong seseorang atau kelompok bersikap ekstrem. Berikut sebab-sebab utama munculnya *ta'assub*:

1. Sempitnya Pengetahuan

Kurangnya ilmu menjadikan seseorang mudah terjebak pada pandangan sempit dan tidak mampu menilai sesuatu secara objektif. Ketidaktahuan membuat seseorang hanya mengikuti satu pendapat tanpa memahami dalil, sehingga mudah bersikap fanatik terhadap apa yang diketahuinya saja.

2. Percaya Diri yang Berlebihan

Sikap merasa paling benar dapat mendorong seseorang sulit menerima pandangan yang berbeda. Hal tersebut dapat muncul pada kelompok, madzhab, tokoh, atau suku tertentu.

3. Pengklutusan Tokoh

Menganggap seorang tokoh selalu benar dapat menyebabkan seseorang mengikuti ucapan atau perilaku tokoh tersebut secara mutlak.

4. Lingkungan yang Tertutup dan Wawasan Sempit

Lingkungan yang mengajarkan kebenaran secara satu arah, menyempitkan wawasan, dan menolak kritik dapat menyebabkan seseorang menjadi *ta'assub*. Dalam lingkungan ini seseorang tidak diberikan kesempatan untuk mengenal keragaman sehingga mudah terjebak dalam sikap fanatik.

5. Hilangnya Akhlak dalam Berbeda Pendapat

Seseorang yang mudah marah, menghina, atau meremehkan pendapat lain. Hal tersebut cenderung mempertahankan pendapatnya hanya karena emosi, bukan karena kebenaran.

6. Pemahaman Agama yang Salah

Pemahaman agama yang salah dapat menjadikan seseorang merasa wajib membela pendapat tertentu tanpa mempertimbangkan prinsip moderat dalam Islam.

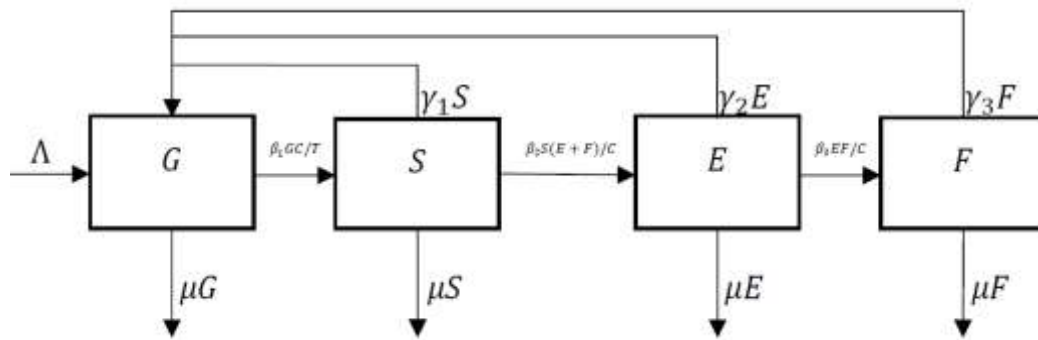
Untuk menghindari sikap ta'assub Allah SWT memerintahkan hamba-Nya secara bijaksana dan melalui pengajaran yang baik, Allah berfirman pada Qs. An Nahl: 125 yang berbunyi:

“Serulah (manusia) ke jalan Tuhanmu dengan hikmah dan pengajaran yang baik serta debatlah mereka dengan cara yang lebih baik. Sesungguhnya Tuhanmu Dialah yang paling tahu siapa yang tersesat dari jalan-Nya dan Dia (pula) yang paling tahu siapa yang mendapat petunjuk.”

Dalam ayat ini, Allah meminta Nabi Muhammad untuk mengajak manusia kepada jalan Tuhan dengan cara yang baik. Beliau disuruh mengajak orang-orang kepada agama Islam, yang merupakan jalan yang sesuai dengan tuntunan Tuhan, dengan cara yang bijak, tegas, dan benar. Selain itu, beliau juga dianjurkan untuk berdebat dengan orang-orang yang menolak, menentang, atau meragukan seruannya, tetapi dengan cara yang baik dan sopan. Sesungguhnya hanya Tuhan yang memandu dan memberi petunjuk kepada manusia. Dialah yang paling tahu siapa yang tersesat dan menyimpang dari jalan-Nya, serta siapa yang diberi petunjuk dan berada di jalan yang benar (Nahdatul Ulama', 2025).

2.7 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Fanatisme adalah bentuk keyakinan yang berlebihan hingga ekstrem terhadap suatu kelompok hingga memunculkan perilaku penolakan terhadap pandangan yang berbeda (Khader dkk, 2016). Dalam psikologi sosial dijelaskan jika hal ini individu cenderung membela identitas kelompok dengan menolak pandangan berbeda. Dalam matematis, dinamika penyebaran perilaku fanatisme sering digunakan menggunakan model kompartemen sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model GSEF

Diagram kompartemen pada Gambar 2.1 merupakan model matematika perilaku fanatisme. Model ini terbagi menjadi empat variabel yaitu *General* (G) atau kelompok umum yang belum menunjukkan kecenderungan perilaku fanatisme, *Susceptible* (S) atau kelompok rentan yang mulai memiliki ketertarikan terhadap kelompok fanatik, *Exposed* (E) atau kelompok terpapar yang telah menerima pengaruh dari kelompok fanatik tetapi belum aktif menyebarkan ke luar kelompok, dan *Fanatic* (F) atau kelompok fanatik yang telah mencapai tingkat fanatisme yang tinggi, aktif dalam kelompok fanatik dan berperan menyebarkan ideologi kepada individu lain. Laju pertumbuhan diproduksi dengan Λ , dan kematian dengan dengan laju μ . Kemudian individu umum akan terpapar oleh individu yang sudah terpapar (S) dengan laju $\frac{\beta_1 GC}{T}$. Kemudian individu (S) akan

terpapar oleh individu (E) dengan laju $\frac{\beta_2 S(E+F)}{C}$. Kemudian individu (E) akan terpapar oleh individu (F) dengan laju $\frac{\beta_3 EF}{C}$. Ketiga cara penularan tersebut akan dihambat oleh faktor penyembuhan dengan laju γ . Sehingga diperoleh model dinamika perilaku fanatisme terhadap waktu sebagai berikut.

$$\frac{dG}{dt} = \Lambda - \beta_1 G \frac{C}{T} + \gamma_1 S + \gamma_2 E + \gamma_3 F - \mu G \quad (2.22)$$

Dengan $T = G + S + E + F$.

Persamaan ini menjelaskan perubahan jumlah individu pada kelas G , dengan bertambahnya populasi melalui parameter Λ sebagai laju pertumbuhan (bayi baru lahir) dan melalui proses pemulihan individu dari kelas S, E, F dengan laju pemulihan per kapita $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Jumlah individu pada kelas G juga dapat berkurang akibat β_1 karena adanya kemungkinan keberhasilan rekrutmen ke kelas S , serta berkurang karena μ yang merupakan laju kematian alami yang membuat individu keluar secara permanen.

$$\frac{dS}{dt} = \beta_1 G \frac{C}{T} - \beta_2 S \frac{E+F}{C} - \gamma_1 S - \mu S \quad (2.23)$$

Dengan $T = G + S + E + F$ dan $C = S + E + F$.

Persamaan ini menjelaskan perubahan jumlah individu pada kelas S yang mengalami penambahan melalui β_1 , yaitu individu yang berhasil direkrut dari kelas G . Jumlah individu pada kelas ini dapat berkurang karena adanya perpindahan menuju kelas S melalui β_2 , yaitu individu yang terkena paparan lebih lanjut. Selain itu kelas ini juga berkurang karena adanya laju pemulihan $\gamma_1 S$ ke kelas G dan melalui laju kematian alami μS .

$$\frac{dE}{dt} = \beta_2 S \frac{E+F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_2 E - \mu E \quad (2.24)$$

Persamaan ini menjelaskan perubahan jumlah individu pada kelas E , di mana populasi E mengalami penambahan melalui β_2 , yaitu individu yang berpindah dari kelas S menuju kelas E akibat proses paparan. Namun, jumlah individu pada kelas E menurun karena adanya perpindahan lebih lanjut melalui β_3 , yang menggambarkan individu yang naik ke tingkat berikutnya dalam proses dinamika yang dimodelkan. Selain itu, E juga berkurang melalui $\gamma_2 E$, yaitu laju pemulihan individu per kapita dari kelas E yang kembali ke kelas G , serta melalui μE yang merepresentasikan laju kematian alami.

$$\frac{dE}{dt} = \beta_2 S - \beta_3 E - \gamma_2 E - \mu E \quad (2.25)$$

Persamaan ini menjelaskan perubahan jumlah individu pada kelas F , di mana kelas F mengalami penambahan melalui β_3 , yaitu individu yang berpindah dari kelas E menuju kelas F sebagai tahap lanjutan dalam proses dinamika yang dimodelkan. Di sisi lain, jumlah individu pada kelas F berkurang melalui $\gamma_3 F$, yang merupakan laju pemulihan per kapita sehingga individu dari kelas F dapat kembali ke kelas G , serta melalui μF yang menggambarkan laju kematian alami dalam kelas tersebut.

BAB III

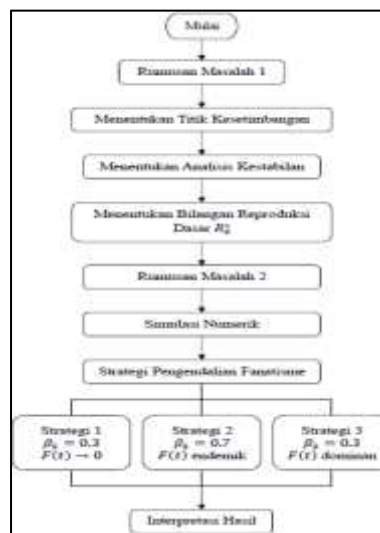
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi Pustaka. Metode studi Pustaka dilakukan dengan mengumpulkan informasi dari berbagai sumber literatur yang sudah ada, seperti buku, artikel jurnal, makalah, tugas akhir, dan referensi lain yang berkaitan dengan topik penelitian. Dalam proses ini, peneliti mencari, membaca, dan menganalisis berbagai tulisan yang relevan untuk memperoleh pemahaman mendalam tentang masalah yang diteliti. Hasil dari pengumpulan literatur ini kemudian digunakan untuk mendukung analisis dan pembahasan dalam penelitian.

3.2 Diagram Alir

Alur pelaksanaan penelitian ini digambarkan secara sistematis melalui diagram alir untuk memberikan pemahaman yang jelas dari tahap awal hingga akhir. Diagram alir penelitian tersebut disajikan pada gambar berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian ini disusun berdasarkan dua rumusan masalah sebagai berikut:

1. Analisis dinamik model GSEF pada perilaku fanatisme yang telah disederhanakan.
 - a. Menentukan titik kesetimbangan model, meliputi titik kesetimbangan bebas fanatisme dan titik kesetimbangan endemik.
 - b. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobi dan kriteria Routh-Hurwitz.
 - c. Menghitung bilangan reproduksi dasar R_0^* menggunakan metode Matriks Generasi Selanjutnya (*Next Generation Matrix*).
2. Simulasi numerik model matematika dinamika perilaku fanatisme dengan beberapa strategi yang dilakukan.
 - a. Menentukan nilai parameter dan nilai awal populasi yang digunakan pada simulasi numerik.
 - b. Melakukan simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika populasi pada masing-masing kompartemen $S(t)$, $E(t)$, dan $F(t)$.
 - c. Menganalisis pengaruh perubahan parameter terhadap perilaku solusi sistem menggunakan bantuan *software Maple*.
 - d. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik untuk melihat keberadaan titik kesetimbangan serta fenomena *backward bifurcation* pada model.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penyusunan Model

4.1.1 Mendefinisikan Variabel dari Diagram Kompartemen

Variabel yang digunakan pada penelitian ini merupakan asumsi berdasarkan penelitian yang bersumber pada artikel rujukan. Berikut merupakan definisi variabel yang bersumber dari Castillo-chavez & Song (2013):

Tabel 4.1 Definisi Variabel Model GSEF

Variabel	Definisi
$G(t)$	Populasi individu yang belum menunjukkan kecenderungan perilaku fanatisme pada waktu t .
$S(t)$	Populasi individu yang memiliki ketertarikan terhadap kelompok fanatik pada waktu t .
$E(t)$	Populasi individu yang telah menerima pengaruh dari kelompok fanatik tetapi belum aktif menyebarkan ke luar kelompok pada waktu t .
$F(t)$	Populasi individu yang telah mencapai tingkat fanatisme yang tinggi, aktif dalam kelompok fanatik dan berperan menyebarkan ideologi kepada individu lain pada waktu t .

