

**KEKONVERGENAN DERET GANDA BERULANG PADA
HIMPUNAN BILANGAN REAL**

SKRIPSI

**OLEH
RUSMIYATI
NIM. 220601110046**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**KEKONVERGENAN DERET GANDA BERULANG PADA
HIMPUNAN BILANGAN REAL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Rusmiyati
NIM. 220601110046**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

KEKONVERGENAN DERET GANDA BERULANG PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

SKRIPSI

**Oleh
Rusmiyati
NIM. 220601110046**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 06 Mei 2026

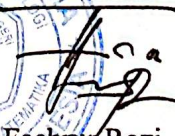
Dosen Pembimbing I


**Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003**

Dosen Pembimbing II


**Ari Kusumastuti, M.Si.
NIP. 19770521 200501 2 004**

**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**


**Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012**



KEKONVERGENAN DERET GANDA BERULANG PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

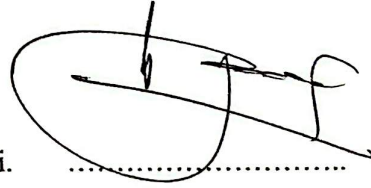
SKRIPSI

Oleh
Rusmiyati
NIM. 220601110046

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 11 Juni 2026

Ketua Penguji : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si.

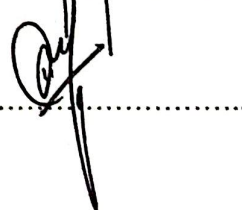


Anggota Penguji 1 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.



Anggota Penguji 3 : Ari Kusumastuti, M.Si.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama : Rusmiyati

NIM : 220601110046

Program Studi: Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kekonvergenan Deret Ganda Berulang pada Himpunan Bilangan Real

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber kutipan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Rusmiyati

NIM. 220601110046

MOTO

“kewajiban kita itu usaha bukan hasil, kewajiban kita itu rajin bukan pintar, maka urusan pintar dan paham itu urusan Allah”

(Buya Abdul Mun'im Syadzili)

“Sesungguhnya sesudah kesulitan ada kemudahan”

(QS Al-Insyirah:6)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji dan ucapan rasa syukur panjatkan kepada Allah SWT, berkat rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini. Dengan segenap hati, rasa syukur dan rasa bahagia karena telah sampai pada titik ini, tentunya bukan suatu hal yang mudah, tetapi dengan niat, dukungan dan juga doa dari orang-orang baik disekitar penulis, pada akhirnya tugas akhir ini terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua tercinta, Bapak Ayyub dan Ibu Alima, yang dalam diamnya menyimpan doa paling tulus, yang dalam lelahnya tetap tersenyum demi masa depanku, dan yang dalam setiap langkahku selalu menjadi alasan untuk tidak menyerah. Jika hari ini ada satu pencapaian yang bisa kubanggakan, sesungguhnya itu adalah pantulan dari cinta, pengorbanan, dan keteguhan hati kalian yang tak pernah meminta balasan. Kepada dosen pembimbing dan dosen penguji, penulis mengucapkan terima kasih atas bimbingan, arahan, dan kritik yang membangun selama proses penyusunan skripsi ini. Tidak lupa kepada keluarga, sahabat, dan seluruh pihak yang telah memberikan doa dan dukungan moral maupun motivasi, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menjadi bentuk tanggung jawab akademik penulis atas ilmu yang telah diperoleh.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kekonvergenan Deret Ganda Berulang pada Himpunan Bilangan Real”. Shalawat serta salam tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi wasallam, yang telah membimbing umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang penuh cahaya ilmu dan iman.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak akan dapat terselesaikan tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh rasa hormat, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., CAHRM., CRMP, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu dan memberikan bimbingan arahan kepada penulis. Semoga ilmu yang Bapak bagikan menjadi amal jariyah dan senantiasa bermanfaat.
5. Ari Kusumastuti, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan pikirannya serta memberikan saran sehingga terselesaikan skripsi ini.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku Dosen Ketua Penguji dalam ujian skripsi. Terima kasih telah meluangkan waktu dan pikirannya serta memberikan saran sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan.
7. Dian Maharani, M.Si, selaku Dosen Penguji I dalam ujian skripsi ini. Terima kasih atas kesabaran, arahan, bimbingan serta masukan yang berharga dalam proses penyusunan skripsi ini. Semoga segala

bimbingan yang diberikan menjadi pahala dan berkah bagi Ibu.

8. Seluruh Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Terkhusus untuk kedua orang tua Bapak Ayyub dan Ibu Alima yang tak henti-hentinya untuk mendoakan, melimpahkan kasih dan sayangnya, memberikan dukungan moril dan materil, serta mendengarkan keluh kesah penulis sehingga terselesaikan perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
10. Kepada kakak-kakak penulis yang tersayang, yang selalu memberikan semangat, dukungan, motivasi, serta doa yang selalu dipanjatkan untuk penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Partner dan sahabat penulis, Saila dan Tia yang senantiasa memberikan semangat dukungan, serta waktu yang berharga dalam proses penyusunan skripsi ini. Terima kasih telah hadir dalam setiap proses, menjadi tempat berbagi cerita, keluh kesah, serta tawa yang menguatkan di tengah perjalanan yang tidak selalu mudah.
12. Seluruh mahasiswa program studi matematika angkatan 2022 “MATHDEUX” atas kebersamaan, dukungan, serta yang senantiasa membantu selama masa perkuliahan untuk meraih gelar sarjana.
13. Terakhir, untuk diriku sendiri Rusmiyati yang telah berani melangkah dan berjuang sejauh ini. Segala lelah yang telah lalu semoga menjadi berkah untuk perjalanan selanjutnya. Tetaplah bermimpi dan percaya pada diri sendiri. Sekarang dan selamanya.

Dengan seluruh kerendahan hati, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan ke depannya. Semoga hasil karya ini dapat memberikan manfaat bagi semua orang. Amin.

Malang, 11 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص بحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian	7
1.4 Manfaat Penelitian	7
1.5 Batasan Masalah	8
1.6 Definisi Istilah	9
BAB II KAJIAN TEORI	11
2.1 Sistem Bilangan Real	11
2.1.1 Himpunan Bilangan Real	11
2.1.2 Keterurutan Bilangan Real	11
2.1.3 Keterbatasan Bilangan Real	12
2.2 Barisan Bilangan Real	16
2.2.1 Barisan Konvergen	16
2.2.2 Barisan yang Terbatas	18
2.2.3 Barisan Cauchy	19
2.2.4 Barisan Monoton	22
2.3 Deret Bilangan Real	24
2.4 Barisan Ganda Bilangan Real	27
2.5 Deret Ganda Bilangan Real	29
2.6 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits	30
2.7 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	34
BAB III METODE PENELITIAN	36
3.1 Jenis Penelitian	36
3.2 Pra Penelitian	36
3.3 Tahapan Penelitian	37
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	43
4.1 Kekonvergenan Barisan Ganda	43
4.1.1 Keterbatasan Barisan Ganda	45
4.1.2 Limit Berulang pada Barisan Ganda	47

4.1.3	Kriteria Cauchy pada Barisan Ganda	52
4.1.4	Barisan Ganda Monoton.....	54
4.1.5	Teorema-teorema Limit Barisan Ganda	58
4.2	Kekonvergenan Deret Ganda.....	65
4.3	Kekonvergenan Deret Ganda Berulang.....	72
BAB V	PENUTUP	79
5.1	Kesimpulan.....	79
5.2	Saran	80
DAFTAR PUSTAKA		82
RIWAYAT HIDUP		84

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Suku-suku barisan ganda $x(n, m)$	28
Tabel 2.2 Suku-suku barisan ganda $x(n, m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \forall n, m \in \mathbb{N}$	29
Tabel 2.3 Suku-suku barisan ganda dari deret ganda parsial $s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \right)$	30

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Ilustrasi biji bunga matahari membentuk barisan Fibonacci.....	1
Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian.....	37

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini yaitu:

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli berdimensi 2
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real berdimensi 2
∞	: Tak hingga
(a, b)	: Interval terbuka
$[a, b]$	: Interval tertutup
$(a, b]$	: Interval setengah terbuka
$[a, b)$	: Interval setengah terbuka
$(-\infty, a]$	: Interval tak terbatas
$[a, \infty)$	: Interval tak terbatas
(x_n)	: Barisan bilangan real
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	: Deret bilangan real
$\sum_{n=1}^N x_n$	: Deret parsial dari $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$
$(x(n, m))$	: Barisan ganda bilangan real
$\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m x(i, j))$	: Deret ganda parsial
$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$	: Deret ganda bilangan real
$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)), \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$	: Deret ganda berulang bilangan real
$ \dots $	: Nilai mutlak
$[\dots]$	: Pembulatan lebih dari satu atau sama dengan
$\forall$	: Untuk setiap
$\in$	: Anggota suatu himpunan
$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\subset$	: Himpunan bagian
$\subseteq$	: Himpunan bagian sama dengan
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\geq$	: Lebih dari sama dengan

$\exists$	: Terdapat
$\Rightarrow$	: Maka
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (...)$	: Limit dari (...) ketika n dan m menuju ∞
$\max\{...\}$	: Nilai terbesar suatu himpunan
$\inf\{...\}$	: Batas bawah terbesar suatu himpunan
$\sup\{...\}$	: Batas atas terkecil suatu himpunan
$(\Rightarrow)$	: Bukti dari kiri ke kanan
$(\Leftarrow)$	: Bukti dari kanan ke kiri
$\rightarrow$	: Pemetaan anggota
$\rightarrow$	: Menuju/konvergen ke

ABSTRAK

Rusmiyati, Rusmiyati. 2026. **Kekonvergenan Deret Ganda Berulang pada Himpunan Bilangan Real**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Si.

Kata Kunci: Kekonvergenan, Barisan Ganda, Deret Ganda, Deret Ganda Berulang.

Deret ganda merupakan generalisasi dari deret biasa yang penjumlahan suku-sukunya bergantung pada dua indeks dan dinyatakan dalam bentuk $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$. Pada deret tunggal, penjumlahan suku-sukunya bergantung pada satu indeks, yang dinyatakan dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Adanya penjumlahan berulang tersebut tentunya menyebabkan sifat kekonvergenan deret ganda berulang dapat berbeda dengan deret tunggal. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat kekonvergenan deret ganda berulang. Metode penelitian yang digunakan adalah kajian pustaka. Kajian ini diawali dengan memberikan definisi deret ganda berulang, kemudian membahas sifat yang berkaitan dengan kekonvergenan deret ganda. Hasil penelitian menyimpulkan bahwa misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$, maka deret ganda berulang $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$ ada. Limit kedua deret ganda berulang tersebut sama dengan s jika dan hanya jika berlaku: (1) $\forall m \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen, (2) $\forall n \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen. Selain itu, jika deret ganda dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dua deret yang konvergen, yaitu $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$, di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = xy$.

ABSTRACT

Rusmiyati, Rusmiyati. **Convergence of Iterated Double Series on the Set of Real Number.** Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Si.

Keywords: Convergence, Double Sequences, Double Series, Iterated Double Series.

A double series is a generalization of an ordinary series in which the summation of its terms depends on two indices and is expressed in the form $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$. In an ordinary series, the summation of its terms depends on a single index and is expressed in the form $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)$. The existence of such repeated summation naturally means that the convergence properties of a iterated double series can differ from those of a single series. This study aims to prove the convergence properties of iterated double series. The research method employed is a literature review. The study begins by providing the definition of an iterated double series and then discusses properties related to the convergence of double series. The results show that if the double series $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ convergence to $s \in \mathbb{R}$, then the iterated double series $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$ and $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$ exists. The limits of these two iterated double series are equal to s if and only if the following conditions hold: (1) for every $\forall m \in \mathbb{N}$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ convergence, (2) for every $\forall n \in \mathbb{N}$, the series $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ convergence. On the other hand, if the double series can be expressed as the product of two convergent series, namely $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) =$, where $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ and y , then $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = xy$.

مستخلص البحث

رسميائي، رسميائي. ٢٠٢٦. تقارب المتسلسلات المضاعفة المتكررة على مجموعة الأعداد الحقيقية. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتور خير الرحمن ، الماجستير في العلوم. (٢) أري كوسوماستوتي، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: التقارب، المتتالية المضاعفة، المتسلسلة المضاعفة، المتسلسلة المضاعفة المتكررة.

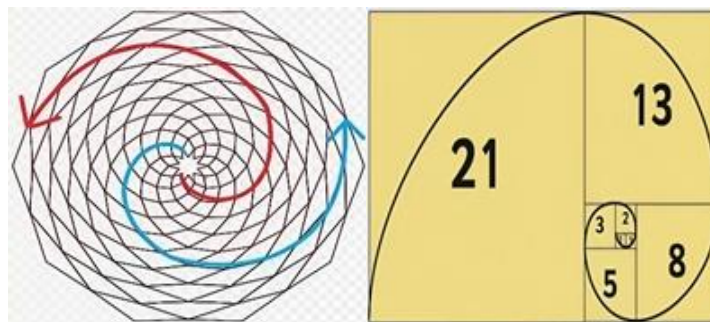
المتسلسلة المزدوج هي تعميم للمتسلسلة العادية، حيث يعتمد جمع حدودها على دليلين (مؤشرين) ويتم التعبير عنها في الشكل $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m)$ أما في المتسلسلة الأحادية، فإن جمع الحدود يعتمد على دليل واحد فقط، وتكتب في الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تطورت المتسلسلة المزدوجة لتصبح "متسلسلة مزدوجة متكررة"، وهي متسلسلة مزدوجة يتم إجراء الجمع فيها خطوة بخطوة لكل دليل على حدة. إن وجود مثل هذا الجمع المتكرر يعني بطبيعة الحال أن خصائص التقارب للمتسلسلة المزدوجة المتكررة قد تختلف عن خصائص المتسلسلة الأحادية. هدفت هذه الدراسة إلى إثبات خصائص تقارب المتسلسلات المزدوجة المتكررة. والمنهج المتبع في هذا البحث هو الدراسة المكتبية (مراجعة الأدبيات). بدأت هذه الدراسة بتقديم تعريف المتسلسلة المزدوجة المتكررة، ثم مناقشة الخصائص المتعلقة بتقارب المتسلسلة المزدوجة. وخلصت نتائج البحث إلى أنه إذا كانت المتسلسلة المزدوجة $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m)$ متقاربة إلى $s \in \mathbb{R}$ ، فإن المتسلسلتين المزدوجتين المتكررتين $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n,m))$ و $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n,m))$ وكانت نهاية هاتين المتسلسلتين المتكررتين مساوية إلى s إذا وفقط إذا تحقق ما يلي: (١) لكل $m \in \mathbb{N}$ ، تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x(n,m)$ متقاربة. (٢) لكل $n \in \mathbb{N}$ ، تكون المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} x(n,m)$ متقاربة. علاوة على ذلك، إذا أمكن التعبير عن المتسلسلة المزدوجة كحاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين، أي $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$ ، حيث $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ ، $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n,m)) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n,m)) = xy$ يقتصر نطاق جميع المتتاليات المزدوجة والمتسلسلات المزدوجة التي تمت مناقشتها في هذا البحث على مجال الأعداد الحقيقية.

