

**KETERHUBUNGAN LINTASAN PADA RUANG TOPOLOGI
DI HIMPUNAN BERHINGGA**

SKRIPSI

**OLEH
RISMA SITI NURCHASANA
NIM. 210601110005**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**KETERHUBUNGAN LINTASAN PADA RUANG TOPOLOGI
DI HIMPUNAN BERHINGGA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Risma Siti Nurchasanah
NIM. 210601110005**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

KETERHUBUNGAN LINTASAN PADA RUANG TOPOLOGI DI HIMPUNAN BERHINGGA

SKRIPSI

Oleh
Risma Siti Nurchasanah
NIM. 210601110005

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 22 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Dian Maharani, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001

Dosen Pembimbing II



Juhari, M.Si.
NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

KETERHUBUNGAN LINTASAN PADA RUANG TOPOLOGI DI HIMPUNAN BERHINGGA

SKRIPSI

Oleh
Risma Siti Nurchasanah
NIM. 210601110005

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 17 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Intan Nisfulaila, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Juhari, M.Si.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Risma Siti Nurchasanah
NIM : 210601110005
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi
di Himpunan Berhingga

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Risma Siti Nurchasanah

NIM. 210601110005

MOTO

"Orang lain ga akan bisa paham *struggle* dan masa sulitnya kita yang mereka ingin tahu hanya bagian *success stories*. Berjuanglah untuk diri sendiri walaupun gak ada yang tepuk tangan. Kelak, diri kita di masa depan akan sangat bangga dengan apa yang kita perjuangkan hari ini, tetap berjuang ya"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan dengan segenap rasa syukur kepada:

Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu menjadi sumber kekuatan terbesar dalam hidup penulis. Segala bentuk kasih sayang, doa yang tak pernah putus, bimbingan penuh kelembutan, serta dukungan lahir dan batin yang diberikan menjadi bekal berharga yang mendorong penulis untuk terus bertahan dan menyelesaikan perjalanan ini.

Suami tersayang, yang tak henti memberikan doa, semangat, dan dukungan di setiap momen sulit. Dialah yang selalu mengingatkan penulis untuk tetap bangkit, menghargai setiap proses, dan melangkah dengan penuh keyakinan.

Keluarga tercinta, yang menjadi penyemangat di tengah berbagai tantangan. Kehadiran, bantuan, dan kebersamaan kalian membuat perjalanan panjang ini terasa lebih ringan dan berarti.

Dan kepada diri sendiri, atas segala usaha, keteguhan, dan keberanian untuk terus melangkah meski rintangan datang silih berganti. Terima kasih telah memilih untuk tidak menyerah dan terus mempercayai bahwa setiap langkah kecil membawa arti. Semoga karya ini menjadi wujud rasa terima kasih atas cinta, doa, dan dukungan dari semua orang terkasih yang telah mewarnai perjalanan ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Alhamdulillahillāhi rabbil 'ālamīn puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi di Himpunan Berhingga*”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan program Sarjana di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak bantuan dan dukungan yang telah diberikan oleh berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nurdiana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan masukan serta meluangkan waktu untuk membimbing penulis dengan sabar dan teliti, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Juhari, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta masukan dalam penyusunan skripsi ini, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini dengan baik.
6. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Ketua Penguji dalam ujian skripsi, atas kritik, saran, dan masukan yang membangun bagi penyempurnaan skripsi ini.
7. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku Anggota Penguji I dalam ujian skripsi, atas arahan dan masukan yang diberikan selama proses ujian skripsi.
8. Seluruh Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu, bimbingan, pengalaman, serta motivasi sepanjang masa perkuliahan.