4.1.2 Penyederhanaan Model Matematis

Model GSEF pada penelitian ini memiliki empat populasi yaitu *General* (G), *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Fanatic* (F). Berdasarkan persamaan (2.22) – (2.25) diperoleh model GSEF pada penyebaran fanatisme sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \Lambda - \beta_1 G \frac{C}{T} + \hat{\gamma}_1 S + \hat{\gamma}_2 E + \hat{\gamma}_3 F - \mu G \\ \frac{dS}{dt} &= \beta_1 G \frac{C}{T} - \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \hat{\gamma}_1 S - \mu S\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_2 S \frac{E+F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \hat{\gamma}_2 E - \mu E$$

$$\frac{dF}{dt} = \beta_3 E \frac{F}{C} - \hat{\gamma}_3 F - \mu F$$

dengan

$$T = G + S + E + F$$

$$C = S + E + F$$

Kemudian untuk mempermudah perhitungan, maka dilakukan penyederhanaan dengan menjumlahkan seluruh persamaan pada (4.1), sehingga diperoleh persamaan untuk populasi T sebagai berikut:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dG}{dt} + \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dF}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \Lambda - \mu T$$

$$\int \frac{dT}{\Lambda - \mu T} = \int dt$$

$$-\frac{1}{\mu} \ln|\Lambda - \mu T| = t + K \quad (4.2)$$

$$\ln|\Lambda - \mu T| = -\mu(t + K)$$

$$\ln|\Lambda - \mu T| = -\mu t + (-\mu K)$$

$$\Lambda - \mu T = e^{-\mu t} K$$

$$\mu T = \Lambda - e^{-\mu t} K$$

$$T = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{K}{\mu} e^{-\mu t}$$

Hal ini menunjukkan jika solusi dari persamaan ketika $t \rightarrow \infty$ atau saat $\frac{dT}{dt} = 0$, maka populasi total akan konstan:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{K}{\mu} e^{-\mu t} = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (4.3)$$

Pada asumsi populasi total konstan tersebut, dilakukan reduksi model sehingga sistem dapat dinyatakan dalam bentuk proporsi. Berdasarkan definisi pada model *GSEF* dan hasil substitusi, maka populasi *General* (G) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 T &= G + S + E + F \\
 T &= G + C \\
 G &= T - C \\
 G(t) &= \frac{\Lambda}{\mu} - C(t)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Oleh karena itu, parameter Λ tidak lagi muncul secara eksplisit pada model hasil reduksi. Sistem (4.1) dapat direduksi menjadi sistem yang hanya bergantung pada variabel S, E, F . Selain itu, notasi pada parameter $\hat{\gamma}_i + \mu$ disederhanakan menjadi γ_i , dengan $i = 1, 2, 3$. Selanjutnya, seluruh variabel dinyatakan dalam bentuk proporsi terhadap populasi total (4.3), sehingga:

$$G = \frac{G}{T}, S = \frac{S}{T}, E = \frac{E}{T}, F = \frac{F}{T}$$

karena $G + C = T$, maka dalam bentuk proporsi diperoleh:

$$\frac{G}{T} = \frac{C}{T} = 1 \rightarrow \frac{G}{T} = 1 - C$$

dengan demikian, suku pada sistem (4.1) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\beta_1 G C}{T} = \beta_1 (1 - C) C$$

Melalui proses di atas, diperoleh persamaan diferensial yang ekuivalen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \beta_1 (1 - C) C - \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \gamma_1 S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_2 E
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{dF}{dt} = \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_3 F$$

Dengan

$$C = S + E + F$$

4.2 Analisis Dinamik Model GSEF pada Penyebaran Fanatisme

Analisis dinamik dilakukan untuk mengkaji perilaku jangka panjang dari model GSEF yang telah disusun. Analisis ini meliputi penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal, serta penentuan bilangan reproduksi dasar.

Teorema 1. Asumsikan $\gamma_{min} = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$ dengan $C(t) = S(t) + E(t) + F(t)$.

Bukti.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dF}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = \beta_1(1 - C)C - \gamma_1 S - \gamma_2 E - \gamma_3 F$$

karena $\gamma_{min} = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, maka $\gamma_{min} \leq \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, sehingga:

$$\gamma_{min} S + \gamma_{min} E + \gamma_{min} F \leq \gamma_1 S + \gamma_2 E + \gamma_3 F$$

$$\gamma_{min}(S + E + F) \leq \gamma_1 S + \gamma_2 E + \gamma_3 F$$

$$\gamma_{min} C \leq \gamma_1 S + \gamma_2 E + \gamma_3 F$$

dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan dT/dt menghasilkan:

$$\frac{dC}{dt} \leq \beta_1(1 - C)C - \gamma_{min} C$$

karena $C = S + E + F$ merupakan proporsi terhadap total populasi, maka $0 \leq C \leq 1$, sehingga $0 \leq (1 - C) \leq 1$, akibatnya:

$$\beta_1(1 - C)C \leq \beta_1 C$$

sehingga:

$$\frac{dC}{dt} \leq \beta_1 C - \gamma_{min} C = (\beta_1 - \gamma_{min})C = \gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) C$$

$$\frac{dC}{dt} \leq \gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) C$$

$$\int \frac{1}{C} dC \leq \int \gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) dt$$

$$\ln|C| \leq \gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) t + k$$

$$C(t) \leq C(0) e^{\gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) t}$$

karena $\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} \leq 1$, sehingga $\left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) \leq 0$, akibatnya eksponensial negatif:

$$0 \leq C(t) \leq C(0) e^{\gamma_{min} \left(\frac{\beta_1}{\gamma_{min}} - 1 \right) t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0. \blacksquare$$

4.2.1 Menentukan Titik Keseimbangan

Titik-titik keseimbangan pada model ini dapat dibedakan menjadi dua, yaitu titik keseimbangan bebas fanatisme dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan didapatkan ketika

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dF}{dt} = 0$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$\beta_1(1 - C)C - \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \gamma_1 S = 0 \quad (4.6)$$

$$\beta_2 S \frac{E + F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_2 E = 0 \quad (4.7)$$

$$\beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_3 F = 0 \quad (4.8)$$

1. Titik Keseimbangan Bebas Fanatisme

Titik keseimbangan bebas fanatisme adalah kondisi ketika tidak terdapat individu fanatik dalam populasi, sehingga $F^* = 0$. Pada kondisi ini masih dimungkinkan terdapat individu yang terpapar fanatisme ($E^* > 0$), tetapi belum menjadi individu fanatik. Maka, keseimbangan bebas fanatisme yaitu:

Substitusikan $F^* = 0$ dan $E^* = 0$, sehingga:

$$C = S$$

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Kemudian substitusikan ke persamaan:

$$\beta_1(1 - C^*)C^* - \beta_2 S^* \frac{E^* + F^*}{C^*} - \gamma_1 S^* = 0$$

$$\beta_1(1 - C^*)C^* - \gamma_1 S^* = 0$$

$$S^*(\beta_1(1 - S^*) - \gamma_1) = 0$$

$$S^* = 0$$

dan

$$\beta_1(1 - S^*) - \gamma_1 = 0$$

$$1 - S^* = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$$

$$S^* = 1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1}$$

Syarat eksistensi supaya $S^* > 0$, maka:

$$1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} > 0 \rightarrow \frac{\beta_1}{\gamma_1} > 1$$

Asumsikan $F^* = 0$, namun $S^* \neq 0$ dan $E^* \neq 0$, sehingga:

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

Subtitusikan $F^* = 0$ ke persamaan:

$$\beta_2 S^* \frac{E^* + F^*}{C^*} - \beta_3 E^* \frac{F^*}{C^*} - \gamma_2 E^* = 0$$

$$E^* \left(\beta_2 \frac{S^*}{C^*} - \gamma_2 \right) = 0$$

$$E^* = 0$$

Karena $E^* \neq 0$, maka

$$\beta_2 \frac{S^*}{C^*} = \gamma_2$$

$$\frac{S^*}{C^*} = \frac{\gamma_2}{\beta_2}$$

$$S^* = \frac{\gamma_2}{\beta_2} C^*$$

Karena $C^* = S^* + E^*$, maka:

$$E^* = C^* - S^*$$

$$E^* = C^* - \frac{\gamma_2}{\beta_2} C^*$$

$$E^* = C^* \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right)$$

$$E^* = \frac{C^* (\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2}$$

Subtitusikan S^* dan E^* ke persamaan:

$$\beta_1 (1 - C^*) C^* - \beta_2 S^* \frac{E^* + F^*}{C^*} - \gamma_1 S^* = 0$$

$$\beta_1 (1 - C^*) C^* - \frac{\beta_2 \left(\left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} C^* \right) \left(\frac{C^* (\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2} \right) \right)}{C^*} - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} C^* \right) = 0$$

$$\beta_1(1 - C^*)C^* - \frac{\beta_2(\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2)(C^*)^2)}{(\beta_2)^2 C^*} - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} C^* \right) = 0$$

$$\beta_1(1 - C^*)C^* - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2} C^* - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} C^* \right) = 0$$

$$C^* \left[\beta_1(1 - C^*) - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2} - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) \right] = 0$$

karena $C^* > 0$:

$$\beta_1(1 - C^*) - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2} - \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) = 0$$

$$\beta_1(1 - C^*) = \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2} + \gamma_1 \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2} \right)$$

$$\beta_1(1 - C^*) = \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_2}$$

$$1 - C^* = \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_1 \beta_2}$$

$$C^* = 1 - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_1 \beta_2}$$

Substitusikan nilai C^* ke dalam S^*

$$S^* = \frac{\gamma_2}{\beta_2} C^*$$

$$S^* = \frac{\gamma_2}{\beta_2} \left(1 - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_1 \beta_2} \right)$$

$$S^* = \frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{(\gamma_2)^2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_1(\beta_2)^2}$$

$$S^* = \frac{\gamma_2[\beta_1 \beta_2 - \gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)]}{\beta_1(\beta_2)^2}$$

Substitusikan nilai C^* ke dalam E^*

$$E^* = \frac{C^*(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2}$$

$$E^* = \left(1 - \frac{\gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)}{\beta_1\beta_2}\right) \cdot \frac{(\beta_2 - \gamma_2)}{\beta_2}$$

$$E^* = \frac{(\beta_2 - \gamma_2)[\beta_1\beta_2 - \gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)]}{\beta_1(\beta_2)^2}$$

Sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas fanatisme yaitu:

$$P_0^* = (0, 0, 0)$$

$$P_1^* = \left(1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1}, 0, 0\right)$$

$$P_2^* = (S^*, E^*, 0)$$

dengan

$$S^* = \frac{\gamma_2[\beta_1\beta_2 - \gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)]}{\beta_1(\beta_2)^2}$$

$$E^* = \frac{(\beta_2 - \gamma_2)[\beta_1\beta_2 - \gamma_2(\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1)]}{\beta_1(\beta_2)^2}$$

Pada model GSEF terdapat beberapa parameter ambang yang digunakan untuk menentukan eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem, di antaranya:

a. $R_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$

Parameter ini menyatakan perbandingan antara laju perpindahan individu menuju kelompok rentan dengan laju keluarnya individu dari kelompok rentan dan digunakan untuk menentukan keberadaan titik kesetimbangan.

b. $R_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$

Parameter ini menggambarkan kemampuan perkembangan individu terpapar dalam populasi ketika kelompok rentan telah terbentuk dan digunakan dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan batas.

$$c. R_d = \frac{\nu R_1 R_2}{R_2 - 1 + \nu}$$

Parameter ini merupakan ambang komposit yang menggabungkan pengaruh rekrutmen dan konversi dengan $\nu = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Berdasarkan definisi parameter ambang di atas, titik kesetimbangan bebas fanatisme dapat dituliskan kembali dalam bentuk R_1, R_2 dan R_d sebagai berikut:

$$P_0^* = (0, 0, 0)$$

$$P_1^* = \left(1 - \frac{1}{R_1}, 0, 0\right)$$

$$P_2^* = (S^*, E^*, 0)$$

dengan

$$S^* = \frac{(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 (R_2)^2}$$

$$E^* = \frac{(R_2 - 1)(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 (R_2)^2}$$

Titik kesetimbangan P^* dinyatakan *global attractor* pada himpunan Ω apabila setiap kondisi awal $(S_0, E_0) \in \Omega$ dengan $\Omega \in \mathbb{R}^n$, solusi sistem memenuhi $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), E(t)) = P^*$. Berdasarkan definisi tersebut, berikut teorema yang menyatakan kondisi sifat *global attractor* pada masing-masing titik kesetimbangan model *GSEF*.