PENDAHULUAN

BAB I

1.1 Latar Belakang

Konsep barisan dan deret merupakan salah satu topik fundamental yang dibahas dalam bidang matematika. Konsep ini berfungsi untuk menyelesaikan berbagai permasalahan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari, contohnya nomor antrian yang digunakan di bank, banyaknya halaman buku yang dibaca setiap hari, uang tabungan per bulan, serta nomor rumah di sebuah jalan. Barisan juga dapat ditemukan di alam, seperti bentuk rumah keong dan susunan biji bunga matahari yang membentuk barisan Fibonacci, seperti yang terlihat pada gambar berikut.



Gambar 1.1 Ilustrasi biji bunga matahari membentuk barisan Fibonacci.

Pada gambar di atas, dapat dilihat bahwa pusat biji bunga matahari tersebut merupakan gabungan dari seperempat lingkaran yang jari-jarinya membentuk barisan Fibonacci. Dengan demikian, kajian barisan tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga memiliki relevansi yang kuat dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan terapan dan kehidupan nyata.

Terdapat beberapa contoh barisan yang sering dibahas dalam kajian matematika, di antaranya barisan aritmatika, barisan geometri, barisan Fibonacci,

dan barisan harmonik. Barisan aritmatika adalah barisan bilangan yang setiap suku setelah suku pertama diperoleh dengan menambahkan suatu bilangan tetap yang disebut beda atau selisih pada suku sebelumnya (Kharunnisa, 2014). Contohnya adalah barisan $2, 5, 8, 11, 14, \dots$. Berbeda dengan barisan aritmatika, barisan geometri adalah barisan bilangan yang setiap sukunya diperoleh dengan mengalikan suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap yang disebut rasio (Larson dkk, 2007). Sebagai contoh, barisan $3, 6, 12, 24, 48, \dots$. Selain kedua barisan tersebut, terdapat barisan Fibonacci yaitu barisan bilangan yang setiap sukunya merupakan hasil penjumlahan dua suku sebelumnya (Stewart, 2011). Sebagai contoh, barisan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Sementara itu, barisan harmonik adalah barisan bilangan yang kebalikannya membentuk suku-suku suatu barisan aritmatika (Larson dkk, 2007). Sebagai contoh, barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ merupakan barisan harmonik yang berasal dari barisan aritmatika $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Dengan demikian, keempat jenis barisan tersebut menunjukkan beragam pola keteraturan bilangan yang menjadi dasar penting dalam pengembangan konsep-konsep matematika lebih lanjut.

Menurut Bartle & Sherbert (2011), barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli yang mana daerah hasil termuat di himpunan bilangan real. Barisan dapat dinotasikan sebagai (x_n) dengan $n \in \mathbb{N}$, di mana setiap bilangan x_n disebut sebagai suku ke- n dari barisan tersebut. Sebagai contoh, diberikan fungsi dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(n) = \frac{1}{n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ membentuk barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}$.

Barisan pada himpunan bilangan real memiliki berbagai sifat, di antaranya adalah sifat monoton, konvergen, dan Cauchy. Menurut Sugiman (2005), suatu

barisan bilangan real (x_n) dikatakan barisan monoton naik apabila setiap sukunya lebih besar atau sama dengan suku sebelumnya, contohnya adalah barisan $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Sementara itu, suatu barisan bilangan real (x_n) dikatakan barisan monoton turun apabila setiap sukunya lebih kecil atau sama dengan suku sebelumnya. Sebagai contoh barisan $10, 8, 6, 4, \dots$. Selajutnya, suatu barisan bilangan real (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, apabila untuk $\forall \varepsilon > 0$, terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$ (Sidjara dkk, 2023). Selain itu, barisan bilangan real (x_n) disebut barisan Cauchy apabila untuk $\forall \varepsilon > 0, \exists H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n, m \geq H(\varepsilon)$, berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$ (Bartle & Sherbert, 2011). Dengan kata lain, suatu barisan dikatakan sebagai barisan Cauchy apabila jarak antara dua suku barisan, yaitu x_n dan x_m dapat dibuat sekecil mungkin untuk pasangan terurut n dan m yang cukup besar. Barisan konvergen memiliki keterkaitan dengan barisan Cauchy, di mana barisan konvergen pasti merupakan barisan Cauchy, akan tetapi tidak semua barisan Cauchy merupakan barisan konvergen (Bartle & Sherbert, 2011).

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia sering membutuhkan konsep yang berkaitan dengan deret. Contohnya, ketika seseorang rutin menabung setiap bulan, jumlah tabungan akan bertambah mengikuti pola tertentu, sehingga pola pertambahan tersebut dapat dikaitkan dengan barisan dan deret dalam matematika. Barisan menunjukkan urutan tabungan pada setiap bulan, sedangkan deret menunjukkan total keseluruhan tabungan yang diperoleh dari penjumlahan tabungan tersebut. Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa konsep barisan berbeda dengan deret. Barisan merupakan urutan bilangan. Sedangkan

deret adalah jumlah barisan. Dengan demikian, deret didefinisikan sebagai penjumlahan suku-suku dari suatu barisan, yaitu $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ dan dilambangkan dengan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ merupakan deret yang dibentuk dari barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Misalkan $s_N = \sum_{n=1}^N x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ adalah jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dapat dikatakan konvergen, apabila barisan (s_N) konvergen.

Seiring berjalannya waktu, peneliti mengembangkan konsep baru terkait barisan bilangan real, yaitu barisan ganda. Barisan ganda bilangan real merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$ (Anthony dkk., 2019). Barisan ganda dilambangkan sebagai $(x(n, m))$, di mana $n, m \in \mathbb{N}$ (Sidjara dkk., 2023). Sebagai contoh, diberikan fungsi dari $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $x(n, m) = \frac{n}{n+m}$ untuk semua $n, m \in \mathbb{N}$ membentuk barisan ganda $(x(n, m)) = \left(\frac{n}{n+m}\right) \in \mathbb{R}$.

Barisan tunggal dapat membentuk deret dari suatu barisan tersebut. Demikian juga, pada barisan ganda dapat membentuk deret dari barisan tersebut yang dinamakan dengan deret ganda. Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda. Dari barisan ganda tersebut dapat dibentuk jumlah parsialnya, yaitu $(s(n, m))$ yang didefinisikan dengan

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Pasangan (x, s) disebut deret ganda dan dilambangkan sebagai $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$. Setiap bilangan $x(n, m)$ disebut suku barisan ganda dan $s(n, m)$ merupakan deret

ganda parsial. Sebagai contoh, $\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$ merupakan deret ganda yang bernilai real di mana $x(n, m) = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah suku-suku barisan ganda serta $s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah suku-suku barisan ganda dari deret ganda parsial.

Deret ganda dan barisan ganda juga memiliki sifat kekonvergenan yang nantinya akan dibahas lebih lanjut pada pembahasan. Adapun beberapa penelitian terdahulu, Endou (2014) telah membahas mengenai sifat-sifat deret ganda dan kekonvergenannya. Selanjutnya, Anthony dkk (2019) membahas mengenai definisi kekonvergenan barisan ganda dan beberapa pengaplikasian uji kekonvergenan deret ganda. Selain itu, Furdui & Turzii (2011) membahas tentang deret berulang yang membuktikan bahwa untuk deret berulang dengan kondisi tertentu, nilainya dapat dihitung dari pengurangan dua deret ganda yang konvergen.

Salah satu bentuk generalisasi dari deret ganda adalah deret ganda berulang. Secara umum, deret ganda berulang dinotasikan sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$. Penelitian ini diperkenalkan oleh Sidjara dkk. (2023) di mana perbedaan deret ganda berulang dengan deret ganda terletak pada cara penjumlahannya. Pada deret ganda berulang, penjumlahannya dilakukan secara bertahap, yaitu dengan menjumlahkan terlebih dahulu terhadap satu indeks, misal $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$, yang berarti bahwa untuk setiap nilai n , penjumlahan $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ dihitung terlebih dahulu terhadap indeks m , kemudian hasilnya dijumlahkan terhadap indeks n . Sebagai contoh, misalkan $x(n, m) = \frac{1}{2^{n+m}}$, maka diperoleh $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}$, sehingga berlaku

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Sementara itu, deret ganda penjumlahannya dapat dilakukan dengan menjumlahkan dua indeks secara bersamaan, yang dinyatakan dalam bentuk $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$. Sebagai contoh, dengan menggunakan $x(n, m) = \frac{1}{2^{n+m}}$, sehingga diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

Dalam ajaran Islam, terdapat konsep tentang pencapaian keimanan tertinggi manusia, yaitu kondisi jiwa yang tenang dan kembali kepada Allah dalam keadaan diridhai. Konsep ini lebih tepatnya serupa dengan kekonvergenan deret ganda berulang, di mana setiap suku dalam deret ganda dijumlahkan secara berulang dan teratur untuk mencapai suatu nilai limit yang pasti. Sebagaimana Allah Swt berfirman dalam Q.S Al-Fajr ayat 27-28 (Kemenag, 2026):

يَا أَيَّتُهَا النَّفْسُ الْمُطْمَئِنَّةُ (٢٧) ارْجِعِي إِلَىٰ رَبِّكِ رَاضِيَةً مَّرْضِيَّةً (٢٨)

Artinya: “*Hai jiwa yang tenang. Kembalilah kepada Tuhanmu dengan hati yang puas lagi diridhai-Nya.*” (QS. Al-Fajr:27-28).

Ayat tersebut merupakan seruan Allah kepada manusia yang telah mencapai tingkatan keimanan tertinggi (*an-nafsul muthmainnah*), yaitu jiwa seorang mukmin yang telah mencapai ketenangan jiwa (*an-nafs al-muṭma'innah*), ridha, dan berserah diri kepada Allah. Menurut Tafsir Al-Muyassar (2022), menjelaskan bahwa yang dimaksud jiwa yang tenang (*an-nafs al-muṭma'innah*) adalah jiwa yang tenang dengan mengingat Allah dan beriman kepada-Nya, dan tenang karena apa yang dijanjikan Allah kepadanya berupa surga yang disediakan bagi orang-orang mukmin.

Walaupun konsep deret ganda berulang telah diperkenalkan, penjelasan mengenai sifat kekonvergenan deret ganda berulang ini masih terbatas. Dengan

demikian, pada penelitian ini penulis akan membuktikan secara rinci terkait sifat kekonvergenan pada deret ganda berulang bilangan real.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana pembuktian sifat kekonvergenan pada deret ganda berulang bilangan real?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini yaitu untuk membuktikan sifat kekonvergenan pada deret ganda berulang bilangan real.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

1. Manfaat bagi penulis

Manfaat bagi penulis yaitu meningkatkan pengetahuan serta wawasan terkait deret ganda berulang selama penelitian berlangsung.

2. Manfaat bagi instansi

Manfaat penelitian ini untuk instansi yaitu dapat digunakan sebagai sumber literatur dan acuan kedepan di bidang matematika terkait deret ganda berulang.

3. Manfaat bagi program studi

Manfaat bagi program studi yaitu dapat digunakan sebagai bahan referensi, informasi bagi mahasiswa yang ingin melakukan penelitian terkait deret ganda berulang.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang ada dalam penelitian ini adalah membatasi hanya pada pembuktian sifat kekonvergenan pada bilangan real. Berikut batasan-batasan masalahnya:

1. Deret ganda berulang : penelitian ini akan membatasi pembahasan hanya pada deret ganda berulang, khususnya deret ganda berulang atas bilangan real dan tidak akan membahas deret ganda berulang dengan elemen non-real atau deret ganda berulang dengan elemen lainnya di luar kategori bilangan real.
2. Kekonvergenan : penelitian akan membatasi kekonvergenan deret ganda berulang hanya pada bilangan real.
3. Bilangan real : batasan masalah pada bilangan real, termasuk deret yang terdiri dari bilangan bulat, pecahan, dan irasional. Penelitian tidak akan membahas deret yang melibatkan bilangan kompleks.
4. Aplikasi kekonvergenan : penelitian ini membatasi aplikasi kekonvergenan deret ganda berulang hanya pada penggunaan suatu teorema dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan deret ganda berulang.

1.6 Definisi Istilah

1. Barisan

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli yang mana daerah hasil termuat di himpunan bilangan real.

2. Deret

Misalkan $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ adalah barisan bilangan real. Dari barisan tersebut dapat dibentuk suatu deret yang didefinisikan sebagai penjumlahan

suku-suku dari barisan, yaitu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$.

3. Barisan Ganda

Barisan ganda bilangan real merupakan suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yang mana daerah hasil termuat di himpunan bilangan real.

4. Deret Ganda

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda. Dari barisan ganda tersebut dapat dibentuk suatu deret ganda parsial $(s(n, m))$ yang didefinisikan dengan

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Pasangan (x, s) disebut deret ganda, dilambangkan sebagai $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$.