9. Kedua orang tua, Supardi dan Siti Rohimah, yang selalu memberikan cinta, doa, nasehat, serta kesabaran luar biasa dalam setiap langkah hidup penulis. Mereka adalah anugerah terbesar dalam hidup, dan penulis berharap dapat menjadi anak yang membanggakan.
10. Suami penulis tersayang, Feri Hendrianto, yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan penuh selama proses penyusunan skripsi ini. Terima kasih telah menjadi pendamping proses perjalanan yang sabar dan selalu menguatkan.
11. Seluruh keluarga besar penulis, terima kasih atas segala doa, dukungan, dan kebersamaan yang telah menjadi sumber kekuatan dan inspirasi sepanjang perkuliahan.
12. Seluruh mahasiswa angkatan 2021 yang telah menjadi teman, sumber inspirasi, bantuan, serta semangat selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
13. Terima kasih kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang dengan tulus memberikan doa dan motivasi, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
14. Terima kasih kepada diri sendiri yang tidak menyerah di tengah jalan, yang terus berusaha bangkit setiap kali rasa ingin berhenti datang. Terima kasih telah melewati banyak hal sulit, lelah, dan ragu, namun tetap memilih untuk terus berjuang hingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Terima kasih atas keberanian, kesabaran, dan ketekunan yang selama ini tidak pernah benar-benar disadari.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, kritik serta saran yang konstruktif sangat diharapkan demi penyempurnaan skripsi ini agar bermanfaat bagi penulis maupun para pembaca.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 17 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
HALAMAN MOTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah	5
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung	8
2.1.1 Ruang Topologi	8
2.1.2 Himpunan Terbuka, Tertutup, dan Buka Tutup	12
2.1.3 Subruang Topologi	13
2.1.4 Keterhubungan Topologi	14
2.1.5 Ruang Topologi di Himpunan Berhingga (<i>Finite Topological Space</i>)	16
2.1.6 Persekitaran- ϵ (ϵ -neighborhood)	16
2.1.7 Fungsi Kontinu	18
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Hadis	20
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	22
BAB III METODE PENELITIAN	25
3.1 Jenis Penelitian	25
3.2 Pra Penelitian	25
3.3 Tahapan Penelitian	26
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	28
4.1 Lintasan (<i>Path</i>) dan Keterhubungan Lintasan (<i>Path Connected</i>)	28
4.2 Hasil Kali Lintasan (<i>Product Path</i>), Ekuivalensi Keterhubungan Lintasan dan Komponen Lintasan (<i>Path Component</i>)	35
4.3 Keterhubungan Lintasan Secara Lokal (<i>Locally Path Connected</i>)	42
4.4 Keekuivalenan Keterhubungan dan Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi di Himpunan Berhingga	46
4.5 Integrasi Topik dengan AL-Quran dan Hadist	49
BAB V PENUTUP	52

1.1	Kesimpulan	52
1.2	Saran	53
DAFTAR PUSTAKA		55
RIWAYAT HIDUP		57

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Lintasan dari Titik a ke Titik b	29
Gambar 4.2 Lintasan Terhubung A di $\mathbb{R}^2$	31
Gambar 4.3 Fungsi kontinu pada fungsi gabungan $h(x)$	34
Gambar 4.4 Komponen lintasan dalam bentuk diagram	41

DAFTAR SIMBOL

$\emptyset$	: Himpunan kosong
$\in$	: Elemen dari
$\notin$	: Bukan elemen dari
$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\cap$	: Irisan
$\cup$	: Gabungan
$X \setminus A$	: Komplemen himpunan A terhadap X
τ	: Tau
$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Terdapat
$\wedge$	: Dan
$\vee$	: Atau
$\rightarrow$	: Menuju
$\leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$[0, 1]$	: Interval tertutup dari 0 sampai 1
n	: Kardinalitas himpunan berhingga
$f^{-1}(H)$	: Prapeta himpunan H oleh fungsi f
$q * p$	: Hasil kali lintasan dari p dan q
$a \sim b$	: Relasi keterhubungan lintasan antara titik a dan b
$[a]$	: Kelas ekuivalensi dari titik a
$C(a)$	: Komponen lintasan dari titik a
U_x	: Persekitaran minimal dari titik x
ε	: Epsilon
$V_\varepsilon(a)$	: Persekitaran- ε dari titik a
$ a $	: Nilai mutlak dari a

ABSTRAK

Nurchasanah, Risma Siti. 2026. **Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi di Himpunan Berhingga**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: keterhubungan, keterhubungan lintasan, ruang topologi, himpunan berhingga.

