

**GRUP HINGGA DARI HIMPUNAN TRANSFORMASI
SEGI- n BERATURAN DENGAN $n \geq 3$**

SKRIPSI

Oleh
NOVITA PUTRI SAMSIAR ANDINI
NIM. 19610091



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**GRUP HINGGA DARI HIMPUNAN TRANSFORMASI
SEGI- n BERATURAN DENGAN $n \geq 3$**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains Dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Novita Putri Samsiar Andini
NIM. 19610091**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**GRUP HINGGA DARI HIMPUNAN TRANSFORMASI
SEGI- n BERATURAN DENGAN $n \geq 3$**

SKRIPSI

Oleh
Novita Putri Samsiar Andini
NIM. 19610091

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 30 April 2026

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II



Intan Nisfulaila, M.Si
NIP. 19900215 201903 2 015



Erna Herawati, M.Pd
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M. Si
NIP. 19800527 200801 1 012

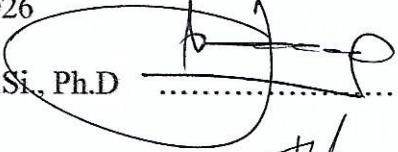
**GRUP HINGGA DARI HIMPUNAN TRANSFORMASI
SEGI- n BERATURAN DENGAN $n \geq 3$**

SKRIPSI

Oleh
Novita Putri Samsiar Andini
NIM. 19610091

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Juni 2026

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	
Anggota Penguji 1	: Dewi Ismiarti, M.Si	
Anggota Penguji 2	: Intan Nisfulaila, M.Si	
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd	

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M. Si
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Novita Putri Samsiar Andini
NIM : 19610091
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Grup Hingga dari Himpunan Transformasi Segi- n
beraturan dengan $n \geq 3$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia diberi sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Novita Putri Samsiar Andini
NIM. 19610091

MOTO

“Bukan langkah-langkah besar
yang mengantarkanku sampai di sini,
melainkan keberanian untuk
terus melangkah meski perlahan”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini dipersembahkan dengan rasa hormat dan syukur yang mendalam
kepada:

Kedua orang tua tercinta, Bapak Samsul dan Ibu Sri Andayani, yang menjadi pilar utama dalam hidup penulis. Terima kasih karena selalu mengiringi setiap langkah penulis dengan doa-doa terbaiknya, sumber kekuatan, kepercayaan yang besar, kasih sayang yang menjadi penerang dan pembuka jalan kemudahan bagi penulis dalam menyelesaikan studi ini.

Saudaraku tersayang, Syindy Hanif Sulistyowati selaku kakak penulis. Terima kasih karena selalu memberi dukungan, dorongan semangat, dan memberikan nasihat serta motivasi terbaik sehingga penulis mampu melewati setiap tantangan dalam penyusunan skripsi ini hingga selesai.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Segala puji serta syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala yang melimpahkan rahmat serta hidayahnya sehingga penulis menyelesaikan skripsi dengan judul “Grup Hingga Dari Himpunan Transformasi Segi- n Beraturan Dengan $n \geq 3$ ”. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad Shalallahu ‘Alaihi Wasallam yang menuntun manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang yakni agama Islam.

Proses penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, dukungan arahan serta bantuan secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih disampaikan terkhusus kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nurdiana, M.Kes., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Intan Nisfulaila, M.Si, selaku Dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, waktu, nasihat, do'a, serta pengalaman berharga kepada penulis.
5. Ibu Erna Herawati, M.Pd, selaku Dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, waktu, nasihat, do'a, serta pengalaman berharga kepada penulis.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, P.hD, selaku Ketua Penguji yang telah memberikan arahan kepada penulis.
7. Ibu Dewi Ismiarti, M.Si, selaku Anggota penguji 1 yang telah memberikan arahan, waktu, dan nasihat kepada penulis.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
9. Ayah dan Mama yang tiada hentinya memberikan do'a dan dukungan baik secara moral dan finansial.

10. Mbak Syindy, selaku kakak sekaligus teman bertukar pikiran yang selalu memberikan banyak motivasi dan semangat selama menyelesaikan studi ini.
11. Seluruh mahasiswa Angkatan 2019 atas kebersamaan yang terjalin, bertukar pendapat, bekerja sama, berjuang, saling membantu, dan mendoakan selama menempuh studi sarjana. Semoga kita semua senantiasa diberikan kesuksesan di jalan masing-masing.
12. Serta pihak yang terlibat dalam memberikan do'a, semangat berjuang, meluangkan waktu untuk bertukar pendapat serta memberikan pengalaman hidup selama penulis menempuh studi sarjana.

Semoga Allah Subhanahu Wa Ta'ala selalu melimpahkan rahmat kepada kita semua. Penulis mengucapkan mohon maaf atas kekurangan pada penulisan seminar proposal skripsi dan berharap semoga membawa manfaat bagi penulis dan kepada para pembaca.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 15 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
BAB II KAJIAN TEORI	6
2.1 Transformasi.....	6
2.1.1 Segi- n Beraturan	6
2.1.2 Transformasi Geometri Segi- n Beraturan.....	7
2.1.3 Grup	10
2.1.4 Grup Hingga	12
2.2 Kajian Integrasi Topik Al-Qur'an dan Hadits	13
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	17
BAB III METODE PENELITIAN	20
3.1 Jenis Penelitian.....	20
3.2 Pra Penelitian	20
3.3 Tahapan Penelitian	21
BAB IV PEMBAHASAN.....	23
4.1 Transformasi pada Segi-3 Beraturan dan Operasi Komposisi	23
4.1.1 Transformasi pada Segi-3 Beraturan	23
4.1.2 Notasi dan Penjelasan Transformasi pada Segi-3 beraturan.....	27
4.1.3 Operasi Komposisi pada Segi-3 Beraturan.....	28
4.1.4 Tabel Komposisi Transformasi pada Segi-3 Beraturan	30
4.1.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi-3 Beraturan	31
4.1.6 Kesimpulan Pembahasan Segi-3 Beraturan.....	35
4.2 Transformasi pada Segi-4 Beraturan dan Operasi Komposisi	36
4.2.1 Transformasi pada Segi-4 Beraturan	36
4.2.2 Notasi Transformasi Segi-4 Beraturan.....	39
4.2.3 Operasi Komposisi Transformasi pada Segi-4 Beraturan.....	41

4.2.4 Tabel Komposisi Transformasi Segi—4 Beraturan.....	43
4.2.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi—4 Beraturan	45
4.2.6 Kesimpulan Pembahasan Segi—4 Beraturan.....	48
4.3 Transformasi pada Segi—5 Beraturan dan Operasi Komposisi	49
4.3.1 Jenis-jenis Transformasi pada Segi—5 Beraturan.....	50
4.3.2 Notasi Transformasi pada Segi—5 Beraturan	54
4.3.3 Operasi Komposisi pada Transformasi Segi—5 Beraturan.....	55
4.3.4 Tabel Komposisi Transformasi pada Segi—5 Beraturan	57
4.3.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi—5 Beraturan	59
4.3.6 Kesimpulan Transformasi pada Segi—5 Beraturan	63
4.4 Generalisasi Transformasi pada Segi— n Beraturan	64
4.4.1 Generalisasi Transformasi pada Segi— n Beraturan.....	65
4.4.2 Operasi Komposisi pada Segi— n Beraturan.....	68
4.4.3 Kesimpulan Generalisasi Transformasi pada Segi— n Beraturan	70
4.5 Kajian Hasil Penelitian dengan Integrasi Agama.....	70
BAB V KESIMPULAN.....	74
5.1 Kesimpulan	74
5.2 Saran untuk Penelitian Selanjutnya.....	75
DAFTAR PUSTAKA.....	77
RIWAYAT HIDUP.....	78

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Notasi Transformasi pada Segi–3 Beraturan.....	28
Tabel 4.2	Hasil Operasi Komposisi Segi–3 Beraturan.....	29
Tabel 4.3	Tabel Komposisi Transformasi Segi-3 Beraturan	30
Tabel 4.4	Invers Elemen pada Himpunan T.....	34
Tabel 4.5	Notasi Transformasi pada Segi–4 Beraturan	40
Tabel 4.6	Tabel Komposisi Transformasi Segi–4 Beraturan	44
Tabel 4.7	Invers Elemen pada Himpunan T.....	48
Tabel 4.8	Notasi Transformasi pada Segi–5 Beraturan.....	55
Tabel 4.9	Tabel Komposisi Himpunan Transformasi Segi–5 Beraturan.....	58
Tabel 4.10	Invers Elemen pada Himpunan T.....	62
Tabel 4.11	Pola Transformasi Rotasi pada Segi Beraturan	66
Tabel 4.12	Pola Transformasi Refleksi pada Segi Beraturan.....	67

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Transformasi pada Segi-4 Beraturan.....	9
Gambar 4.1	Rotasi Segi-3 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius	24
Gambar 4.2	Refleksi Segi-3 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius	26
Gambar 4.3	Rotasi Segi-4 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius.....	37
Gambar 4.4	Refleksi Segi-4 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius.....	38
Gambar 4.5	Rotasi Segi-5 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius.....	51
Gambar 4.6	Refleksi Segi-5 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius.....	53
Gambar 4.7	Segi- n Beraturan pada Koordinat Kartesius	65

ABSTRAK

Andini, Novita Putri Samsiar. 2026. **Grup Hingga Dari Himpunan Transformasi Segi- n Beraturan dengan $n \geq 3$** . Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: transformasi geometri, grup hingga, grup dihedral, operasi komposisi, segi- n beraturan

Transformasi pada segi- n beraturan yang memetakan bangun ke dirinya sendiri terdiri atas transformasi rotasi dan refleksi. Himpunan transformasi tersebut bersama operasi komposisi membentuk suatu struktur aljabar yang dapat dikaji menggunakan teori grup. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji apakah himpunan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan dengan operasi komposisi membentuk grup serta merumuskan generalisasi himpunan transformasi pada segi- n beraturan dengan $n \geq 3$. Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka yang dilakukan melalui kajian terhadap berbagai referensi yang berkaitan dengan transformasi geometri, teori grup, dan grup dihedral. Analisis dilakukan melalui identifikasi himpunan transformasi pada segi-3, segi-4, dan segi-5 beraturan, penyusunan tabel Cayley, serta pengujian pemenuhan aksioma grup yang meliputi sifat tertutup, keberadaan unsur identitas, sifat asosiatif, dan unsur invers. Hasil penelitian menunjukkan bahwa himpunan transformasi pada segi-3 beraturan membentuk grup dihedral berorde 6, pada segi-4 beraturan membentuk grup dihedral berorde 8, dan pada segi-5 beraturan membentuk grup dihedral berorde 10. Pola yang diperoleh dari ketiga kasus tersebut selanjutnya digunakan untuk menggeneralisasi himpunan transformasi pada segi- n beraturan. Diperoleh bahwa segi- n beraturan terdapat n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi yang membentuk grup dihedral D_n berorde $2n$. Dengan demikian, struktur grup yang diperoleh dari segi-3, segi-4, dan segi-5 beraturan merupakan kasus khusus dari grup dihedral D_n pada segi- n beraturan.

ABSTRACT

Andini, Novita Putri Samsiar. 2026. **Finite Groups of the Set of Transformations of Regular n –Gons for $n \geq 3$** . Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Advisors: (I) Intan Nisfulaila, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: geometric transformations, finite groups, dihedral groups, composition operation, regular n -gons.

Transformations of a regular n -gon that map the figure onto itself consist of rotations and reflections. The set of these transformations together with the composition operation forms an algebraic structure that can be studied using group theory. This study aims to investigate whether the sets of transformations of regular triangles, regular quadrilaterals, and regular pentagons equipped with the composition operation form groups and to formulate a generalization of the transformation set of a regular n -gon for $n \geq 3$. This study employs a library research method through the examination of various references related to geometric transformations, group theory, and dihedral groups. The analysis is carried out by identifying the sets of transformations of regular triangles, regular quadrilaterals, and regular pentagons, constructing Cayley tables, and verifying the group axioms, namely closure, the existence of an identity element, associativity, and the existence of inverse elements. The results show that the transformation set of a regular triangle forms a dihedral group of order 6, the transformation set of a regular quadrilateral forms a dihedral group of order 8, and the transformation set of a regular pentagon forms a dihedral group of order 10. The pattern obtained from these three cases is then used to generalize the transformation set of a regular n -gon. It is found that a regular n –gon has n rotational transformations and n reflection transformations that form the dihedral group D_n of order $2n$. Therefore, the structures obtained from the regular triangle, regular quadrilateral, and regular pentagon are special cases of the dihedral group D_n on a regular n -gon.

مستخلص الجث

أنديني، نوفيتا بوتري سامسيار. ٢٠٢٦. المجموعات النهائية من مجموعات التحويلات المضلعة- n المنتظمة ذات $n \geq 3$ البحث العلمي. قسم دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ. المشرف: (١) إيتان نصف الليله، الما جسيورة في العلوم (٢) إيرنا هراوا تي، الما جشرة في التربية

الكلمات الأساسية: التحويلات الهندسية، المجموعة المنتهية، المجموعة الديهدرالية، عملية التركيب، المضلع -منتظم

تألّفت التحويلات على المربع المنتظم- n التي تعكس الشكل إلى نفسه من تحويلات الدوران والانعكاس. وشكل مجموعة التحويلات هذه، إلى جانب عملية التركيب، بنية جبرية يمكن دراستها باستخدام نظرية المجموعات. هدفت هذه الدراسة إلى التحقق مما إذا كانت مجموعة التحويلات على الوجه المنتظم-3، والوجه المنتظم-4، والوجه المنتظم-5 مع عملية التركيب تشكل مجموعة، وكذلك صياغة تعميم لمجموعة التحويلات على الوجه المنتظم- n مع $n \geq 3$. إستُخدمت هذه الدراسة طريقة الدراسة المكتبية التي أجريت من خلال مراجعة لمختلف المراجع المتعلقة بالتحويلات الهندسية ونظرية المجموعات والمجموعات الديهدرالية. أُجري التحليل من خلال تحديد مجموعة التحويلات في المضلعات المنتظمة 3-و-4 و-5، وإعداد جدول كايلي، واختبار استيفاء أكسيومات المجموعة التي تشمل خاصية الإغلاق، ووجود عنصر الهوية، وخاصية التجميع، وعنصر العكس. أظهرت نتائج البحث أن مجموعة التحويلات على الوجه 3 المنتظم تشكل مجموعة ديهدرالية من الرتبة 6، وعلى الوجه 4 المنتظم تشكل مجموعة ديهدرالية من الرتبة 8، وعلى الوجه 5 المنتظم تشكل مجموعة ديهدرالية من الرتبة 10. ثم استُخدمت الأنماط المستخلصة من هذه الحالات الثلاث لتعميم مجموعة التحويلات على الوجه- n المنتظم. وقد تبين أن المضلعة- n المنتظمة تحتوي على n تحويلات دورانية و n تحويلات انعكاسية دورانية و n تحويلات انعكاسية تشكل مجموعة ديهدرالية Dn من الرتبة $2n$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu bangun datar yang memiliki struktur simetri yang kaya adalah segi-4 beraturan, yang memiliki dua jenis simetri yaitu, empat rotasi dan 4 refleksi. Segi-4 beraturan merupakan salah satu bangun datar yang memiliki tingkat keteraturan dan kesimetrian yang tinggi dalam kajian geometri. Kekhasan segi-4 beraturan terletak pada kesamaan panjang seluruh sisinya, kesamaan besar sudut-sudutnya, serta keberadaan pusat dan sumbu-sumbu simetri yang memungkinkan berbagai transformasi dilakukan tanpa mengubah bentuk dan ukuran bangun tersebut. Ketika dilakukan transformasi seperti rotasi dan refleksi, segi-4 beraturan selalu dipetakan ke posisi lain yang tetap kongruen dengan posisi semula. Hal ini menunjukkan bahwa segi-4 beraturan memiliki struktur simetri internal yang kuat dan terorganisasi. Dalam kajian matematika, sifat-sifat tersebut menjadikan segi-4 beraturan sebagai objek yang representatif untuk mengamati keteraturan transformasi geometri secara sistematis sebelum dikembangkan ke segi- n beraturan (Gallian, 2013).

Transformasi geometri pada segi- n beraturan dapat dipahami melalui konsep aljabar, khususnya pada teori grup. Teori grup merupakan cabang aljabar yang mempelajari suatu himpunan beserta satu operasi yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsurnya memiliki invers. Konsep grup tidak hanya muncul sebagai struktur abstrak, tetapi berkembang secara alami dari berbagai permasalahan matematika, termasuk kajian transformasi geometri. Ketika transformasi-transformasi mempertahankan suatu segi- n beraturan dikumpulkan ke dalam satu himpunan dan dilengkapi dengan operasi komposisi,

struktur yang terbentuk dapat dianalisis menggunakan definisi formal grup. Dengan demikian, teori grup menyediakan kerangka konseptual yang memungkinkan transformasi geometri dipahami tidak hanya sebagai perubahan posisi bangun, tetapi sebagai objek aljabar yang memiliki keteraturan dan hubungan internal yang jelas (Dummit & Foote, 2004).