Setiap bilangan $x(n, m)$ disebut suku barisan ganda dan $s(n, m)$ merupakan deret ganda parsial.

5. Deret Ganda Berulang

Deret ganda berulang adalah deret ganda yang dinotasikan sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$. Pada deret ganda berulang penjumlahannya dilakukan secara bertahap, yaitu dengan menjumlahkan terlebih dahulu terhadap satu indeks, misal $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$, yang berarti bahwa untuk setiap nilai n , penjumlahan $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ dihitung terlebih dahulu terhadap indeks m , kemudian hasilnya dijumlahkan terhadap indeks n . Begitupun juga, pada $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$ bahwa untuk setiap nilai m , penjumlahan $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ dihitung terlebih dahulu terhadap indeks n , kemudian hasilnya dijumlahkan terhadap indeks m .

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Sistem Bilangan Real

2.1.1 Bilangan Real

Bilangan real adalah himpunan bilangan yang mencakup semua bilangan rasional dan irasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ di mana $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$, seperti $5, \frac{2}{3}$ dan -8 . Sementara itu, bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat, seperti $\sqrt{2}$ dan π (Khairunnisa, 2014). Bilangan real dapat dipresentasikan sebagai titik pada garis bilangan, yang mencakup bilangan positif, negatif, dan nol.

2.1.2 Keterurutan Bilangan Real

Keterurutan bilangan real didasarkan oleh adanya suatu himpunan bagian tak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, yang disebut himpunan bilangan real positif, yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Jika $a, b \in \mathbb{P}$ maka $a + b \in \mathbb{P}$.
2. Jika $a, b \in \mathbb{P}$ maka $ab \in \mathbb{P}$.
3. Jika $a \in \mathbb{R}$ maka dengan tepat salah satu dari berikut dipenuhi:

$$a \in \mathbb{P}, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{P}.$$

Selanjutnya bilangan a dikatakan bilangan real positif, dinotasikan $a > 0$ jika $a \in \mathbb{P}$ dan bilangan a dikatakan bilangan real negatif, dinotasikan $a < 0$ jika $-a \in \mathbb{P}$. Notasi $a \geq 0$ menunjukkan bahwa $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ dan sebaliknya

notasi $a \leq 0$ menunjukkan bahwa $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

Definisi 2.1 (Bartle Sherbert, 2011)

1. Jika $a - b \in \mathbb{P}$, maka dinotasikan dengan $a > b$ atau $a < b$.
2. Jika $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, maka dinotasikan dengan $a \geq b$ atau $b \leq a$.

Teorema 2.2 (Bartle Sherbert, 2011)

Jika $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $0 \leq a < \varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $a = 0$.

Bukti

Misalkan $a \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Akan dibuktikan $a = 0$. Asumsikan $a \neq 0$, berarti $a > 0$ (sebab $0 \leq a < \varepsilon$). Jika dipilih $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ maka diperoleh

$$0 \leq a < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq a < \frac{a}{2}. \quad (1)$$

Jelas (1) adalah sebuah kontradiksi, jadi asumsi salah. Dengan demikian, haruslah $a = 0$.

2.1.3 Keterbatasan Bilangan Real

Pada subbab ini akan membahas konsep batas atas dan batas bawah untuk suatu himpunan bilangan real.

Definisi 2.3 (Bartle Sherbert, 2011)

Diberikan himpunan bagian tak kosong $S \subset \mathbb{R}$.

1. Sebuah himpunan S dikatakan terbatas ke atas apabila terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $s \in S$ berlaku $s \leq u$. Bilangan u disebut sebagai batas atas dari S .
2. Sebuah himpunan S dikatakan terbatas ke bawah apabila terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $s \in S$ berlaku $s \geq w$. Bilangan w

disebut sebagai batas bawah dari S .

3. Sebuah himpunan dikatakan terbatas apabila terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Apabila tidak terbatas ke atas dan terbatas ke bawah, maka dikatakan tidak terbatas.

Contoh 2.4

Himpunan $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ adalah terbatas ke atas, karena bilangan 2 maupun bilangan apapun yang lebih besar dari 2 berfungsi sebagai batas atas dari S . Namun, himpunan tersebut tidak memiliki batas bawah, sehingga tidak terbatas ke bawah. Jadi, S merupakan himpunan yang tidak terbatas.

Definisi 2.5 (Bartle Sherbert, 2011)

Diberikan himpunan bagian tak kosong $S \subset \mathbb{R}$.

1. Jika S terbatas ke atas, maka bilangan u disebut supremum dari S apabila memenuhi:
 - a. $u \geq x$ untuk setiap $x \in S$.
 - b. Jika $v \geq x$ untuk setiap $x \in S$, maka $v \geq u$.
2. Jika S terbatas ke bawah, maka bilangan w disebut infimum dari S apabila memenuhi:
 - a. $w \leq x$ untuk setiap $x \in S$.
 - b. Jika $t \leq x$ untuk setiap $x \in S$, maka $t \leq w$.

Contoh 2.6

Diberikan himpunan $S = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Tunjukkan bahwa $\sup S = \frac{1}{2}$.

Bukti

Dengan mendaftarkan anggota-anggotanya, himpunan S dapat ditulis menjadi $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. Pilih $u = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $\frac{1}{2}$ adalah

supremum dari S .

1. Jelas bahwa $\frac{1}{2} \geq x$ untuk setiap $x \in S$. Jadi $\frac{1}{2}$ merupakan batas atas dari

S .

2. Misalkan $v \in \mathbb{R}$ dengan $v \geq x$ untuk setiap $x \in S$. Akan ditunjukkan

bahwa $v \geq \frac{1}{2}$. Dengan kontradiksi, asumsikan $v < \frac{1}{2}$. Karena v batas

atas berarti $\frac{1}{n+1} \leq v, \forall n \in \mathbb{N}$. Namun, jika $n = 1$, diperoleh $\frac{1}{2} \leq v$. Hal

ini kontradiksi dengan asumsi sebelumnya. Jadi haruslah $\frac{1}{2} \leq v$.

Berdasarkan 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{2}$ adalah batas atas terkecil

dari S atau dapat ditulis $\sup S = \frac{1}{2}$.

Lemma 2.7 (Bartle Sherbert, 2011)

Diberikan himpunan tak kosong $S \subseteq \mathbb{R}$ dan u batas atas dari S . Bilangan u adalah supremum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $x_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Bukti

($\Rightarrow$) Misalkan $u = \sup S$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, $u - \varepsilon$ bukan batas atas himpunan S . Ini berarti terdapat $x_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < x_\varepsilon$. Dengan demikian $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in S$, sedemikian sehingga $u - \varepsilon < x_\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Diasumsikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $x_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < x_\varepsilon$. Akan ditunjukkan $u = \sup S$. Diambil v batas atas himpunan S . Jika $v < u$, maka dapat dipilih $\varepsilon = u - v > 0$ yang berakibat terdapat $x_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < x_\varepsilon$. Ini berarti

$$u - (u - v) = v < x_\varepsilon.$$

Hal ini kontradiksi dengan v batas atas himpunan S . Jadi seharusnya $v \geq u$.

Dengan demikian u adalah batas atas terkecil himpunan S .

Aksioma 2.8 Sifat Lengkap $\mathbb{R}$ (Bartle & Sherbert, 2011)

Setiap himpunan bagian tak kosong di bilangan real yang terbatas ke atas mempunyai batas atas terkecil (supremum) di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.9 (Riyanto, 2011)

Diberikan himpunan bagian tak kosong di bilangan real, yaitu $S \subseteq \mathbb{R}$. Jika S terbatas ke bawah maka S mempunyai batas bawah terbesar (infimum) di $\mathbb{R}$.

Bukti

Misalkan S merupakan himpunan bagian dari bilangan real tak kosong dengan $S \subseteq \mathbb{R}$. Asumsikan S terbatas ke bawah. Akan dibuktikan S mempunyai batas bawah terbesar. Definisikan sebuah himpunan tak kosong baru yaitu $\bar{S} = \{-a : a \in S\}$. Karena S terbatas ke bawah maka jelas $\bar{S}$ terbatas ke atas. Berdasarkan aksioma 2.8, diperoleh $\bar{S}$ mempunyai supremum. Sebut $u = \sup \bar{S}$. Akan ditunjukkan $-u$ adalah infimum dari S . Ambil sebarang $a \in S$. Berdasarkan definisi himpunan $\bar{S}$, terdapat $x \in \bar{S}$ sedemikian sehingga $x = -a$. Karena u adalah supremum $\bar{S}$ maka $u \geq x = -a$, diperoleh

$$u \geq -a \Rightarrow -u \leq a \quad (2)$$

Selanjutnya, untuk sebarang $w \in \mathbb{R}$ dengan $w \leq a$ maka $-v \geq -a = x$. Karena $u = \sup \bar{S}$ maka dengan menggunakan definisi 2.5 pada supremum bagian b, diperoleh

$$-v \geq u \Rightarrow v \leq -u \quad (3)$$

Berdasarkan (2) dan (3) dapat disimpulkan bahwa $-u$ adalah supremum dari S .

Jadi, setiap himpunan bilangan real tak kosong yang terbatas ke bawah pasti mempunyai batas bawah terbesar (infimum).

2.2 Barisan Bilangan Real

Secara umum, suatu barisan didefinisikan sebagai suatu urutan bilangan yang disusun berdasarkan aturan atau pola tertentu (Widiyanti dkk, 2023).

$$a, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Bilangan a_1 disebut suku pertama, a_2 suku kedua, dan a_n adalah suku ke- n . Indeks n menunjukkan urutan atau posisi suatu suku dalam barisan dan merupakan bilangan asli. Secara formal, barisan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.10 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real, dinotasikan dengan (x_n) di mana $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.11

1. Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$
2. Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
3. Barisan konstan (k_n) dengan $k_n = 1, 1, 1, \dots$

2.2.1 Barisan Konvergen

Definisi 2.12 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Dalam hal ini, Bilangan x disebut sebagai limit barisan (x_n) dan ditulis sebagai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Contoh 2.13

Buktikan bahwa barisan (x_n) dengan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0.

Bukti

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $K = K(\varepsilon)$ sehingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Maka, jika $n \geq K$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Sehingga jika $n \geq K$, berlaku

$$|x_n - x| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa barisan $x_n = \frac{1}{n}$ konvergen ke 0.

Teorema 2.14 Ketunggalan Limit Barisan (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan di $\mathbb{R}$ memiliki paling banyak satu buah limit.

Bukti

Misalkan barisan (x_n) konvergen ke dua buah limit berbeda, yaitu $(x_n) = x' \in \mathbb{R}$ dan $(x_n) = x'' \in \mathbb{R}$ dengan $x' \neq x''$. Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$, maka berdasarkan definisi 2.12, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n \geq K_1 \text{ maka } |x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

Selanjutnya, karena $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x''$, maka berdasarkan definisi 2.12, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n \geq K_2 \text{ maka } |x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

Pilih $K = \max\{K_1, K_2\}$ maka berdasarkan (4) dan (5), untuk semua $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 \leq |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\ &\leq |x' - x_n| + |x_n - x''| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Diperoleh $0 \leq |x' - x''| < \varepsilon$, untuk sebarang $\varepsilon > 0$. Dengan menerapkan teorema 2.2, dapat disimpulkan bahwa $x' - x'' = 0$ yaitu $x' = x''$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa barisan (x_n) konvergen ke dua buah limit yang berbeda. Jadi haruslah bahwa barisan (x_n) konvergen memiliki paling banyak satu limit.

2.2.2 Barisan yang Terbatas

Definisi 2.15 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan di $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.16

Barisan (x_n) dengan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan terbatas sebab terdapat bilangan real $M = 1$ sedemikian sehingga $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$.

Teorema 2.17 Keterbatasan Barisan Konvergen (Bartle & Sherbert, 2011)

Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) terbatas.

Bukti

Misalkan barisan (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. Dengan memilih $\varepsilon = 1$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n - x| < 1.$$

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K$

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Pilih $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$|x_n| \leq M.$$

Ini menunjukkan bahwa (x_n) terbatas.

2.2.3 Barisan Cauchy

Definisi 2.18 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq H(\varepsilon)$, berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Contoh 2.19

Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $H = H(\varepsilon)$ sehingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$, maka jika $n, m \geq H$ diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga jika $n, m \geq H$, berlaku

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan Cauchy, maka dapat disimpulkan bahwa barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.20 (Bartle & Sherbert, 2011)

Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Bukti

Misalkan (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq K$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dengan demikian, jika $H(\varepsilon) = K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\
&\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

Lemma 2.21 (Bartle & Sherbert, 2011)

Jika barisan (x_n) Cauchy, maka (x_n) terbatas.

Bukti

Misalkan (x_n) merupakan barisan Cauchy. Akan dibuktikan bahwa (x_n) adalah barisan terbatas. Karena (x_n) merupakan barisan Cauchy, maka untuk $\varepsilon = 1$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Misalkan $m = K$ maka $|x_n - x_K| < 1$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk semua $n \geq K$ berlaku

$$|x_n| - |x_K| \leq |x_n - x_K| < 1.$$

Akibatnya, untuk setiap $n \geq K$

$$|x_n| < 1 + |x_K|.$$

Pilih $M = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{K-1}|, |x_K| + 1\}$, maka untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$|x_n| \leq M.$$

Jadi terbukti bahwa (x_n) terbatas.

Teorema 2.22 Kriteria Kekonvergenan Cauchy (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ konvergen jika dan hanya jika (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Asumsikan bahwa barisan (x_n) konvergen. Berdasarkan lemma 2.21, jelas

bahwa barisan (x_n) konvergen merupakan barisan Cauchy.