Topologi merupakan salah satu cabang matematika yang mengkaji sifat-sifat ruang secara umum, salah satunya adalah konsep keterhubungan (*connectedness*). Keterhubungan lintasan (*path connectedness*) merupakan bentuk keterhubungan yang lebih kuat, namun secara umum kedua konsep tersebut tidak ekuivalen pada ruang topologi sembarang. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan keekuivalenan antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga (*finite topological space*). Penelitian ini merupakan penelitian matematika murni yang bersifat kualitatif dengan pendekatan studi pustaka (*library research*), yang dilakukan melalui pengkajian konsep, penyusunan definisi, serta pembuktian lemma dan teorema secara aksiomatik.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa sifat keterhubungan lintasan dipertahankan oleh fungsi kontinu. Relasi keterhubungan lintasan pada suatu ruang topologi X merupakan relasi ekuivalensi yang mempartisi X menjadi komponen-komponen lintasan, dan setiap ruang yang terhubung lintasan pasti terhubung. Lebih lanjut, dibuktikan bahwa suatu ruang dikatakan terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika setiap komponen lintasan dari setiap himpunan terbuka di dalamnya juga merupakan himpunan terbuka. Berdasarkan sifat-sifat tersebut, dibuktikan teorema utama bahwa pada ruang topologi di himpunan berhingga, suatu ruang X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan, dengan menunjukkan bahwa komponen lintasan dari setiap titik merupakan himpunan buka tutup (*clopen*) sehingga sama dengan ruang itu sendiri. Dengan demikian, penelitian ini membuktikan bahwa keekuivalenan antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan, yang secara umum tidak berlaku pada ruang topologi sembarang, terbukti berlaku secara khusus pada ruang topologi di himpunan berhingga.

ABSTRACT

Nurchasanah, Risma Siti. 2026. **Path Connectedness in Finite Topological Spaces.**
Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and
Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: connectedness, path connectedness, topological space, finite set.

Topology is one of the branches of mathematics that studies the properties of spaces in general, one of which is the concept of connectedness. Path connectedness is a stronger form of connectedness; however, in general, the two concepts are not equivalent in an arbitrary topological space. This research aims to prove the equivalence between connectedness and path connectedness in finite topological spaces (finite topological space). This research is a pure mathematics study of a qualitative nature using a library research approach (library research), conducted through conceptual review, definition formulation, and axiomatic proof of lemmas and theorems.

The results show that the property of path connectedness is preserved under continuous functions. The path connectedness relation on a topological space X is an equivalence relation that partitions X into path components, and every path connected space is connected. Furthermore, it is proved that a space is locally path connected if and only if every path component of every open set contained in it is also an open set. Based on these properties, the main theorem is proved: in a finite topological space, a space X is connected if and only if X is path connected, by showing that the path component of every point is a clopen set and therefore equals the space itself. Thus, this research proves that the equivalence between connectedness and path connectedness, which does not hold in general topological spaces, is specifically proved to hold in finite topological spaces.

مستخلص البحث

نورحسنة، ريسما سيتي. ٢٠٢٦. **الترباط المساري في الفضاءات التوبولوجية المنتهية**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.
المشرف: (١) ديان مهاراني، الماجستير في العلوم. (٢) جوهاري، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: الترباط، الترباط المساري، الفضاء الطوبولوجي، المجموعة المنتهية

الطوبولوجيا هو من إحدى فروع الرياضيات التي تدرس خصائص الفضاءات بصورة عامة، ومن أبرز مفاهيمها مفهوم الترباط. ويُعدّ الترباط المساري شكلاً أقوى من الترباط، غير أن المفهومين ليسا متكافئين بوجه عام في الفضاءات الطوبولوجية الاعتيادية. هدفت هذه الدراسة إلى إثبات التكافؤ بين الترباط والترباط المساري في الفضاءات الطوبولوجية المنتهية وهي دراسة في الرياضيات البحتة ذات طابع نوعي، تعتمد على منهج البحث المكتبي وتسير عبر مراجعة المفاهيم، وصياغة التعريفات، وإثبات الليمات والمبرهنات بأسلوب بديهي.