Kajian mengenai transformasi geometri memiliki peranan penting dalam menjembatani geometri dan aljabar. Melalui transformasi, segi- n beraturan yang awalnya dipahami secara visual dapat direpresentasikan dalam bentuk simbolik dan operasional. Pendekatan ini memungkinkan analisis yang lebih mendalam terhadap pola, keteraturan, dan simetri yang dimiliki suatu bangun beraturan. Dalam konteks segi-4 beraturan, transformasi rotasi dan refleksi yang mempertahankan bentuk bangun dapat disusun dalam suatu sistem yang memenuhi aksioma grup hingga. Hal ini menunjukkan bahwa struktur grup tidak muncul secara terpisah dari geometri, melainkan berkembang dari pengamatan terhadap keteraturan transformasi pada bangun beraturan. Oleh karena itu, kajian transformasi segi-4 beraturan memberikan contoh nyata bagaimana konsep grup hingga dapat dipahami melalui objek geometri yang sederhana namun memiliki struktur aljabar yang kaya (Gallian, 2013).

Integrasi nilai-nilai Islam dalam pembelajaran matematika memiliki peranan strategis dalam berpikir logis dan analitis, tetapi juga berakhlak dan berakhlak. Konsep simetri dan keteraturan dalam teori grup dapat dijadikan representasi dari prinsip keseimbangan dan keadilan yang juga menjadi inti ajaran Islam. Hal ini sejalan dengan firman Allah SWT dalam surah Ar-Rahman ayat 7-8 (Kementerian Agama RI, 2019).

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ﴿٧﴾

Artinya: “Dan langit telah ditinggikan-Nya dan Dia ciptakan keseimbangan,”

أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ﴿٨﴾

Artinya: “agar kamu jangan merusak keseimbangan itu.”

Ayat tersebut memiliki keterkaitan yang erat dengan nilai-nilai keislaman, khususnya konsep keseimbangan dan keteraturan ciptaan Allah SWT. Dalam surah tersebut dikatakan bahwa Allah meninggikan langit dan meletakkan “الْمِيزَانَ” (timbangan), serta memerintahkan manusia agar tidak melampaui batas keseimbangan tersebut. Menurut Quraish Shihab, istilah “الْمِيزَانِ” dalam ayat ini tidak hanya dimaknai sebagai alat ukur secara fisik, tetapi juga sebagai prinsip keteraturan alam semesta. Keseimbangan tersebut mencerminkan adanya hukum dan aturan yang mengatur setiap ciptaan secara konsisten dan terukur (Shihab, 2006).

Dalam konteks matematika, khususnya pada kajian transformasi segi-4 beraturan dan struktur grup hingga, prinsip “الْمِيزَانِ” dapat dipahami sebagai keteraturan internal yang harus dipenuhi agar suatu sistem bersifat sah secara matematis. Setiap transformasi harus memenuhi aturan tertentu, setiap operasi harus konsisten, dan keseluruhan struktur harus bebas dari kontradiksi. Buya Hamka menegaskan bahwa perintah untuk tidak merusak keseimbangan dalam surah Ar-Rahman merupakan dorongan agar manusia bersikap adil, teliti, dan tidak sewenang-wenang dalam memahami dan mengelola hukum-hukum yang ada di alam. Sikap ini selaras dengan tuntutan dalam kajian matematika, dimana ketelitian

dan kepatuhan terhadap aturan menjadi syarat utama dalam membangun struktur yang benar dan bermakna (Hamka, 1983).

Dengan demikian, kajian mengenai keteraturan transformasi geometri dan struktur grup hingga tidak hanya merupakan aktivitas intelektual semata, tetapi juga dapat dipandang sebagai bagian dari upaya memahami keteraturan ciptaan Allah SWT secara rasional dan sistematis. Integrasi ini menunjukkan bahwa nilai-nilai keislaman dan kajian matematika saling bersinergi dalam menumbuhkan sikap ilmiah yang menghargai keteraturan, keseimbangan, dan ketepatan sebagai prinsip dasar dalam memahami alam dan ilmu pengetahuan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian tersebut, rumusan masalah yang akan dikaji yakni:

1. Apakah himpunan transformasi segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan yang dilengkapi dengan operasi komposisi memenuhi aksioma-aksioma grup?
2. Bagaimanakah bentuk generalisasi himpunan transformasi dan operasi komposisi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan dan segi-5 beraturan ke bentuk segi- n beraturan?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Menganalisis apakah himpunan transformasi segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan yang dilengkapi operasi komposisi dalam memenuhi aksioma - aksioma grup.

2. Menggeneralisasi himpunan transformasi pada segi- n beraturan yang dilengkapi dengan operasi komposisi sebagai grup dihedral D_n .

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yakni:

1. Penelitian ini mengutamakan transformasi yang mempertahankan bentuk segi beraturan, yaitu rotasi dan refleksi.
2. Operasi yang digunakan adalah komposisi fungsi dari transformasi geometri.
3. Penelitian hanya terbatas pada pembuktian simetri segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan sebagai dasar membentuk grup dihedral pada transformasi segi- n beraturan.
4. Generalisasi dilakukan terhadap himpunan transformasi yang memetakan segi- n beraturan ke dirinya sendiri.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis bagaimana himpunan transformasi pada bangun segi beraturan dapat memenuhi aksioma-aksioma grup. Secara praktik penelitian ini diharapkan mampu memberikan manfaat diantaranya:

1. Bagi lembaga, hasil penelitian ini akan menambah kepustakaan dan wawasan untuk bidang matematika khususnya aljabar abstrak.
2. Bagi peneliti, sebagai tambahan materi dalam melakukan penelitian penyusunan karya ilmiah dalam bentuk penelitian, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterimanya.
3. Bagi pembaca, sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai hubungan antara geometri dan aljabar sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau lebih dikembangkan

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Transformasi

2.1.1 Segi- n Beraturan

Segi- n beraturan adalah bangun datar yang memiliki n sisi dengan Panjang yang sama dan n sudut yang sama besarnya. Keseragaman Panjang sisi dan besar sudut tersebut menyebabkan segi- n beraturan memiliki tingkat keteraturan yang tinggi, sehingga menjadikan objek yang penting dalam kajian geometri.

Keteraturan pada segi- n beraturan memungkinkan adanya transformasi tertentu yang memetakan bangun tersebut ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya. Transformasi semacam ini dikenal sebagai simetri. Oleh karena itu, segi- n beraturan tidak hanya dapat dikaji secara visual melalui geometri, tetapi juga secara struktural melalui pendekatan aljabar (M.A. Armstrong, 1989).

Dalam penelitian ini, segi- n beraturan digunakan sebagai kerangka kajian umum untuk memahami keterkaitan antara sifat-sifat geometri dan struktur aljabar. Namun, pembahasan difokuskan secara mendalam pada segi-4 beraturan. Segi-4 beraturan adalah bangun datar yang memiliki empat sisi sama panjang dan empat sudut siku-siku. Bangun ini merupakan salah satu contoh paling dasar dari segi- n beraturan dan sering digunakan sebagai model awal dalam kajian simetri karena strukturnya yang teratur dan mudah divisualisasikan (Dummit & Foote, 2004).

Selain kesebangunan sisi dan sudut, segi-4 beraturan memiliki sifat simetri yang kuat. segi-4 beraturan memiliki salah satu titik pusat simetri, yaitu titik

potong kedua diagonalnya. Keberadaan pusat simetri ini memungkinkan adanya transformasi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk dan ukurannya. Transformasi semacam ini merupakan objek utama dalam kajian simetri geometri.

Sifat-sifat simetri pada segi-4 beraturan, seperti adanya rotasi dan refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri, menjadikan segi-4 beraturan sebagai contoh yang tepat untuk memperkenalkan konsep transformasi geometri, sehingga pembahasan segi-4 beraturan pada sub bab ini menjadi dasar untuk kajian transformasi geometri yang akan dibahas pada sub bab selanjutnya.

2.1.2 Transformasi Geometri Segi- n Beraturan

Transformasi geometri adalah pemetaan yang mengaitkan setiap titik pada suatu bangun geometri dengan titik lain pada bidang datar. Transformasi ini dipandang sebagai suatu fungsi yang bekerja pada seluruh titik bangun secara seragam. Dalam geometri *Euclidean*, transformasi digunakan untuk menggambarkan perubahan posisi suatu bangun tanpa harus mengubah sifat-sifat tertentu yang dimilikinya.

Dua bangun datar dikatakan kongruen apabila kedua bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Secara matematis, dua bangun datar A dan B dikatakan kongruen apabila terdapat suatu transformasi yang memetakan setiap titik pada bangun A ke titik pada bangun B sehingga jarak antar titik yang bersesuaian tetap terjaga.

Dalam penelitian ini, transformasi geometri dibatasi pada transformasi yang mempertahankan jarak dan sudut. Transformasi semacam ini dikenal sebagai

isometri. Isometri memetakan suatu bangun ke bangun lain yang kongruen, sehingga bentuk dan ukuran bangun tetap terjaga meskipun posisinya berubah.

Jenis transformasi geometri yang dikaji meliputi rotasi dan refleksi. Rotasi merupakan transformasi yang memutar suatu bangun terhadap suatu titik tetap dengan sudut tertentu. Sementara itu, refleksi merupakan transformasi yang memetakan suatu bangun terhadap suatu garis tertentu yang disebut sumbu refleksi.

Pada segi-4 beraturan dilakukan terhadap garis-garis tertentu yang menjadi sumbu simetri segi-4 beraturan. Garis-garis tersebut meliputi garis yang melalui titik tengah sisi-sisi yang berhadapan serta garis diagonal segi-4 beraturan. Refleksi terhadap garis-garis ini memetakan segi-4 beraturan ke bangun yang kongruen dengan bangun semula.

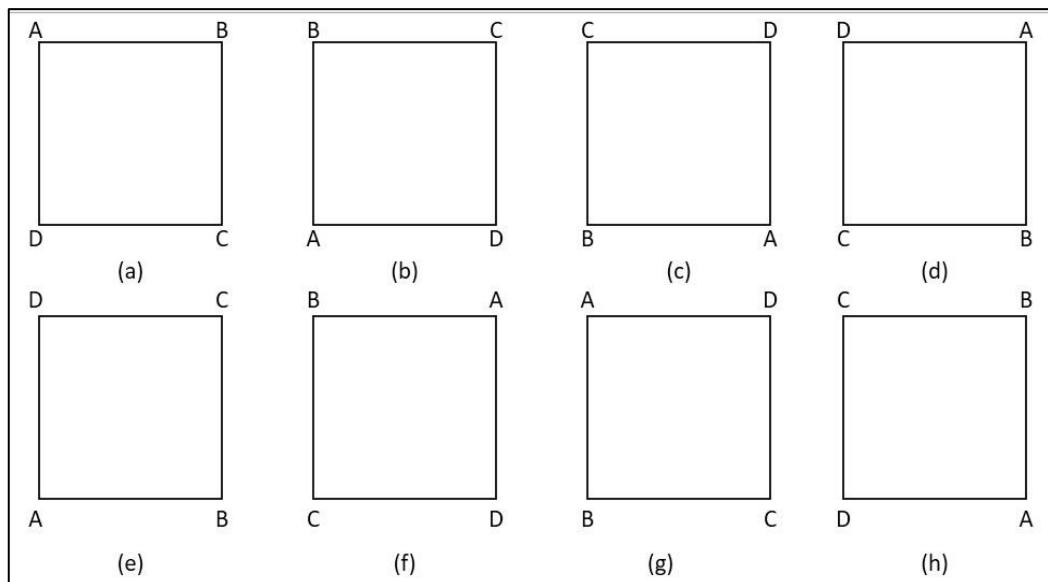
Transformasi geometri pada segi-4 beraturan bersifat tertutup dalam arti bahwa hasil dari setiap transformasi yang dikaji tetap merupakan segi-4 beraturan. Sifat ini menjadikan transformasi geometri sebagai objek yang tepat untuk dikaji lebih lanjut dalam kerangka aljabar.

Pada segi-4 beraturan rotasi merupakan transformasi yang memutar bangun terhadap titik pusat segi-4 beraturan. Titik pusat ini adalah titik potong kedua diagonal segi-4 beraturan dan menjadi titik yang tetap selama proses rotasi. Arah rotasi ditetapkan melawan arah jarum jam. Terdapat 4 rotasi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri, yaitu rotasi sebesar 0° , 90° , 180° , dan 270° .

Rotasi dengan sudut-sudut tersebut menghasilkan bangun yang tetap berimpit dengan segi-4 beraturan semula, Adapun rotasi dengan sudut selain

kelipatan 90° tidak menghasilkan bangun yang berimpit dengan posisi semula sehingga tidak termasuk anggota himpunan transformasi yang dikaji.

Selain rotasi, segi-4 beraturan juga memiliki transformasi refleksi. Refleksi merupakan transformasi terhadap suatu garis yang disebut sumbu refleksi. Pada segi-4 beraturan terdapat empat sumbu refleksi, yaitu dua garis yang melalui titik tengah sisi-sisi yang berhadapan dan dua garis diagonal segi-4 beraturan. Refleksi terhadap masing-masing sumbu tersebut memetakan segi-4 beraturan ke bangun yang tetap kongruen dengan bangun semula.



Gambar 2.1 Transformasi pada Segi-4 Beraturan

Setiap gambar pada Gambar 2.1 merepresentasikan satu transformasi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri. Gambar (a) menunjukkan rotasi sebesar 0° yang berfungsi sebagai transformasi identitas, yaitu transformasi yang tidak mengubah posisi titik-titik sudut segi-4 beraturan. Pada gambar (b), (c), (d) masing-masing memperlihatkan hasil rotasi sebesar 90° , 180° , dan 270° searah jarum jam terhadap titik pusat segi-4 beraturan. Perubahan posisi huruf pada

setiap sudut menunjukkan bagaimana titik-titik sudut dipetakan ke posisi baru akibat rotasi tersebut.

Adapun gambar (e), (f), (g), dan (h) memperlihatkan refleksi terhadap sumbu-sumbu simetri segi-4 beraturan, yaitu dua garis diagonal serta dua garis yang melalui titik tengah sisi-sisi yang berhadapan. Pada masing-masing refleksi, susunan titik sudut berubah sesuai dengan sifat pencerminan terhadap sumbu yang bersangkutan, namun bentuk dan ukuran segi-4 beraturan tetap terjaga. Dengan demikian, seluruh gambar tersebut menunjukkan adanya delapan transformasi berbeda yang semuanya mempertahankan kekongruenan bangun.

Dengan demikian, seluruh rotasi dan refleksi pada segi-4 beraturan membentuk himpunan transformasi yang terbatas dan terdefinisi dengan jelas. Himpunan transformasi inilah yang selanjutnya menjadi dasar pembahasan dalam kajian aljabar, khususnya pada pembentukan grup hingga.

2.1.3 Grup

Dalam aljabar abstrak, grup merupakan salah satu struktur dasar yang digunakan untuk mengkaji himpunan beserta operasi yang didefinisikan. Konsep grup berperan penting dalam berbagai cabang matematika, seperti teori bilangan, geometri, dan transformasi. Secara umum, grup digunakan untuk mempelajari himpunan elemen yang memiliki aturan operasi tertentu dan memenuhi sifat-sifat khusus.

Definisi 2.1

Suatu grup adalah himpunan tak kosong G yang dilengkapi suatu operasi biner, misalnya dilambangkan dengan $*$, sehingga memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku:

$$a * b \in G \quad (2.1)$$

2. Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad (2.2)$$

3. Memiliki unsur identitas

Terdapat elemen $e \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$,

$$a * e = e * a = e \quad (2.3)$$

4. Memiliki invers

Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sehingga:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad (2.4)$$

Suatu grup disebut grup abelian apabila operasinya bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku:

$$a * b = b * a \quad (2.5)$$

Contoh 2.1

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan membentuk grup. Unsur identitasnya adalah 0, sedangkan invers dari setiap elemen $a \in \mathbb{Z}$, invers dari a adalah $-a$

Dalam penelitian ini, konsep grup digunakan untuk menganalisis himpunan transformasi pada segi- n beraturan dengan operasi komposisi transformasi. Jika himpunan transformasi tersebut memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan memiliki invers untuk setiap elemen, maka himpunan tersebut membentuk suatu grup (Dummit & Foote, 2004).