($\Leftarrow$) Asumsikan barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Akan dibuktikan bahwa (x_n) adalah barisan konvergen. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena (x_n) barisan Cauchy, maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $\forall n, m \geq N_1$ berlaku

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Di sisi lain, karena (x_n) barisan Cauchy maka menurut lemma 2.21, barisan (x_n) terbatas dan seperti yang diketahui bahwa subbarisan $(x_n) = (x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$. Oleh karenanya, menurut aksioma 2.8 barisan (x_n) mempunyai supremum. Didefinisikan barisan (y_n) dengan

$$y_n = \sup\{x_m : m \geq n\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jelas bahwa y_n juga terbatas sehingga menurut teorema 2.9, y_n memiliki infimum, yaitu

$$x = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Karena x batas bawah terbesar dari $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ maka dari lemma 2.7 juga mengindikasikan bahwa untuk $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$y_{N_2} < x + \frac{\varepsilon}{4} \Leftrightarrow x - \frac{\varepsilon}{4} < y_{N_2} < x + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (7)$$

Selanjutnya, karena $y_{N_2} = \sup\{x_m : m \geq N_2\}$ maka menurut lemma 2.7, untuk $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ terdapat $M \in \mathbb{N}$ dengan $M \geq N_2$ sedemikian sehingga

$$y_{N_2} - \frac{\varepsilon}{4} < x_M$$

$$y_{N_2} - \frac{\varepsilon}{4} < x_M < y_{N_2} + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$x - \frac{\varepsilon}{2} = \left(x - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} < x_M < \left(x + \frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{4} = x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga diperoleh,

$$x - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_M \leq x + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |x_M - x| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Pilih $K = \sup \{N_1, M\}$, dari sini terdapat dua kemungkinan yaitu Jika $K = M > N_1$, berdasarkan (6) dan (8) maka untuk $\forall n \geq K$ berlaku:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_M + x_M - x| \\ &\leq |x_n - x_M| + |x_M - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Tetapi jika $K = M \geq N_1$, karena (y_n) adalah barisan monoton turun maka $\forall K \geq M \geq N_2$ berlaku

$$x - \frac{\varepsilon}{4} < y_K \leq y_{N_2} < x + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seperti pada (7), hal ini juga mengimplikasikan bahwa terdapat $M_K \in \mathbb{N}$ dengan $M_K \geq K$ sedemikian sehingga

$$x - \frac{\varepsilon}{2} \leq x_{M_K} \leq x + \frac{\varepsilon}{2} \text{ maka } |x_{M_K} - x| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Sehingga berdasarkan (6) dan (9), maka untuk $\forall n \geq K$ berlaku:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_{M_K} + x_{M_K} - x| \\ &\leq |x_n - x_{M_K}| + |x_{M_K} - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi (x_n) merupakan barisan yang konvergen ke x . Dengan demikian barisan (x_n) bersifat konvergen.

2.2.4 Barisan Monoton

Definisi 2.23 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ dikatakan monoton naik jika $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq$

$\dots$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, barisan real (x_n) dikatakan monoton turun jika $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Suatu barisan dikatakan monoton jika berlaku salah satu monoton naik atau monoton turun.

Contoh 2.24

1. Berikut ini barisan monoton naik.

- a. $(1, 2, 3, 4, \dots, n)$.
- b. $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$.
- c. $\{a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n, \dots\}$, jika $a > 1$.

2. Berikut ini barisan monoton turun.

- a. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$.
- b. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$.
- c. $(b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^n, \dots)$, jika $0 < b < 1$.

3. Berikut ini barisan tidak monoton.

- a. $(+1, -1, +1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$.
- b. $(-1, +2, -3, +4, \dots)$.

Teorema 2.25 (Bartle & Sherbert, 2011)

1. Jika (x_n) monoton naik dan terbatas ke atas, maka (x_n) konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Jika (y_n) monoton turun dan terbatas ke bawah, maka (y_n) konvergen dengan

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Bukti

1. Karena (x_n) memiliki batas atas, maka terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian

sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Misalkan $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka $A \subset \mathbb{R}$ terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut aksioma 2.8, maka supremum A ada, namakan $x = \sup A$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x - \varepsilon < x_k \leq x$. Karena (x_n) monoton naik, maka untuk $n \geq K$ berlaku,

$$x - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

atau

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa (x_n) konvergen ke $x = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Karena (y_n) memiliki batas bawah, maka terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $y_n \geq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Misalkan $A = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka $A \subset \mathbb{R}$ terbatas ke bawah dan tidak kosong. Menurut teorema 2.9, maka infimum A ada, namakan $x = \inf A$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x - \varepsilon > x_k \geq x$. Karena (y_n) monoton turun, maka untuk $n \geq K$ berlaku:

$$x - \varepsilon > x_k \geq y_n \geq x > x + \varepsilon$$

atau

$$x - \varepsilon > y_n > x + \varepsilon \Leftrightarrow |y_n - x| < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa (y_n) konvergen ke $x = \lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2.3 Deret Bilangan Real

Deret didefinisikan sebagai penjumlahan suku-suku dari suatu barisan. Misalkan a_n adalah barisan bilangan real, maka deret yang bersesuaian dengan barisan tersebut dinyatakan dalam bentuk

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

dengan a_1 menyatakan jumlah suku pertama, $a_1 + a_2$ menyatakan jumlah dua suku pertama, $a_1 + a_2 + a_3$ menyatakan jumlah tiga suku pertama serta a_n menyatakan jumlah n suku pertama dari barisan tersebut.

Definisi 2.26 (Adnan, 2021)

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real. Dari barisan tersebut dapat dibentuk suatu deret parsial yang didefinisikan dengan

$$s_N = \sum_{n=1}^N x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_N, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Penjumlahan suku-suku dari barisan (x_n) disebut deret dan dinotasikan sebagai $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Setiap bilangan (x_n) adalah suku barisan dan s_N adalah deret parsial dari $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Contoh 2.27

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ adalah deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dengan deret parsial sebagai berikut:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{129}{20}$$

...

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k}$$

Definisi 2.28 (Little dkk, 2015)

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dikatakan konvergen ke s jika $s_N \rightarrow s$ untuk $N \rightarrow \infty$. Dalam hal ini, nilai s disebut sebagai hasil jumlah deret tersebut dan ditulis sebagai

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Teorema 2.29 (Little dkk., 2015)

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ konvergen, maka $x_n \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$.

Bukti

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ maka untuk $N \rightarrow \infty$,

$$s_N = \sum_{n=1}^N x_n \rightarrow s$$

Akibatnya untuk $N \rightarrow \infty$,

$$x_N = s_N - s_{N-1} \rightarrow s - s = 0.$$

Teorema 2.30 Kriteria Cauchy pada Deret (Bartle & Sherbert, 2011)

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq K$ maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots + x_m| < \varepsilon.$$

Bukti

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ adalah deret bilangan real dengan jumlah parsialnya

$$s_N = \sum_{n=1}^N x_n.$$

($\Rightarrow$) Misalkan untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq K$ maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots + x_m| < \varepsilon.$$

Hal ini menginformasikan bahwa barisan jumlah parsial (s_N) adalah Cauchy.

Menurut lemma 2.21, karena (s_N) Cauchy maka (s_N) bersifat konvergen.

Dengan demikian menurut definisi 2.28, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ juga konvergen.

($\Leftarrow$) Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke suatu bilangan real, sebut $s \in \mathbb{R}$. Ini berarti barisan jumlah parsial $(s_N) \rightarrow s$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n, m \geq K$ maka

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots + x_m| < \varepsilon.$$

Karena (s_N) konvergen ke s maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq N$ maka

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $K = N \in \mathbb{N}$, maka jika $n, m \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |s_m - s + s - s_n| \\ &\leq |s_m - s| + |s - s_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi $|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \cdots + x_m| < \varepsilon$.

2.4 Barisan Ganda Bilangan Real

Pada bagian ini akan dijelaskan terkait barisan ganda pada himpunan bilangan real yang merupakan perluasan dari barisan pada himpunan bilangan real.

Definisi 2.31 (Anthony dkk., 2019)

Barisan ganda di $\mathbb{R}$ merupakan suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan

[illegible]

2.5 Deret Ganda Bilangan Real

Pada bagian ini akan dijelaskan terkait deret ganda pada himpunan bilangan real yang merupakan perluasan dari deret pada himpunan bilangan real.

Definisi 2.33 (Sidjara, 2023)

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda bilangan real. Dari barisan ganda tersebut dapat dibentuk suatu deret ganda parsial $(s(n, m))$ dengan

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Pasangan (x, s) disebut deret ganda dan dinotasikan sebagai $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$.

Setiap bilangan $(x(n, m))$ disebut suku-suku barisan ganda dan $(s(n, m))$ adalah deret ganda parsial.

Contoh 2.34

$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$ merupakan deret ganda bilangan real di mana $(x(n, m)) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$ merupakan suku-suku barisan ganda serta $(s(n, m)) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah suku-suku barisan ganda dari deret ganda parsial. Untuk lebih jelasnya, masing-masing suku dari barisan ganda $(x(n, m))$ dan $(s(n, m))$ dapat dilihat pada tabel 2.2 dan tabel 2.3

Tabel 2.2 Suku-suku barisan ganda $(x(n, m)) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$.

$(x(n, m))$		m								
		1	2	3	4	5	6	7	8	...
	1	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{7}$	$1\frac{1}{8}$	...
	2	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{8}$	...

n	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{11}{24}$	...
	4	$1\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{3}{8}$	...
	5	$1\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{13}{40}$	...
	6	$1\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{7}{24}$	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabel 2.3 Suku-suku barisan ganda dari deret ganda parsial

$$(s(n, m)) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) \right).$$

$(x(n, m))$		m								
		1	2	3	4	5	6	7	8	...
n	1	2	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{12}$	$7\frac{17}{60}$	$8\frac{9}{20}$	$9\frac{83}{140}$	$10\frac{201}{280}$	...
	2	$3\frac{1}{2}$	6	$8\frac{1}{6}$	$10\frac{1}{6}$	$12\frac{1}{15}$	$13\frac{9}{10}$	$15\frac{24}{35}$	$17\frac{61}{140}$	...
	3	$4\frac{5}{6}$	$8\frac{1}{6}$	11	$13\frac{7}{12}$	$16\frac{1}{60}$	$18\frac{7}{20}$	$20\frac{257}{420}$	$22\frac{689}{840}$	...
	4	$6\frac{1}{12}$	$10\frac{1}{6}$	$13\frac{7}{12}$	$16\frac{2}{3}$	$19\frac{11}{20}$	$22\frac{3}{10}$	$24\frac{401}{420}$	$27\frac{113}{210}$	...
	5	$7\frac{17}{60}$	$12\frac{1}{15}$	$16\frac{1}{60}$	$19\frac{11}{20}$	$22\frac{5}{5}$	$25\frac{19}{20}$	$28\frac{199}{210}$	$31\frac{719}{840}$	...
	6	$8\frac{9}{20}$	$13\frac{9}{10}$	$18\frac{7}{20}$	$22\frac{3}{10}$	$25\frac{19}{20}$	$29\frac{2}{5}$	$32\frac{99}{140}$	$35\frac{127}{140}$	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2.6 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits

Deret ganda berulang pada himpunan bilangan real dapat menunjukkan perilaku kekonvergenan, yaitu konvergen atau divergen bergantung pada susunan suku-suku dalam deret ganda tersebut. Secara analogis, dalam ajaran Islam

keimanan manusia juga tidak bersifat statis, melainkan memiliki tingkatan yang berbeda-beda. Sebagaimana Al-Quran menjelaskan adanya pengelompokan manusia berdasarkan kondisi keimanannya, yang disebutkan dalam QS. Fathir ayat 32 (Kemenag, 2026):

ثُمَّ أَوْرَثْنَا الْكِتَابَ الَّذِينَ اصْطَفَيْنَا مِنْ عِبَادِنَا فَمِنْهُمْ ظَالِمٌ لِّنَفْسِهِ وَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمِنْهُمْ سَابِقٌ بِالْخَيْرَاتِ بإِذْنِ اللَّهِ ذَلِكَ هُوَ الْفَضْلُ الْكَبِيرُ (٣٢)

Artinya : “Kemudian Kitab itu Kami wariskan kepada orang-orang yang Kami pilih di antara hamba-hamba Kami, lalu di antara mereka ada yang menganiaya diri mereka sendiri dan di antara mereka ada yang pertengahan dan diantara mereka ada (pula) yang lebih dahulu berbuat kebaikan dengan izin Allah. Yang demikian itu adalah karunia yang amat besar.” (QS. Al-Fathir:32).

Berdasarkan ayat tersebut, para ulama membagi tingkatan keimanan menjadi tiga level berdasarkan perilaku keimanannya, yaitu (Hermanto, 2023):

1. Zalimun linafsih (orang yang menganiaya diri sendiri).

Tingkatan ini merupakan level terendah dalam klasifikasi keimanan berdasarkan perilaku. Mereka adalah golongan yang lebih banyak kesalahannya daripada kebbaikannya. Imam al-Qurthubi dalam tafsirnya menjelaskan bahwa yang dimaksud dengan “zalimun linafsih” adalah orang yang mendahulukan kejelekan daripada kebaikan, dan mereka adalah orang-orang yang lalai dalam menjalankan kewajiban (Al-Qurthubi, 2006). Dalam klasifikasi yang lebih rinci, terdapat dua kategori pada tingkatan ini (Hermanto, 2023), pertama, Al-Mukminul Fasiq adalah orang yang beriman kepada Allah dengan penuh keyakinan, namun seringkali meninggalkan kewajiban seperti shalat, zakat, puasa, maupun ibadah wajib dan sunnah lainnya. Kedua, Al-Mukminul Dzalim adalah orang yang beriman kepada dengan penuh keyakinan, namun terkadang melakukan tindakan-tindakan yang dilarang agama, seperti menyakiti orang lain, bahkan melakukan

bentuk-bentuk kemaksiatan lainnya.