أظهرت النتائج أن خاصية الترباط المساري تنحفظ تحت الدوال المستمرة. وتُعدّ علاقة الترباط المساري على الفضاء الطوبولوجي X علاقةً تكافؤ تُقسّم إلى مركّبات مسارية X وكل فضاء مترابط مساريّاً يكون مترابطاً. علاوةً على ذلك أُثبت أن الفضاء يكون مترابطاً مساريّاً محليّاً إذا وفقط إذا كانت كل مركّبة مسارية لكل مجموعة مفتوحة فيه مجموعةً مفتوحة أيضاً واستناداً إلى هذه الخصائص، أُثبتت المبرهنة الرئيسية في الفضاء الطوبولوجي المنتهي X يكون الفضاء مترابطاً إذا وفقط إذا كان X مترابطاً مساريّاً. وذلك بإثبات أن المركّبة المسارية لكل نقطة هي مجموعة مفتوحة مغلقة، ومن ثمّ تساوي الفضاء ذاته. وبذلك تُثبت هذه الدراسة أن التكافؤ بين الترباط والترباط المساري، الذي لا يتحقق في الفضاءات الطوبولوجية الاعتيادية، يتحقق خصوصاً في الفضاءات الطوبولوجية المنتهية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang terus berkembang dan memiliki banyak cabang kajian, salah satunya adalah topologi. Diberikan X himpunan tak kosong dan τ adalah koleksi himpunan bagian dari X . Koleksi τ dikatakan topologi pada X jika memenuhi tiga syarat berikut: (1) himpunan kosong ($\emptyset$) dan himpunan X adalah anggota τ ; (2) gabungan dari setiap anggota τ adalah anggota τ ; (3) irisan dari setiap anggota τ adalah anggota τ . Jika τ adalah topologi pada X yang memenuhi ketiga syarat tersebut, maka (X, τ) dinamakan sebagai ruang topologi pada X (Nurwiyati, 1995).

Salah satu konsep kajian dalam topologi adalah keterhubungan (*connectedness*). Suatu ruang topologi X dikatakan memiliki separasi (*separation*) atau pemisahan apabila X dapat dinyatakan sebagai gabungan dari dua himpunan terbuka U dan V yang tidak kosong, saling lepas, dan memenuhi $X = U \cup V$. Berdasarkan hal tersebut, X dikatakan terhubung (*connected*) apabila tidak terdapat separasi pada X (Schlicker, 2023). Sebaliknya, apabila X memiliki separasi, maka X dikatakan tidak terhubung (*disconnected*).

Berkaitan dengan himpunan bagian, diberikan ruang topologi (X, τ) dan himpunan bagian tak kosong $A \subseteq X$. Koleksi $\tau_1 = \{U \cap A | U \in \tau\}$ disebut sebagai topologi subruang (*subspace topology*) pada A , sehingga pasangan (A, τ_1) merupakan subruang topologi dari X (Munkres, 2014). Suatu himpunan A dikatakan sebagai himpunan terhubung apabila A merupakan ruang terhubung di dalam topologi subruangnya.

Konsep keterhubungan memiliki bentuk yang lebih kuat, yaitu keterhubungan lintasan (*path connectedness*). Untuk mendefinisikan keterhubungan lintasan, terlebih dahulu perlu didefinisikan konsep lintasan. Misalkan X adalah ruang topologi. Sebuah lintasan (*path*) dalam X dari titik x ke titik y adalah fungsi kontinu $f: [0,1] \rightarrow X$ sedemikian sehingga $f(0) = x$ dan $f(1) = y$. Berdasarkan definisi lintasan tersebut, suatu subruang A dari ruang topologi X dikatakan terhubung lintasan (*path connected*) apabila untuk setiap pasang titik $x, y \in A$, terdapat sebuah lintasan di A yang menghubungkan titik x ke titik y (Schlicker, 2023).

Dalam penelitian ini, fokus pembahasan dibatasi pada ruang topologi di himpunan berhingga (*finite topological space*). Ruang topologi (X, τ) disebut sebagai ruang topologi di himpunan berhingga apabila himpunan X memiliki kardinalitas hingga, yaitu terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|X| = n$ (Sharp, 1968). Jika τ adalah topologi pada X maka kardinalitas dari τ yang dinotasikan dengan $|\tau|$ menyatakan banyaknya himpunan terbuka dalam X (Sukriyah, 2020).