Teorema 2. Misalkan $\nu = \gamma_1/\gamma_2$ dan

$$R_d = \frac{\nu R_1 R_2}{R_2 - 1 + \nu}$$

Maka berlaku:

1. Jika $R_1 < 1$ dan $R_2 < 1$, atau $1 < R_2$ dan $R_d < 1$, maka titik $(0, 0)$ merupakan *global attractor*.

2. Jika $1 < R_1$ dan $R_2 < 1$, maka titik $\left(1 - \frac{1}{R_1}, 0\right)$ merupakan *global attractor*.

3. Jika $1 < R_2$ dan $R_d > 1$ maka terdapat titik kesetimbangan positif (S^*, E^*) dengan:

$$S^* = \frac{(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 R_2^2}$$

$$E^* = \frac{(R_2 - 1)(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 R_2^2}$$

yang merupakan *global attractor*.

Bukti.

dari syarat $\frac{\beta_2 S^*}{C^*} = \gamma_2$ yang diperoleh saat $E^* \neq 0$, didapatkan

$$\frac{S^*}{C^*} = \frac{1}{R_2}$$

sehingga $S^* = \frac{C^*}{R_2}$ dan $E^* = \frac{C^*(R_2 - 1)}{R_2}$.

Substitusikan ke persamaan kesetimbangan yang menghasilkan

$$1 - C^* = \frac{(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 R_2}$$

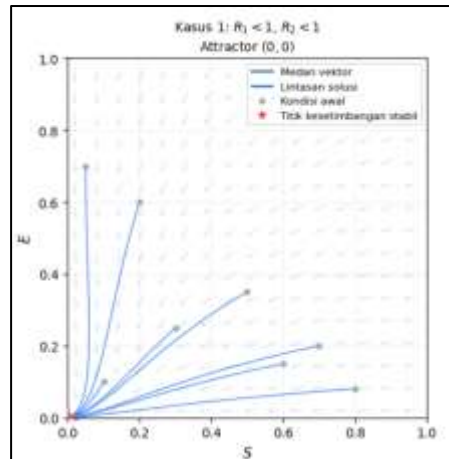
dengan mendefinisikan $R_d = \frac{\nu R_1 R_2}{R_2 - 1 + \nu}$, diperoleh:

$$S^* = \frac{(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 R_2 R_2}$$

$$E^* = \frac{(R_2 - 1)(R_d - 1)(R_2 - 1 + \nu)}{\nu R_1 R_2 R_2}$$

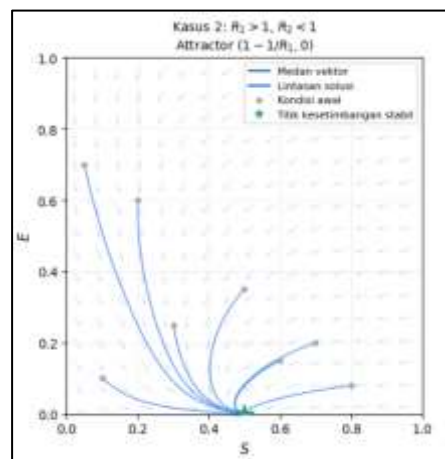
Dengan syarat eksistensi $R_2 > 1$ dan $R_d \geq 1$. Apabila syarat ini tidak terpenuhi, sistem tidak memiliki ekuilibrium positif dan Solusi konvergen ke $(0,0)$ atau $\left(1 - \frac{1}{R_1}, 0\right)$ bergantung pada nilai R_1 . ■

Berikut merupakan potret fase pada masing-masing kondisi yang dinyatakan dalam teorema:



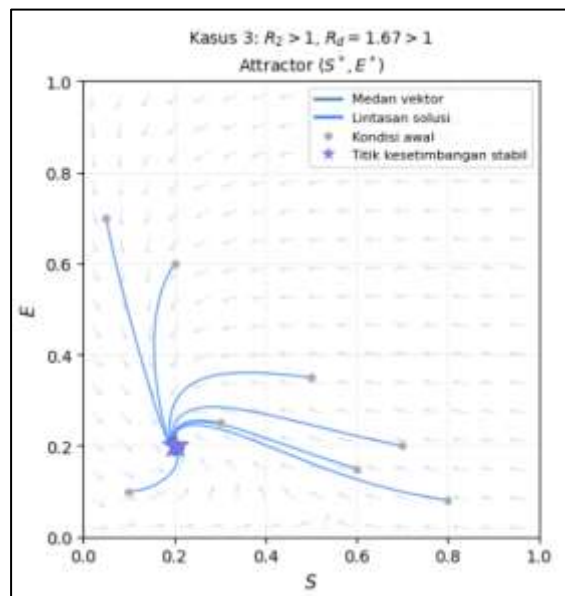
Gambar 4.1 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 1

Pada kondisi ini, titik $(0,0)$ merupakan *global attractor*, artinya seluruh lintasan solusi yang berasal dari kondisi awal dan akan bergerak menuju konvergen ke titik asal $(S, E) = (0, 0)$. Secara biologis, hal ini menunjukkan bahwa populasi individu rentan (S) dan individu terpapar (E) akan hilang seiring berjalannya waktu, sehingga fanatisme tidak dapat berkembang dalam populasi.



Gambar 4.2 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 2

Pada kondisi ini, lintasan solusi akan bergerak menuju titik kesetimbangan batas P_1^* , di mana proporsi individu rentan (S^*) stabil pada nilai $\left(1 - \frac{1}{R_1}\right)$, sementara populasi individu terpapar (E^*) menuju nol. Secara biologis, kondisi ini menggambarkan situasi di mana kelompok rentan (S^*) dapat terbentuk dan bertahan dalam populasi karena laju perpindahan dari kelompok umum (G) ke kelompok rentan (S) cukup tinggi ($R_1 > 1$), akan tetapi penyebaran lebih lanjut darii rentan ke terpapar masih dapat diredam karena $R_2 < 1$.



Gambar 4.3 Potret Fase pada Teorema 2 kondisi 3

Pada kondisi ini, terdapat titik kesetimbangan bebas fanatisme positif $P_2^* = (S^*, E^*)$ dengan $S^* > 0$ dan $E^* > 0$ yang merupakan *global attractor*. Keberadaan titik ini merupakan sistem akan konvergen menuju suatu kondisi setimbang di mana terdapat kelompok rentan (S^*) dan kelompok terpapar (E^*) secara permanen dalam populasi, meskipun belum mencapai tahap fanatik aktif ($F = 0$). Secara biologis, kondisi ini menggaambarkan skenario

di mana pengaruh fanatisme sudah cukup kuat untuk mempertahankan populasi rentan (S^*) dan populasi terpapar (E^*) dalam jangka panjang, namun belum terdapat fanatisme aktif muncul.

2. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah kondisi di mana terdapat penyebaran fanatisme dalam populasi. Sehingga $S^* \neq 0, E^* \neq 0, F^* \neq 0$.

Dari persamaan (4.5)

$$\beta_3 E^* \frac{F^*}{C^*} - \gamma_3 F^* = 0$$

$$F^* \left(\beta_3 \frac{E^*}{C^*} - \gamma_3 \right) = 0$$

Karena $F^* \neq 0$, maka:

$$\beta_3 \frac{E^*}{C^*} = \gamma_3$$

$$\frac{E^*}{C^*} = \frac{\gamma_3}{\beta_3}$$

$$C^* = \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*$$

Karena $C^* = S^* + E^* + F^*$, maka:

$$S^* = C^* - E^* - F^*$$

$$S^* = \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* - E^* - F^*$$

$$S^* = \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) E^* - F^*$$

Substitusikan ke dT/dt , dengan asumsi $\gamma_1 = \gamma_2$:

$$\beta_1 (1 - C^*) C^* - \gamma_1 S^* - \gamma_1 E^* - \gamma_3 F^* = 0$$

$$\beta_1 (1 - C^*) C^* - \gamma_1 (S^* + E^*) - \gamma_3 F^* = 0$$

$$\beta_1 \left(1 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*\right) \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* - \gamma_1 \left(\left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) E^* - F^* + E^* \right) - \gamma_3 F^* = 0$$

$$\beta_1 \left(1 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*\right) \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* - \gamma_1 \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* + \gamma_1 F^* - \gamma_3 F^* = 0$$

$$\beta_1 \left(1 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*\right) \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* - \gamma_1 \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* + F^* (\gamma_1 - \gamma_3) = 0$$

Sehingga menghasilkan bentuk F^* berikut:

$$F^* (\gamma_1 - \gamma_3) = \gamma_1 \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* - \beta_1 \left(1 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*\right) \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*$$

$$F^* (\gamma_1 - \gamma_3) = \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* \left(\gamma_1 - \beta_1 \left(1 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*\right) \right)$$

$$F^* (\gamma_1 - \gamma_3) = \frac{\beta_3}{\gamma_3} E^* \left(\gamma_1 - \beta_1 + \frac{(\beta_1 \beta_3)}{\gamma_3} E^* \right)$$

$$F^* (E) = E^* \left[\frac{\beta_3}{\gamma_3 (\gamma_1 - \gamma_3)} \left(\gamma_1 - \beta_1 + \frac{(\beta_1 \beta_3)}{\gamma_3} E^* \right) \right]$$

$$F^* (E) = E^* \psi$$

Dengan nilai ψ adalah:

$$\psi = \frac{\beta_3}{\gamma_3 (\gamma_1 - \gamma_3)} \left(\gamma_1 - \beta_1 + \frac{(\beta_1 \beta_3)}{\gamma_3} E^* \right)$$

Subtitusikan nilai $F^* = E^* \psi$ ke S :

$$S^* = \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) E^* - F^*$$

$$S^* = \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) E^* - E^* \psi$$

$$S^* = \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \psi \right) E^*$$

Subtitusikan nilai C^*, S^*, F^* ke dalam persamaan (4.7):

$$\begin{aligned}
& \beta_2 S^* \frac{E^* + F^*}{C^*} - \beta_3 E^* \frac{F^*}{C^*} - \gamma_2 E^* = 0 \\
& \frac{\beta_2 E^* \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \psi \right) E^* (1 + \psi)}{\frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*} - \frac{\beta_3 E^* (E^* \psi)}{\frac{\beta_3}{\gamma_3} E^*} - \gamma_2 E^* = 0 \\
& \frac{\beta_2 \gamma_3}{\beta_3} E^* \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \psi \right) (1 + \psi) - \gamma_3 E^* \psi - \gamma_2 E^* = 0 \\
& \frac{\beta_2 \gamma_3}{\beta_3} \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \psi \right) (1 + \psi) - \gamma_3 \psi - \gamma_2 = 0 \\
& \beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \psi \right) (1 + \psi) - \beta_3 \psi - \frac{\beta_3 \gamma_2}{\gamma_3} = 0 \\
& \beta_2 \left[\left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) + \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 2 \right) \psi - \psi^2 \right] - \beta_3 \psi - \frac{\beta_3 \gamma_2}{\gamma_3} = 0 \\
& \beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) + \beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 2 \right) \psi - \beta_2 \psi^2 - \beta_3 \psi - \frac{\beta_3 \gamma_2}{\gamma_3} = 0 \\
& -\beta_2 \psi^2 + \left[\beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 2 \right) - \beta_3 \right] \psi + \left[\beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) - \frac{\beta_3 \gamma_2}{\gamma_3} \right] = 0 \\
& \beta_2 \psi^2 - \left[\beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 2 \right) - \beta_3 \right] \psi - \left[\beta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 \right) - \frac{\beta_3 \gamma_2}{\gamma_3} \right] = 0 \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Persamaan yang diperoleh di atas masih dinyatakan dalam parameter asli model. Untuk menyederhanakan penulisan dan memudahkan interpretasi, maka didefinisikan parameter ambang sebagai berikut:

a. $R_3 = \frac{\beta_3}{\gamma_3}$

Parameter ini menyatakan kemampuan pertumbuhan populasi fanatik akibat interaksi antara kelompok terpapar dan kelompok fanatik dibandingkan dengan laju keluarnya individu dari kelompok fanatik.

b. $R_0 = (R_3 - 1)(R_2 - 1)$

Parameter ini merupakan ambang bifurkasi yang digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan P_2^* dan eksistensi titik kesetimbangan endemik.