Meskipun berada pada level terendah, seorang mukmin tetap harus berusaha meningkatkan kualitas keimanannya melalui langkah-langkah sebagai berikut,

- a. Mempertahankan pokok pokok keimanan, seperti iman kepada Allah, malaikat, kitab, rasul, hari akhir, serta qadha dan qadar,
- b. bertaubat dari dosa-dosa besar, seperti menghentikan perbuatan dosa, menyesali perbuatan, serta bertekad tidak mengulangnya.
- c. Memperbanyak istighfar dan memohon ampunan atas segala kekurangan dan dosa.
- d. Melaksanakan kewajiban dasar, seperti mendirikan shalat lima waktu, puasa Ramadhan, dan zakat jika mampu.
- e. Menumbuhkan sifat malu, seperti merasa malu jika melakukan perbuatan tercela, baik haram maupun makruh.

2. Muqtashid.

Tingkatan pertengahan merujuk pada orang yang beriman dan konsisten dalam menjalankan kewajiban serta meninggalkan larangan, meskipun kadang masih melakukan hal-hal yang kurang utama. Mereka adalah golongan yang seimbang antara kebaikan dan kesalahan, atau lebih banyak kebaikannya daripada kesalahannya (Hermanto, 2023). Menurut tafsir Katsir (2015), menjelaskan bahwa “muqtashid” adalah orang yang melaksanakan kewajiban dan meninggalkan hal-hal yang diharamkan, namun terkadang meninggalkan sebagian amalan sunnah dan melakukan sebagian hal yang makruh. Pada tingkatan ini, seseorang yang telah mencapai al-iman al-

tahqiqiy yaitu iman seseorang yang teguh dari hasil analisa terhadap kebenaran-kebenaran agama Islam, digali dari dalil-dalil qurani maupun kauni.

Meskipun berada pada level pertengahan, seorang mukmin tetap harus berusaha meningkatkan kualitas keimanannya melalui langkah-langkah sebagai berikut,

- a. Konsisten dalam kewajiban, seperti melaksanakan shalat lima waktu, puasa ramadhan, zakat, haji jika mampu dan mebiasakan ibadah sunnah.
 - b. Memperdalam agama, seperti mengikuti majelis ilmu dan berinteraksi dengan Al-Aquran, seperti membaca serta mengamalkan nilai-nilai Al-Quran.
 - c. Berusaha ikhlas dalam setiap amal, seperti membersihkan niat dari riya.
3. Sabiqun bil khairat (berlomba-lomba dalam kebaikan).

Tingkatan tertinggi adalah derajat keimanan tertinggi, yaitu orang yang tidak hanya menjalankan kewajiban, tetapi juga berlomba-lomba dalam kebaikan, memiliki kepekaan spiritual tinggi, dan senantiasa meningkatkan kualitas ibadahnya. Dalam klasifikasi lain, tingkatan ini disebut sebagai Al-Mukminul Muttaqin, yaitu orang yang beriman dengan penuh keyakinan, melakukan segala perintah Allah dan Rasul-Nya, serta menjauhkan diri dari apa yang dilarang oleh Allah dan Rasul-Nya, sehingga ia menjadi orang yang bertakwa. Taqwa sendiri didefinisikan sebagai adanya rasa takut kepada Allah SWT, menjalankan apa yang diperintahkan dan menjauhi apa yang dilarang, menerima atas apa yang diberikan, serta senantiasa beribadah kepada Allah dengan ikhlas hingga menyiapkan diri dari kehidupan yang

akan dialaminya kelak, yaitu hari pembalasan (Hermanto, 2023). Menurut tafsir Katsir (2015), menjelaskan bahwa “sabiqun bil khairat” adalah orang yang mendahulukan kebaikan, mereka adalah golongan yang paling dekat dengan Allah, dan mereka masuk surga tanpa hisab.

Meskipun berada pada level tertinggi, seorang mukmin tetap harus berusaha meningkatkan kualitas keimanannya melalui langkah-langkah yang disajikan sebagai berikut,

- a. Mencintai Allah dan Rasul melebihi segalanya dan mencintai segala sesuatu karena Allah.
- b. Membenci kekafiran dan kemunafikan.
- c. Bersyukur dalam segala kondisi.

2.7 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada bagian ini akan dipaparkan beberapa definisi dan teorema yang akan dijadikan rujukan dalam pembuktian sifat kekonvergenan pada deret ganda berulang bilangan real. Berikut definisi dan teorema yang akan digunakan:

Definisi 2.35 (Habil, 2014)

Deret ganda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

dinamakan deret ganda berulang.

Teorema 2.36 (Sidjara dkk., 2023)

Misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$. Deret ganda berulang

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya sama dengan s jika dan hanya jika memenuhi dua hal berikut:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen
2. $\forall m \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen

Teorema 2.37 (Sidjara dkk., 2023)

Jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) \\ &= xy. \end{aligned}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini dilakukan dengan menerapkan metode studi literatur atau kajian kepustakaan. Metode tersebut mendapatkan informasi melalui pengumpulan, pembacaan data kepustakaan, pemahaman terkait konsep topik penelitian, penganalisaan dengan mempelajari referensi yang berkaitan dengan bahasan masalah terkait kekonvergenan deret ganda berulang pada himpunan bilangan real yang ditemukan dari berbagai sumber buku, sebagai sumber data dalam topik kajian penelitian pustaka.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan sebelum melakukan penelitian ini, pertama peneliti menentukan lebih dahulu topik penelitian yang akan diteliti. Kemudian melakukan tinjauan pustaka dari berbagai sumber seperti buku, artikel, jurnal, dan referensi lainnya untuk merumuskan masalah penelitian serta membatasinya. peneliti kemudian melanjutkan penelitian terhadap pembuktian teorema-teorema terkait kekonvergenan deret ganda berulang pada bilangan real, dengan pengetahuan yang telah dipelajari sebagai landasan untuk membuktikan teorema-teorema deret ganda berulang pada bilangan real yang nantinya akan dibuktikan pada pembahasan penelitian ini. Selama proses ini, peneliti juga mencari dan memilih dalil-dalil dari Al-Quran atau Al-Hadits yang bersinergi terhadap bahasan topik penelitian, bertujuan mengintegrasikan topik penelitian dengan

dalil-dalil dari Al-Quran atau Al-Hadits, sehingga menciptakan sinergi antara ilmu matematika dan aspek keagamaan dalam penelitian tersebut. Tahap selanjutnya peneliti melaksanakan penelitian terhadap materi yang sudah dikaji, dengan bekal pemahaman-pemahaman sebelumnya yang berkaitan dengan bahan dasar obyek penelitian ini yaitu untuk mengetahui kekonvergenan deret ganda berulang pada bilangan real dengan menggunakan suatu teorema dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan barisan ganda, deret ganda, dan deret ganda berulang.

3.3 Tahapan Penelitian

Dalam penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan yang sistematis untuk mengetahui kekonvergenan deret ganda berulang pada himpunan bilangan real dengan menggunakan kombinasi metode langsung dan tidak langsung yang terlihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

1. Analisis kekonvergenan barisan ganda pada himpunan bilangan real.

Tahapan pertama dalam penelitian ini yaitu menganalisis kekonvergenan barisan ganda pada himpunan bilangan real dengan menggunakan definisi kekonvergenan barisan ganda. Adapun definisi yang digunakan yaitu:

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x(n, m) - x| < \varepsilon.$$

Definisi tersebut menjadi dasar dalam mengkaji perilaku limit pada barisan ganda serta dalam membangun pembuktian teorema-teorema yang berkaitan dengan kekonvergenan barisan ganda. Selain itu, definisi tersebut menjadi landasan dalam proses pembuktian menggunakan metode langsung maupun tidak langsung, sehingga proses analisis dapat berjalan secara sistematis dan terstruktur.

2. Menentukan sifat keterbatasan pada barisan ganda.

Setelah menganalisis kekonvergenan barisan ganda, langkah berikutnya yaitu menentukan sifat keterbatasan pada barisan ganda. Pada tahap ini dikaji apakah suatu barisan ganda memiliki batas atas dan batas bawah pada himpunan bilangan real. Melalui tahap ini juga dibuktikan bahwa suatu barisan ganda konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut terbatas. Pembuktian dilakukan menggunakan definisi keterbatasan pada barisan ganda di himpunan bilangan real. Adapun definisi yang digunakan yaitu:

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x(n, m)| \leq M.$$

3. Menentukan limit berulang pada barisan ganda.

Tahap ketiga adalah menentukan limit berulang pada barisan ganda. Pada tahap ini dibahas limit yang diperoleh melalui proses pengambilan limit secara bertahap terhadap salah satu indeks terlebih dahulu, yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$$

Analisis dilakukan untuk mengetahui kondisi ketika kedua limit berulang tersebut ada dan memiliki nilai yang sama, serta untuk mengkaji kemungkinan perubahan hasil limit akibat pertukaran urutan pengambilan limit.

4. Menentukan kriteria Cauchy pada barisan ganda.

Tahapan keempat adalah menentukan kriteria Cauchy pada barisan ganda. Pada tahap ini dikaji hubungan antara sifat Cauchy dan kekonvergenan suatu barisan ganda pada himpunan bilangan real. Analisis dilakukan dengan menunjukkan bahwa suatu barisan ganda konvergen jika dan hanya jika memenuhi definisi barisan ganda Cauchy. Adapun definisi yang digunakan yaitu:

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall p, q, n, m \geq K$ berlaku

$$|x(p, q) - x(n, m)| < \varepsilon.$$

Tahap ini digunakan sebagai dasar dalam mengkaji kekonvergenan barisan ganda tanpa harus mengetahui limitnya terlebih dahulu.

5. Menentukan sifat monoton pada barisan ganda.

Tahapan kelima adalah menentukan sifat monoton pada barisan ganda. Pada tahap ini dikaji perilaku kenaikan atau penurunan nilai suku-suku pada

barisan ganda terhadap indeks n dan m . Analisis sifat monoton dilakukan untuk menunjukkan bahwa suatu barisan ganda konvergen jika dan hanya jika memenuhi definisi barisan ganda monoton. Adapun definisi yang digunakan yaitu:

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda di himpunan bilangan real.

- a. Jika $x(n, m) \leq x(j, k), \forall (n, m) \leq (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, maka $(x(n, m))$ dikatakan barisan ganda monoton naik.
- b. Jika $x(n, m) \geq x(j, k), \forall (n, m) \leq (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, maka $(x(n, m))$ dikatakan barisan ganda monoton turun.
- c. Jika barisan ganda $(x(n, m))$ monoton naik atau monoton turun maka dikatakan barisan ganda monoton.

6. Menentukan teorema-teorema limit pada barisan ganda.

Tahapan keenam pada pembahasan barisan ganda adalah menentukan teorema-teorema limit pada barisan ganda. Pada tahap ini dibahas sifat-sifat operasi limit pada barisan ganda, seperti penjumlahan dan perkalian dua barisan ganda yang konvergen. Pembuktian dilakukan menggunakan definisi limit barisan ganda dan sifat-sifat aljabar pada himpunan bilangan real. Melalui tahap ini digunakan untuk memperoleh hasil-hasil dasar dalam analisis lebih lanjut terhadap deret ganda dan deret ganda berulang.

7. Analisis kekonvergenan deret ganda pada himpunan bilangan real.

Tahapan ketujuh pada penelitian ini adalah menganalisis kekonvergenan deret ganda pada himpunan bilangan real dengan menggunakan definisi kekonvergenan deret ganda. Adapun definisi yang digunakan yaitu:

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda bilangan real dan didefinisikan

barisan ganda jumlah parsial $(s(n, m)), \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right).$$

Deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dikatakan konvergen apabila $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$.

8. Menentukan teorema limit pada deret ganda.

Tahapan kedelapan pada pembahasan deret ganda adalah menentukan teorema limit pada deret ganda. Pada tahap ini dibahas sifat operasi limit pada barisan ganda yaitu perkalian dua deret ganda yang konvergen. Adapun teorema yang digunakan yaitu:

Jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen. Lebih jauh

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = xy.$$

Analisis dilakukan untuk memperoleh hasil dasar dalam analisis lebih lanjut terhadap deret ganda berulang.

9. Menetapkan definisi deret ganda berulang pada himpunan bilangan real.

Tahapan kesembilan adalah menetapkan definisi deret ganda berulang pada himpunan bilangan real. Deret ganda berulang merupakan deret yang diperoleh melalui proses penjumlahan secara bertahap terhadap salah satu indeks terlebih dahulu, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

Pada tahap ini dikaji hubungan antara deret ganda dan deret ganda berulang. Pembahasan dilakukan sebagai dasar dalam menganalisis kekonvergenan deret ganda berulang pada himpunan bilangan real.

10. Mendeskripsikan aplikasi kekonvergenan deret ganda berulang.

Tahapan terakhir adalah mendeskripsikan aplikasi kekonvergenan deret ganda berulang. Aplikasi kekonvergenan tersebut menggunakan suatu teorema dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kekonvergenan deret ganda berulang. Adapun teorema yang digunakan adalah:

Misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$. Deret ganda berulang

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya sama dengan s jika dan hanya jika memenuhi dua hal berikut:

- a. $\forall n \in \mathbb{N}$, deret ganda $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen.
- b. $\forall m \in \mathbb{N}$, deret ganda $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen.

Analisis dilakukan untuk mengetahui kondisi ketika kedua limit deret ganda berulang tersebut ada dan memiliki nilai yang sama, serta untuk mengkaji kemungkinan perubahan hasil limit akibat pertukaran urutan penjumlahannya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Kekonvergenan Barisan Ganda

Pada bagian ini akan dibahas mengenai kekonvergenan barisan ganda bilangan real, kemudian mengkaji beberapa sifat yang berlaku pada barisan ganda bilangan real. Selanjutnya, akan dibagi ke dalam 5 sub-bahasan yang terdiri dari keterbatasan pada barisan ganda, limit berulang pada barisan ganda, kriteria Cauchy pada barisan ganda, barisan ganda monoton, dan teorema-teorema limit barisan ganda

Definisi 4.1 (Habil, 2014)

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ dan ditulis

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x,$$

apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x(n, m) - x| < \varepsilon.$$

Bilangan x disebut limit ganda dari barisan ganda $(x(n, m))$. Jika tidak terdapat nilai x yang terpenuhi, maka barisan $(x(n, m))$ disebut barisan divergen.