2.1.4 Grup Hingga

Konsep orde grup digunakan untuk menyatakan banyaknya elemen dalam suatu grup dan menjadi dasar dalam mendefinisikan grup hingga.

Definisi 2.2

Banyaknya elemen dari suatu grup, baik berhingga maupun tak berhingga disebut dengan orde grup, jika G adalah suatu grup, maka orde grup G dinyatakan dengan notasi (Gallian, 2013):

$$|G| \quad (2.6)$$

Suatu grup G disebut grup hingga apabila banyak elemen pada grup tersebut merupakan suatu bilangan asli. Dengan kata lain, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga:

$$|G| = n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Sebaliknya, apabila banyak elemen grup tidak dapat dinyatakan oleh suatu bilangan asli tertentu, maka grup tersebut disebut grup tak hingga. Konsep orde grup digunakan untuk menunjukkan banyaknya elemen dalam suatu grup dan menjadi dasar dalam menganalisis struktur aljabar yang dimiliki.

Contoh 2.2

Terdapat himpunan transformasi rotasi segi-4 beraturan $G = \{e, r, r^2, r^3\}$ yang memenuhi aksioma grup, merupakan grup hingga karena memiliki empat elemen.

Oleh karena itu

$$|G| = 4$$

Dalam penelitian ini, konsep grup hingga digunakan sebagai landasan untuk mengkaji banyaknya transformasi yang memetakan segi- n beraturan ke dirinya sendiri.

2.2 Kajian Integrasi Topik Al-Qur'an dan Hadits

Al-Qur'an memberikan banyak isyarat tentang keseimbangan, keteraturan, dan hukum-hukum yang mengatur alam semesta. Integrasi topik yang berkaitan antara himpunan transformasi simetri dari segi-4 ke segi- n beraturan yang membentuk grup hingga sebagai manifestasi dari kesempurnaan ciptaan Allah SWT. Konsep ini secara mendalam direfleksikan dalam Qur'an Surah Al-Mulk (67) ayat 3, dimana Allah SWT menantang manusia untuk menemukan celah atau ketidak sempurnaan (تَفَاوُت) dalam ciptaannya, ayat tersebut mengatakan:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَإِذْ جَاءَ الْبَصَرُ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ

Artinya: “Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat?”

Menurut M. Quraish Shihab, ayat ini menegaskan bahwa ciptaan Allah SWT disusun dengan keteraturan dan keserasian yang konsisten, sehingga dapat dikaji dan dipahami melalui hukum-hukum tertentu. Keteraturan ini menjadi dasar bagi manusia untuk melakukan pengamatan dan analisis ilmiah terhadap alam (Shihab, 2006).

Penafsiran ayat tersebut dapat dikaitkan dengan konsep matematika dalam bidang geometri, khususnya pada segi-4 beraturan. Bangun memiliki sisi yang sama panjang, sudut yang sama besar, dan tingkat simetri yang tinggi, sehingga tampak sempurna dari berbagai sudut pandang. Hal ini serupa dengan keseimbangan konsisten yang terdapat pada alam semesta.

Keterkaitan dengan tafsir Al-Qur'an terletak pada kesempurnaan ciptaan Allah yang dapat diibaratkan dengan simetri pada segi-4 beraturan. Alam semesta

memiliki hukum-hukum tetap yang menjaga keharmonisan segala sesuatu. Tidak terdapat cacat sebagaimana disebutkan dalam ayat, karena setiap unsur saling mendukung secara konsisten.

Dalam prinsip ketetapan dan hukum yang pasti dalam matematika juga sejalan dengan firman Allah Swt dalam Surah Al-Qamar ayat 49, yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu dengan ukuran yang telah ditentukan.*”

Menurut tafsir Al- Misbah, M. Quraish Shihab menekankan bahwa ciptaan Allah SWT disusun dengan keteraturan, keserasian, dan ukuran yang presisi serta telah ditetapkan (بِقَدَرٍ). Segala sesuatu di alam semesta mengikuti hukum tetap yang konsisten, harmonis, dan tanpa cacat (Shihab, 2006).

Konsep ini dapat disambungkan dengan teori grup dalam matematika, khususnya grup simetri yang menggambarkan keteraturan dan kesetimbangan pada bentuk geometri beraturan. Contoh sederhana dalam simetri adalah segi-4 beraturan yang memiliki delapan operasi simetri terbatas (empat rotasi dan empat refleksi). Struktur operasi ini berbentuk tertutup dimana penggabungan apapun tetap menjaga bentuk aslinya, mencerminkan hukum tetap yang presisi seperti “بِقَدَرٍ” dalam ciptaan (Shihab, 2006).

Pada teori grup, terdapat prinsip keterulangan dan periodisitas, yang tertera dalam firman Allah Swt Qur'an Surah Yasin ayat 40:

لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِي لَهَا أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ ۚ وَكُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٤٠﴾

Artinya: “*Tidaklah mungkin bagi matahari mengejar bulan dan malam pun tidak dapat mendahului siang. Masing-masing beredar pada garis edarnya.*”

Ayat ini berbicara tentang keteraturan orbit benda-benda langit, dimana matahari tidak mengejar bulan, malam tidak mendahului siang, dan masing-masing beredar pada garis edar nya sendiri dengan aturan yang tetap dan harmonis.

Menurut tafsir M. Quraish Shihab dalam Tafsir Al-Misbah ayat ini menegaskan bahwa alam semesta berada dalam pengaturan yang sangat teliti dan teratur. Kalimat “*فَلِكِ يَسْبَحُونَ*” menunjukkan bahwa setiap benda langit bergerak pada lintasan yang telah ditentukan dengan sempurna, tanpa pernah keluar jalur, saling bertabrakan, atau mengganggu keseimbangan satu sama lain (Shihab, 2006).

Prinsip keteraturan periodik ini sejalan dengan konsep rotasi berorde dalam teori grup matematika. Dalam struktur grup, setiap rotasi sebesar sudut tertentu akan kembali ke posisi identitas (posisi semula) setelah dilakukan sebanyak n kali, dimana n adalah orde elemen tersebut (Dummit & Foote, 2004)

Keteraturan periodik ini menjadi analogi matematis yang indah bagi keteraturan semesta. Sebagaimana matahari dan bulan tidak pernah keluar dari orbitnya, setiap elemen dalam grup rotasi juga tidak pernah keluar dari struktur sistemnya. Menurut (Gallian, 2013), dalam grup rotasi, setiap elemen memiliki siklus teratur yang pasti berakhir pada identitas, sama seperti orbit benda langit yang berulang tanpa kesalahan atau penyimpangan.

Pada struktur grup dimana setiap transformasi (rotasi dan refleksi) memiliki aturan yang konsisten. Setiap elemen memiliki invers, identitas, dan berkaitan dengan setiap operasi yang sesuai disetiap aksioma-aksoma grup (Dummit & Foote, 2004). Hal ini menunjukkan bahwa keindahan dan kesempurnaan tidak muncul secara acak, tetapi melalui aturan (tertib) yang terjaga secara sistematis.

Sebagaimana hadits Rasulullah Saw, diriwayatkan oleh (al-Mawṣilī) yang berbunyi:

عَنْ أَبِي الدَّرْدَاءِ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ، قَالَ رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ إِذَا عَمِلَ أَحَدُكُمْ عَمَلًا أَنْ يُتَّقَنَهُ

رواه أبو يعلى الموصلي في مسند أبي يعلى رقم ٤٣٨٦

Artinya: “dari Abu Darda’ RA, Rasulullah Saw bersabda: Sesungguhnya Allah mencintai bila salah seorang diantara kalian melakukan suatu pekerjaan maka hendaklah ia melakukannya dengan *itqan* (kesempurnaan)” hadits riwayat Abu Ya’la Al-Mawsili dalam Musnad Abi Ya’la no 4386.

Hadits ini menegaskan nilai *itqan* yang berarti kesempurnaan, ketelitian, dan kerapian dalam bekerja. Menurut penjelasan (Al-Munawi) dalam kitab *Fayd Al-Qadir* (Jilid 2:286), kalimat *itqan* bermakna *ihkam al-‘amal* yaitu melakukan sesuatu secara presisi dan sesuai aturan agar hasilnya sempurna dan tidak menyimpang. Prinsip ini sangat relevan dalam konteks teori grup dan simetri, karena setiap operasi dalam grup harus memenuhi empat aksioma dasar (tertutup, asosiatif, identitas, dan invers) secara sempurna tanpa adanya penyimpangan (Dummit & Foote, 2004).

Dengan demikian, hadits ini mencerminkan semangat presisi dan konsistensi yang menjadi dasar dalam pembentukan grup. Sebagaimana setiap elemen dan grup harus beroperasi secara tepat untuk menghasilkan struktur yang konsisten, sama seperti manusia yang diperintahkan untuk bekerja secara *itqan*, yaitu mengikuti aturan dan kaidah yang telah ditetapkan oleh Allah Swt agar hasil yang di dapatkan bermakna dan harmonis. Dalam penelitian ini, prinsip *itqan* tercermin pada cara sistematis dan teratur dalam mendefinisikan himpunan transformasi segi-*n* beraturan yang memenuhi aksioma-aksioma grup secara logis dan konsisten (Gallian, 2013).

Adapun perilaku tertib (perilaku teratur), sebagaimana yang dijelaskan oleh (Ibn Khaldun, 2015) dalam kitab Muqaddimah halaman 87 bahwa berpikir serta bertindak teratur merupakan menjadi dasar peradaban dan keilmuan yang maju. Dalam teori grup sifat tertib dinotasikan dalam operasi komposisi yang mengikuti urutan pasti dan tidak acak, dimana setiap elemen hanya berinteraksi sesuai dengan hukum tertentu dan menghasilkan hasil yang konsisten (Gallian, 2013). Perilaku ini mengajarkan bahwa keteraturan bukan merupakan bentuk pembatasan, namun jalan menuju keindahan, efisiensi dan harmoni sebagaimana kehidupan yang teratur akan menghasilkan keseimbangan dan keberkahan.

Dengan demikian integrasi Al-Qur'an dan Hadits ini tidak hanya mengajarkan kesempurnaan teknis, tetapi juga membentuk etika keilmuan, menuntut peneliti untuk bekerja dengan ketelitian metodologis, kejujuran intelektual, dan keteraturan berpikir. Seperti halnya setiap transformasi dalam grup dihedral memiliki invers yang mengembalikan sistem pada keseimbangannya, peneliti pun dituntut menjaga keseimbangan antara logika dan spiritualitas, antara abstraksi matematika dan kesadaran akan keteraturan ilahi. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya bersifat matematis tetapi juga menjadi ibadah ilmiah yakni usaha memahami keteraturan yang diciptakan Allah Swt melalui struktur simetri yang indah dan tertata (Ghorbani, 2020).

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Teori grup hingga digunakan sebagai kerangka konseptual pendukung dalam penelitian ini untuk memahami struktur aljabar yang muncul dari transformasi geometri pada segi-4 beraturan. Teori grup tidak diperkenalkan sebagai konsep yang berdiri sendiri, melainkan sebagai alat bantu untuk mengkaji keteraturan dan

hubungan antar transformasi yang mempertahankan bentuk segi-4 beraturan. Pendekatan ini sejalan dengan struktur aljabar secara sistematis dan terkontrol (Gallian, 2013).

Himpunan transformasi yang dikaji dalam penelitian ini adalah seluruh transformasi geometri yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk dan ukurannya. Transformasi-transformasi tersebut mencakup rotasi dan refleksi yang mempertahankan panjang sisi serta besar sudut segi-4 beraturan. Sifat ini menunjukkan bahwa himpunan merupakan salah satu syarat utama pembentukan struktur grup (Dummit & Foote, 2004).

Selain bersifat tertutup, himpunan transformasi segi-4 beraturan juga memuat transformasi identitas, yaitu transformasi yang tidak mengubah posisi bangun sama sekali. Transformasi identitas berperan sebagai unsur netral dalam komposisi, karena komposisinya dengan transformasi lain tidak mengubah hasil transformasi tersebut. Keberadaan unsur identitas ini memperkuat bahwa struktur dikaji selaras dengan definisi formal grup dalam aljabar abstrak (Gallian, 2013).

Setiap transformasi pada segi-4 beraturan juga memiliki transformasi invers, yaitu transformasi yang jika dikomposisikan dengan segi-4 beraturan akan menghasilkan transformasi identitas. Sebagai contoh, rotasi searah jarum jam dengan sudut tertentu memiliki invers berupa rotasi dengan sudut yang sama namun berlawanan arah. Demikian pula, refleksi terhadap suatu sumbu merupakan invers dari dirinya sendiri. Keberadaan invers bagi setiap unsur merupakan syarat fundamental lain dalam teori grup (Dummit & Foote, 2004).

Sifat asosiatif dari operasi komposisi transformasi tidak bergantung pada bentuk bangun yang dikaji, melainkan merupakan karakteristik yang melekat secara alami dari komposisi fungsi. Oleh karena itu, komposisi transformasi pada segi-4

beraturan secara otomatis memenuhi sifat asosiatif, sebagaimana dibahas dalam teori tentang grup transformasi (Gallian, 2013).

Dengan terpenuhinya sifat tertutup, keberadaan unsur identitas, keberadaan invers, dan sifat asosiatif, maka himpunan transformasi segi-4 beraturan yang dilengkapi dengan operasi komposisi dapat dinyatakan sebagai suatu grup hingga. Grup ini menjadi contoh nyata bagaimana objek geometri dapat dianalisis melalui pendekatan aljabar abstrak, sehingga menjembatani kajian visual dalam geometri dengan struktur simbolik dalam aljabar (Dummit & Foote, 2004).

Melalui kajian ini, terlihat bahwa teori grup hingga berfungsi sebagai teori pendukung yang memberikan kerangka formal untuk memahami keteraturan dan simetri pada segi-4 beraturan. Pendekatan ini mempertegas bahwa transformasi geometri tidak hanya bersifat abstrak, tetapi juga memiliki struktur grup aljabar yang ketat dan dapat dianalisis secara matematis melalui konsep grup.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka, yang merupakan pendekatan utama dalam pengumpulan dan analisis data. Metode ini berfokus pada kegiatan menelaah, menafsirkan, dan mensintesis informasi dari sumber-sumber ilmiah yang relevan seperti buku, jurnal, dan dokumen akademik tanpa melibatkan pengumpulan data primer melalui observasi atau eksperimen lapangan. Dalam penelitian ini, karakteristik utama metode bergantung pada sumber literatur sekunder untuk membangun argument teori, proses pencarian yang tersreuktur melalui basis data akademik dan perpustakaan, serta melibatkan analisis kritis terhadap sumber yang ada untuk menemukan pola, kekurangan, dan ide-ide baru (Sugiyono, 2020).

Untuk mengatasi kekurangan dalam penelitian ini peneliti memilih sumber utama seperti (Gallian, 2013) dan (Dummit & Foote, 2004) dalam memberikan landasan teoritis yang kuat dalam memahami sifat-sifat grup dihedral D_n , terutama dalam konteks simetri rotasi dan refleksi pada segi-4 beraturan.

3.2 Pra Penelitian

Pada tahap pra penelitian ini, yang pertama dilakukan oleh peneliti adalah mempersiapkan dasar konseptual dan arah analisis dalam penelitian, pengumpulan dan penelaahan literatur tentang kosep dasar grup, transformasi geometri, serta teori simetri pada bangun datar beraturan, khususnya bujursangkar dan segi- n beraturan. Selain itu peneliti juga mengidentifikasi hubungan antara rotasi dan

refleksi sebagai transformasi yang memenuhi sifat grup melalui operasi komposisi. Kemudian peneliti akan membuktikan menganalisis pemenuhan aksioma grup dan generalisasi ke bentuk segi- n beraturan.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka sehingga langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mempelajari buku-buku dan jurnal untuk mendapatkan data-data penelitian. Berdasarkan rumusan masalah yang telah ditetapkan, tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Tahapan untuk menjawab rumusan masalah pertama mengenai pemenuhan aksioma grup pada himpunan transformasi segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan:

1. Mengamati transformasi rotasi dan refleksi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan.
2. Menyusun tabel Cayley berdasarkan operasi komposisi transformasi, kemudian menganalisisnya berdasarkan dengan aksioma grup.
3. Menganalisis pemenuhan aksioma grup yang meliputi sifat tertutup, asosiatif, identitas, dan invers pada himpunan transformasi segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan.