Dengan menggunakan definisi parameter ambang di atas, maka persamaan (4.9) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\beta_2\psi^2 - [\beta_2(R_3 - 2) - \beta_3]\psi - \gamma_2(R_0 - 1) = 0$$

Bagi dengan R_3 supaya koefisien – koefisien persamaan kuadrat dapat dinyatakan dalam bentuk yang melibatkan γ_3 .

$$\frac{\beta_2}{R_3}\psi^2 - \gamma_3\left[\frac{\beta_2}{\beta_3}(R_3 - 2) - 1\right]\psi + (1 - R_0)\frac{\gamma_2}{R_3} = 0$$

i. Solusi Kuadrat $\psi_{1,2}$

Menggunakan rumus

$$\psi = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan:

$$a = \frac{\beta_2}{R_3}, b = -\gamma_3\left[\frac{\beta_2}{\beta_3}(R_3 - 2) - 1\right], c = (1 - R_0)\frac{\gamma_2}{R_3}$$

maka:

$$- \frac{b}{2a}:$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= \frac{\left(\beta_2 - \frac{2\gamma_3\beta_2}{\beta_3} - \gamma_3\right)}{\frac{2\beta_2\gamma_3}{\beta_3}} \\ &= \left(\beta_2 - \frac{2\gamma_3\beta_2}{\beta_3} - \gamma_3\right)\left(\frac{\beta_3}{2\beta_2\gamma_3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta_2\beta_3 - 2\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_3)}{2\beta_2\gamma_3} \\
&= \frac{\beta_3}{2\gamma_3} - 1 - \frac{\beta_3}{2\beta_2} \\
&= \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right) - 1
\end{aligned}$$

Misalkan:

$$A = \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right)$$

Sehingga

$$-\frac{b}{2a} = A - 1$$

$$- \left(\frac{b}{2a} \right)^2 :$$

Dari hasil sebelumnya, maka

$$\left(-\frac{b}{2a} \right)^2 = (A - 1)^2$$

karena

$$A = \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right)$$

diperoleh

$$(A - 1)^2 = A^2 - 2A + 1$$

$$\left(-\frac{b}{2a} \right)^2 = A^2 - 2A + 1$$

$$A^2 = \frac{(\beta_3)^2}{4} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right)^2$$

$$- \frac{-4ac}{(2a)^2} :$$

$$\frac{-(R_0 - 1)\gamma_2}{\beta_2} = -\frac{(R_3R_2 - R_3 - R_2)\gamma_2}{\beta_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_2}{\beta_2} (R_2 R_3 - R_2 - R_3) \\
&= \frac{\gamma_2}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2 \beta_3}{\gamma_2 \gamma_3} - \frac{\beta_2}{\gamma_2} - \frac{\beta_3}{\gamma_3} \right) \\
&= \frac{\beta_3}{\gamma_3} - 1 - \frac{\gamma_2 \beta_3}{\beta_2 \gamma_3} \\
&= \frac{\beta_3}{\gamma_3} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) - 1 \\
- \quad &\left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac}{(2a)^2} \\
&\left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac}{(2a)^2} = (A^2 - 2A + 1) + \left[\frac{\beta_3}{\gamma_3} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) - 1 \right] \\
&= A^2 - 2A + \left[\frac{\beta_3}{\gamma_3} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) - 1 \right] \\
&= A^2 - 2A + \frac{\beta_3}{\gamma_3} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) \\
&= A^2 - \frac{\beta_3}{\gamma_3} + \frac{\beta_3}{\beta_2} + \beta_3 \gamma_3 \left(1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) \\
&= A^2 + \frac{\beta_3}{\beta_2} - \frac{\gamma_2 \beta_3}{\beta_2 \gamma_3} \\
&= A^2 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \right)
\end{aligned}$$

dengan demikian, diperoleh:

$$\psi_{1,2} = \frac{\beta_3}{2} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right) - 1 \pm \sqrt{\frac{\beta_3 \beta_3}{4} \left(\frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\beta_2} \right)^2 + \frac{\beta_3}{\beta_2} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_3} \right)}$$

ii. Solusi ψ_1 dan ψ_2

Komponen equilibriumnya:

Hitung E^* dari definisi ψ ,

$$\psi = \frac{\gamma_1 R_3}{\gamma_1 - \gamma_3} (1 - R_1 + R_1 R_3 E^*)$$

$$\frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)}{\gamma_1 R_3} = 1 - R_1 + R_1 R_3 E^*$$

$$R_1 R_3 E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)}{\gamma_1 R_3} - 1 - R_1$$

$$R_1 R_3 E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)}{\gamma_1 R_3} - 1 - R_1 \left(\frac{\gamma_1 R_3}{\gamma_1 R_3} \right)$$

$$R_1 R_3 E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3) + (R_1 - 1)\gamma_1 R_3}{\gamma_1 R_3}$$

$$E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3) + (R_1 - 1)\gamma_1 R_3}{\gamma_1 R_3 (R_1 R_3)}$$

$$E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3) - (1 - R_1)\gamma_1 R_3}{\gamma_1 R_3 (R_1 R_3)}$$

$$E^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3) - (1 - R_1)R_3}{R_3 (R_1 R_3)}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan R_3 , sehingga

$$E_{1,2}^* = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)/R_3 - (1 - R_1)}{R_1 R_3}$$

iii. Formula $S_{1,2}, F_{1,2}, C_{1,2}$

Berdasarkan nilai $\psi_{1,2}$ dan $E_{1,2}^*$ yang telah diperoleh, maka komponen titik kesetimbangan endemik lainnya dapat dinyatakan secara eksplisit. Untuk komponen $F_{1,2}$, menggunakan hubungan $F^* = E^* \psi$, sehingga:

$$F_{1,2} = \psi_{1,2} \cdot E_{1,2}$$

Untuk komponen $S_{1,2}$, menggunakan hubungan

$$S_{1,2} = (R_3 - 1 - \psi_{1,2})E_{1,2}$$

Sedangkan untuk total populasi inti $C_{1,2}$, menggunakan

$$C_{1,2} = R_3 E_{1,2}$$

Dengan demikian, diperoleh dua titik kesetimbangan endemik yaitu:

$$P_3^{*+} = (S_1, E_1, F_1)$$

$$P_3^{*-} = (S_2, E_2, F_2)$$

Supaya $P^{*\pm}$ menjadi titik kesetimbangan yang valid, maka seluruh komponen harus bernilai positif. Berikut syarat-syarat yang harus dipenuhi:

$$- E_{1,2} > 0$$

Dari formula $E_{1,2}$, yaitu

$$E_{1,2} = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)/R_3 - (1 - R_1)}{R_1 R_3}$$

Karena $R_1 > 1$ maka $-(1 - R_1) = R_1 - 1 > 0$. sehingga syarat $E_{1,2} > 0$ terpenuhi jika $\psi_{1,2} > 0$.

$$- F_{1,2} > 0$$

$$F_{1,2} = \psi_{1,2} \cdot E_{1,2} > 0$$

Dari persamaan kuadrat, $\psi^{1,2} > 0$ terpenuhi jika $\beta_3 > \beta_3^b$ di mana:

$$\beta_3^b = \frac{2\beta_2\gamma_3}{\beta_2 - \gamma_3}$$

$$- S_{1,2} > 0$$

$$S_{1,2} = (R_3 - 1 - \psi)E_{1,2} > 0$$

Dari solusi $\psi_{1,2}$ dapat ditunjukkan jika $\psi_{1,2} < R_3 - 1$ dan karena $\psi < \psi_1$ maka $\psi_2 < R_3 - 1$ juga terpenuhi, sehingga $S_{1,2} > 0$.

- Dua solusi real

Supaya $\psi_{1,2}$ keduanya bernilai real, maka diskriminan persamaan kuadrat harus memenuhi $\Delta \geq 0$. Dari analisis diskriminan diperoleh bahwa $\Delta \geq 0$ jika dan hanya jika $\beta_3 \geq \beta_3^T$, di mana β_3^T merupakan *turning point*, yaitu:

$$\beta_3^T = \frac{4\gamma_3\beta_2}{(\beta_2 - \gamma_3)^2}(\gamma_2 - \gamma_3)$$

- Kedua akar bertanda sama

Pada syarat yang terakhir yaitu kedua akar harus memiliki tanda yang sama yaitu ($R_0 \leq 1$), oleh karena itu ditunjukkan melalui lemma berikut:

Lemma 3. jika $R_2 < 2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2}$ dan $\beta_2 > \gamma_3$, maka berlaku $\beta_3^b < \beta_3^T$

Bukti.

$$\begin{aligned}\beta_3^T &= \frac{4\gamma_3\beta_2}{(\beta_2 - \gamma_3)^2}(\gamma_2 - \gamma_3) = \left(\frac{2\beta_2\gamma_3}{\beta_2 - \gamma_3}\right) \frac{2(\gamma_2 - \gamma_3)}{\beta_2 - \gamma_3} \\ &= \beta_3^b \frac{2(\gamma_2 - \gamma_3)}{\beta_2 - \gamma_3}\end{aligned}$$

Sehingga untuk menunjukkan $\beta_3 < \beta_3^T$, cukup dibuktikan bahwa:

$$\frac{2(\gamma_2 - \gamma_3)}{\beta_2 - \gamma_3} > 1$$

Berdasarkan asumsi $R_2 < 2 - \gamma_3/\gamma_2$, diperoleh:

$$\frac{\beta_2}{\gamma_2} < 2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2}$$

$$\beta_2 < 2\gamma_2 - \gamma_3$$

$$\beta_2 - \gamma_3 < 2\gamma_2 - 2\gamma_3$$

$$\beta_2 - \gamma_3 < 2(\gamma_2 - \gamma_3)$$

$$\frac{2(\gamma_2 - \gamma_3)}{\beta_2 - \gamma_3} > 1$$

Dengan demikian terbukti $\beta_3^b < \beta_3^T$. ■

Jadi, batas tanda Solusi β_3^b selalu berada di bawah batas keberadaan solusi real β_3^T .

Lemma 4. $\beta_3^T \leq \beta_3^*$

Bukti.