Contoh 4.2

Diberikan barisan ganda pada himpunan bilangan real berikut

$$(x(n, m)) = \left(\frac{1}{n+m} : n, m \in \mathbb{N} \right).$$

Buktikan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke 0.

Bukti

Misalkan $(x(n, m)) = \left(\frac{1}{n+m} \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m} =$

0. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $K \in \mathbb{N}$ sehingga $K > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka untuk $\forall n, m \geq K$,

diperoleh $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{K}$ sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x(n, m) - x| = \left| \frac{1}{n+m} - 0 \right| = \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K} < \varepsilon.$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m} = 0$.

Teorema 4.3 Ketunggalan Limit Barisan Ganda (Habil, 2014)

Barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen di $\mathbb{R}$ memiliki paling banyak satu limit.

Bukti

Diasumsikan bahwa suatu barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke dua buah limit berbeda, yaitu $x(n, m) = x' \in \mathbb{R}$ dan $x(n, m) = x'' \in \mathbb{R}$ dengan $x' \neq x''$. Karena $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x'$, maka berdasarkan definisi 4.1, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat

$K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n, m \geq K_1 \text{ maka } |x(n, m) - x'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

Selanjutnya, karena $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x''$, maka berdasarkan definisi 4.1, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n, m \geq K_2 \text{ maka } |x(n, m) - x''| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

Pilih $K = \max\{K_1, K_2\}$ maka berdasarkan (10) dan (11), untuk semua $n, m \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 \leq |x' - x''| &= |x' - x(n, m) + x(n, m) - x''| \\ &\leq |x' - x(n, m)| + |x(n, m) - x''| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Diperoleh $0 \leq |x' - x''| < \varepsilon$, untuk sebarang $\varepsilon > 0$. Dengan menerapkan

teorema 2.2, dapat disimpulkan bahwa $x' - x'' = 0$ yaitu $x' = x''$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke dua buah limit yang berbeda. Jadi haruslah bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen memiliki paling banyak satu limit.

Contoh 4.4

Buktikan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = \left(\frac{n-m}{n+m}\right), \forall n, m \in \mathbb{N}$ merupakan barisan divergen.

Bukti

Asumsikan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen. Pembuktian akan dilakukan dengan mencari contoh penyangkal. Perhatikan bahwa $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n = m$ maka suku-suku barisan ganda $(x(n, m))$ adalah

$$x(n, m) = \frac{n-m}{n+m} = \frac{m-m}{m+m} = 0.$$

Di sisi lain, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n = 2m$ maka suku-suku barisan ganda $(x(n, m))$ adalah

$$x(n, m) = \frac{n-m}{n+m} = \frac{2m-m}{2m+m} = \frac{1}{3}.$$

Terlihat bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ memiliki lebih dari satu limit, maka tidak memenuhi teorema 4.3, sehingga barisan ganda $(x(n, m))$ tidak konvergen, yang berarti barisan ganda $(x(n, m))$ tersebut divergen.

4.1.1 Keterbatasan Barisan Ganda

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai keterbatasan barisan ganda yang merupakan pengembangan dari barisan bilangan real beserta kaitannya dengan

kekonvergenan suatu barisan ganda.

Definisi 4.5 (Habil, 2014)

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x(n, m)| \leq M.$$

Contoh 4.6

Barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = \frac{(-1)^m}{n+1}, \forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah barisan yang terbatas karena terdapat $M = 1 > 0$ sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m)| &= \left| \frac{(-1)^m}{n+1} \right| \\ &= |(-1)^m| \left| \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \leq 1 = M. \end{aligned}$$

Contoh 4.7

Barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = (-1)^m n, \forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah barisan yang tak terbatas karena untuk sebarang $M \in \mathbb{R}$, terdapat $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n = \lceil |M| + 1 \rceil$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} |x(n, m)| &= |(-1)^m n| \\ &= |(-1)^m| |n| \\ &= n = \lceil |M| + 1 \rceil > M. \end{aligned}$$

Teorema 4.8 Keterbatasan Barisan Ganda konvergen (Habil, 2014)

Jika barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke suatu bilangan real, maka $(x(n, m))$ terbatas.

Bukti

Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke suatu bilangan real, yaitu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m)$ di mana $x \in \mathbb{R}$. Karena barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen, maka menurut definisi 4.1, jika dipilih $\varepsilon = 1$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x(n, m) - x| < 1. \quad (12)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga pada (12), $\forall n, m \geq K$ diperoleh

$$|x(n, m)| < 1 + |x|.$$

Pilih $M = \max\{|x(1, 1)|, |x(1, 2)|, |x(2, 1)|, \dots, |x(K - 1, K - 1)|, |x| + 1\}$.

Akibatnya, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ diperoleh $|x(n, m)| \leq M$.

Contoh 4.9

Barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $x(n, m) = \frac{1}{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ adalah terbatas sebab sebelumnya telah dibuktikan pada contoh 4.2 bahwa $(x(n, m))$ adalah barisan ganda yang konvergen. Akibatnya, berdasarkan teorema 4.8 mengimplikasikan bahwa $(x(n, m))$ terbatas.

4.1.2 Limit Berulang pada Barisan Ganda

Dalam subbab ini dijelaskan suatu hal yang tidak didefinisikan pada barisan di himpunan bilangan real tetapi ada pada barisan ganda di himpunan bilangan real mengenai kekonvergenan adalah limit berulang. Dinamakan limit berulang sebab urutan dari limit-limitnya yang berbeda. Berikut akan dikaji definisi beserta beberapa teorema yang menghubungkan antara limit berulang dan limit ganda.

Definisi 4.10 (Habil, 2014)

Diberikan barisan ganda $(x(n, m))$ di bilangan real. Limit-limit berikut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$$

dinamakan limit berulang.

Contoh 4.11

Diberikan barisan ganda $(x(n, m))$ dengan suku-sukunya sebagai berikut.

$$x(n, m) = (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right), \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = 0 \text{ sebab jika diambil sebarang } \varepsilon > 0, \text{ dapat dipilih } K = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$$

sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m) - 0| &= \left| (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) - 0 \right| \\ &= \left| (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right| \leq \frac{2}{K} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Akan tetapi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$ tidak ada karena $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$ tidak ada. Begitupun juga dengan $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$, karena $\forall m \in \mathbb{N},$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$ tidak ada. Selanjutnya akan diberikan syarat cukup

sekalius syarat perlu agar limit berulang barisan ganda ada.

Teorema 4.12 (Habil, 2014)

Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, limit berulang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya sama dengan $x \in \mathbb{R}$, jika dan hanya jika memenuhi dua hal berikut:

1. $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Bukti

1. $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Misalkan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$ di mana $x \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Jika $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$, maka $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Asumsikan bahwa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$. Akan dibuktikan $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = x$, ini berarti $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$

ada $\forall n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian jelas bahwa $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in$

$\mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Jika $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$.

Asumsikan bahwa $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, yaitu $x_n =$

$\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi x_n membentuk sebuah barisan. Akan

dibuktikan barisan (x_n) konvergen ke x . Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$ maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } m \geq K_1 \text{ maka } |x(n, m) - x| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Selanjutnya, karena $\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$

sedemikian sehingga

$$\text{Jika } m \geq K_2 \text{ maka } |x(n, m) - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

maka berdasarkan (13) dan (14) mengimplikasikan bahwa $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x(n, m) + x(n, m) - x| \\ &\leq |x_n - x(n, m)| + |x(n, m) - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{m \rightarrow \infty} x_n = x$. Karena $x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan demikian terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_n = x$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Misalkan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$ di mana $x \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Jika $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

Asumsikan bahwa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$. Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Karena $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = s$, ini berarti $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$

ada $\forall m \in \mathbb{N}$. Dengan demikian jelas bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, maka $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$.

Asumsikan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, yaitu $x_m =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Jadi x_m membentuk sebuah barisan. Akan

dibuktikan barisan (x_m) konvergen ke x . Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$ maka terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n \geq K_1 \text{ maka } |x(n, m) - x| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

Selanjutnya, karena $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = x_m, \forall m \in \mathbb{N}$ maka terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\text{Jika } n \geq K_2 \text{ maka } |x(n, m) - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

maka berdasarkan (15) dan (16) mengimplikasikan bahwa $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n, m \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_m - x| &= |x_m - x(n, m) + x(n, m) - x| \\ &\leq |x_m - x(n, m)| + |x(n, m) - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_m = x$. Karena $x_m = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m)$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, dengan demikian terbukti bahwa $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_m = x$.

Contoh 4.13

Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = \left(\frac{nm}{n^2 + m^2} \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$ sebagai suku-suku barisan ganda bilangan real $(x(n, m))$. Akan dibuktikan limit berulang dari barisan ganda $(x(n, m))$ tidak konvergen ke dua limit berbeda. Perhatikan bahwa

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{n^2 + m^2} \right) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ sehingga } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{n^2 + m^2} \right) \right) = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{n^2 + m^2} \right) = 0, \forall m \in \mathbb{N} \text{ sehingga } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nm}{n^2 + m^2} \right) \right) = 0.$$

Selanjutnya akan dibuktikan limit ganda dari $(x(n, m))$. Perhatikan bahwa $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n = m$ maka suku-suku barisan ganda $(x(n, m))$ adalah

$$x(n, m) = \frac{nm}{n^2 + m^2} = \frac{m^2}{n^2 + m^2} = \frac{1}{2}.$$

Di sisi lain, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n = 2m$ maka suku-suku barisan ganda $(x(n, m))$ adalah

$$x(n, m) = \frac{nm}{n^2 + m^2} = \frac{(2m)m}{(2m)^2 + m^2} = \frac{2}{5}.$$

Menurut teorema 4.3 bahwa barisan ganda tidak mungkin konvergen ke dua limit berbeda maka $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{nm}{n^2 + m^2}$ tidak ada.

4.1.3 Kriteria Cauchy pada Barisan Ganda

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai kriteria Cauchy barisan ganda yang merupakan pengembangan dari barisan bilangan real beserta kaitannya dengan kekonvergenan suatu barisan ganda.

Definisi 4.14 (Habil, 2014)

Barisan ganda $(x(n, m))$ di $\mathbb{R}$ dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $p, q, n, m \geq K$ berlaku

$$|x(p, q) - x(n, m)| < \varepsilon.$$

Teorema 4.15 Kriteria Kekonvergenan Cauchy (Habil, 2014)

Barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika barisan tersebut merupakan barisan Cauchy.

Bukti

($\Rightarrow$) Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, yaitu

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$. Akan dibuktikan barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan

barisan Cauchy. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x$, maka

terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ diperoleh

$$|x(n, m) - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Akibatnya untuk $\forall p, q \in \mathbb{N}$ dengan $p, q, n, m \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(p, q) - x(n, m)| &= |x(p, q) - x + x - x(n, m)| \\ &\leq |x(p, q) - x| + |x - x(n, m)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan barisan Cauchy.

($\Leftarrow$) Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ adalah barisan Cauchy. Akan dibuktikan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan barisan konvergen.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan barisan Cauchy, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $p, q, n, m \geq K$ berlaku

$$|x(p, q) - x(n, m)| < \varepsilon.$$

Didefinisikan barisan (y_n) dengan $y_n = x(n, n) \forall n \in \mathbb{N}$. Dengan memilih $m = n$ dan $q = p$ maka $p, n \geq K$ diperoleh

$$|x(p, p) - x(n, n)| < \varepsilon$$

$$|y_p - y_n| < \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan barisan (y_n) adalah barisan Cauchy. Menurut teorema 2.22, karena barisan (y_n) Cauchy, maka barisan (y_n) konvergen di bilangan real. Misalkan $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ ke suatu $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N_1$ diperoleh

$$|y_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

Selanjutnya, karena barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan barisan Cauchy, terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $p, q, n \geq N_2$ diperoleh

$$|x(p, q) - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Pilih $N = \max\{N_1, N_2\}$ maka berdasarkan (17) dan (18) berakibat $p, q, n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(p, q) - x| &= |x(p, q) - y_n + y_n - x| \\ &\leq |x(p, q) - y_n| + |y_n - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. Jadi terbukti bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ merupakan barisan konvergen.

4.1.4 Barisan Ganda Monoton

Dalam subbab ini dikaji barisan ganda pada himpunan bilangan real yang memiliki sifat/karakteristik khusus yang disebut monoton serta kaitannya dengan kekonvergenan.

Definisi 4.16 (Habil., 2014)

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda di himpunan bilangan real.

- a. Jika $x(n, m) \leq x(j, k), \forall (n, m) \leq (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, maka barisan ganda $(x(n, m))$ dikatakan barisan ganda monoton naik.
- b. Jika $x(n, m) \geq x(j, k), \forall (n, m) \leq (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, maka barisan ganda $(x(n, m))$ dikatakan barisan ganda monoton turun.
- c. Jika barisan ganda $(x(n, m))$ monoton naik atau monoton turun maka dikatakan barisan ganda monoton.

Teorema 4.17 Kekonvergenan Barisan Ganda Monoton (Habil., 2014)

Sebuah barisan ganda monoton merupakan barisan ganda konvergen jika dan hanya jika merupakan barisan ganda terbatas. Lebih jauh:

- a. jika $(x(n, m))$ monoton naik dan terbatas maka

$$\begin{aligned}\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

- b. jika $(x(n, m))$ monoton turun dan terbatas maka

$$\begin{aligned}\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \inf\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Bukti

Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ bersifat monoton.

($\Rightarrow$) Telah dibuktikan pada teorema 4.8 bahwa barisan ganda konvergen adalah terbatas.

($\Leftarrow$) Misalkan barisan ganda $(x(n, m))$ monoton dan terbatas. Karena barisan ganda monoton, maka terdapat dua kemungkinan yaitu barisan ganda $(x(n, m))$ monoton naik atau monoton turun.