Nilai $|\tau|$ tidak selalu sama dengan $|X|$, melainkan bergantung pada struktur topologi yang diberikan pada X . Dua contoh struktur topologi pada ruang berhingga adalah topologi diskrit dan topologi trivial. Topologi diskrit pada X adalah topologi yang terdiri dari semua himpunan bagian dari X , yaitu $\tau^D = P(X) = \{A | A \subseteq X\}$ dengan kardinalitas $|\tau^D| = |P(X)| = 2^n$. Topologi ini memiliki jumlah himpunan terbuka terbanyak, dan setiap himpunan dalam (X, τ) bersifat *buka tutup*, yaitu terbuka sekaligus tertutup. Sebaliknya, topologi trivial atau *indiscrete topology* hanya memiliki dua himpunan terbuka, yaitu $\tau^H = \{\emptyset, X\}$ dengan kardinalitas $|\tau^H| = |\{\emptyset, X\}| = 2$. Topologi ini merupakan struktur dengan jumlah himpunan terbuka paling sedikit. Dengan demikian, dalam ruang topologi di himpunan

berhingga, kardinalitas $|\tau|$ dapat bervariasi tergantung pada struktur topologi yang diberikan. Secara khusus, jika τ adalah topologi diskrit, maka $|\tau| = 2^n$, sedangkan jika τ adalah topologi trivial, maka $|\tau| = 2$ (Munkres, 2014).

Konsep keterhubungan lintasan dalam ruang topologi di himpunan berhingga dapat dikaitkan dengan berbagai fenomena dalam kehidupan nyata, termasuk dalam interaksi manusia dan lingkungan sekitarnya. Hal ini sebagaimana yang diuraikan dalam Al-Qur'an surah Ar-Rum ayat 41

ظَهَرَ الْفَسَادُ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِي النَّاسِ لِيُذِيقَهُمْ بَعْضَ الَّذِي عَمِلُوا لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

Artinya: “Telah tampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia. Allah menghendaki agar mereka merasakan sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar).” (Kementerian Agama, 2019)

Ayat tersebut menggambarkan bahwa segala bentuk kerusakan di alam semesta merupakan akibat dari keterhubungan antara tindakan manusia dan lingkungan. Hal ini mengisyaratkan bahwa tidak ada tindakan manusia yang bersifat terisolasi, melainkan senantiasa terdapat jalinan sebab-akibat yang saling terhubung dan berdampak luas. Sebagaimana konsep keterhubungan lintasan (*path connectedness*) dalam ruang topologi di himpunan berhingga, di mana setiap titik dapat saling terhubung melalui lintasan tertentu, demikian pula dalam kehidupan, seluruh aspek saling terkait melalui rangkaian tindakan dan akibat.

Lebih lanjut, ayat tersebut menjadi pengingat bahwa keterhubungan tersebut harus dijaga dengan baik, karena kerusakan pada satu “titik” kehidupan dapat menjalar ke seluruh sistem. Hal ini dapat diinterpretasikan sebagai interkoneksi dalam konteks ekologis yang relevan dengan konsep keterhubungan (*connected*), dan secara lebih khusus sejalan dengan konsep keterhubungan lintasan (*path connectedness*) pada ruang topologi di himpunan berhingga yang akan dibuktikan dalam penelitian ini.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini akan membahas dan membuktikan sifat-sifat keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat terhadap pengembangan kajian topologi, khususnya mengenai karakterisasi keterhubungan lintasan pada ruang berhingga sebagai salah satu bidang yang terus berkembang dalam matematika murni.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana hubungan antara keterhubungan (*connectedness*) dan keterhubungan lintasan (*path connectedness*) pada ruang topologi di himpunan berhingga, dan bagaimana pembuktian bahwa kedua sifat tersebut ekuivalen pada ruang tersebut?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dirumuskan sebelumnya, penelitian ini bertujuan untuk membuktikan keekuivalenan antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperdalam pemahaman teoritis mengenai konsep keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga, sekaligus menjadi referensi ilmiah bagi penulis maupun pembaca dalam memperluas wawasan di bidang teori topologi. Selain itu, hasil penelitian ini bermanfaat untuk mengasah kemampuan analisis matematis dan penyusunan

argumen ilmiah yang dapat diterapkan dalam studi atau pengembangan ilmu di bidang terkait.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada pembuktian keekuivalenan keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga.