Diketahui:

$$\beta_3^T = \frac{4\gamma_3\beta_2}{(\beta_2 - \gamma_3)^2}(\gamma_2 - \gamma_3), \quad \beta_3^* = \frac{\gamma_3 R_2}{R_2 - 1}$$

Substitusikan ke dalam $\beta_3^T \leq \beta_3^*$:

$$\frac{4\gamma_3\beta_2}{(\beta_2 - \gamma_3)^2}(\gamma_2 - \gamma_3) \leq \frac{\gamma_3\beta_2}{\beta_2 - \gamma_2}$$

Karena $\gamma_3\beta_2 > 0$, begi kedua ruas menjadi:

$$\frac{4(\gamma_2 - \gamma_3)}{(\beta_2 - \gamma_3)^2} \leq \frac{1}{\beta_2 - \gamma_2}$$

Kalikan kedua ruas dengan $(\beta_2 - \gamma_3)^2(\beta_2 - \gamma_2) > 0$:

$$4(\gamma_2 - \gamma_3)(\beta_2 - \gamma_2) \leq (\beta_2 - \gamma_3)^2$$

Misalkan:

$$p = \beta_2 - \gamma_2$$

$$q = \gamma_2 - \gamma_3$$

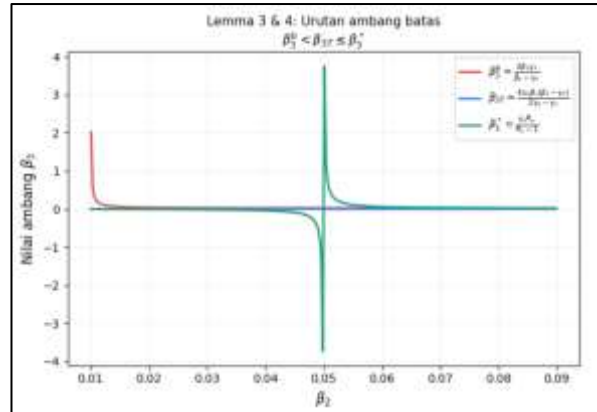
$$p + q = \beta_2 - \gamma_3$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} (\beta_2 - \gamma_3)^2 - 4(\gamma_2 - \gamma_3)(\beta_2 - \gamma_2) &= (p + q)^2 - 4pq \\ &= (p - q)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti $\beta_3^T \leq \beta_3^*$. ■

Jadi, batas keberadaan solusi real β_3^T tidak melebihi batas yang ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar β_3^* . Untuk memperjelas hubungan tersebut serta gambaran terhadap hasil Lemma 3 dan Lemma 4, berikut disajikan ilustrasi urutan nilai ambang batas β_3 .



Gambar 4.4 Ilustrasi Lemma 3 dan Lemma 4

Gambar 4.4 menjelaskan hubungan urutan antara tiga nilai kritis pada sumbu β_3 , yaitu β_3^b, β_3^T dan β_3^* yang masing-masing memiliki peran penting dalam menentukan keberadaan titik kesetimbangan endemik model. Nilai β_3^b merupakan batas terkecil yang harus dilampaui supaya kedua komponen $\psi_{1,2}$ bernilai positif, sehingga populasi F^* dan E^* pada titik kesetimbangan endemik terjamin positif. β_3^T merupakan *turning point*, yaitu batas minimum supaya diskriminan persamaan kuadrat dalam ψ bernilai positif. Adapun β_3^* merupakan batas atas yang ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar $R_0 \leq 1$. Berdasarkan lemma 5 dan lemma 6 diperoleh parameter ambang sebagai berikut:

$$\beta_3^b < \beta_3^T \leq \beta_3^*$$

Lemma 5. Asumsikan $R_2 < 2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2}$ dan $\beta_2 > \gamma_3$. Jika $\beta_3^T < \beta_3 < \beta_3^*$, maka sistem memiliki dua titik kesetimbangan endemik positif.

Bukti.

Dari lemma 5 dan lemma 6 telah diperoleh $\beta_3^b < \beta_3^T \leq \beta_3^*$. kondisi $\beta_3 \geq \beta_3^T$ menjamin diskriminan $\Delta \geq 0$ sehingga $\psi_{1,2}$ real. Kondisi $\beta_3 > \beta_3^b$ menjamin $\psi_{1,2} > 0$. kondisi $\beta_3 \leq \beta_3^*$ ekuivalen dengan $R_0 \leq 1$ yang menjamin kedua akar bertanda positif. Dari $\psi_{1,2} > 0$ dan $\psi_{1,2} < R_3 - 1$ terbukti $S_{1,2} > 0$, $E_{1,2} > 0$, $F_{1,2} > 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan $C_{1,2} \leq 1$ sebagai berikut:

Titik kesetimbangan endemik berada dalam domain yang didefinisikan, yaitu

$$\Omega = \{(S, E, F) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq S + E + F \leq 1\}$$

Akan dibuktikan bahwa untuk solusi positif berlaku

$$C_{1,2} = S_{1,2} + E_{1,2} + F_{1,2} < 1$$

Dengan menggunakan hubungan antar variabel, diperoleh:

$$\begin{aligned} s_{1,2} + E_{1,2} + F_{1,2} &= (R_3 - 1 - \psi)E_1 + E_1 + \psi E_1 \\ &= R_3 E_1 \\ &= C_1 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusi ke nilai E_1 menghasilkan:

$$C_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{R_3 - 1} \psi_1 - 1 \right) + 1$$

Supaya berlaku $C_1 \leq 1$, cukup ditunjukkan bahwa:

$$\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{R_3 - 1} \psi_1 - 1 < 0$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$\psi_1 < \frac{\gamma_2(R_3 - 1)}{\gamma_2 - \gamma_3}$$

Dari syarat sebelumnya telah diperoleh bahwa $S_1 > 0$ yang mengakibatkan $\psi_1 < R_3 - 1$.

Selain itu, karena $\gamma_3 > 0$, maka berlaku

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_3} > 1$$

sehingga diperoleh

$$R_3 - 1 < \frac{\gamma_2(R_3 - 1)}{\gamma_2 - \gamma_3}$$

dengan demikian

$$\psi_1 R_3 - 1 < \frac{\gamma_2(R_3 - 1)}{\gamma_2 - \gamma_3}$$

Sehingga terbukti $C_1 \leq 1$. dengan cara yang sama berlaku untuk $C_2 \leq$

1. Dengan demikian, kedua titik kesetimbangan endemik E_3^+ dan E_3^- terbukti berada di dalam domain Ω . ■

Untuk memberikan gambaran geometris terhadap hasil Lemma 5, berikut ilustrasi diskriminan sebagai fungsi β_3 .

Sehingga didapatkan dua titik kesetimbangan endemik yang merupakan solusi dari sistem persamaan (4.1) - (4.3), yaitu

$$E_3^+ = (S_1, E_1, F_1)$$

yang bersifat stabil dan

$$E_3^- = (S_2, E_2, F_2)$$

yang bersifat tidak stabil, dengan

$$S_{1,2} = (R_3 - 1 - \psi_{1,2})E_{1,2}$$

$$E_{1,2} = \frac{\psi(\gamma_1 - \gamma_3)/R_3 - (1 - R_1)}{R_1 R_3}$$

$$F_{1,2} = \psi_{1,2} \cdot E_{1,2}$$

syarat eksistensi $\beta_3^T \leq \beta_3 \leq \beta_3^*$. Keberadaan dua titik kesetimbangan endemik ini mengindikasikan adanya bifurkasi mundur (*backward bifurcation*) pada sistem.

4.2.2 Menentukan Analisis Kestabilan

Model matematika yang digunakan pada kasus ini merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Sehingga untuk mencari analisis kestabilannya, perlu dilakukan linierisasi pada sekitar titik kesetimbangan dengan membentuk matriks Jacobian. Persamaan-persamaan yang digunakan pada linierisasi diantaranya adalah

$$f_1(S, E, F) = \beta_1(1 - C)C - \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \gamma_1 S$$

$$f_2(S, E, F) = \beta_2 S \frac{E + F}{C} - \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_2 E$$

$$f_3(S, E, F) = \beta_3 E \frac{F}{C} - \gamma_3 F$$

Selanjutnya mencari nilai eigen dari matriks Jacobian untuk menentukan kestabilan suatu model. Berikut merupakan matriks Jacobian dari hasil linierisasi pada persamaan di atas.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial F} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial F} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1(1-2C) - \beta_2 \frac{(E+F)^2}{C^2} - \gamma_1 & \beta_1(1-2C) - \beta_2 \frac{S^2}{C^2} & \beta_1(1-2C) - \beta_2 \frac{S^2}{C^2} \\ \beta_2 \frac{(E+F)^2}{C^2} + \beta_3 \frac{EF}{C^2} & \beta_2 \frac{S^2}{C^2} - \beta_3 \frac{F(S+F)}{C^2} - \gamma_2 & \beta_2 \frac{S^2}{C^2} - \beta_3 \frac{E(S+E)}{C^2} \\ -\beta_3 \frac{EF}{C^2} & \beta_3 \frac{F(S+F)}{C^2} & \beta_3 \frac{E(S+E)}{C^2} - \gamma_3 \end{bmatrix}$$

1. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Fanatisme

Berdasarkan titik keseimbangan bebas fanatisme yang telah diperoleh yaitu

$$P_1^* = (1 - R_1^{-1}, 0, 0), P_2^* = (S^*, E^*, 0) \text{ dengan,}$$

$$S^* = \frac{(R_2 - 1 + \nu)(R_d - 1)}{\nu R_1 R_2 R_2}$$

$$E^* = \frac{(R_2 - 1)(R_2 - 1 + \nu)(R_d - 1)}{\nu R_1 R_2 R_2}$$

Kemudian substitusikan titik keseimbangan bebas fanatisme pada matriks Jacobi yang didapatkan dari hasil linierisasi di sekitar titik keseimbangan bebas fanatisme, sehingga:

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\gamma_1(1 - R_1) & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 \\ 0 & \gamma_2(R_2 - 1) & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Teorema 6. Titik keseimbangan E_1 stabil secara lokal hanya jika $R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$.

Bukti.

Nilai eigen diperoleh melalui persamaan $|J(P_1^*) - \lambda I|$:

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1(1 - R_1) - \lambda & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 \\ 0 & \gamma_2(R_2 - 1) - \lambda & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dari determinan di atas maka didapatkan polynomial sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (-\gamma_1(1 - R_1) - \lambda)(\gamma_2(R_2 - 1) - \lambda)(-\gamma_3 - \lambda) = 0$$

Nilai eigen dari matriks di atas diperoleh sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\gamma_1(1 - R_1)$$

$$\lambda_2 = \gamma_2(R_2 - 1)$$

$$\lambda_3 = -\gamma_3$$

Hasil di atas menjelaskan jikan nilai eigen pertama memenuhi $\lambda_1 < 0$ jika dan hanya jika $R_1 > 1$, sedangkan nilai eigen kedua memenuhi $\lambda_2 < 0$ jika dan hanya jikan $R_2 < 1$. Adapun nilai eigen ketiga selalu bernilai negatif, yaitu $\lambda_3 < 0$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil apabila seluruh nilai eigen bernilai negatif, yang terjadi ketika syarat $R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$ terpenuhi. Oleh karena itu, titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$. ■

$$J(P_2^*) = \begin{bmatrix} x - \gamma_1 - \beta_2(1 - (R_2)^{-1})^2 & x - \beta_2(R_2)^{-2} & x - \beta_2(R_2)^{-2} \\ \beta_2(1 - (R_2)^{-1})^2 & \beta_2(R_2)^{-2} - \gamma_2 & \beta_2(R_2)^{-2} - \beta_3(1 - (R_2)^{-1}) \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3(R_0 - 1)}{R_2} \end{bmatrix}$$

dengan $x = 2\gamma_2 + \frac{2}{R_2}(\gamma_1 - \gamma_2) - \beta_1$.

Teorema 7. Titik kesetimbangan E_2 stabil secara lokal jika dan hanya jika $R_2 > 1$, $R_d > 1$, dan $R_0 = (R_3 - 1)(R_2 - 1)$

Bukti.