1. Asumsikan barisan ganda $(x(n, m))$ monoton naik. Karena $(x(n, m))$ terbatas, maka $(x(n, m))$ terbatas ke atas. Dengan menerapkan aksioma 2.8, barisan ganda $(x(n, m))$ mempunyai batas atas terkecil (supremum), yaitu $x = \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Akan dibuktikan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\
&= \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $x = \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$, maka menurut lemma 2.7 mengimplikasikan $x - \varepsilon$ bukan batas atas dari himpunan $\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Ini berarti terdapat $K, J \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$x - \varepsilon < x(K, J).$$

Selanjutnya, karena $(x(n, m))$ monoton naik, $\forall K \leq n$ dan $\forall J \leq m$ diperoleh

$$x - \varepsilon < x(K, J) \leq x(n, m) \leq x + \varepsilon.$$

Hal ini berakibat $\forall K \leq n$ dan $\forall J \leq m$ berlaku

$$|x(n, m) - x| < \varepsilon$$

Ini mengindikasikan barisan ganda $(x(n, m))$ konvergen ke x yakni

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x = \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Selanjutnya perlu ditunjukkan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m).$$

Perhatikan bahwa barisan ganda $(x(n, m))$ monoton naik dan terbatas ke atas.

Maka untuk nilai $m \in \mathbb{N}$ yang konstan, barisan $\{x(n, m) : n \in \mathbb{N}\}$ juga monoton naik dan terbatas ke atas. Jadi dengan menggunakan teorema 2.25 diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = \sup\{x(n, m) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Terakhir, dengan menerapkan teorema 4.12, maka limit berulang

$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right)$ ada yaitu

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}. \quad (19)$$

Dengan menggunakan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}. \quad (20)$$

Berdasarkan (19) dan (20), terbukti bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \sup\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

2. Asumsikan barisan ganda $(x(n, m))$ monoton turun. Karena $(x(n, m))$ terbatas, maka $(x(n, m))$ terbatas ke bawah. Definisikan barisan ganda $(-x(n, m)) = \{-x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Jelas bahwa $(-x(n, m))$ monoton naik dan terbatas ke atas. Oleh karena itu, dengan menggunakan teorema 4.17 bagian a diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} -x(n, m) \\ &= \sup\{-x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\} \\ &= -\inf\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, berakibat

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) \\ &= \inf\{x(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Contoh 4.18

Barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ merupakan barisan ganda yang terbatas karena terdapat $2 \in \mathbb{R}$ sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m)| &= \left| \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} \right| \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &< \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m+n-1}} < 2. \end{aligned}$$

Selain merupakan barisan ganda terbatas, $(x(n, m))$ juga dengan jelas monoton naik yaitu $\forall n \leq j$ dan $m \leq k$ berlaku

$$\begin{aligned} x(n, m) &= \left| \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} \right| \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} + \frac{1}{(n+m+1)!} + \frac{1}{(j+k)!} \\ &= x(j, k). \end{aligned}$$

Menurut teorema 4.17 karena $(x(n, m))$ terbatas dan monoton maka juga merupakan barisan ganda yang konvergen.

4.1.5 Teorema Limit Barisan Ganda

Pada sub-bahasan ini, akan dibahas teorema untuk menghitung nilai limit ganda dan limit berulang dari barisan ganda bilangan real.

Teorema 4.19 (Habil, 2014)

Jika suku-suku barisan ganda $x(n, m)$ dapat ditulis sebagai $x(n, m) = x_n + y_m$ di mana (x_n) dan (y_m) adalah barisan dengan nilai limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x + y.$$

Bukti

Misalkan $x(n, m)$ adalah barisan ganda sedemikian sehingga suku-sukunya dapat dituliskan sebagai $x(n, m) = x_n + y_m$ di mana (x_n) dan (y_m) adalah barisan yang konvergen ke x dan y . Berdasarkan permisalan tersebut didapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_n + y_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = x + y. \quad (21)$$

dan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y + x. \quad (22)$$

Berdasarkan (21) dan (22), diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = x + y \quad (23)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = x + y.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena barisan (x_n) konvergen ke x dan y , yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{dan} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y \quad \text{maka} \quad \text{terdapat} \quad K \in \mathbb{N} \text{ sedemikian sehingga}$$

$\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dan} \quad |y_m - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (24)$$

Sehingga berdasarkan (24), diperoleh $\forall n, m \geq K$ juga berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m) - (x + y)| &= |(x_n + y_m) - (x + y)| \\ &= |(x_n - x) + (y_m - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_m - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = x + y \quad (25)$$

Dengan demikian, berdasarkan (23) dan (25) terbukti bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = x + y.$$

Contoh 4.20

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda dengan

$$(x(n, m)) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Didefinisikan $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ dan $x_m = \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}$. Terlihat dengan jelas

barisan-barisan (x_n) dan (y_m) konvergen di himpunan bilangan real, yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0. \quad (26)$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$x(n, m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = x_n + y_m, \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Berdasarkan (26) dan (27), dengan menerapkan teorema 4.19 diperoleh

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0.$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teorema 4.19 menginformasikan bahwa limit

berulang dari barisan ganda tersebut sama dengan limit gandanya yakni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0.$$

Teorema 4.21 Perkalian Dua Barisan Konvergen (Habil, 2014)

Jika suku-suku barisan ganda $x(n, m)$ dapat ditulis sebagai $x(n, m) = x_n y_m$ di

mana (x_n) dan (y_m) adalah barisan dengan nilai limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = xy.$$

Bukti

Misalkan $x(n, m)$ adalah barisan ganda sedemikian sehingga suku-sukunya dapat dituliskan sebagai $x(n, m) = x_n y_m$ di mana (x_n) dan (y_m) adalah barisan yang konvergen ke x dan y . Berdasarkan premisalan tersebut didapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_n y_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = xy. \quad (28)$$

dan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = yx. \quad (29)$$

Berdasarkan (28) dan (29), diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = xy \quad (30)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = xy.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena barisan (x_n) konvergen, maka berakibat (x_n) terbatas. Jadi terdapat $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (31)$$

Dengan kata lain $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dan $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2z} \text{ dengan } z = \max\{M, |y|\}. \quad (32)$$

Sehingga berdasarkan (31) dan (32), diperoleh $\forall n, m \geq K$ juga berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m) - xy| &= |x(n, m) - x_n y + x_n y - xy| \\ &= |x_n y_m - x_n y + x_n y - xy| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |x_n y_m - x_n y| + |x_n y - xy| \\
&= |x_n| |y_m - y| + |y| |x_n - x| \\
&< M \frac{\varepsilon}{2z} + |y| \frac{\varepsilon}{2z} \\
&\leq 2z \left(\frac{\varepsilon}{2z} \right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = xy \quad (33)$$

Dengan demikian, berdasarkan (30) dan (33) terbukti bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) \right) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = xy.$$

Contoh 4.22

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda dengan

$$x(n, m) = \frac{1}{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Didefinisikan $x_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dan $y_m = \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Terlihat dengan jelas

bahwa barisan-barisan (x_n) dan (y_m) konvergen di bilangan real. yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0 \quad (34)$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$x(n, m) = \frac{1}{nm} = \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{m} \right) = x_n y_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Berdasarkan (34) dan (35), diperoleh

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{m} \right) = 0$$

Lebih jauh, dengan teorema 4.20 menginformasikan bahwa limit berulang dari

barisan ganda tersebut sama dengan limit gandanya yakni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \right) = 0.$$

Teorema 4.23 Teorema Apit (Habil, 2014)

Diberikan $(x(n, m)), (y(n, m))$ dan $(z(n, m))$ adalah barisan-barisan ganda di bilangan real sedemikian sehingga

$$x(n, m) \leq y(n, m) \leq z(n, m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Jika $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$ maka barisan ganda $(y(n, m))$ konvergen dan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} y(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$$

Bukti

Misalkan $(x(n, m)), (y(n, m))$ dan $(z(n, m))$ adalah sebarang barisan-barisan ganda di bilangan real dengan

$$x(n, m) \leq y(n, m) \leq z(n, m), \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Asumsikan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$.

Tulis $l = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$ di mana $l \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan barisan ganda $(y(n, m))$ konvergen dengan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} y(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $l = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$ maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|x(n, m) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x(n, m) - l < \varepsilon \quad (37)$$

$$|z(n, m) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < z(n, m) - l < \varepsilon \quad (38)$$

Dari asumsi (36) maka

$$x(n, m) - l \leq y(n, m) - l \leq z(n, m) - l \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (39)$$

Berdasarkan (37), (38) dan (39) diperoleh

$$-\varepsilon < x(n, m) - l \leq y(n, m) - l \leq z(n, m) - l < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < y(n, m) - l < \varepsilon$$

$$|y(n, m) - l| < \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Jadi $\lim_{n, m \rightarrow \infty} y(n, m) = l$ di mana $l = \lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$. Dengan

demikian terbukti bahwa barisan ganda $(y(n, m))$ konvergen dengan

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} x(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} y(n, m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} z(n, m)$$

Contoh 4.24

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda dengan

$$x(n, m) = \frac{\cos(n)}{m^2} + \frac{\sin(m)}{n^2}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Nilai limit ganda dari $x(n, m)$ dapat ditentukan dengan menerapkan teorema

4.23. Perhatikan bahwa untuk sebarang $n, m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \text{ dan } -1 \leq \cos(m) \leq 1$$

Karena $m^2 > 0$ dan $n^2 > 0$, maka diperoleh ketaksamaan sebagai berikut

$$-\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{m^2} + \frac{\sin(m)}{n^2} \leq \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

Akibatnya dengan menerapkan teorema 4.23, dapat disimpulkan bahwa

$(x(n, m))$ konvergen yaitu

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{m^2} + \frac{\sin(m)}{n^2} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

4.2 Kekonvergenan Deret Ganda

Setelah mengkaji definisi kekonvergenan barisan ganda bilangan real dan

sifat-sifatnya, barulah ditetapkan definisi dari kekonvergenan deret ganda bilangan real, kemudian mengkaji beberapa sifat kekonvergenan yang berlaku pada deret ganda bilangan real.

Definisi 4.25 (Habil., 2014)

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda bilangan real dan didefinisikan jumlah parsialnya, yaitu $(s(n, m))$ sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right).$$

Deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dikatakan konvergen ke bilangan real jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$. Jika tidak terdapat nilai s yang terpenuhi, deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dikatakan divergen.

Contoh 4.26

Diberikan barisan ganda $(x(n, m))$ dengan $(x(n, m)) = \left(\frac{4}{3^{n+m}}\right) \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Buktikan bahwa deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^{n+m}}\right)$ pada bilangan real konvergen ke 1.

Bukti

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^{n+m}}\right) &= 4 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3^n}\right)\left(\frac{1}{3^m}\right)\right) \\ &= 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right)\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^m}\right)\right) \\ &= 4 \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\right) \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Selanjutnya akan diuji nilai limit ganda yang diperoleh menggunakan definisi

4.25, yaitu

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{4}{3^{i+j}} \right) \right) = 1.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $K = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n, m \geq K$

berlaku,

$$\begin{aligned} |x(n, m) - x| &= |x(n, m) - 1| \\ &= \left| \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{4}{3^{i+j}} \right) \right) - 1 \right| \\ &= \left| 4 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{3^i} \right) \right) \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{3^j} \right) \right) - 1 \right| \\ &= \left| 4 \left(\frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^m \right)}{1 - \frac{1}{3}} \right) - 1 \right| \\ &= \left| 4 \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} \right)^m \right) - 1 \right| \\ &= \left| \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^m \right) - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1}{3^{n+m}} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} + 1 - 1 \right| \\ &= \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^{n+m}} \\ &< \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K} = \frac{2}{\left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \varepsilon.$$

Hal ini membuktikan bahwa deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^{n+m}}\right)$ konvergen ke 1.

Teorema 4.27 Kekonvergenan Deret Ganda (Habil, 2014)

Jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen di bilangan real, maka

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = 0.$$

Bukti

Misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen dan didefinisikan deret ganda parsial dengan

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x(i, j) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}$$

dan misalkan $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = s$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = s$, ini

berarti deret ganda parsial $s(n, m)$ konvergen ke s yaitu $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$.

Akibatnya terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$|s(n, m) - s| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (40)$$

Oleh karena itu, berdasarkan (40) maka $\forall n, m \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x(n, m)| &= |s(n, m) - s(n, m-1) - s(n-1, m) + s(n-1, m-1)| \\ &= |s(n, m) - s + s - s(n, m-1) - s(n-1, m) + s - s + s(n-1, m-1)| \\ &\leq |s(n, m) - s| + |s - s(n, m-1)| + |-s(n, m-1) + s| + \\ &\quad |-s + s(n, m-1)| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Jadi $\lim_{n,m \rightarrow \infty} x(n, m) = 0$.

Teorema 4.28 Kriteria Kekonvergenan Cauchy Deret Ganda (Habil, 2014)

Sebuah deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ di $\mathbb{R}$ konvergen ke bilangan real jika dan hanya jika jumlah parsialnya, yaitu $s(n, m)$ Cauchy.

Bukti

Misalkan $(x(n, m))$ adalah barisan ganda di bilangan real. Didefinisikan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ sedemikian sehingga $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right).$$

adalah deret ganda parsial $s(n, m)$ dari deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$. Berdasarkan definisi 4.25, $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke bilangan real jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$. Dengan kata lain, $(s(n, m))$ adalah barisan ganda yang konvergen. Menurut teorema 4.28, deret ganda parsial $(s(n, m))$ konvergen jika dan hanya jika $(s(n, m))$ Cauchy. Hal ini menunjukkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke bilangan real jika dan hanya jika jumlah parsialnya, yaitu $(s(n, m))$ adalah Cauchy.

Contoh 4.29

Perhatikan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m}$. Deret ganda tersebut tidaklah konvergen.

Sebab untuk nilai $\varepsilon = \frac{1}{2}$ maka dapat dipilih p, q, n, m dengan $q = 2m$ serta n dan m adalah bilangan ganjil sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
|s(p, q) - s(n, m)| &= \left| \sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^p \frac{(-1)^i}{j} \right) - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{j} \right) \right| \\
&= \left| \left(\sum_{j=1}^q \frac{1}{j} \right) \left(\sum_{i=1}^p (-1)^i \right) - \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \right) \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^q \frac{1}{j} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{j} \right| \\
&= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{q} \right| \\
&= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{q} \\
&> \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q} = \frac{q-m}{q} = \frac{2m-m}{2m} = \frac{1}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dengan demikian terlihat deret ganda parsial $(s(n, m))$ dari $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m}$ bukan Cauchy. Sehingga menurut teorema 4.28, $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m}$ tidak konvergen di himpunan bilangan real.