1.6 Definisi Istilah

Berikut adalah rangkuman istilah yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Ruang Topologi

Ruang topologi adalah pasangan (X, τ) di mana X adalah himpunan tak kosong dan τ adalah koleksi himpunan bagian dari X . Koleksi τ dikatakan topologi pada X jika memenuhi tiga sifat, yaitu mengandung himpunan kosong dan himpunan X , tertutup terhadap gabungan sebarang koleksi anggotanya, serta tertutup terhadap irisan hingga anggotanya. Apabila τ memenuhi ketiga sifat tersebut maka pasangan (X, τ) merupakan ruang topologi (Nurwiyati, 1995).

2. Himpunan Terbuka

Setiap anggota dari koleksi topologi τ pada suatu ruang topologi pada X, τ (Munkres, 2014).

3. Himpunan Tertutup

Himpunan yang komplemen-nya merupakan himpunan terbuka dalam ruang topologi X, τ (Munkres, 2014).

4. Himpunan *Buka tutup*

Himpunan yang bersifat terbuka sekaligus tertutup dalam suatu ruang

topologi. Pada topologi diskrit, setiap himpunan bersifat *buka tutup* (Munkres, 2014).

5. Separasi (Pemisahan)

Pasangan dua himpunan terbuka U dan V yang tidak kosong, saling lepas ($U \cap V = \emptyset$), dan memenuhi $X = U \cup V$. Keberadaan separasi mengakibatkan X tidak terhubung (Schlicker, 2023).

6. Keterhubungan (*Connected*)

Sifat suatu ruang topologi X yang tidak memiliki separasi, artinya X tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling lepas (Schlicker, 2023).

7. Tidak Terhubung (*Disconnected*)

Sifat suatu ruang topologi X yang memiliki separasi, sehingga dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling lepas (Schlicker, 2023).

8. Topologi subruang (*Subspace Topology*)

Koleksi $\tau_1 = \{U \cap A | U \in \tau\}$ yang merupakan topologi pada himpunan bagian $A \subseteq X$, sehingga (A, τ_1) membentuk subruang topologi dari (X, τ) (Munkres, 2014).

9. Lintasan (*Path*)

Fungsi kontinu $f: [0,1] \rightarrow X$ sedemikian sehingga $f(0) = x$ dan $f(1) = y$, yang menghubungkan titik x ke titik y dalam ruang topologi X (Schlicker, 2023).

10. Keterhubungan Lintasan (*Path Connected*)

Sifat suatu ruang topologi X (atau subruang A) di mana untuk setiap pasang titik $x, y \in X$, selalu terdapat lintasan di X yang menghubungkan x ke

y (Schlicker, 2023).

11. Ruang Topologi di Himpunan Berhingga

Ruang topologi (X, τ) di mana himpunan X memiliki kardinalitas hingga, yaitu terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|X| = n$ (Sharp, 1968).

12. Kardinalitas $(|\tau|)$

Banyaknya himpunan terbuka dalam suatu topologi τ pada ruang topologi (X, τ) . Nilainya bervariasi bergantung pada struktur topologi yang diberikan (Sukriyah, 2020).

13. Topologi Diskrit τ^D

Topologi yang memuat semua himpunan bagian dari X , yaitu $\tau^D = P(X)$, dengan kardinalitas $|\tau^D| = 2^n$. Setiap himpunan dalam topologi diskrit bersifat *buka tutup* (Munkres, 2014).

14. Topologi Trivial τ^H

Topologi yang hanya memuat dua himpunan terbuka, yaitu $\emptyset$ dan X , sehingga $\tau^H = \{\emptyset, X\}$ dengan kardinalitas $|\tau^H| = 2$. Disebut pula *indiscrete topology* (Munkres, 2014).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Subbab ini membahas teori-teori dasar yang menjadi landasan dalam penelitian ini. Pemahaman terhadap seluruh teori ini diperlukan sebelum memasuki pembahasan utama mengenai keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga.

2.1.1 Ruang Topologi

Ruang topologi merupakan struktur paling dasar dalam kajian topologi. Pada subbab ini didefinisikan pengertian ruang topologi beserta dua contoh struktur topologi utama pada himpunan berhingga, yaitu topologi diskrit dan topologi trivial, yang akan banyak digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1 (Kartono, 1995)

Diberikan X himpunan tak kosong dan τ adalah koleksi himpunan bagian dari X . τ dikatakan topologi jika memenuhi tiga syarat berikut.