Tahapan untuk menjawab rumus masalah kedua mengenai bentuk generalisasi himpunan transformasi dan operasi komposisi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan dan segi-5 beraturan ke bentuk segi- n beraturan:

1. Mengidentifikasi pola yang diperoleh dari himpunan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan.

2. Melakukan generalisasi himpunan transformasi dari segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan ke segi- n beraturan
3. Menarik kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan generalisasi yang telah dilakukan.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Transformasi pada Segi–3 Beraturan dan Operasi Komposisi

Segi–3 beraturan merupakan bangun datar yang memiliki tiga sisi sama panjang dan tiga sudut sama besar. Pada segi–3 beraturan terdapat beberapa transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya. Transformasi tersebut terdiri atas transformasi identitas, rotasi, dan refleksi.

Setiap transformasi memetakan titik-titik sudut segi–3 beraturan ke posisi tertentu sehingga bangun hasil transformasi tetap berimpit dengan bangun semula. Transformasi-transformasi yang diperoleh kemudian dinyatakan dalam suatu notasi untuk mempermudah penulisan operasi komposisi. Hasil operasi komposisi tersebut digunakan untuk membentuk himpunan transformasi dan menganalisis sifat-sifat yang dimilikinya.

Pembahasan pada segi–3 beraturan diawali dengan menentukan seluruh transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri, kemudian memberikan notasi pada setiap transformasi, menyusun himpunan transformasi, melakukan operasi komposisi, dan menganalisis aksioma grup yang berlaku pada himpunan tersebut.

4.1.1 Transformasi pada Segi–3 Beraturan

Transformasi pada segi–3 beraturan terdiri atas transformasi identitas, rotasi, dan refleksi. Keseluruhan transformasi tersebut memetakan bangun ke dirinya sendiri sehingga bentuk dan ukuran bangun tetap dipertahankan.

Transformasi identitas merupakan transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut. Pada transformasi ini, setiap titik sudut tetap berada pada posisi semula sehingga bangun tidak mengalami perubahan. Untuk mempermudah representasi transformasi pada segi-3 beraturan, bangun ditempatkan pada bidang koordinat kartesius dengan titik pusat di O . Titik-titik sudut segi-3 beraturan kemudian diberi label secara berurutan sebagai 1, 2, dan 3. Penempatan pada bidang koordinat dan pemberian label titik sudut digunakan untuk mendefinisikan transformasi rotasi dan refleksi secara sistematis (Dummit & Foote, 2004).

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Rotasi 0° (tidak mengubah posisi bangun)		
2.	Rotasi sebesar 120° (searah jarum jam)		
3.	Rotasi sebesar 240° (searah jarum jam)		

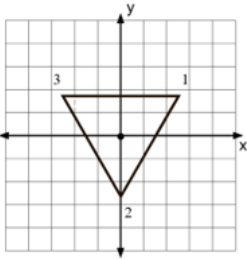
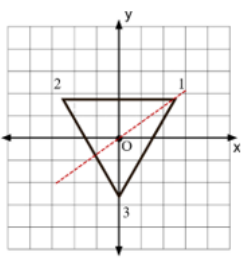
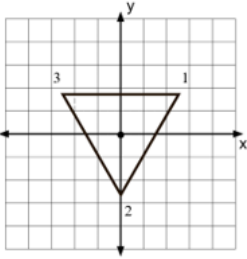
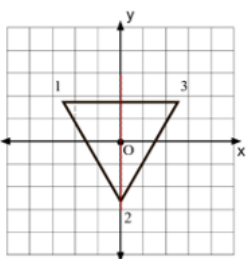
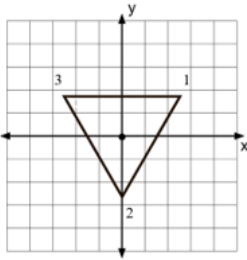
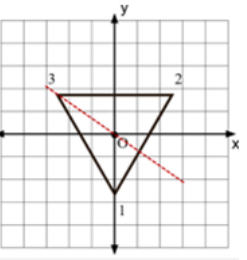
Gambar 4.1 Rotasi Segi-3 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius

Gambar 4.1 menunjukkan transformasi identitas dan transformasi rotasi pada segi-3 beraturan yang diletakkan pada bidang koordinat dengan titik sudut diberi label 1, 2, dan 3. Transformasi identitas (rotasi 0°) tidak mengubah posisi titik-titik sudut sehingga setiap titik dipetakan ke dirinya sendiri.

Rotasi sebesar 120° searah jarum jam memetakan titik 1 ke posisi titik 2, titik 2 ke posisi titik 3, dan titik 3 ke posisi titik 1. Selanjutnya, rotasi sebesar 240° searah jarum jam memetakan titik 1 ke posisi titik 3, titik 2 ke posisi titik 1, dan titik 3 ke posisi titik 2. Meskipun posisi titik sudut berubah, bentuk dan ukuran bangun tetap dipertahankan sehingga setiap rotasi tersebut memetakan segi-3 beraturan ke dirinya sendiri.

Selain transformasi identitas dan rotasi, terdapat tiga transformasi refleksi terhadap sumbu simetri segi-3 beraturan. Masing-masing refleksi dilakukan terhadap sumbu yang melalui salah satu titik sudut dan titik tengah sisi di hadapannya. Ketiga refleksi tersebut menghasilkan bangun yang tetap berimpit dengan segi-3 beraturan semula sehingga memetakan bangun ke dirinya sendiri.

Dipilih salah satu sumbu simetri, yaitu garis yang melalui titik sudut 1 dan titik pusat O . Refleksi terhadap sumbu simetri tersebut mempertahankan posisi titik 1, sedangkan titik 2 dan titik 3 saling bertukar posisi. Oleh karena itu, refleksi tersebut tetap memetakan segi-3 beraturan ke dirinya sendiri.

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 1 dan titik pusat O		
2.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 2 dan titik pusat O		
3.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 3 dan titik pusat O		

Gambar 4.2 Refleksi Segi-3 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius

Gambar 4.2 menunjukkan tiga transformasi refleksi pada segi—3 beraturan, yaitu refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui salah satu sudut dan titik O . Pada refleksi terhadap sumbu melalui titik 1, titik 1 tetap pada posisinya, sedangkan titik 2, dan titik 3 saling bertukar posisi. Pada refleksi terhadap sumbu melalui titik 2, titik 2 tetap pada posisinya, sedangkan titik 1 dan titik 3 saling bertukar posisi. Demikian pula pada refleksi terhadap sumbu melalui titik 3, titik 3 tetap pada posisinya, sedangkan titik 1 dan titik 2 saling bertukar posisi.

Ketiga refleksi tersebut mempertahankan bentuk dan ukuran segi—3 beraturan sehingga masing-masing memetakan segi—3 beraturan ke dirinya

sendiri. berdasarkan ketiga refleksi tersebut, dipilih refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui titik 1 dan titik pusat O sebagai refleksi selanjutnya dinotasikan dengan simbol s , yang selanjutnya disebut dengan refleksi dasar.

4.1.2 Notasi dan Penjelasan Transformasi pada Segi-3 beraturan

Setiap transformasi pada segi-3 beraturan dinyatakan dengan notasi tertentu untuk mempermudah penulisan dan analisis. transformasi identitas dilambangkan dengan e , yaitu transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut bangun.

Rotasi searah jarum jam sebesar 120° terhadap titik pusat dinyatakan dengan simbol r , sedangkan rotasi searah jarum jam sebesar 240° dinyatakan dengan simbol r^2 . Notasi r^2 menyatakan dua kali penerapan transformasi rotasi r secara berturut-turut, sehingga berlaku

$$r^2 = r \circ r \quad (4.1)$$

Pada Subbab 4.1.1 telah diperoleh tiga transformasi refleksi pada segi-3 beraturan. untuk mempermudah penulisan dan analisis, refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui titik sudut 1 dan titik pusat O dinyatakan dengan simbol s . Refleksi tersebut mempertahankan posisi titik 1, sedangkan titik 2 dan titik 3 saling bertukar posisi.

Selanjutnya, refleksi-refleksi lainnya dapat diperoleh dengan mengoposisikan refleksi s dengan transformasi rotasi yang telah didefinisikan sebelumnya. Komposisi refleksi s dengan rotasi r menghasilkan refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui titik sudut 2 dan titik pusat O , sehingga dinyatakan dengan simbol sr . Demikian pula, komposisi refleksi dengan rotasi r^2

menghasilkan refleksi terhadap sumbu simetri yang melalui titik sudut 3 dan titik pusat O , sehingga dinyatakan dengan simbol sr^2 .

Notasi-notasi yang digunakan pada transformasi segi-3 beraturan disajikan pada tabel berikut ini

Tabel 4.1 Notasi Transformasi pada Segi-3 Beraturan

No	Transformasi	Notasi
1.	Transformasi identitas	e
2.	Rotasi 120° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r
3.	Rotasi 240° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^2
4.	Refleksi terhadap sumbu simetri melalui titik 1 dan titik pusat O	s
5.	Refleksi terhadap sumbu simetri melalui titik 2 dan titik pusat O	sr
6.	Refleksi terhadap sumbu simetri melalui titik 3 dan titik pusat O	sr^2

Dengan menggunakan notasi yang telah ditetapkan, himpunan transformasi pada segi-3 beraturan dapat dituliskan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

Himpunan T memiliki enam elemen yang masing-masing merepresentasikan transformasi yang memetakan segi-3 beraturan ke dirinya sendiri. Himpunan transformasi tersebut digunakan dalam pembahasan operasi pada segi-3 beraturan.

4.1.3 Operasi Komposisi pada Segi-3 Beraturan

Operasi yang digunakan pada himpunan transformasi segi-3 beraturan adalah operasi komposisi transformasi. Komposisi dua transformasi dilakukan dengan menerapkan transformasi yang berada di sebelah kanan terlebih dahulu,

kemudian dilanjutkan dengan transformasi yang berada di sebelah kanan. Hasil dari operasi komposisi tersebut merupakan transformasi baru yang juga memetakan segi-3 beraturan ke dirinya sendiri.

Beberapa hasil operasi komposisi pada himpunan transformasi T ditunjukkan pada tabel berikut ini

Tabel 4.2 Hasil Operasi Komposisi Segi-3 Beraturan

No	Komposisi	Hasil
1.	$e \circ e$	e
2.	$e \circ r$	r
3.	$e \circ r^2$	r^2
4.	$r \circ r$	r^2
5.	$r \circ r^2$	e
6.	$r^2 \circ r$	e
7.	$s \circ s$	e
8.	$s \circ r$	sr
9.	$s \circ r^2$	sr^2
10.	$sr \circ r$	sr^2
11.	$sr^2 \circ r$	s

Tabel 4.2 menunjukkan hasil operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan. Komposisi $r \circ r$ menghasilkan r^2 karena rotasi sebesar 120° yang dilakukan dua kali berturut-turut setara dengan rotasi sebesar 240° . Selain itu, komposisi $r \circ r^2$ menghasilkan e karena rotasi 120° yang diikuti rotasi sebesar 240° setara dengan satu putaran penuh, sehingga bangun kembali ke posisi semula. Selain komposisi antar rotasi, komposisi antara refleksi dan rotasi juga menghasilkan transformasi refleksi lainnya. Sebagai contoh, komposisi $s \circ r$ menghasilkan refleksi sr , sedangkan komposisi $s \circ r^2$ menghasilkan refleksi sr^2 . Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa transformasi refleksi pada segi-3 beraturan saling berhubungan melalui operasi komposisi.

Hasil-hasil komposisi tersebut menunjukkan bahwa penggabungan dua transformasi pada segi-3 beraturan selalu menghasilkan transformasi lain yang masih termasuk dalam himpunan transformasinya. Seluruh hasil komposisi tersebut selanjutnya dirangkum dalam bentuk tabel Cayley untuk mempermudah analisis sifat-sifat grup pada himpunan transformasi segi-3 beraturan.

4.1.4 Tabel Komposisi Transformasi pada Segi-3 Beraturan

Hasil operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan dapat disajikan dalam bentuk tabel komposisi. Tabel tersebut memuat hasil komposisi setiap pasangan transformasi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan sehingga hubungan antara transformasi dapat diamati secara lebih sistematis.

Pada tabel komposisi, transformasi pada kolom diterapkan terlebih dahulu, kemudian diikuti oleh transformasi pada baris. Dengan demikian, setiap entri pada tabel menyatakan hasil komposisi transformasi sesuai konvensi komposisi fungsi. Tabel komposisi transformasi pada segi-3 beraturan disajikan sebagai berikut.

Tabel 4.3 Tabel Komposisi Transformasi Segi-3 Beraturan

	e	r	r^2	s	sr	sr^2
e	e	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	e	sr^2	s	sr
r^2	r^2	e	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	e	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	e	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	e

Tabel 4.3 menunjukkan hasil komposisi setiap pasangan transformasi pada segi-3. Setiap nilai pada tabel merupakan hasil komposisi transformasi yang terletak pada baris dan kolom yang bersesuaian. Melalui tabel tersebut, hubungan antara transformasi pada segi-3 beraturan dapat diamati secara menyeluruh.

Komposisi antar transformasi rotasi menghasilkan transformasi rotasi lain atau transformasi identitas, sementara itu, komposisi antara transformasi rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi, sedangkan komposisi dua transformasi refleksi menghasilkan transformasi rotasi.

Sebagai contoh, entri pada baris s dalam kolom r menghasilkan transformasi sr . Hal ini menunjukkan bahwa transformasi rotasi r diterapkan terlebih dahulu, kemudian diikuti oleh refleksi s , sehingga diperoleh transformasi refleksi sr . Demikian pula, entri pada baris s dan kolom r^2 menghasilkan transformasi sr^2 , yang menunjukkan bahwa refleksi-refleksi pada segi-3 beraturan dapat diperoleh melalui komposisi antara refleksi s dan transformasi rotasi. Pola-pola komposisi tersebut menunjukkan adanya keteraturan hubungan antar transformasi pada segi-3 beraturan dan menjadi dasar dalam verifikasi aksioma grup.

4.1.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi-3

Beraturan

Tabel komposisi transformasi pada segi-3 beraturan digunakan untuk memverifikasi pemenuhan aksioma grup pada himpunan transformasi T . Verifikasi dilakukan terhadap sifat tertutup, asosiatif, keberadaan unsur identitas, dan keberadaan unsur invers

1. Sifat Tertutup

Berdasarkan Tabel 4.3, setiap hasil komposisi dua transformasi pada segi-3 beraturan menghasilkan transformasi yang masih berada pada himpunan transformasi segi-3 beraturan. sebagai contoh,

$$r \circ r = r^2$$

$$s \circ r = sr$$

dan

$$sr \circ sr = e \quad (4.5)$$

Ketiga hasil tersebut masih merupakan anggota himpunan transformasi segi-3 beraturan. Dengan demikian, untuk setiap transformasi A dan B pada himpunan transformasi segi-3 berlaku

$$A \circ B \in T$$

2. Sifat Asosiatif

Operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan memenuhi sifat asosiatif karena transformasi yang digunakan merupakan fungsi yang memetakan segi-3 beraturan ke dirinya sendiri. Sifat asosiatif menyatakan bahwa hasil komposisi tidak bergantung pada cara pengelompokan transformasi yang dilakukan. Untuk setiap transformasi s, r , dan r pada himpunan transformasi segi-3 beraturan berlaku

$$(s \circ r) \circ r$$

dari tabel

$$s \circ r = sr$$

maka

$$(s \circ r) \circ r = sr \circ r = sr^2 \quad (4.6)$$

jika

$$s \circ (r \circ r)$$

karena

$$r \circ r = r^2$$

maka

$$s \circ (r \circ r) = s \circ r^2 = sr^2$$

Karena kedua pengelompokan menghasilkan transformasi yang sama, diperoleh

$$(s \circ r) \circ r = s \circ (r \circ r). \quad (4.7)$$

Dengan demikian, operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan memenuhi sifat asosiatif

3. Unsur Identitas

Pada himpunan transformasi segi-3 beraturan terdapat transformasi identitas yang dilambangkan dengan e . Transformasi identitas merupakan transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut sehingga tidak mengubah letak bangun. Keberadaan unsur identitas dapat diamati melalui hasil komposisi transformasi pada tabel 4.3 diperoleh

$$e \circ r = r$$

dan

$$sr^2 \circ e = sr^2 \quad (4.8)$$

Kedua hasil tersebut menunjukkan bahwa transformasi identitas e tidak mengubah transformasi yang dikomposisikan dengan notasinya. Secara umum berlaku

$$e \circ A = A \circ e = A$$

4. Unsur Invers

Setiap transformasi pada himpunan transformasi segi-3 beraturan memiliki invers terhadap operasi komposisi. Invers suatu transformasi adalah transformasi lain yang apabila dikomposisikan dengan notasinya menghasilkan transformasi identitas. Keberadaan unsur invers dapat diamati melalui hasil komposisi pada tabel 4.3 diperoleh

$$r \circ r^2 = e$$

dan

$$r^2 \circ r = e$$

Oleh karena itu, invers dari r adalah r^2 ,

dan invers dari r^2 adalah r .