Nilai eigen diperoleh melalui persamaan $|J(P_2^*) - \lambda I|$:

$$\begin{bmatrix} x - \gamma_1 - \beta_2(1 - (R_2)^{-1})^2 - \lambda & x - \beta_2(R_2)^{-2} & x - \beta_2(R_2)^{-2} \\ \beta_2(1 - (R_2)^{-1})^2 & \beta_2(R_2)^{-2} - \gamma_2 - \lambda & \beta_2(R_2)^{-2} - \beta_3(1 - (R_2)^{-1}) \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3(R_0 - 1)}{R_2} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Karena matriks blok segitiga bawah, maka determinannya langsung bisa di temukan dengan:

$$\det(J_{P_2^*} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

Pada baris ketiga hanya punya satu elemen tidak nol, maka ekspansi kofaktor dari baris ketiga menjadi

$$\begin{aligned}
 &= (f_{33} - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (f_{33} - \lambda)[(\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}))] \\
 &= (f_{33} - \lambda)[\lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M)]
 \end{aligned}$$

jadi persamaan karakteristiknya adalah

$$(f_{33} - \lambda)[\lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M)] = 0$$

persamaan ini langsung terpecah menjadi dua persamaan terpisah, yaitu:

$$(f_{33} - \lambda) = 0$$

$$\lambda_3 = f_{33} = \frac{\gamma_3(R_0 - 1)}{R_2}$$

dan

$$\lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0$$

Setelah didapatkan persamaan karakteristiknya selanjutnya mencari nilai eigen λ_1 dan λ_2 menggunakan tabel *Routh-Hurwitz* sebagai berikut:

Tabel 4. 2 Tabel Kriteria Routh-Hurwitz

λ^2	$a_0 = 1$	$a_2 = \det(M)$
λ^1	$a_1 = -\text{tr}(M)$	
λ^0	$b_1 = \frac{(a_1 a_2 - a_0 a_3)}{a_1}$ $= \det(M)$	

Untuk menunjukkan seluruh elemen kolom pertama bernilai positif, yaitu:

$a_1 = -\text{tr}(M) > 0$, karena $f_{11} < 0$ dan $f_{22} < 0$, maka $\text{tr}(M) < 0$ sehingga

$a_1 = -\text{tr}(M) > 0$ dan

$b_1 = \det(M) > 0$. Karena $R_1 > 1$, $R_2 > 1$, dan $v > 0$, maka $\det(M) > 0$.

Kestabilan suatu sistem ditentukan oleh konsistensi tanda pada kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz*. Sistem dianggap stabil apabila seluruh elemen dalam kolom tersebut memiliki tanda yang sama, baik itu positif maupun negatif (Ni'mah & Savitri, 2022). berdasarkan perhitungan di atas diketahui jika seluruh elemen kolom pertama bernilai positif, maka dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{1,2}$ memiliki bagian real negatif. Dengan demikian titik kesetimbangan E_2 sepenuhnya ditentukan oleh

$$\lambda_3 = \frac{\gamma_3(R_0 - 1)}{R_2}$$

karena $\gamma_3 > 0$ dan $R_2 > 0$, maka:

$$\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow R_0 < 1$$

$$\lambda_3 > 0 \Leftrightarrow R_0 > 1. \blacksquare$$

Teorema ini memberikan syarat perlu untuk cukup bagi kestabilan lokal titik kesetimbangan E_2 . Selama titik E_2 ada, kestabilannya ditentukan oleh nilai bilangan reproduksi yang memenuhi kondisi di atas.

2. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan titik kesetimbangan endemik yang telah diperoleh, yaitu

$$P_3^{*\pm} = (S^\pm, E^\pm, F^\pm)$$

Titik kesetimbangan endemik tidak dapat dianalisis kestabilannya secara langsung menggunakan linierisasi matriks Jacobi. Oleh karena itu, kestabilan $P_3^{*\pm}$ ditentukan melalui analisis bifurkasi.

Untuk menentukan arah bifurkasi, digunakan di pilih $\phi = \beta_3$ sebagai parameter bifurkasi dengan titik $R_0 = 1$, yang ekuivalen dengan

$$\beta_3 = \beta_3^* = \frac{\gamma_3 R_2}{R_2 - 1} \Leftrightarrow R_0 = (R_2 - 1)(R_3 - 1) = 1$$

Berdasarkan hasil analisis kestabilan P_2^* sebelumnya, kedua kondisi tersebut telah terpenuhi karena $f_{33} = 0$ ketika $R_0 = 1$ dan $\lambda_{1,2}$ memiliki bagian real negatif. Dengan demikian, sistem memenuhi syarat untuk dilakukan analisis bifurkasi.

Selanjutnya, untuk menentukan arah bifurkasi menggunakan pendekatan manifold pusat, sehingga diperlukan perhitungan vektor eigen kanan dan kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen nol.

a. Vektor Eigen Kanan w

Vektor eigen kanan $w = [w_1, w_2, w_3]^T$ diperoleh dari:

$$J_{P_2^*} \cdot w = 0$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Karena baris ketiga bernilai nol, maka w_3 dapat dipilih bebas. Pilih $w_3 = 1$, sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{13} \\ -f_{23} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, sistem dapat ditulis sebagai

$$(-M) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{13} \\ f_{23} \end{pmatrix}$$

dengan

$$M = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan evaluasi turunan parsial di titik kesetimbangan P_2^* diperoleh bahwa $f_{11} < 0, f_{22} < 0, f_{12} > 0, f_{21} > 0, f_{13} > 0$ dan $f_{23} > 0$. Sehingga matriks $-M$ memiliki elemen diagonal positif dan elemen

di luar diagonal negatif. Selain itu, $\det(-M) > 0$. Akibatnya, berlaku $(-M)^{-1} \geq 0$ sehingga solusi

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-M)^{-1} \begin{pmatrix} f_{13} \\ f_{23} \end{pmatrix}$$

Memenuhi $w_1 > 0$ dan $w_2 > 0$. Dengan demikian, vector eigen kanan $w = (w_1, w_2, 1)^T$ memiliki semua komponen positif.

b. Vektor Eigen Kiri v

Vektor eigen kiri $v = (v_1, v_2, v_3)$ diperoleh dari:

$$v \cdot J_{P_2^*} = 0$$

Karena $|M| \neq 0$, sistem ini hanya memiliki solusi trivial $v_1 = v_2 = 0$.

Pada v_3 dapat di pilih $v_3 = 1$, sehingga:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berikut arah kedua vektor tersebut di sekitar titik kesetimbangan P_2^* .

Untuk menentukan arah bifurkasi, maka perlu dihitung koefisien bifurkasi a dan b sebagai berikut. Karena $v = (0, 0, 1)$ maka, hanya komponen f_3 yang berkontribusi, sehingga:

$$a = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{P_2^*}$$

Karena pada $P_2^*, F = 0$ maka, turunan kedua f_3 yang tidak nol adalah

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial S \partial F} \Big|_{P_2^*} = -\frac{\beta_3 E^*}{(C^*)^2} = -\frac{\gamma_3}{R_3 E^*}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial E \partial F} \Big|_{P_2^*} = \frac{\beta_3 S^*}{(C^*)^2} = \frac{\gamma_3 (R_3 - 1)}{R_3 E^*}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial F^2} \right|_{P_2^*} = -\frac{2\beta_3 E^*}{(C^*)^2} = -\frac{2\gamma_3}{R_3 E^*}$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} a &= 2w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial S \partial F} + 2w_2 w_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial E \partial F} + w_3^2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial F^2} \\ &= 2w_1 w_3 \left(-\frac{\gamma_3}{R_3 E^*} \right) + 2w_2 w_3 \left(\frac{\gamma_3 (R_3 - 1)}{R_3 E^*} \right) + w_3^2 \left(-\frac{2\gamma_3}{R_3 E^*} \right) \\ &= \frac{\gamma_3 w_3}{R_3 E^*} (-2w_1 + 2(R_3 - 1)w_2 - 2w_3) \end{aligned}$$

Karena dipilih $w_3 = 1$ dan di ketahui $E^* = \frac{(R_1 - 1)}{R_1 R_3}$, maka:

$$a = \frac{\gamma_3 R_1}{R_1 - 1} (-2w_1 + 2(R_3 - 1)w_2 - 2)$$

Selanjutnya menghitung konstanta b . Karena $v = (0, 0, 1)$ diperoleh

$$b = \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \emptyset} = \sum_{i=1}^3 w_i \left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_i \partial \beta_3} \right|_{P_2^*}$$

Pada $\frac{\partial f_3}{\partial \beta_3} = E \left(\frac{F}{C} \right)$, maka turunan kedua terhadap x_i di E_2 adalah

$$\left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial S \partial \beta_3} \right|_{P_2^*} = -\left. \frac{EF}{C^2} \right|_{F=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial E \partial \beta_3} \right|_{P_2^*} = \left. \frac{F(S + F)}{C^2} \right|_{F=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 f_3}{\partial F \partial \beta_3} \right|_{P_2^*} = \left. \frac{E(C - F)}{C^2} \right|_{F=0} = \frac{E^*}{C^*} = \frac{1}{R_3}$$

Substitusikan ke dalam b

$$b = w_1(0) + w_2(0) + w_3 \left(\frac{1}{R_3} \right) = \frac{1}{R_3}$$

Karena dipilih $w_3 = 1$, maka

$$b = \frac{1}{R_3} > 0.$$

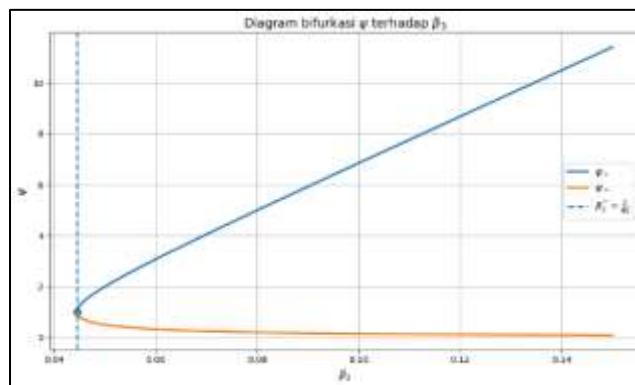
Karena $a > 0$ dan $b > 0$, berdasarkan kriteria, maka sistem mengalami *backward bifurcation* pada saat $R_0 = 1$. Hasil tersebut dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 8. Jika $R_1 > 1$ dan $R_2 > 1$, $R_1 + R_2^{-1} < 2$, $R_2 < 2 - \gamma_3/\gamma_1$, maka sistem mengalami bifurkasi mundur pada $R_0 = (R_3 - 1)(R_2 - 1) = 1$.

Bukti.

Diperoleh dari perhitungan koefisien $a > 0$ dan $b > 0$ di atas. ■

Berdasarkan Teorema 5, sistem mengalami bifurkasi mundur. Berikut disajikan grafik dua cabang Solusi ψ_1 dan ψ_2 terhadap parameter β_3 .



Gambar 4.5 Grafik Dua Cabang Solusi

Berdasarkan Gambar 4.5, diperoleh dua cabang solusi ψ_1 dan ψ_2 yang bertemu pada titik kritis β_3^* . Keberadaan dua cabang solusi tersebut menunjukkan adanya dua titik kesetimbangan endemik yang berbeda. Fenomena ini menjadi indikasi terjadinya bifurkasi mundur yang kemudian

dijelaskan melalui analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik dan keberadaan titik kesetimbangan endemik pada kondisi $R_0 < 1$.

Dari hasil tersebut dapat ditentukan kestabilan masing-masing titik kesetimbangan endemik, yaitu:

- i. P_3^{*+} bersifat stabil asimtotik, artinya jika kondisi awal populasi berada di sekitar P_3^{*+} maka, fanatisme akan menetap dalam populasi ini.
- ii. P_3^{*-} bersifat tidak stabil karena titik ini berperan sebagai ambang batas. Jika kondisi awal berada di atas P_3^{*-} maka sistem menuju ke P_3^{*+} , sedangkan jika di bawah P_3^{*-} maka sistem menuju titik kesetimbangan bebas fanatisme.

Keberadaan bifurkasi mundur ini memiliki implikasi penting, yaitu meskipun $R_0 < 1$, fanatisme belum tentu hilang dari populasi karena dinamika sistem dipengaruhi oleh kondisi awal. Hal ini menunjukkan bahwa menurunkan nilai $R_0 < 1$ saja belum cukup untuk mengeliminasi fanatisme. Oleh karena itu, strategi pengendalian populasi perlu difokuskan pada upaya pengurangan rekrutmen individu ke dalam kelompok inti sehingga populasi dapat diarahkan menuju kondisi bebas fanatisme.