Selanjutnya, untuk memudahkan dalam melakukan perhitungan suatu bentuk tertentu dari deret ganda bilangan real yang bersifat konvergen, disajikan teorema limit pada deret ganda sebagai berikut.

Teorema 4.30 Perkalian Dua Deret Konvergen (Sidjara dkk., 2023)

Jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen.

Lebih jauh

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n,m) \right) = xy.$$

Bukti

Misalkan $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m)$ adalah deret ganda sedemikian sehingga

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

Didefinisikan $s_x(n), s_y(m)$ dan $s(n,m)$ yang secara berurutan adalah barisan-barisan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n), \sum_{m=1}^{\infty} y(m)$, dan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m)$. Akan dibuktikan bahwa

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} y(m) \right) = xy.$$

Perhatikan bahwa

$$s(n,m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i)y(j) \right) = \left(\sum_{i=1}^n x(i) \right) \left(\sum_{j=1}^m y(j) \right) = s_x(n)s_y(m).$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, ini berarti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_x(n) = x \text{ dan } \lim_{m \rightarrow \infty} s_y(m) = y. \quad (41)$$

Berdasarkan (41), menurut teorema 4.21 diperoleh

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n,m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} (s_x(n)s_y(m)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_x(n) \right) \left(\lim_{m \rightarrow \infty} s_y(m) \right) = xy.$$

Hal ini membuktikan bahwa

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} y(m) \right) = xy.$$

Contoh 4.31

Buktikan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n,m)$ dengan $(x(n,m)) = \left(\frac{1}{n(n+1)2^m} \right), \forall n, m \in$

$\mathbb{N}$ konvergen ke 1.

Bukti

Didefinisikan dua barisan $x(n)$ dan $y(m)$, yaitu $x(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $y(m) = \frac{1}{2^m} \forall n, m \in \mathbb{N}$. Untuk membuktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m)$

konvergen ke 1, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots = 1 \end{aligned}$$

dan

$$\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Maka berdasarkan teorema 4.30, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^m} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \times \frac{1}{2^m} \right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \right) \\ &= (1)(1) = 1. \end{aligned}$$

4.2 Kekonvergenan Deret Ganda Berulang

Sama halnya limit berulang pada barisan ganda di himpunan bilangan real, kekonvergenan deret ganda juga diperkenalkan istilah baru yang tidak didefinisikan pada deret di himpunan bilangan real yaitu deret ganda berulang. Berikut akan diberikan definisi serta beberapa teorema terkait kekonvergenan deret ganda berulang.

Definisi 4.32 (Habil, 2014)

Deret ganda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

dinamakan deret ganda berulang.

Contoh 4.33

Didefinisikan barisan ganda $x(n, m)$ sebagai berikut.

$$x(n, m) \begin{cases} 1; & \text{jika } n = m \\ -1; & \text{jika } n = m + 1 \\ 0; & \text{jika } n, m \text{ lainnya} \end{cases}$$

Buktikan bahwa deret berulang

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya tidak sama.

Bukti

Misalkan suku-suku barisan ganda jumlah parsial dari deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ adalah

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya tidak sama.

Perhatikan bahwa $\forall n \in \mathbb{N}$ dan $\forall n \geq 2$ berlaku

$$s(1, m) = \sum_{j=1}^m x(1, j) = x(1, 1) + 0 + 0 + \dots = 1 \quad (42)$$

$$s(n, m) = \sum_{j=1}^n x(n, j) = x(n, n) + x(n, n-1) = 1 + (-1) = 0 \quad (43)$$

Berdasarkan (42) dan (43) diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(1, m) \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

dan $\forall m \in \mathbb{N}$ dan $\forall m \geq 2$ berlaku

$$s(n, 1) = \sum_{j=1}^m x(i, 1) = x(1, 1) + x(2, 1) = 1 + (-1) = 0 \quad (44)$$

$$s(n, m) = \sum_{j=1}^n x(i, m) = x(m, m) + x(m+1, m) = 1 + (-1) = 0 \quad (45)$$

Berdasarkan (44) dan (45) diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, 1) \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Dengan demikian,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = 1 \neq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = 0.$$

Jadi terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya tidak sama.

Teorema 4.34 (Sidjara dkk., 2023)

Misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$. Deret ganda berulang

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) \text{ dan } \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

ada dan keduanya sama dengan s jika dan hanya jika memenuhi dua hal berikut:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen
2. $\forall m \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen

Bukti

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen.

Misalkan $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = s$ di mana $s \in \mathbb{R}$. Didefinisikan barisan ganda $s(n, m)$ sebagai jumlah parsial dari deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$, yaitu

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right), \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Berdasarkan definisi 4.25, $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke s jika terdapat $s \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n,m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$.

($\Rightarrow$) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = s$, maka $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Asumsikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = s$. Akan dibuktikan bahwa $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall n \in \mathbb{N}$. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = s$, ini berarti $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, jelas bahwa $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Jika $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall n \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = s$.

Asumsikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada. Akan dibuktikan

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)) = s$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m x(i, j) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} s(n, m) \right) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} s(n, m) \\ &= s \end{aligned}$$

Karena $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan demikian terbukti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = s$$

2. $\forall m \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen.

Misalkan $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = s$ di mana $s \in \mathbb{R}$. Didefinisikan barisan ganda

$s(n, m)$ sebagai jumlah parsial dari deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$, yaitu

$$s(n, m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right) \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Berdasarkan definisi 4.25, $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke s jika terdapat $s \in$

$\mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n, m \rightarrow \infty} s(n, m) = s$.

($\Rightarrow$) Jika $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = s$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in$

$\mathbb{N}$. Asumsikan bahwa $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = s$. Akan dibuktikan bahwa

$\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall m \in \mathbb{N}$. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall m \in \mathbb{N}$, ini berarti $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall m \in \mathbb{N}$. Dengan demikian jelas bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk $\forall m \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = s$.

Asumsikan bahwa untuk $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada. Akan dibuktikan

$\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)) = s$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x(i, j) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x(i, j) \right) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x(i, j) \right) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s(n, m) \right) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} s(n, m) \\ &= s \end{aligned}$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, dengan demikian terbukti bahwa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = s.$$

Sehingga jika menggabungkan teorema 4.30 dengan teorema 4.34, maka didapatkan hasil bahwa nilai kekonvergenan dari kedua deret ganda berulang adalah sama, sebagai berikut.

Teorema 4.35 (Sidjara dkk., 2023)

Jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = xy.$$

Bukti

Misalkan

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = xy.$$

Berdasarkan teorema 4.30, deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke xy yaitu

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = xy.$$

Perhatikan bahwa untuk sebarang $i, j \in \mathbb{N}$, maka diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} x(m, i) = \sum_{m=1}^{\infty} x(i)y(m) = x(i) \sum_{m=1}^{\infty} y(m) = x(i)y \in \mathbb{R}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(n, j) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(j) = y(j) \sum_{n=1}^{\infty} x(n) = y(j)x \in \mathbb{R}.$$

Ini berarti bahwa $\sum_{m=1}^{\infty} x(m, i)$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, j)$ ada $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Karena deret

ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = xy$ maka berdasarkan teorema 4.34, diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right)$$

$$= xy.$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian teorema 4.34, misalkan deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$, maka deret ganda berulang $\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m))$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m))$ ada. Limit kedua deret ganda berulang tersebut sama dengan s jika dan hanya jika berlaku: (1) $\forall m \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m)$ ada, (2) $\forall n \in \mathbb{N}$, deret $\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m)$ ada. Kemudian pada pembuktian 4.35, jika deret ganda $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m)$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dua deret yang konvergen, yaitu $\sum_{n,m=1}^{\infty} x(n, m) = \sum_{n,m=1}^{\infty} x(n)y(m)$, di mana $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) = x$ dan $\sum_{m=1}^{\infty} y(m) = y$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x(n, m) \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n, m) \right) = xy.$$

5.2 Saran

Topik penelitian mengenai kekonvergenan deret ganda berulang pada himpunan bilangan real, terdapat banyak kemungkinan pengembangan lebih lanjut. Karena deret ganda berulang yang dibahas adalah daerah asal $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dan daerah asli $\mathbb{R}$, maka penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk mengembangkan daerah asal dan daerah asli yang lain terkait kekonvergenan deret ganda berulang, seperti terhadap daerah asal $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ atau $\mathbb{N}^n$ serta berdaerah hasil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C}$ atau $\mathbb{C}^n$.

DAFTAR PUSTAKA

- Anthony, L., Nice, C. A., & Selina, V. P. (2019). *Double sequences & series*. International Journal of Science, Engineering and Management (IJSEM), 4(6), 55-60.
- Adnan, R. W. T. (2021). *Barisan dan Deret*. Modul Matematika 2. Universitas Terbuka.
- Al-Qurthubi, M. A. (2006). *Al-Jami' li Ahkam al-Qur'an*. Beirut: Mu'assasah al-Risalah.
- Al-Muyassar, Tim Tafsir. (2022). *Tafsir Al-Muyassar*. Riyadh: Mujamma' al-Malik Fahd li Thiba'at al-Mushaf asy-Syarif.
- Bartle, R. G., & Sherbert D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis (4th ed.)*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. ISBN 978-0-471-43331-6.
- Furdui, O., & Turzii, T. (2011). *On the summation of certain iterated series*. Journal of Integer Sequences, 14(11), 1-11.
- Endou, N. (2014). *Double Series and Sums*. Formalized Mathematics, 22(1), 57-68.
- Habil, E. D. (2014). *Double Sequences and Double Series*. Islamic University of Gaza, 1-32.
- Khairunnisa, A. (2014). *Matematika Dasar*. Jakarta: Rajawali Pers. ISBN 978-979-769-764-8.
- Hermanto, A. (2023). *Jenis-jenis dan tingkatan orang mukmin*. NU Online Lampung.
- Katsir, I. (2015). *Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Pustaka Imam Syafi'i.
- Kemenag. (2026). *Qur'an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/35?from=32&to=32>.
- Kemenag. (2026). *Qur'an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/89?from=27&to=28>.
- Larson, R., & Hostetler, R. P. (2007). *Precalculus* (8th ed., p. 613). Houghton Mifflin Company.
- Little, C. H. C., Teo, K., & Brunt, B. van. (2015). *Real Analysis via Sequences and Series Undergraduate Texts in Mathematics*. New York: Springer. ISBN 9781-4939-2650-3.
- Riyanto, M. Z. (2011). *Pengantar Analisis Real I*. Yogyakarta : Universitas Gadjah Mada.
- Sidjara, S., Abdy, M., Syam, R., Rasyid, M. H. N., & Shyaa, F. D. (2023). *Some Notes of Iteration Double Sequences and Double Series on Real Number*.

2023(Icsmtr), 42–53. https://doi.org/10.2991/978-94-6463-332-0_6.

Stewart, J. (2011). *Kalkulus Buku 2 Edisi 5*. Jakarta: Selemba Teknika. ISBN 978-981-4272-97-1.

Sugiman. (2005). *Kalkulus Lanjut*. Universitas Negeri Malang (UM PRESS). ISBN: 979-495-720-8.

Widiyanti, C., Putri, A. S., Hapipah, F. A., Gulo, H. Y., Sunaryani, R., Syahputra, S. A., & Pratiwi, S. R. (2023). *Penerapan materi barisan dan deret pada matematika ekonomi terhadap model pertumbuhan penduduk. MUQADDIMAH: Jurnal Ekonomi, Manajemen, Akuntansi dan Bisnis*, 1(2), 1–11.

RIWAYAT HIDUP



Rusmiyati, lahir di Gresik pada tanggal 04 April 2003. Penulis merupakan anak bungsu dari lima bersaudara, putri dari Bapak Ayyub dan Ibu Alima. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Al-Manar Menara yang lulus pada tahun 2010, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di MINU 16 Menara dan lulus pada tahun 2016. Kemudian, pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTS NU Menara dan lulus pada tahun 2019. Setelah itu, penulis melanjutkan Pendidikan menengah atas di MA Al-Manar Menara dan lulus pada tahun 2022. Setelah dinyatakan lulus dari MA, pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan tinggi setelah diterima sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN. Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis aktif mengikuti kegiatan akademik dan menyelesaikan berbagai proses pembelajaran yang menjadi bagian dari kurikulum studi. Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Dusun Plosokerep, Desa Dengkol, Kecamatan Singosari, Kabupaten Malang selama satu bulan sebagai Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (PSDM) pada tahun 2025. Selain itu, pada tahun yang sama penulis juga mengikuti program Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Kota Malang yang melaksanakan tugas seperti membantu administrasi umum dan persuratan.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rusmiyati
NIM : 220601110046
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Kekonvergenan Deret Ganda Berulang pada Himpunan Bilangan Real
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 September 2025	Konsultasi Topik	1.
2.	08 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, III	2.
3.	20 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, III	3.
4.	03 November 2025	Konsultasi Bab I, II, III	4.
5.	17 November 2025	ACC Bab I, II, dan III	5.
6.	01 Desember 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	15 Desember 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	12 Januari 2026	ACC Seminar Proposal	8.
9.	19 Januari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	9.
10.	23 Januari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	28 Januari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11.



KEMENTERIAN AGAMA RI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

12.	16 Februari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	23 Februari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	13.
14.	02 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	09 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	15.
16.	16 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	16.
17.	01 April 2026	ACC Bab IV dan V	17.
18.	13 April 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	18.
19.	20 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	19.
20.	06 Mei 2026	ACC Seminar Hasil	20.
21.	18 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	27 Mei 2026	ACC Sidang Skripsi	22.
23.	11 Juni 2026	ACC Keseluruhan	23.

Malang, 11 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012