Selain itu,

$$s \circ s = e,$$

$$sr \circ sr = e,$$

dan

$$sr^2 \circ sr^2 = e \quad (4.9)$$

Dengan demikian, transformasi s , sr , dan sr^2 masing-masing merupakan invers bagi dirinya sendiri.

Tabel 4.4 Invers Elemen pada Himpunan T

No	Elemen	Hasil Invers
1.	e	e
2.	r	r^2
3.	r^2	r
4.	s	s
5.	sr	sr
6.	sr^2	sr^2

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa setiap elemen pada himpunan transformasi segi-3 beraturan memiliki invers yang juga merupakan anggota himpunan transformasi segi-3 beraturan. Dengan demikian, aksioma invers terpenuhi.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, himpunan transformasi segi-3 beraturan memenuhi sifat tertutup, memenuhi sifat asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Dengan demikian, himpunan transformasi segi-3 beraturan dengan operasi komposisi membentuk suatu grup.

4.1.6 Kesimpulan Pembahasan Segi-3 Beraturan

Verifikasi aksioma grup pada himpunan transformasi segi-3 beraturan menunjukkan bahwa himpunan transformasi tersebut memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsurnya memiliki invers. Oleh karena itu, himpunan transformasi segi-3 beraturan dengan operasi komposisi membentuk aksioma grup.

Himpunan transformasi pada segi-3 beraturan terdiri atas enam transformasi, yaitu tiga transformasi rotasi yang meliputi rotasi identitas, rotasi 120° , dan rotasi 240° , serta tiga transformasi refleksi terhadap sumbu-sumbu simetri yang masing-masing melalui satu titik sudut dan titik tengah sisi di hadapannya.

Karena himpunan transformasi tersebut terdiri atas enam elemen, maka grup yang terbentuk merupakan grup hingga berorde 6. Grup hingga berorde 6 tersebut merepresentasikan seluruh simetri pada segi-3 beraturan dan diidentifikasi sebagai grup dihedral D_3 .

4.2 Transformasi pada Segi-4 Beraturan dan Operasi Komposisi

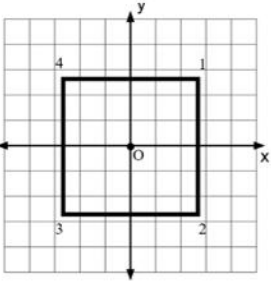
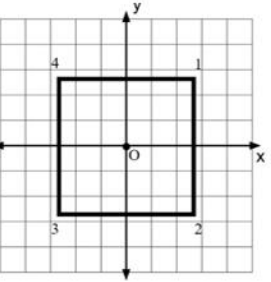
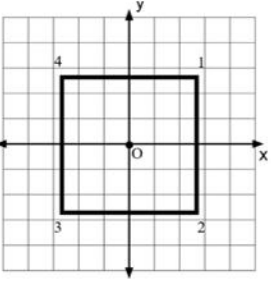
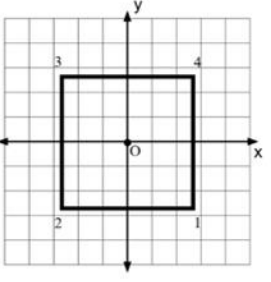
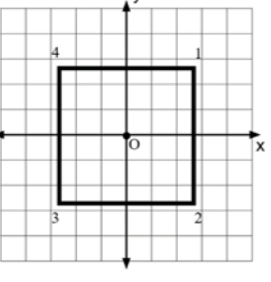
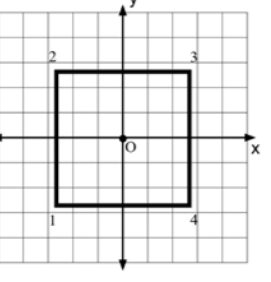
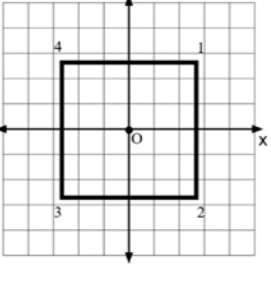
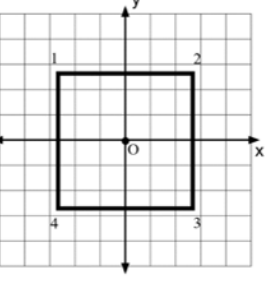
Segi-4 beraturan adalah bangun datar yang memiliki empat sisi sama panjang dan empat sudut sama besar. Berdasarkan sifat simetri yang dimiliki, bangun ini mempunyai sejumlah transformasi geometri yang memetakan bangun ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya.

Transformasi-transformasi tersebut terdiri atas transformasi identitas, rotasi dan refleksi. Setiap transformasi memetakan titik-titik pada segi-4 beraturan ke titik-titik lain sedemikian rupa sehingga hasil pemetaan tetap berupa segi-4 beraturan yang kongruen dengan bangun semula.

Pada segi-4 beraturan, transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri terdiri atas empat transformasi rotasi dan empat transformasi refleksi, sehingga terdapat delapan transformasi yang akan digunakan dalam pembahasan operasi komposisi. Untuk mempermudah analisis, segi-4 beraturan direpresentasikan pada bidang koordinat dan setiap transformasi dijelaskan melalui representasi geometris serta notasi yang sesuai.

4.2.1 Transformasi pada Segi-4 Beraturan

Transformasi pada segi-4 beraturan merupakan transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya. Pada pembahasan ini, segi-4 beraturan direpresentasikan pada bidang koordinat kartesius dan titik-titik sudutnya diberi label secara berurutan, yaitu 1,2,3, dan 4. Berdasarkan sifat simetrinya, transformasi pada segi-4 beraturan terdiri atas transformasi identitas, rotasi, dan refleksi (Dummit & Foote, 2004).

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Rotasi 0° (tidak ada perubahan dalam posisi)		
2.	Rotasi 90° (searah arah jarum jam)		
3.	Rotasi 180° (searah arah jarum jam)		
4.	Rotasi 270° (searah arah jarum jam)		

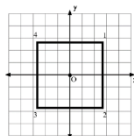
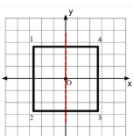
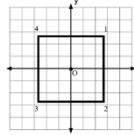
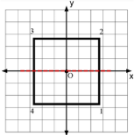
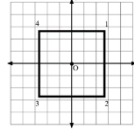
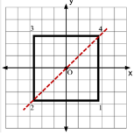
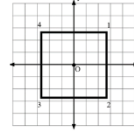
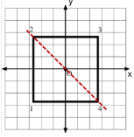
Gambar 4.3 Rotasi Segi-4 Beraturan pada Bidang Koordinat Kartesius

Gambar 4.3 menunjukkan transformasi identitas dan tiga transformasi rotasi pada segi—4 beraturan. transformasi identitas mempertahankan posisi setiap titik

sudut sehingga tidak terjadi perubahan letak bangun. Selain transformasi identitas, terdapat tiga rotasi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri, yaitu rotasi sebesar 90° , 180° , 270° terhadap titik pusat bangun.

Pada rotasi 90° , setiap titik sudut berpindah ke posisi titik sudut berikutnya searah jarum jam. Pada rotasi 180° , setiap titik sudut berpindah ke titik yang berhadapan. Sementara itu, pada rotasi 270° , setiap titik sudut berpindah tiga posisi searah jarum jam. Meskipun posisi titik sudut berubah, bentuk dan ukuran segi-4 beraturan tetap dipertahankan sehingga seluruh rotasi tersebut memetakan bangun ke dirinya sendiri.

Selain transformasi rotasi, segi-4 beraturan juga memiliki transformasi refleksi terhadap sumbu-sumbu simetrinya. Sumbu-sumbu simetri tersebut terdiri atas garis $x = 0$, garis $y = 0$, garis $x = y$, dan garis $y = -x$. Refleksi terhadap masing-masing garis menghasilkan bangun bayangan yang tetap berimpit dengan segi-4 beraturan semula.

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Refleksi terhadap garis $x = 0$ (sumbu y)		
2.	Refleksi terhadap garis $y = 0$ (sumbu x)		
3.	Refleksi terhadap garis $y = x$ (diagonal utama)		
4.	Refleksi terhadap garis $y = -x$ (diagonal lainnya)		

Gambar 4.4 Refleksi Segi-4 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius

Gambar 4.4 menunjukkan empat transformasi refleksi pada segi-4 beraturan, yaitu refleksi terhadap garis $x = 0$, garis $y = 0$, garis $y = x$, dan garis $y = -x$. Pada setiap refleksi, titik-titik sudut yang terletak pada sumbu simetri tetap berada pada posisinya, sedangkan titik-titik sudut lainnya berpindah ke posisi bayangannya terhadap garis refleksi. meskipun posisi titik sudut berubah, bentuk dan ukuran bangun tetap dipertahankan sehingga hasil refleksi tetap berimpit dengan bangun semula.

Berdasarkan transformasi yang telah diperoleh, segi-4 beraturan memiliki delapan transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri, yaitu satu transformasi identitas, tiga transformasi rotasi, dan empat transformasi refleksi. seluruh transformasi tersebut selanjutnya dinyatakan dalam bentuk notasi untuk mempermudah pembahasan operasi komposisi pada segi-4 beraturan.

4.2.2 Notasi Transformasi Segi-4 Beraturan

Setiap transformasi pada segi-4 beraturan dinyatakan dengan notasi tertentu untuk mempermudah penulisan dan analisis. Transformasi identitas dinyatakan dengan simbol e , yaitu transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut bangun.

Rotasi sebesar 90° searah jarum jam terhadap titik pusat dipilih sebagai rotasi pembangkit dan dinyatakan dengan simbol r . Rotasi sebesar 180° dan 270° masing-masing dinyatakan dengan simbol r^2 dan r^3 . Notasi r^2 dan r^3 menunjukkan penerapan transformasi rotasi r secara berulang. Dengan demikian berlaku

$$r^2 = r \circ r \quad (4.10)$$

dan

$$r^3 = r \circ r \circ r \quad (4.11)$$

Untuk transformasi refleksi, dipilih refleksi terhadap garis $x = 0$ dan dinyatakan dengan simbol s . Refleksi-refleksi lainnya diperoleh melalui komposisi refleksi s dengan rotasi yang telah didefinisikan sebelumnya. Dengan demikian, refleksi-refleksi pada segi-4 beraturan dapat dinyatakan dengan simbol

$$s, sr, sr^2, sr^3.$$

Masing-masing simbol tersebut merepresentasikan refleksi terhadap sumbu simetri yang berbeda pada segi-4 beraturan.

Berdasarkan notasi yang telah ditetapkan, seluruh transformasi pada segi-4 beraturan dapat dinyatakan sebagai berikut

Tabel 4.5 Notasi Transformasi pada Segi-4 Beraturan

No	Transformasi	Notasi
1.	Transformasi identitas	e
2.	Rotasi 90° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r
3.	Rotasi 180° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^2
4.	Rotasi 270° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^3
5.	Refleksi terhadap garis $x = 0$	s
6.	Refleksi terhadap garis $y = 0$	sr
7.	Refleksi terhadap garis $y = x$	sr^2
8.	Refleksi terhadap garis $y = -x$	sr^3

Dengan menggunakan notasi yang telah digunakan, himpunan transformasi pada segi-4 beraturan dapat dituliskan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

Himpunan T terdiri atas delapan elemen yang merepresentasikan seluruh transformasi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri. Himpunan

transformasi tersebut selanjutnya digunakan dalam pembahasan operasi komposisi pada segi-4 beraturan.

4.2.3 Operasi Komposisi Transformasi pada Segi-4 Beraturan

Operasi komposisi pada segi-4 beraturan diperoleh dengan melakukan dua transformasi secara berurutan. Hasil komposisi suatu transformasi dengan transformasi lainnya menghasilkan transformasi yang masih berkaitan dengan himpunan transformasi pada segi-4 beraturan. melalui operasi komposisi, hubungan antar transformasi dapat dianalisis untuk mengetahui pola yang terbentuk pada himpunan transformasi tersebut.

Komposisi transformasi identitas dengan transformasi lain selalu menghasilkan transformasi itu sendiri. Jika e menyatakan transformasi identitas dan g menyatakan transformasi sebarang pada himpunan transformasi segi-4 beraturan, maka berlaku

$$eg = ge = g \quad (4.12)$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa transformasi identitas berperan sebagai unsur netral dalam posisi komposisi (Dummit & Foote, 2004).

Selanjutnya, komposisi antar transformasi rotasi menunjukkan pola yang teratur. Rotasi sebesar 90° yang dikomposisikan dengan rotasi sebesar 90° menghasilkan rotasi sebesar 180° . Secara umum, komposisi rotasi pada segi-4 beraturan dapat dipahami sebagai penjumlahan sudut rotasi. Setelah rotasi dilakukan empat kali, segi-4 beraturan kembali ke posisi semula sehingga himpunan rotasi bersifat tertutup terhadap operasi komposisi (Gallian, 2013).

Sebagai ilustrasi, beberapa komposisi rotasi pada segi-4 beraturan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r \circ r &= r^2 \\
r \circ r^2 &= r^3 \\
r \circ r^3 &= e
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Hubunga-hubungan tersebut menunjukkan bahwa posisi antar rotasi menghasilkan transformasi rotasi lainnya. Rotasi sebesar 90° yang dilakukan secara berulang membentuk urutan transformasi

$$e, r, r^2, r^3, e$$

dengan demikian, empat kali penerapan rotasi r mengembalikan segi-4 beraturan ke posisi semula sehingga berlaku

$$r^4 = e$$

Refleksi terhadap suatu sumbu simetri yang dilakukan dua kali berturut-turut mengembalikan bangun ke posisi semula sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
s^2 &= e \\
s \circ s &= e
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa setiap refleksi merupakan invers bagi dirinya sendiri.

Selanjutnya, komposisi antara rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi lainnya. Jika r menyatakan rotasi sebesar 90° searah jarum jam dan s menyatakan refleksi terhadap garis $x = 0$, maka hubungan antara kedua transformasi tersebut dapat dianalisis melalui pemetaan titik-titik sudut pada segi-4 beraturan (Dummit & Foote, 2004).

Dengan memperhatikan hasil pemetaan, diperoleh bahwa komposisi rs menghasilkan transformasi yang sama dengan komposisi sr^{-1} , sehingga berlaku

$$rs = sr^{-1} \tag{4.14}$$

Pada segi—4 beraturan, rotasi r memiliki orde empat sehingga berlaku

$$r^4 = e \quad (4.15)$$

Akibatnya, invers dari r adalah

$$r^{-1} = r^3 \quad (4.16)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.12) ke persamaan (4.10), diperoleh

$$rs = sr^3 \quad (4.17)$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa komposisi antara rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi lainnya. Hal tersebut juga memperlihatkan bahwa operasi komposisi pada himpunan transformasi segi—4 beraturan tidak bersifat komutatif karena urutan transformasi yang dilakukan memengaruhi hasil komposisi.

Beberapa hasil komposisi yang telah diperoleh menunjukkan adanya keteraturan hubungan antar transformasi pada segi—4 beraturan. Seluruh hasil komposisi tersebut selanjutnya disajikan secara lengkap dalam bentuk tabel komposisi untuk mempermudah analisis struktur grup yang terbentuk.

4.2.4 Tabel Komposisi Transformasi Segi—4 Beraturan

Hasil operasi komposisi pada himpunan transformasi segi—4 beraturan dapat direpresentasikan dalam bentuk tabel komposisi. Tabel tersebut menunjukkan hasil komposisi setiap pasangan transformasi pada himpunan T sehingga hubungan antar transformasi dapat diamati secara sistematis

Tabel 4.6 Tabel Komposisi Transformasi Segi-4 Beraturan

	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
e	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	e	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	a^3	e	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	e	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	e	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	e	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	e	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	e

Berdasarkan tabel 4.6 menunjukkan hasil komposisi setiap pasangan transformasi pada himpunan T . Setiap nilai pada tabel merupakan hasil operasi komposisi yang terletak pada baris dan kolom yang bersesuaian. Melalui tabel tersebut hubungan antar transformasi pada segi-4 beraturan dapat diamati secara menyeluruh.

Komposisi antar transformasi rotasi menghasilkan transformasi rotasi lain atau transformasi identitas. Sementara itu, komposisi antara transformasi rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi, sedangkan komposisi dua transformasi refleksi menghasilkan transformasi rotasi. Pola tersebut menunjukkan adanya keteraturan hubungan antar transformasi pada segi-4 beraturan dan menjadi dasar dalam verifikasi aksioma grup.