4.2.3 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0^*)

Pada model ini terdapat dua jenis ambang yang muncul. Pertama, bilangan reproduksi dasar R_0^* yang diperoleh melalui metode *Next Generation Matrix* (NGM). Parameter ini digunakan untuk mengukur potensi penyebaran fanatisme ketika sistem berada pada kondisi bebas fanatisme. Kedua, ambang bifurkasi $R_0 = (R_2 - 1)(R_3 - 1)$ yang digunakan dalam analisis kestabilan titik kesetimbangan

P_2^* , kedua parameter ambang tersebut memiliki peran yang berbeda, yaitu R_0^* menentukan apakah fanatisme dapat muncul dari awal, sedangkan R_0 menentukan apakah fanatisme dapat bertahan ketika sudah ada kelompok semi fanatik dan fanatik.

Berikut langkah-langkah untuk menentukan R_0^* :

1. Mengambil persamaan yang berkaitan dengan proses penularan, di mana dalam model ini yang berkaitan dengan kompartemen terinfeksi adalah E dan F .
2. Linierisasi sistem penyebaran fanatisme pada titik kesetimbangan bebas fanatisme P_1^* menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\gamma_1(1 - R_1) & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 & 2\gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 \\ 0 & \gamma_2(R_2 - 1) & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 \end{bmatrix}$$

3. Selanjutnya dilakukan dekomposisi menjadi dua matriks, yaitu matriks F dan V . Matriks F menyatakan laju munculnya infeksi baru, sedangkan matriks V menyatakan laju perpindahan atau keluarnya individu dari kompartemen terinfeksi. Berdasarkan sistem yang diperoleh, matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \beta_2 S \frac{E + F}{C} \\ \beta_3 E \frac{F}{C} \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{E_1} = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \beta_3 E \frac{F}{C} + \gamma_2 E \\ \gamma_3 F \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Big|_{E_1} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

4. Menentukan V^{-1} menggunakan matriks F yang berarti menggambarkan laju bertambahnya fanatisme dan matriks V yang menggambarkan laju berkurangnya fanatisme. Sehingga didapatkan:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_3} \end{bmatrix}$$

5. Kemudian menghitung R_0^* di mana $R_0^* = \rho(FV^{-1})$, dengan $\rho(FV^{-1})$ merupakan nilai eigen absolut dominan (radius spectral) dari K di mana merupakan matriks *Next Generation*, maka:

$$K = (FV^{-1}) = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\gamma_2} & \frac{\beta_2}{\gamma_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0^*) yaitu:

$$R_0^* = \rho(K) = \rho \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\gamma_2} & \frac{\beta_2}{\gamma_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$$

Hasil nilai bilangan reproduksi dasar yang diperoleh pada model ini identic dengan titik ambang R_2 .

Berdasarkan hasil analisis dinamik yang telah dilakukan, diperoleh beberapa titik kesetimbangan dengan syarat eksistensi dan kestabilan masing-masing. Secara keseluruhan, hasil tersebut dapat dirangkum dalam table berikut.

Tabel 4.3 Hasil Titik Kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
P_0^*	Selalu ada	Tidak stabil
P_1^*	$R_1 > 1$	$R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$
P_2^*	$R_2 > 1$ dan $R_d \geq 1$	$R_2 > 1, R_d \geq 1$ dan $R_0 < 1$
P_3^{**}	$\beta_3^T \leq \beta_3 \leq \beta_3^*$	Stabil asimtotik jika $R_0 < 1$

Titik Keseimbangan	Syarat Eksistensi	Syarat Kestabilan
P_3^{*-}	$\beta_3^T \leq \beta_3 \leq \beta_3^*$	Tidak stabil

Dengan $R_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$, $R_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$, $R_d = \frac{\nu R_1 R_2}{R_2 - 1 + \nu}$ dan $R_0 = (R_3 - 1)(R_2 - 1)$. Keberadaan dua titik keseimbangan endemik (P_3^{*+}) dan (P_3^{*-}) hanya terjadi ketika $R_0 < 1$, karena jika $R_0 > 1$ sistem hanya memiliki satu titik keseimbangan endemik positif. Berdasarkan tabel di atas, terlihat bahwa dinamika sistem sangat dipengaruhi oleh nilai parameter dan kondisi awal populasi. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk memperjelas perilaku sistem secara numerik yang disajikan pada sub bab berikut.

4.3 Simulasi Dinamik Model GSEF pada Penyebaran Fanatisme

Simulasi dinamik model GSEF dilakukan untuk menggambarkan perilaku solusi terhadap waktu dengan menggunakan nilai parameter tertentu. Pada penelitian ini, simulasi digunakan untuk menganalisis dinamika penyebaran fanatisme dalam populasi, serta mengamati perubahan jumlah individu pada masing-masing kompartemen, yaitu *Susceptible* ($S(t)$), *Exposed* ($E(t)$) dan *Fanatic* ($F(t)$). Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi diasumsikan secara representatif dengan tetap memperhatikan batasan nilai yang memungkinkan, sehingga model tetap konsisten secara matematis. Berdasarkan analisis dinamik yang telah dilakukan pada sub bab 4.2, diperoleh bahwa sistem memiliki fenomena bifurkasi mundur. Untuk mengecek hasil tersebut secara numerik, dilakukan simulasi dengan nilai parameter sebagai berikut.

Tabel 4.4 Nilai Parameter Model SEF

Parameter	Definisi	Nilai	Satuan	Sumber
β_1	Laju perpindahan individu dari kelompok umum ke kelompok rentan	0.0042	Per hari	Aldila dkk, (2015)

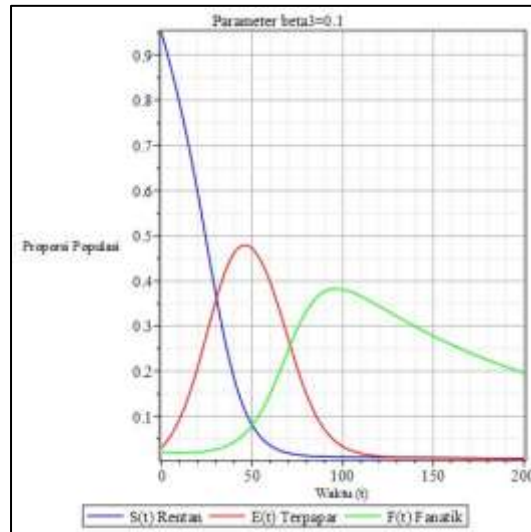
Parameter	Definisi	Nilai	Satuan	Sumber
β_2	Laju perpindahan dari individu rentan ke kelompok semi fanatik	0.1	Per hari	Aldila dkk, (2015)
β_3	Laju penularan dari individu semi fanatik terhadap kelompok fanatik	0.1	Per hari	Aldila dkk, (2015)
γ_1	Individu yang keluar atau pulih dari kelompok rentan	0.01	Per hari	Aldila dkk, (2015)
γ_2	Individu yang keluar atau pulih dari kelompok semi fanatik	0.01	Per hari	Aldila dkk, (2015)
γ_3	Individu yang keluar atau pulih dari kelompok fanatik	0.01	Per hari	Aldila dkk, (2015)

Nilai awal populasi dipilih untuk mempresentasikan kondisi awal sistem. Pada simulasi ini diasumsikan bahwa sebagian besar individu berada pada kelompok rentan, sementara sebagian kecil lainnya berada pada kelompok terpapar dan fanatik. Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini diadaptasi dari kondisi awal simulasi Aldila dkk (2015). Karena model penelitian memiliki kompartemen $E(t)$, maka sebagian kecil populasi awal dialokasikan ke kelas $E(t)$.

Tabel 4.5 Nilai Awal Model SEF

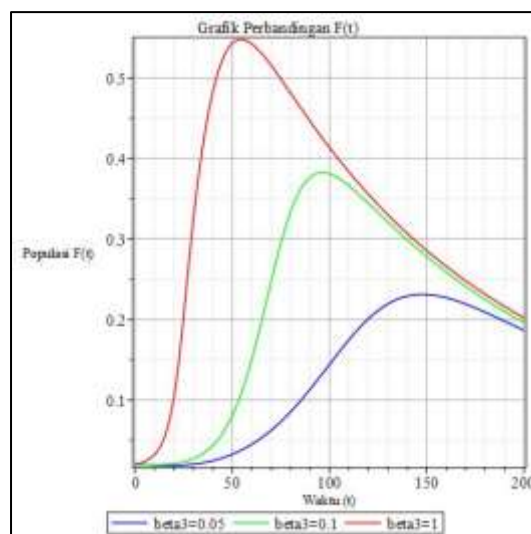
Tabel Variabel	Nilai Awal
$S(t)$	0.95
$E(t)$	0.03
$F(t)$	0.02

Berdasarkan nilai awal dan parameter di atas, dilakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika sistem dengan memvariasikan nilai parameter β_3 sebanyak tiga kali, yang hasilnya disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut.



Gambar 4.6 Grafik Penyebaran Fanatisme Ketika $\beta_3 = 0.1$

Pada Gambar 4.8 populasi *Susceptible* ($S(t)$) mengalami penurunan yang cepat di awal waktu hingga mendekati nol. Penurunan yang terjadi karena adanya individu yang keluar dari populasi dan berpindah ke populasi lain. Sehingga, populasi *Exposed* ($E(t)$) meningkat dan menurun secara bertahap. Hal ini menjadikan populasi *Fanatic* ($F(t)$) mengalami peningkatan yang cepat dalam waktu singkat.



Gambar 4.7 Grafik Perbandingan Penyebaran Fanatisme

Berdasarkan Gambar 4.9 peningkatan nilai parameter β_3 memberikan pengaruh yang signifikan terhadap dinamika populasi fanatik. Pada saat nilai $\beta_3 = 0.01$, populasi fanatik meningkatnya lebih lambat hingga hanya sampai di sekitar 0.23 dalam waktu yang lama. Ketika $\beta_3 = 0.1$, populasi fanatik mengalami peningkatan yang lebih cepat dan mencapai nilai maksimum sekitar 0.38. Selanjutnya, jika $\beta_3 = 1$, populasi fanatik mengalami peningkatan yang sangat cepat dengan nilai maksimum tertinggi di waktu yang lebih singkat. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar nilai β_3 , maka semakin cepat proses perpindahan individu dari kelompok *Exposed* ($E(t)$) menuju kelompok *Fanatic* ($F(t)$) sehingga jumlah individu fanatik yang terbentuk menjadi lebih banyak dalam waktu yang singkat. Meskipun demikian, setelah mencapai nilai maksimum, ketiga kurva menunjukkan pola penurunan yang sama hingga mendekati nol pada jangka panjang.

Berdasarkan keseluruhan hasil simulasi yang telah dilakukan, diperoleh gambaran menyeluruh mengenai pengaruh parameter β_3 terhadap dinamika penyebaran fanatisme dalam populasi. Simulasi numerik menunjukkan bahwa perubahan nilai β_3 , yang merepresentasikan laju perpindahan individu dari kelompok terpapar ke kelompok fanatik, memberikan pengaruh yang signifikan terhadap dinamika sistem. Ketika β_3 bernilai kecil, populasi fanatik cenderung menurun hingga mendekati nol sehingga sistem menuju titik kesetimbangan bebas fanatisme. Namun, ketika nilai β_3 meningkat, populasi fanatik mampu bertahan lebih lama dan sistem mulai menuju titik kesetimbangan endemik dengan keberadaan populasi fanatik yang stabil. Hasil ini juga mengonfirmasi secara numerik terjadinya fenomena backward bifurcation pada model GSEF, di mana

meskipun nilai ambang telah menurun, populasi fanatik masih dapat bertahan dalam sistem. Dengan demikian, parameter β_3 berperan penting dalam menentukan keberlangsungan penyebaran fanatisme dan arah dinamika sistem secara keseluruhan.