Selain itu, tabel komposisi menunjukkan bahwa himpunan transformasi pada segi-4 beraturan bersifat tertutup terhadap operasi komposisi dan memiliki pola operasi yang teratur. Pola inilah yang selanjutnya digunakan untuk memverifikasi pemenuhan aksioma grup pada himpunan transformasi tersebut

4.2.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi-4 Beraturan

Himpunan transformasi pada segi-4 beraturan yang telah diperoleh sebelumnya dinyatakan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

Berdasarkan hasil identifikasi transformasi dan operasi komposisi yang telah dilakukan, selanjutnya dilakukan verifikasi terhadap aksioma grup pada himpunan transformasi T . Verifikasi ini meliputi sifat tertutup, keberadaan unsur identitas, sifat asosiatif, dan keberadaan unsur invers terhadap operasi komposisi.

1. Tertutup

Sifat tertutup menyatakan bahwa hasil komposisi dua unsur dalam suatu himpunan harus tetap merupakan anggota himpunan tersebut. Berdasarkan relasi komposisi yang telah diperoleh, komposisi dua transformasi pada himpunan transformasi segi-4 beraturan selalu menghasilkan transformasi yang masih berada di dalam himpunan T .

Sebagai contoh, komposisi dua transformasi rotasi menghasilkan

$$r \circ r = r^2,$$

sedangkan komposisi antara refleksi dan rotasi menghasilkan

$$s \circ sr = r.$$

Kedua hasil komposisi tersebut merupakan anggota himpunan T . Secara umum, untuk setiap transformasi A dan B yang merupakan anggota himpunan T , berlaku

$$\forall A, B \in T, A \circ B \in T \quad (4.18)$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa hasil komposisi dua transformasi pada segi-4 beraturan tidak menghasilkan transformasi di luar himpunan

yang telah didefinisikan. Dengan demikian, himpunan transformasi segi-4 beraturan bersifat tertutup terhadap operasi komposisi.

2. Unsur Identitas

Pada himpunan transformasi segi-4 beraturan terdapat transformasi identitas yang dinyatakan dengan simbol e . Transformasi identitas merupakan transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut sehingga bangun tidak mengalami perubahan.

Jika A merupakan sebarang anggota himpunan T , maka komposisi transformasi identitas dengan A tidak mengubah hasil transformasi tersebut.

Dengan demikian berlaku

$$A \circ e = e \circ A = A \quad (4.19)$$

Sebagai contoh, diperoleh

$$r^2 \circ e = e \circ r^2 = r^2,$$

dan

$$sr \circ e = e \circ sr = sr.$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa transformasi identitas berperan sebagai unsur netral terhadap operasi komposisi. Oleh karena itu, himpunan transformasi segi-4 beraturan memiliki unsur identitas.

3. Sifat Asosiatif

Operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-4 beraturan memenuhi sifat asosiatif karena setiap transformasi yang digunakan merupakan fungsi yang memetakan segi-4 beraturan ke dirinya sendiri. Akibatnya, hasil komposisi tidak dipengaruhi oleh cara pengelompokan transformasi yang dilakukan.

Secara umum, untuk setiap transformasi A, B , dan C yang merupakan anggota himpunan T , berlaku

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C). \quad (4.20)$$

Untuk memperjelas sifat tersebut, ditinjau komposisi tiga transformasi, r, s , dan r .

Berdasarkan relasi komposisi

$$rs = sr^3,$$

diperoleh

$$(r \circ s) \circ r = (sr^3) \circ r = s.$$

Selanjutnya,

$$s \circ r = sr$$

sehingga

$$r \circ (s \circ r) = r \circ (sr) = s.$$

Karena kedua cara pengelompokan menghasilkan transformasi yang sama, maka diperoleh

$$(r \circ s) \circ r = r \circ (s \circ r). \quad (4.21)$$

Dengan demikian, operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-4 beraturan memenuhi sifat asosiatif.

4. Unsur Invers

Setiap elemen dalam suatu grup harus memiliki invers terhadap operasi yang didefinisikan. Pada himpunan transformasi segi-4 beraturan, setiap transformasi memiliki pasangan transformasi lain yang apabila dikomposisikan menghasilkan transformasi identitas.

Secara umum, jika A merupakan anggota himpunan T , maka terdapat suatu transformasi B yang juga merupakan anggota himpunan T sehingga berlaku

$$A \circ B = B \circ A = e. \quad (4.22)$$

Berdasarkan relasi komposisi yang telah diperoleh, invers setiap elemen pada himpunan transformasi segi-4 beraturan dapat ditentukan sebagai berikut:

Tabel 4.7 Invers Elemen pada Himpunan T

No	Elemen	Hasil Invers
1.	e	e
2.	r	r^3
3.	r^2	r^2
4.	r^3	r
5.	s	s
6.	sr	sr
7.	sr^2	sr^2
8.	sr^3	sr^3

Tabel 4.7 menunjukkan bahwa setiap elemen pada himpunan transformasi segi-4 beraturan memiliki invers yang juga merupakan anggota himpunan T . Dengan demikian, aksioma keberadaan unsur invers terpenuhi.

Berdasarkan verifikasi yang telah dilakukan, himpunan transformasi T memenuhi sifat tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Dengan demikian, himpunan T dengan operasi memenuhi aksioma grup.

4.2.6 Kesimpulan Pembahasan Segi-4 Beraturan

Berdasarkan transformasi yang diperoleh pada segi-4 beraturan, terdapat delapan transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri, yaitu empat transformasi rotasi dan empat transformasi refleksi. Seluruh transformasi tersebut dinyatakan dalam himpunan

$$T = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}.$$

Hasil verifikasi menunjukkan bahwa himpunan transformasi tersebut bersifat tertutup terhadap operasi komposisi, memiliki unsur identitas, memenuhi sifat asosiatif, dan setiap elemennya memiliki invers. Dengan demikian, himpunan transformasi segi-4 beraturan dengan operasi komposisi memenuhi seluruh aksioma grup.

Karena himpunan T terdiri atas delapan elemen, maka grup yang terbentuk merupakan grup hingga berorde 8. Grup tersebut merupakan grup dihedral yang merepresentasikan seluruh simetri pada segi-4 beraturan.

4.3 Transformasi pada Segi-5 Beraturan dan Operasi Komposisi

segi-5 beraturan merupakan bangun datar yang memiliki lima sisi sama panjang dan lima sudut sama besar. Berdasarkan sifat simetri yang dimiliki, segi-5 beraturan mempunyai sejumlah transformasi geometri yang memetakan bangun ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya. Transformasi-transformasi tersebut terdiri atas transformasi identitas, rotasi, dan refleksi.

Setiap transformasi memetakan titik-titik pada segi-5 beraturan ke titik sudut lainnya sehingga hasil pemetaan tetap berupa segi-5 beraturan yang kongruen dengan bangun semula. Pada segi-5 beraturan terdapat lima transformasi rotasi dan lima transformasi refleksi, sehingga diperoleh sepuluh transformasi yang akan digunakan dalam pembahasan operasi komposisi. Transformasi-transformasi tersebut selanjutnya direpresentasikan secara geometris dan dinyatakan dalam bentuk notasi untuk mempermudah analisis struktur grup yang terbentuk.

4.3.1 Jenis-jenis Transformasi pada Segi-5 Beraturan

Transformasi pada segi-5 beraturan merupakan transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya. Berdasarkan sifat simetri yang dimiliki, transformasi pada segi-5 beraturan meliputi transformasi identitas, rotasi dan refleksi.

Untuk mempermudah representasi transformasi, segi-5 beraturan diletakkan pada bidang koordinat kartesius dengan titik pusat bangun berada di titik asal $O(0,0)$. Titik-titik sudut segi-5 beraturan diberi label 1, 2, 3, 4, dan 5 secara berurutan searah jarum jam. Penempatan ini digunakan sebagai acuan dalam mendefinisikan transformasi rotasi dan refleksi pada segi-5 beraturan.

Transformasi identitas merupakan transformasi yang memetakan setiap titik sudut pada segi-5 beraturan ke posisi semula sehingga tidak mengubah posisi bangun. Transformasi identitas dinyatakan dengan simbol e .

Selain transformasi identitas, segi-5 beraturan memiliki transformasi rotasi terhadap titik pusat bangun. Karena segi-5 beraturan memiliki lima titik sudut yang tersusun secara simetris, rotasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri diperoleh dengan memutar bangun sebesar kelipatan 72° . Dengan demikian, terdapat empat rotasi nonidentitas, yaitu rotasi sebesar 72° , 144° , 216° , dan 288° . Seluruh rotasi tersebut memetakan segi-5 beraturan ke dirinya sendiri.

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Rotasi 0° (tidak mengubah posisi bangun)		
2.	Rotasi 72° Searah arah jarum jam		
3.	Rotasi 144° Searah arah jarum jam		
4.	Rotasi 216° Searah arah jarum jam		
5.	Rotasi 288° Searah arah jarum jam		

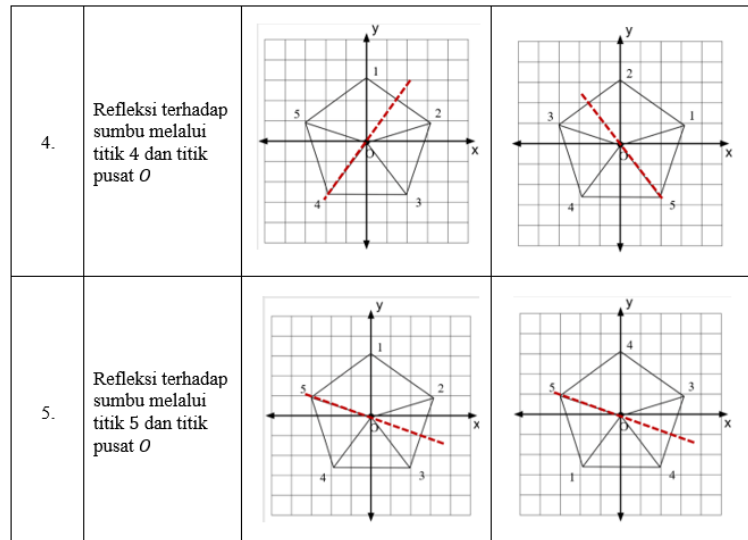
Gambar 4.5 Rotasi Segi–5 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius

Gambar 4.5 menunjukkan transformasi identitas dan rotasi pada segi–5 beraturan. transformasi identitas mempertahankan posisi setiap titik sudut sehingga tidak terjadi perubahan letak bangun. Pada rotasi sebesar 72° , setiap titik

sudut berpindah ke titik sudut berikutnya searah jarum jam. Rotasi sebesar 144° , 216° , dan 288° masing-masing memindahkan setiap titik sudut ke sudut berikutnya dari titik semula. Meskipun posisi titik sudut berpindah, bentuk dan ukuran bangun tetap dipertahankan sehingga hasil rotasi tetap berhimpit dengan bangun semula.

Selain transformasi identitas dan rotasi, segi-5 beraturan juga memiliki transformasi refleksi terhadap sumbu-sumbu simetrinya. Salah satu sumbu simetri dipilih sebagai garis l yang melalui titik sudut 1 dan titik pusat $O(0,0)$. Refleksi terhadap garis tersebut digunakan sebagai refleksi acuan dalam pembahasan selanjutnya. Refleksi-refleksi lainnya diperoleh melalui refleksi terhadap sumbu-sumbu simetri lain yang dimiliki oleh segi-5 beraturan.

No	Jenis Transformasi	Gambar Sebelum	Gambar Setelah Dilakukan Transformasi
1.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 1 dan titik pusat O		
2.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 2 dan titik pusat O		
3.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 3 dan titik pusat O		



Gambar 4.6 Refleksi Segi–5 Beraturan pada Bidang Koordinat Cartesius

Gambar 4.6 menunjukkan lima refleksi yang memetakan segi–5 beraturan ke dirinya sendiri. Pada setiap refleksi, titik-titik yang terletak pada sumbu simetri tetap berada pada posisinya, sedangkan titik sudut lainnya berpindah ke posisi bayangannya terhadap sumbu tersebut. Meskipun susunan titik sudut berubah, bentuk dan ukuran bangun tetap dipertahankan sehingga hasil refleksi tetap berimpit dengan bangun semula.

Berdasarkan transformasi yang telah diperoleh, segi–5 beraturan memiliki lima transformasi rotasi, termasuk transformasi identitas, dan lima transformasi refleksi. Dengan demikian, terdapat sepuluh transformasi yang memetakan segi–5 beraturan ke dirinya sendiri. Seluruh transformasi tersebut selanjutnya akan dinyatakan dalam bentuk notasi untuk mempermudah pembahasan operasi komposisi pada segi–5 beraturan.

4.3.2 Notasi Transformasi pada Segi-5 Beraturan

Setiap transformasi pada segi-5 beraturan dinyatakan dengan notasi tertentu untuk mempermudah penulisan dan analisis. Transformasi identitas dinyatakan dengan simbol e , yaitu transformasi yang mempertahankan posisi setiap titik sudut bangun.

Rotasi dasar segi-5 beraturan adalah rotasi sebesar 72° terhadap titik pusat bangun dan dinyatakan dengan simbol p . Rotasi sebesar $144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$ masing-masing dinyatakan dengan simbol r^2, r^3, r^4 , notasi tersebut menunjukkan komposisi transformasi r yang dilakukan secara berurutan. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned} r^2 &= r \circ r \\ r^3 &= r \circ r \circ r \\ r^4 &= r \circ r \circ r \circ r \end{aligned} \tag{4.23}$$

Untuk transformasi refleksi, refleksi terhadap sumbu melalui titik sudut 1 dan titik pusat $O(0,0)$ sebagai refleksi yang dinyatakan dengan simbol s . Refleksi-refleksi lainnya diperoleh melalui komposisi refleksi dasar dengan transformasi rotasi sehingga dinyatakan dengan simbol sr, sr^2, sr^3, sr^4 . Masing-masing notasi tersebut merepresentasikan refleksi terhadap sumbu simetri yang berbeda pada segi-5 beraturan.

Tabel 4.8 Notasi Transformasi pada Segi-5 Beraturan

No	Transformasi	Notasi
1.	Transformasi identitas	e
2.	Rotasi 72° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r
3.	Rotasi 144° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^2
4.	Rotasi 216° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^3
5.	Rotasi 288° terhadap titik pusat (searah jarum jam)	r^4
6.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 1 dan titik pusat O	s
7.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 2 dan titik pusat O	sr
8.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 3 dan titik pusat O	sr^2
9.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 4 dan titik pusat O	sr^3
10.	Refleksi terhadap sumbu melalui titik 5 dan titik pusat O	sr^4

Tabel 4.8 menunjukkan notasi yang digunakan untuk merepresentasikan seluruh transformasi pada segi-5 beraturan. Transformasi rotasi dinyatakan dengan simbol r, r^2, r^3, r^4 , sedangkan transformasi refleksi dinyatakan dengan simbol s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 . Penggunaan notasi tersebut mempermudah penulisan transformasi serta memudahkan analisis operasi komposisi yang akan dilakukan pada pembahasan selanjutnya.

Dengan menggunakan notasi yang telah ditetapkan, himpunan transformasi pada segi-5 beraturan dapat dituliskan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}.$$

Himpunan T terdiri atas sepuluh elemen yang merepresentasikan seluruh transformasi yang memetakan segi-5 beraturan ke dirinya sendiri. Himpunan transformasi tersebut selanjutnya digunakan dalam pembahasan operasi komposisi pada segi-5 beraturan.

4.3.3 Operasi Komposisi pada Transformasi Segi-5 Beraturan

Operasi komposisi pada segi-5 beraturan diperoleh dengan melakukan dua transformasi secara berurutan. Hasil komposisi suatu transformasi dengan

transformasi lainnya menghasilkan transformasi yang masih berkaitan dengan himpunan transformasi pada segi-5 beraturan. melalui operasi komposisi, hubungan antar transformasi dapat dianalisis untuk mengetahui pola yang terbentuk pada himpunan transformasi tersebut.

Komposisi transformasi identitas dengan transformasi lain selalu menghasilkan transformasi itu sendiri. Jika e menyatakan transformasi identitas dan g menyatakan transformasi sebarang pada himpunan transformasi segi-5 beraturan, maka berlaku

$$e \circ g = g \circ e = g \quad 4.24$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa transformasi identitas berperan sebagai unsur netral terhadap operasi komposisi.

Komposisi antar transformasi rotasi menghasilkan transformasi rotasi lain yang masih merupakan anggota himpunan transformasi segi-5 beraturan. Karena rotasi dasar pada segi-5 beraturan adalah rotasi sebesar 72° searah jarum jam, maka penerapan rotasi secara berulang menghasilkan urutan

$$\begin{aligned} r \circ r &= r^2 \\ r \circ r^2 &= r^3 \\ r \circ r^3 &= r^4 \\ r \circ r^4 &= e \end{aligned} \quad 4.25$$

Selain itu, komposisi dua transformasi refleksi menghasilkan transformasi rotasi. Sebagai contoh, refleksi terhadap sumbu melalui titik A yang dikomposisikan dengan dirinya sendiri menghasilkan transformasi identitas, sehingga berlaku

$$s \circ s = e \quad 4.26$$

Komposisi antara rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi lain. Hasil komposisi yang diperoleh bergantung pada jenis transformasi yang digunakan dan urutan operasi yang dilakukan.

Komposisi antar transformasi rotasi dan refleksi pada segi-5 beraturan membentuk transformasi refleksi lainnya. Hasil komposisi tersebut bergantung pada jenis transformasi dan urutan komposisi yang dilakukan. Berdasarkan pelabelan titik sudut yang telah ditetapkan, diperoleh hubungan

$$r \circ s = s \circ r^4 \quad 4.27$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan tidak bersifat komutatif karena

$$r \circ s \neq s \circ r \quad 4.27$$

Secara umum diperoleh hubungan

$$r^i \circ s = s \circ r^{5-i} \quad 4.28$$

dengan $i = 0, 1, 2, 3, 4$

beberapa hasil komposisi yang telah diperoleh menunjukkan adanya keteraturan hubungan antar transformasi pada segi-5 beraturan. Komposisi antar rotasi menghasilkan transformasi rotasi, komposisi dua refleksi menghasilkan transformasi rotasi, sedangkan komposisi antara rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi lainnya. Pola-pola tersebut selanjutnya disajikan secara lengkap dalam bentuk tabel komposisi untuk mempermudah analisis sifat-sifat himpunan transformasi pada segi-5 beraturan.

4.3.4 Tabel Komposisi Transformasi pada Segi-5 Beraturan

Hasil operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan dapat direpresentasikan dalam bentuk tabel komposisi. Tabel tersebut

menunjukkan hasil komposisi setiap pasangan transformasi terhadap operasi komposisi sehingga hubungan antar transformasi pada segi-5 beraturan dapat diamati secara menyeluruh.

Himpunan transformasi pada segi-5 beraturan terdiri atas sepuluh unsur, yaitu satu transformasi identitas, empat transformasi rotasi, dan lima transformasi refleksi. Unsur-unsur tersebut digunakan sebagai label baris dan kolom pada tabel komposisi. Setiap nilai pada tabel menyatakan hasil komposisi dua transformasi. Transformasi pada kolom diterapkan terlebih dahulu, kemudian diikuti oleh transformasi pada baris. Berdasarkan operasi komposisi yang telah didefinisikan, diperoleh tabel komposisi himpunan transformasi segi-5 beraturan sebagai berikut

Tabel 4. 9 Tabel Komposisi Himpunan Transformasi Segi-5 Beraturan

	e	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
e	e	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	e	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	e	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	e	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	e	r	r^2	r^3	s	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	e	r^4	r^3	r^2	r
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	p	e	r^4	r^3	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	q	sr	r	r	e	r^4	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^2	r	e	r^4
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^3	r^2	r	e

Berdasarkan tabel 4.9 menunjukkan hasil komposisi setiap pasang transformasi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan. Setiap nilai pada

tabel merupakan hasil komposisi transformasi yang terletak pada baris dan kolom yang bersesuaian. Melalui tabel tersebut, hubungan antar transformasi pada segi-5 beraturan dapat diamati secara menyeluruh.

Komposisi antar transformasi rotasi menghasilkan transformasi rotasi lainnya atau transformasi identitas. Hal ini ditunjukkan oleh lima unsur pertama pada tabel yang membentuk pola beraturan, yaitu penerapan rotasi secara berulang akan menghasilkan rotasi berikutnya hingga akhirnya kembali pada transformasi identitas. Pola tersebut menunjukkan bahwa transformasi-transformasi rotasi membentuk himpunan berorde lima.

Selain itu, komposisi dua transformasi refleksi menghasilkan transformasi rotasi, sedangkan komposisi antara transformasi rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi lainnya. Hasil-hasil komposisi tersebut menunjukkan bahwa jenis transformasi yang dihasilkan bergantung pada transformasi yang dikomposisikan serta urutan operasi yang dilakukan.

Pola komposisi yang terbentuk pada tabel 4.9 selanjutnya digunakan sebagai dasar dalam verifikasi pemenuhan aksioma grup pada himpunan transformasi segi-5 beraturan

4.3.5 Verifikasi Aksioma Grup pada Himpunan Transformasi Segi-5 Beraturan

Berdasarkan tabel 4.9, dapat dilakukan verifikasi terhadap aksioma grup pada himpunan transformasi segi-5 beraturan dengan operasi komposisi. Verifikasi dilakukan untuk meninjau sifat tertutup, keberadaan unsur identitas, keberadaan unsur asosiatif, dan keberadaan unsur invers. Dalam verifikasi ini digunakan relasi komposisi yang telah diperoleh sebelumnya, yaitu

$$r^5 = e, \quad s^2 = e, \quad rs = sr^4$$

Relasi tersebut digunakan untuk menunjukkan bahwa himpunan transformasi pada segi-5 beraturan memenuhi seluruh aksioma grup.

1. Sifat Tertutup

Berdasarkan relasi $r^5 = e$, komposisi dua transformasi rotasi selalu dapat dinyatakan kembali sebagai salah satu elemen

$$\{e, r, r^2, r^3, r^4\}$$

Selanjutnya, relasi $rs = sr^4$ menunjukkan bahwa komposisi antara transformasi rotasi dan transformasi refleksi menghasilkan transformasi refleksi yang masih merupakan anggota himpunan

$$\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$$

Selain itu, karena $s^2 = e$, maka komposisi dua transformasi refleksi juga menghasilkan elemen yang masih berada pada himpunan transformasi segi-5 beraturan. Dengan demikian, setiap hasil komposisi dua transformasi selalu menghasilkan elemen yang masih berada pada himpunan T .

Secara formal, untuk setiap transformasi A dan B pada himpunan T , berlaku

$$A \circ B \in T \quad 4.29$$

Oleh karena itu, operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan memenuhi sifat tertutup.

2. Unsur identitas

Berdasarkan relasi $r^5 = e$, diperoleh transformasi identitas yang dilambangkan dengan e . Transformasi ini tidak mengubah posisi bangun sehingga setiap titik pada segi-5 beraturan tetap berada pada posisi semula.

Keberadaan unsur identitas dapat diamati pada baris dan kolom yang bersesuaian dengan e . Hasil komposisi transformasi identitas dengan transformasi lain selalu menghasilkan transformasi itu sendiri. Sebagai contoh,

$$e \circ r^3 = r^3 \quad 4.30$$

dan

$$sr^2 \circ e = sr^2 \quad 4.31$$

Secara umum berlaku

$$e \circ A = A \circ e = A$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa transformasi identitas berperan sebagai unsur netral terhadap operasi komposisi. Dengan demikian, himpunan transformasi pada segi-5 beraturan memiliki unsur identitas, yaitu transformasi e .

3. Sifat Asosiatif

Operasi komposisi pada transformasi segi-5 beraturan memenuhi sifat asosiatif karena operasi yang digunakan merupakan komposisi fungsi. Sifat ini menyatakan bahwa hasil komposisi tidak bergantung pada cara pengelompokan transformasi yang dilakukan.

Untuk setiap transformasi a, b , dan c berlaku:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad 4.32$$

Untuk memperjelas sifat tersebut, ditinjau komposisi tiga transformasi, yaitu r, s , dan r^2 .

Dengan pengelompokan pertama diperoleh

$$(r \circ s) \circ r^2 \quad 4.33$$

Berdasarkan tabel 4.9,

$$r \circ s = sr^4 \quad 4.34$$

sehingga

$$(r \circ s) \circ s^2 = sr^4 \circ r^2 = sr \quad 4.35$$

Karena kedua pengelompokan menghasilkan transformasi yang sama, maka diperoleh

$$(r \circ s) \circ r^2 = r \circ (s \circ r^2) \quad 4.36$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa operasi komposisi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan memenuhi sifat asosiatif.

4. Unsur Invers

Setiap transformasi pada himpunan transformasi segi-5 beraturan memiliki invers yang juga berada pada himpunan yang sama. Invers suatu transformasi adalah transformasi lain yang apabila dikomposisikan menghasilkan transformasi identitas. Berdasarkan tabel 4.9 diperoleh bahwa transformasi rotasi memiliki pasangan invers sebagai berikut

Tabel 4.10 Invers Elemen pada Himpunan T

No	Elemen	Hasil Invers
1.	e	e
2.	r	r^4
3.	r^2	r^3
4.	r^3	r^2
5.	r^4	r
6.	s	s
7.	sr	sr
8.	sr^2	sr^2
9.	sr^3	sr^3
10.	sr^4	sr^4

Tabel 4.10 menunjukkan bahwa setiap elemen pada himpunan transformasi segi-5 beraturan memiliki pasangan invers yang juga

merupakan anggota himpunan T . Transformasi identitas e merupakan invers bagi dirinya sendiri. pada transformasi rotasi, invers diperoleh dari rotasi yang mengembalikan bangun ke posisi semula, yaitu r berinvers dengan r^4 dan r^2 berinvers dengan r^3 . Sementara itu, setiap transformasi refleksi merupakan invers bagi dirinya sendiri.

Berdasarkan hasil verifikasi yang telah dilakukan, diperoleh bahwa himpunan transformasi pada segi-5 beraturan memenuhi sifat tertutup terhadap operasi komposisi, memiliki unsur identitas, memenuhi sifat asosiatif, dan memiliki invers. Dengan demikian, seluruh aksioma grup telah terpenuhi.

4.3.6 Kesimpulan Transformasi pada Segi-5 Beraturan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, diperoleh bahwa transformasi pada segi-5 beraturan terdiri atas sepuluh transformasi, yaitu satu transformasi identitas, empat transformasi rotasi, dan lima transformasi refleksi. seluruh transformasi tersebut merupakan simetri yang memetakan segi-5 beraturan ke dirinya sendiri tanpa mengubah bentuk maupun ukurannya.

Hasil operasi komposisi menunjukkan bahwa setiap pasangan transformasi menghasilkan elemen yang masih berada pada himpunan yang sama. Selain itu, himpunan transformasi tersebut memiliki unsur identitas, memenuhi sifat asosiatif, dan setiap elemennya memiliki invers terhadap operasi komposisi. Dengan demikian, himpunan transformasi pada segi-5 beraturan memenuhi seluruh aksioma grup.

Karena himpunan transformasi tersebut terdiri atas sepuluh elemen, maka grup terbentuk merupakan grup hingga berorde 10 yang bersesuaian dengan grup dihedral D_n

4.4 Generalisasi Transformasi pada Segi- n Beraturan

Pembahasan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan menunjukkan adanya pola yang konsisten pada simetri bangun beraturan. pada masing-masing bangun diperoleh transformasi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri, yaitu transformasi rotasi dan transformasi refleksi. Transformasi-transformasi tersebut dapat dikomposisikan sehingga membentuk suatu himpunan transformasi dengan operasi komposisi.

Hasil analisis pada ketiga bangun menunjukkan bahwa jumlah transformasi yang diperoleh selalu berkaitan dengan banyaknya sisi bangun. segi-3 beraturan memiliki tiga transformasi rotasi dan tiga transformasi refleksi, segi-4 berturan memiliki empat transformasi rotasi dan empat transformasi refleksi, sedangkan segi-5 beraturan memiliki lima transformasi rotasi dan lima transformasi refleksi. Dari pola tersebut terlihat bahwa pada bangun beraturan dengan n sisi terdapat n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri.

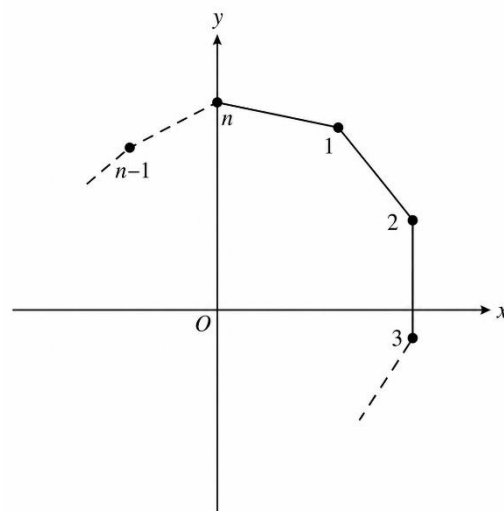
Selain menunjukkan keteraturan pada jumlah transformasi, ketiga kasus tersebut juga memperhatikan pola yang sama pada operasi komposisinya. Hasil komposisi dua transformasi selalu menghasilkan transformasi lain yang masih berada dalam himpunan yang sama, memiliki unsur identitas, memenuhi sifat asosiatif, dan memiliki invers. Dengan demikian, himpunan transformasi yang diperoleh membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi.

Berdasarkan keteraturan yang muncul pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, konsep transformasi pada bangun beraturan dapat diperluas ke bentuk yang lebih umum, yaitu segi- n beraturan. generalisasi ini dilakukan dengan mengamati pola jumlah transformasi, pola operasi komposisi,

serta struktur grup yang terbentuk pada ketiga kasus tersebut, kemudian merumuskan bentuk umum untuk bangun beraturan yang memiliki n sisi.

4.4.1 Generalisasi Transformasi pada Segi- n Beraturan

Berdasarkan pola yang diperoleh dari transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, transformasi pada segi- n beraturan dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih umum. Untuk mempermudah pendeskripsian transformasi, setiap titik sudut pada segi- n beraturan diberi label secara berurutan dengan $1, 2, 3, \dots, n$ searah jarum jam, selanjutnya segi- n beraturan diletakkan pada bidang koordinat kartesius sebagai titik pusat dan segi- n beraturan berimpit pada titik asal bidang koordinat kartesius. Pelabelan titik sudut tersebut digunakan sebagai acuan dalam mendeskripsikan transformasi rotasi dan refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri.



Gambar 4.7 Segi- n Beraturan pada Koordinat Kartesius

Gambar 4.7 menunjukkan suatu segi- n beraturan dengan titik sudut yang diberi label yang memungkinkan setiap transformasi pada segi- n beraturan

dideskripsikan berdasarkan perpindahan posisi titik-titik sudutnya. Dengan menggunakan pelabelan tersebut pola transformasi rotasi dan refleksi yang telah diperoleh pada segi-3, segi-4, dan segi-5 beraturan dapat digeneralisasi pada segi- n beraturan.

Tabel 4.11 Pola Transformasi Rotasi pada Segi Beraturan

Bangun	Trnasformasi Rotasi
Segi-3 Beraturan	e, r, r^2
Segi-4 Beraturan	e, r, r^2, r^3
Segi-5 Beraturan	e, r, r^2, r^3, r^4

Berdasarkan tabel 4.11 terlihat bahwa banyaknya transformasi rotasi pada setiap segi beraturan sama dengan banyak sisi bangun tersebut. dengan demikian, pada segi- n beraturan terdapat n transformasi rotasi, yaitu

$$e, r, r^2, \dots, r^{n-1} \quad 4.37$$

Transformasi r menyatakan rotasi dasar sebesar

$$\frac{360^\circ}{n} \quad 4.38$$

searah jarum jam terhadap titik pusat bangun, sedangkan transformasi-transformasi lainnya diperoleh melalui penerapan rotasi dasar secara berulang. Karena setelah dilakukan sebanyak n kali bangun kembali ke posisi semula, maka berlaku

$$r^n = e \quad 4.39$$

Hubungan tersebut menunjukkan bahwa transformasi rotasi pada segi- n beraturan membentuk urutan transformasi yang berulang secara teratur dan bergantung pada banyaknya banyaknya sisi bangun.

Selain transformasi rotasi, segi- n beraturan juga memiliki transformasi refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri. berdasarkan pola yang

diperoleh pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, seluruh transformasi refleksi dapat dibangun dari satu refleksi dasar yang dikomposisikan dengan transformasi rotasi yang telah didefinisikan sebelumnya.

Tabel 4.12 Pola Transformasi Refleksi pada Segi Beraturan

Bangun	Trnasformasi Refleksi
Segi-3 Beraturan	s, sr, sr^2
Segi-4 Beraturan	s, sr, sr^2, sr^3
Segi-5 Beraturan	s, sr, sr^2, sr^3, sr^4

Berdasarkan tabel 4.12 terlihat bahwa banyaknya transformasi refleksi pada setiap segi beraturan juga sama dengan banyak sisi bangun tersebut. Jika refleksi dasar dilambangkan dengan s , maka transformasi-transformasi refleksi pada segi- n beraturan dapat dinyatakan sebagai

$$s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1} \quad 4.40$$

dengan setiap unsur menyatakan refleksi terhadap sumbu simetri yang berbeda. Bentuk tersebut menunjukkan bahwa seluruh refleksi pada segi- n beraturan dapat diperoleh dari kombinasi satu refleksi dasar dengan transformasi-transformasi rotasi.