4.4 Fanatisme Dalam Sudut Pandang Matematika dan Islam

Hasil simulasi dinamik model GSEF menunjukkan bahwa penyebaran fanatisme dipengaruhi oleh nilai parameter model. Ketika nilai β_3 kecil, populasi fanatik cenderung menurun hingga mendekati nol sehingga sistem menuju kondisi bebas fanatisme. Sebaliknya, Ketika nilai β_3 meningkat populasi fanatik bertahan lebih lama dan fanatisme akan menetap secara stabil dalam populasi dalam jangka panjang. Selain itu, fenomena bifurkasi mundur yang ditemukan menunjukkan bahwa menurunkan bilangan reproduksi dasar di bawah satu saja tidak cukup untuk mengeliminasi fanatisme dari populasi. Hal ini berarti perubahan perilaku individu dalam populasi yang tercermin dari nilai parameter β_3 menjadi faktor penentu utama dalam penyebaran fanatisme. Temuan ini sejalan dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Ar-Ra'ad ayat 11 (Kemenag RI, 2024), yang artinya

“Baginya (manusia) ada (malaikat-maliakat) yang menyertainya secara bergiliran dari depan dan belakangnya yang menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak mengubah apa yang ada pada diri mereka. Apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, tidak ada yang dapat menolaknya dan sekali-kali tidak ada pelindung bagi mereka.”

Dalam Tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa perubahan suatu keadaan tidak terjadi secara tiba-tiba, melainkan sangat bergantung pada perubahan dari dalam diri manusia itu sendiri. Allah SWT tidak akan mengubah kondisi suatu kaum sebelum mereka terlebih dahulu mengubah sikap dan pola pikir mereka. Selain itu, apabila Allah menetapkan suatu keburukan terhadap suatu kaum, maka tidak ada

kekuatan yang mampu menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain-Nya (Al-Sheikh, 2003).

Berdasarkan perspektif Al-Qur'an, terdapat beberapa upaya yang dapat dilakukan untuk mencegah dan mengurangi sikap fanatisme dalam masyarakat. Sebagaimana dijelaskan dalam naskah Musabaqah Tilawatil Qur'an (MMQ 022, 2019), terdapat upaya pencegahan, yaitu:

1. Kesadaran akan kesamaan derajat manusia di sisi Allah SWT, bahwa tidak ada yang membedakan manusia satu dengan lainnya kecuali kadar ketakwaan.
2. Bersatu mempererat tali persaudaraan, baik persaudaraan sesama akidah maupun dengan masyarakat yang berlainan kaidah.
3. Mewujudkan keadilan sosial yang merata, dengan bersikap adil dan tidak berpihak kepada kelompok tertentu secara berlebihan.
4. Bermusyawarah dalam mencari solusi dengan mengedepankan sikap lemah lembut dan tidak egois dalam perbedaan pendapat.

Hal tersebut menunjukkan bahwa perubahan perilaku individu dalam populasi yang dimulai dari kesadaran diri, penguatan persaudaraan, keadilan dan musyawarah sangat berperan dalam menekan penyebaran fanatisme.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada BAB IV, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil dari analisis dinamik dari konstruksi model matematika penyebaran fanatisme pada populasi *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* diperoleh hasil sebagai berikut:

- a. Model memiliki lima titik kesetimbangan yaitu tiga titik kesetimbangan bebas fanatisme, diantaranya $P_0^* = (0, 0, 0)$, $P_1^* = \left(1 - \frac{1}{R_1}, 0, 0\right)$ dan

$$P_2^* = (S^*, E^*, 0), \text{ dengan}$$

$$S^* = \frac{(R_2 - 1 + \nu)(R_d - 1)}{\nu R_1 (R_2)^2}$$

$$E^* = \frac{(R_2 - 1)(R_2 - 1 + \nu)(R_d - 1)}{\nu R_1 (R_2)^2}$$

Selain itu, terdapat dua titik kesetimbangan endemik $P_3^{*+} = (S_1, E_1, F_1)$

dan $P_3^{*-} = (S_2, E_2, F_2)$.

- b. Kestabilan titik kesetimbangan dipengaruhi oleh nilai eigen. Berdasarkan hasil yang diperoleh, analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas fanatisme P_0^* selalu ada namun tidak stabil, P_1^* bersifat stabil asimtotik jika $R_1 > 1$ dan $R_2 < 1$, P_2^* stabil asimtotik jika $R_2 > 1$, $R_d \geq 1$ dan $R_0 < 1$.

c. Bilangan reproduksi dasar yang dihasilkan adalah

$$R_0^* = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai parameter yang diperoleh, maka didapatkan nilai $R_0^* = 10$, yang menunjukkan bahwa fanatisme berpotensi menyebar dalam populasi. Selain itu, model ini juga memiliki threshold bifurkasi $R_0 = (R_2 - 1)(R_3 - 1)$ yang digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan endemik P_2^* . Fenomena bifurkasi mundur terjadi pada $R_0 = 1$, yang dibuktikan dengan koefisien $a, b > 0$. Hal ini menunjukkan bahwa menurunkan R_0^* di bawah satu saja tidak cukup untuk mengeliminasi fanatisme, kondisi awal populasi dan nilai parameter juga menentukan arah dinamika sistem.

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik model GSEF, diperoleh bahwa parameter β_3 memiliki peran penting dalam menentukan dinamika penyebaran fanatisme. Semakin besar nilai β_3 , semakin besar peluang individu terpapar untuk menjadi fanatik sehingga populasi fanatik dapat bertahan dan sistem cenderung menuju titik kesetimbangan endemik. Sebaliknya, jika nilai β_3 yang rendah menyebabkan populasi fanatik menurun dan sistem menuju titik kesetimbangan bebas fanatisme. Oleh karena itu, pengendalian nilai parameter β_3 menjadi faktor penting dalam upaya menekan penyebaran fanatisme di dalam populasi.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan beberapa pengembangan sebagai berikut:

1. Mengkaji model GSEF dengan pendekatan kontrol optimal dalam pengendalian fanatisme.
2. Dapat menganalisis lebih lanjut kondisi yang diperlukan supaya bifurkasi mundur tidak terjadi, sehingga pengendalian fanatisme cukup dengan memastikan $R_0 < 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Sheikh, D. A. bin M. bin A. bin I. (2003). *Tafsir Ibnu Katsir*. 4.
- Aldila, D., Nuraini, N., & Soewono, E. (2015). *Mathematical Model for the Spread of Extreme Ideology*. 39(Symomath 2014), 33–39. <https://doi.org/10.1063/1.4914429>
- Almamalik, L., Ganesha, P. P., & Rukmi, H. S. (2023). *Pengantar Pemodelan Sistem Dinamik* (Issue February). Deepublish.
- Arrowsmith, D. K. (1990). *An Introduction To Dynamical System* (p. 1). Cambridge University Press.
- Asni, A. A., Minggu, I., Side, S., Arwadi, F., & Mulbar, U. (2024). *Mathematical Model of Celebrity Worship Tendency Among K-Pop Fans in South Sulawesi*. 01004, 1–8.
- Castillo-chavez, C., & Song, B. (2013). Models For The Transmission Dynamics of Fanatic Behaviors. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 84, 163–189.
- DiPrima, & Boyce. (2012). *Elementary Differential Equations*. WileyPLUS.
- Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2008). *Further Notes on the Basic Reproduction Number*.
- Gumel, A. B. (2012). Journal of Mathematical Analysis and Causes of backward bifurcations in some epidemiological models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395(1), 355–365. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.077>
- Hanafi, I. (2018). Agama Dalam Bayang-Bayang Fanatisme; Sebuah upaya Mengelola Konflik Agama. *TOLERANSI: Media Ilmiah Komunikasi Umat Beragama*, 10(1), 48. <https://doi.org/10.24014/trs.v10i1.5720>
- I, H. T., & Savitri, D. (2022). *Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi Dengan Fungsi Respon Holling Tipe I*. 10(01), 1–12.
- Kemenag RI. (2022). *Al-Qur'an Digital Kemenag – Surah Al-An'am:159*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/6?from=159&to=165>
- Kemenag RI. (2024). *Al-Qr'an Digital Kemenag-Surah Ar-Ra'ad:11*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/16?from=11&to=11>

- Khader, Mustaffa, Sedek, Y. (2016). *Fanatik Beragama Dalam Kalangan Masyarakat Islam Di Malaysia: Analisis Berdasarkan Pemahaman Terhadap Fiqih Al- Hadis*. 1–27.
- Lesmana, R. P. D., & Syafiq, M. (2022). Fanatisme Agama dan Intoleransi pada Pengguna Media Sosial. *Character : Jurnal Penelitian Psikologi*, 9(3), 36–49.
- MMQ 022. (2019). *Solusi Pencegahan dan Penanganan Sikap Fanatisme di Indonesia Menurut Perspektif Al-Qur'an*.
- Nahdatul Ulama'. (2025). *Surat An-Nahl Ayat 125*. Nahdatul Ulama'. <https://quran.nu.or.id/an-nahl/125>
- Pasaribu, I. (2025). *Sikap atas Ikhtilaf Fiqh Ibadah menurut Yusuf al-Qaradhawi : Pencegahan Konflik Internal Umat Islam di Indonesia*. 6(1), 131–145.
- Risman, K. (2022). *Fanatisme Mahasiswa Islam* (R. Iye (ed.); 1st ed., p. 190). Penerbit Rena Cipta Mandiri.
- Romli, R. C. (2019). Beralih ke Haluan Islamisme: Gen Z, Media Sosial & Intoleransi di Indonesia. *Dakwah: Jurnal Kajian Dakwah Dan Kemasyarakatan*, 22(1), 31–43. <https://doi.org/10.15408/dakwah.v22i1.12045>
- Strogatz, S. H. (2018). *Non Linier Dynamics and Chaos*. CRC Press.
- Thalib, A. (2022). *Tafsir Ath-Thabari* (Issue 21367).
- Yong, B., & Azah, N. (2018). *The SIR Political Fanaticism Figure Voters Model For Estimating Number Of Votes In Indonesian Presidential Elections*. 13, 279–286. <https://doi.org/10.3233/MAS-180434>
- Zill, C. (2009). *Differential Equations with Boundary-Value Problem*. Brooks/Cole, Cengage Learning.

LAMPIRAN

Script Maple dan hasil simulasi numerik model penyebaran perilaku fanatisme yang digunakan dalam penelitian ini dapat diakses melalui tautan berikut.
<https://11nk.dev/analisis-dinamik-model-gsef-hasna>

RIWAYAT HIDUP



Hasna Mutiara Putri Budiman, lahir di Malang pada tanggal 23 Mei 2004. Penulis tinggal di Kendalpayak, kecamatan Pakisaji, Kabupaten Malang. Anak pertama dari 3 bersaudara. Pendidikan dasar di tempuh di MINU Bululawang, lalu melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Al-Rifai'e Gondanglegi, kemudian menengah atas di SMA Al-Rifai'e Gondanglegi. Pada tahun 2022 penulis memulai menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam kegiatan akademik maupun non-akademik serta menjalani proses pembelajaran yang menjadi bekal dalam penyusunan skripsi ini. Apabila ingin mengenal lebih lanjut tentang profil penulis dapat mengunjungi akun Instagram dengan *username* @putriehasn.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hasna Mutiara Putri Budiman
NIM : 220601110076
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *General, Susceptible, Exposed, Fanatic* Pada Penyebaran Perilaku Fanatisme
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	07 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	28 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	11 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	02 Desember 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	02 Desember 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	18 Desember 2025	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	18 Desember 2025	ACC Seminar Proposal	7.
8.	19 Desember 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	13 Januari 2026	Seminar Proposal	9.
10.	02 Februari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	11 Februari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11.
12.	09 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	10 Maret 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	13.
14.	13 Maret 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	14.
15.	31 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	06 April 2026	ACC Bab IV dan V	16.
17.	05 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Kajian Agama Bab IV	17.
18.	11 Mei 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	18 Mei 2026	ACC Seminar Hasil	19.
20.	22 Mei 2026	Seminar Hasil	20.
21.	26 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	31 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	22.
23.	05 Juni 2026	ACC Naskah Skripsi	23.
24.	05 Juni 2026	Sidang Skripsi	24.
25.	15 Juni 2026	ACC Keseluruhan	25.

Malang, 15 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Wahid Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012