Berdasarkan transformasi rotasi dan refleksi yang telah diperoleh, himpunan transformasi pada segi- n beraturan dapat dinyatakan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

Himpunan tersebut terdiri atas n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi. Dengan demikian, banyaknya unsur pada himpunan transformasi segi- n beraturan adalah

$$|T| = 2n \quad 4.41$$

Himpunan transformasi inilah yang selanjutnya dianalisis melalui operasi komposisi untuk mengkaji struktur grup yang terbentuk pada segi- n beraturan.

4.4.2 Operasi Komposisi pada Segi- n Beraturan

Setelah himpunan transformasi pada segi- n beraturan diperoleh, langkah selanjutnya adalah menganalisis operasi komposisi antar transformasi. Operasi komposisi dilakukan dengan menerapkan dua transformasi secara berurutan sehingga menghasilkan suatu transformasi baru. Berdasarkan pola yang diperoleh pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, hasil komposisi dua transformasi selalu menghasilkan transformasi yang masih merupakan anggota himpunan transformasi segi- n beraturan.

Untuk menyatakan transformasi secara umum digunakan notasi r^i dan r^j untuk transformasi rotasi. Simbol r menyatakan rotasi dasar sebesar $\frac{360^\circ}{n}$, sedangkan i dan j menyatakan banyaknya pengulangan rotasi dasar tersebut, dengan $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Dengan demikian r^i menyatakan rotasi sebesar $i \left(\frac{360^\circ}{n}\right)$ dan r^j menyatakan rotasi sebesar $j \left(\frac{360^\circ}{n}\right)$.

Sementara itu, simbol s menyatakan refleksi dasar pada segi- n beraturan. Transformasi refleksi lainnya dinyatakan dalam bentuk sr^i dan sr^j , yaitu refleksi yang diperoleh dari komposisi refleksi dasar dengan transformasi rotasi tertentu. Dengan notasi tersebut, pola operasi komposisi pada segi- n beraturan dapat dinyatakan secara umum. Komposisi dua transformasi rotasi menghasilkan transformasi lainnya. Jika r^i dan r^j merupakan dua transformasi rotasi pada segi- n beraturan, maka diperoleh

$$r^i \circ r^j = r^{i+j} \quad 4.42$$

dengan eksponen dihitung modulo n . Hubungan tersebut menunjukkan bahwa hasil komposisi dua rotasi tetap berupa transformasi rotasi.

Selain itu, komposisi dua refleksi menghasilkan transformasi rotasi. Jika sr^i dan sr^j merupakan dua transformasi refleksi pada segi- n beraturan, maka diperoleh

$$sr^i \circ sr^j = r^{j-i} \quad 4.43$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa komposisi dua transformasi refleksi tidak menghasilkan refleksi lain, melainkan menghasilkan suatu transformasi rotasi.

komposisi antara transformasi rotasi dan refleksi menghasilkan transformasi refleksi. Jika r^i merupakan transformasi rotasi dan sr^j merupakan transformasi refleksi, maka berlaku

$$r^i \circ (sr^j) = sr^{i+j} \quad 4.44$$

dengan eksponen dihitung modulo n .

Demikian pula jika transformasi refleksi dikomposisikan dengan transformasi rotasi, maka diperoleh

$$(sr^i) \circ r^j = sr^{i+j} \quad 4.45$$

dengan eksponen dihitung modulo n

berdasarkan hubungan-hubungan tersebut, terlihat bahwa setiap hasil komposisi tetap menghasilkan unsur yang berada dalam himpunan transformasi segi- n beraturan. pola komposisi tersebut merupakan bentuk umum dari operasi komposisi yang telah diperoleh pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan. hubungan antar transformasi inilah yang selanjutnya digunakan

untuk memverifikasi aksioma grup pada himpunan transformasi segi- n beraturan.

4.4.3 Kesimpulan Generalisasi Transformasi pada Segi- n Beraturan

Berdasarkan pola yang diperoleh dari segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, dapat digeneralisasikan bahwa pada segi- n beraturan terdapat n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri. Seluruh transformasi tersebut membentuk himpunan transformasi yang dapat dinyatakan sebagai

$$T = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Operasi komposisi pada himpunan transformasi tersebut memenuhi sifat tertutup, memiliki unsur identitas, memenuhi sifat asosiatif, dan memiliki invers. Oleh karena itu, himpunan transformasi pada segi- n beraturan dengan operasi komposisi membentuk suatu grup.

Himpunan transformasi segi- n beraturan terdiri atas n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi sehingga banyak elemen himpunan T diperoleh

$$|T| = 2n \quad 4.50$$

Dengan demikian, himpunan transformasi pada segi- n beraturan pada segi- n beraturan membentuk grup hingga berorde $2n$.

4.5 Kajian Hasil Penelitian dengan Integrasi Agama

Berdasarkan hasil penelitian yang menunjukkan bahwa transformasi pada segi- n beraturan membentuk suatu struktur matematis yang teratur, konsisten, dan memenuhi aksioma grup melalui operasi komposisi. Keteraturan hubungan antara rotasi dan refleksi tersebut menunjukkan bahwa konsep-konsep matematis tidak

muncul secara acak, melainkan tersusun dalam pola yang sistematis dan harmonis. Keteraturan ini mencerminkan salah satu sifat dasar penciptaan alam semesta, yaitu keteraturan dan keseimbangan.

Dalam perspektif Islam, keteraturan dan konsistensi hukum-hukum matematis dapat dipahami sebagai manifestasi dari sunatullah, yaitu ketetapan hukum Allah SWT yang mengatur alam semesta secara teratur dan sistematis. Al-Quran menjelaskan bahwa penciptaan seluruh alam berlangsung dalam ukuran, proporsi, dan ketentuan yang pasti sebagaimana firman Allah SWT:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”. (Q.S. Al-Qamar:49) (Kementerian Agama RI, 2019)

Ayat tersebut menunjukkan bahwa seluruh ciptaan Allah SWT memiliki ukuran (*qadar*), proporsi, dan keteraturan tertentu. Dalam konteks penelitian ini, keteraturan jumlah transformasi pada segi- n beraturan yang secara konsisten berjumlah $2n$, serta keterpenuhan aksioma grup pada himpunan transformasinya, menunjukkan adanya pola matematis yang tetap dan teratur. Hal ini selaras dengan pandangan bahwa hukum-hukum matematis merupakan bagian dari keteraturan universal yang Allah SWT tetapkan dalam ciptaan-Nya.

Allah SWT berfirman dalam Quran Surat Al-Mulk (Kementerian Agama RI, 2019):

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَّا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَوتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ

فُطُورٍ ﴿٣﴾

Artinya: “*Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih*” (Q.S Al-Mulk:3)

Menurut para ulama, ayat ini menegaskan bahwa seluruh ciptaan Allah SWT tersusun dalam keseimbangan, harmoni, dan keteraturan yang sempurna (Shihab, 2006). Keseimbangan tersebut tidak hanya tampak pada fenomena fisik alam, tetapi juga pada struktur abstrak yang dapat dipahami melalui ilmu pengetahuan, termasuk matematika. Dengan demikian, keteraturan struktural dalam grup transformasi geometri dapat dipandang sebagai refleksi kecil dari keteraturan universal ciptaan Allah SWT.

Dalam epistemologi Islam, ilmu tentang matematika dipandang sebagai salah satu sarana untuk membaca tanda-tanda kekuasaan Allah (*ayat kauniyah*) melalui keteraturan rasional yang terdapat dalam alam semesta (Nasr, 1993). Oleh karena itu, kajian terhadap struktur grup pada transformasi segi- n beraturan tidak hanya bernilai matematis, tetapi juga memiliki dimensi reflektif-spiritual, karena memiliki keteraturan pola matematis tersebut manusia dapat memahami sebagian dari hikmah keteraturan ciptaan Allah SWT.

Dari sisi pendidikan, integrasi hasil penelitian ini dengan nilai-nilai agama menunjukkan bahwa pembelajaran matematika tidak semata-mata berorientasi pada penguasaan konsep abstrak, tetapi juga dapat diarahkan untuk menumbuhkan kesadaran teologis peserta didik. Pemahaman terhadap keteraturan, konsistensi, dan keharmonisan struktur matematis dapat menjadi sarana pembinaan karakter ilmiah sekaligus spiritual, yaitu ketelitian berpikir, penghargaan terhadap keteraturan, serta kesadaran bahwa ilmu pengetahuan merupakan jalan untuk mengenal kebesaran Allah SWT.

Dengan demikian hasil penelitian ini menunjukkan bahwa struktur grup pada transformasi segi- n beraturan tidak hanya relevan dalam kajian matematika abstrak, tetapi juga dapat dimaknai dalam perspektif nilai-nilai agama sebagai

representasi keteraturan, keseimbangan, dan ketetapan hukum Allah dalam penciptaan alam semesta.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa himpunan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Kesimpulan untuk rumusan masalah pertama

Himpunan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan yang terdiri atas transformasi rotasi dan transformasi refleksi, dengan operasi komposisi transformasi yang memenuhi aksioma-aksioma grup. melalui penyusunan tabel komposisi dan analisis sifat-sifat grup, diperoleh bahwa himpunan transformasi pada segi-3 beraturan membentuk grup hingga berorde 6, segi-4 membentuk grup hingga berorde 8, dan segi-5 beraturan membentuk grup hingga berorde 10. Dengan demikian, himpunan transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan yang dilengkapi dengan operasi komposisi terbukti memenuhi aksioma grup dan membentuk grup hingga. Secara berturut-turut grup hingga yang diperoleh adalah grup dihedral yang banyaknya sesuai dengan simetri yang dimiliki oleh bangun tersebut.

2. Kesimpulan untuk rumusan masalah kedua

Berdasarkan pola yang diperoleh dari transformasi pada segi-3 beraturan, segi-4 beraturan, dan segi-5 beraturan, diperoleh generalisasi himpunan transformasi pada segi- n beraturan terdapat n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi yang memetakan bangun ke dirinya sendiri. Himpunan seluruh transformasi tersebut dapat dinyatakan dalam himpunan

$$T = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Operasi komposisi pada himpunan tersebut mengikuti pola umum, yaitu komposisi dua rotasi menghasilkan rotasi, komposisi dua refleksi menghasilkan rotasi, sedangkan komposisi antara rotasi dan refleksi menghasilkan refleksi. berdasarkan pola komposisi tersebut, seluruh hasil operasi tetap berada dalam himpunan transformasi yang sama.

5.2 Saran untuk Penelitian Selanjutnya

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, terdapat beberapa saran yang dapat dipertimbangkan untuk penelitian selanjutnya.

1. Penelitian ini membahas struktur grup yang terbentuk dari himpunan transformasi pada segi beraturan melalui transformasi rotasi dan refleksi. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian pada bangun geometri lain yang memiliki sifat simetri, sehingga diperoleh struktur grup yang lebih beragam.
2. Penelitian ini masih terbatas pada identifikasi dan generalisasi himpunan transformasi pada segi- n beraturan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat difokuskan pada pembuktian dan verifikasi secara matematis terhadap struktur aljabar yang terbentuk, khususnya melalui pengujian aksioma grup dan karakteristik grup dihedral pada segi- n beraturan.
3. Generalisasi dalam penelitian ini dibatasi pada segi- n beraturan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mengkaji struktur grup transformasi pada bangun ruang atau onjek geometri lainnya yang memiliki simetri, sehingga dapat memperluas penerapan konsep grup dalam geometri.

4. Hasil penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dalam bidang pendidikan matematika, khususnya sebagai sumber belajar pada materi transformasi geometri dan pengantar aljabar abstrak untuk membantu siswa maupun mahasiswa memahami keterkaitan antara konsep geometri dan struktur aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

- Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). Abstract Algebra. In *John Wiley & Sons, Inc* (Vol. 1, Issue 1).
- Gallian, J. A. (2013). *CONTEMPORARY ABSTRACT ALGEBRA* (Richard Stratton (ed.); 8th ed.). Changage Learning.
- Ghorbani, M., Dehmer, M., Rahmani, S., & Rajabi-Parsa, M. (2020). A survey on symmetry group of polyhedral graphs. *Symmetry*, 12(3), 1–30. <https://doi.org/10.3390/sym12030370>
- Hamka. (1983). *Tafsir Al-Azhar* (Cetakan ke). Pustaka Panjimas. https://drive.google.com/file/d/10m5-eWdiEqnbN3jFaYv_Rrq1PV0RT_Uk/view
- M.A. Armstrong. (1989). Groups and symmetry. In *Choice Reviews Online* (Vol. 26, Issue 09, pp. 26-5108-26–5108). Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. <https://doi.org/10.5860/choice.26-5108>
- Nasr, S. H. (1993). *An Introduction to Islamic Cosmological Doctrines: Conceptions of Nature and Methods* (Revised Ed). State University of New York Press.
- RI, K. A. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*.
- Shihab, M. Q. (2006). Tafsir Al-Misbah Kesan dan Keserasian al-Qur'an Volume 14. In M. Q. Shihab (Ed.), *Tafsir al-Mishbah* (3rd ed., Vol. 14). Lentera Hati. [https://ia803106.us.archive.org/22/items/etaoin/Tafsir Al-Mishbah Jilid 14 - Dr. M. Quraish Shihab.pdf](https://ia803106.us.archive.org/22/items/etaoin/Tafsir%20Al-Mishbah%20Jilid%2014%20-%20Dr.%20M.%20Quraish%20Shihab.pdf)
- Sugiyono. (2020). *Metodologi Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan R & D*. Alfabeta, cv.

RIWAYAT HIDUP



Penulis Bernama Novita Putri Samsiar Andini, lahir di Malang pada tanggal 7 November 2000. Penulis merupakan putri dari bapak Samsul dan Ibu Sri Andayani dan menempuh Pendidikan Menengah Atas di SMA Modern Al-Rifaie. Setelah menyelesaikan pendidikan menengah atas, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif dalam berbagai organisasi kemahasiswaan. Pada tahun 2020 penulis menjabat sebagai Bendahara II Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) “Integral” Matematika. Selanjutnya pada tahun 2021 penulis dipercaya menjabat sebagai Bendahara I Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) “Integral” Matematika. Pada tahun 2022 penulis menjabat sebagai Sekretaris Jendral Senat Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. Selain itu, penulis juga pernah menjadi bagian dari Generasi Baru Indonesia (GenBI), yaitu komunitas penerima beasiswa Bank Indonesia pada tahun 2022. Sebelum memasuki dunia perkuliahan, penulis juga pernah menjabat sebagai Badan Pengurus Harian OSIS dan OPPMA pada tahun 2017 di Pondok Modern Al-Rifaie 2.

Selain aktif organisasi, penulis juga memiliki pengalaman dalam bidang kepemiluan sebagai Panitia Pemilihan Kecamatan pada periode 2023-2025. Saat ini penulis juga berkiprah dalam bidang pendidikan sebagai tenaga pendidik yang mengampu mata pelajaran Matematika di tingkat sekolah menengah atas. Penulis dapat dihubungi melalui surat elektronik: npsamsiara@gmail.com



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

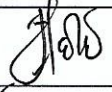
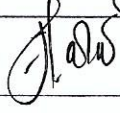
Nama : Novita Putri Samsiar Andini
NIM : 19610091
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Grup Hingga dari Himpunan Transformasi Segi- n
Beraturan dengan $n \geq 3$
Pembimbing I : Intan Nisfulaila, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Oktober 2025	Konsultasi BAB I, II, dan III	1.
2.	21 Oktober 2025	Konsultasi Revisi BAB I, II, dan III	2.
3.	26 Oktober 2025	ACC BAB I, II, dan III	3.
4.	27 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama BAB I dan II	4.
5.	28 Oktober 2025	Konsultasi Revisi Kajian Agama BAB I dan II	5.
6.	3 November 2025	ACC Kajian Agama BAB I dan II	6.
7.	10 November 2025	ACC Seminar Proposal	7.
8.	18 Desember 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	13 Januari 2026	Konsultasi BAB IV dan V	9.
10.	16 Maret 2026	Konsultasi Revisi BAB IV dan V	10.
11.	30 Maret 2026	ACC BAB IV dan V	11.
12.	16 April 2026	Konsultasi Kajian Agama BAB IV	12.
13.	17 April 2026	Konsultasi Revisi Kajian Agama BAB IV	13.
14.	20 April 2026	ACC Kajian Agama BAB IV	14.
15.	24 April 2026	ACC untuk Seminar Hasil	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	21 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16. 
17.	15 Juni 2026	Sidang Skripsi	17. 

Malang, 15 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012