1. $\emptyset$ dan X anggota τ ,
2. gabungan dari setiap anggota τ adalah anggota τ , dan
3. irisan hingga dari anggota τ adalah anggota τ .

Jika τ topologi pada X yang memenuhi ketiga syarat tersebut, maka pasangan (X, τ) dinamakan sebagai ruang topologi pada X .

Definisi 2.2 (Munkres, 2014)

Misalkan X adalah himpunan. Topologi diskrit pada X didefinisikan sebagai: $\tau^D = P(X) = \{U \subseteq X\}$ di mana setiap himpunan bagian dari X adalah himpunan

terbuka dengan kardinalitasnya adalah $|\tau^D| = |P(X)| = 2^n$.

Definisi 2.3 (Munkres, 2014)

Misalkan X adalah himpunan. Topologi trivial (juga disebut topologi indiskrit) pada X didefinisikan sebagai: $\tau^H = \{\emptyset, X\}$ yaitu topologi yang hanya terdiri atas dua himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan semesta X itu sendiri dengan kardinalitas $|\tau^H| = 2$.

Sebagai pendukung pemahaman, berikut diberikan contoh penerapan ketiga definisi di atas.

Contoh 2.4

Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$.

Buktikan (X, τ) ruang topologi.

Bukti:

1. $\emptyset \in \tau$

$$X = \{a, b, c, d, e, f\} \in \tau$$

Jelas terpenuhi bahwa $\emptyset$ dan $X \in \tau$

2. • $\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \tau$

$$\bullet \{a, c, d\} \cup \emptyset = \{a, c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \emptyset \cup \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \{a, c, d\} \cup \{a\} = \{a, c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \emptyset \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \{a, c, d\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \emptyset \cup \{b, c, d, e, f\} =$$

$$\bullet \{a, c, d\} \cup \{b, c, d, e, f\} = X \in \tau$$

$$\{b, c, d, e, f\} \in \tau$$

$$\bullet \emptyset \cup X = X \in \tau$$

$$\bullet \{a, c, d\} \cup X = X \in \tau$$

$$\bullet \{a\} \cup \emptyset = \{a\} \in \tau$$

$$\bullet \{b, c, d, e, f\} \cup \emptyset =$$

$$\{b, c, d, e, f\} \in \tau$$

$$\bullet \{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$$

$$\bullet \{b, c, d, e, f\} \cup \{a\} = X \in \tau$$

- $\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$
- $\{b, c, d, e, f\} \cup \{c, d\} = \{b, c, d, e, f\} \in \tau$
- $\{a\} \cup \{b, c, d, e, f\} = X \in \tau$
- $\{b, c, d, e, f\} \cup \{a, c, d\} = X \in \tau$
- $\{a\} \cup X = X \in \tau$
- $\{b, c, d, e, f\} \cup X = X \in \tau$
- $\{c, d\} \cup \emptyset = \{c, d\} \in \tau$
- $X \cup \emptyset = X \in \tau$
- $\{c, d\} \cup \{a\} = \{a, c, d\} \in \tau$
- $X \cup \{a\} = X \in \tau$
- $\{c, d\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$
- $X \cup \{c, d\} = X \in \tau$
- $\{c, d\} \cup \{b, c, d, e, f\} = \{b, c, d, e, f\} \in \tau$
- $X \cup \{a, c, d\} = X \in \tau$
- $\{c, d\} \cup X = X \in \tau$
- $X \cup \{b, c, d, e, f\} = X \in \tau$

Jelas terpenuhi bahwa setiap gabungan dari anggota τ menghasilkan anggota τ .

- 3.
- $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{a, c, d\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$
 - $\emptyset \cap \{c, d\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{a, c, d\} \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$
 - $\emptyset \cap \{a, c, d\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{a, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau$
 - $\emptyset \cap \{b, c, d, e, f\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{a, c, d\} \in \tau$
 - $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau$
 - $\{a, c, d\} \cap X = \{a, c, d\} \in \tau$
 - $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$
 - $\{b, c, d, e, f\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$
 - $\{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{b, c, d, e, f\} \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$
 - $\{a\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau$
 - $\{b, c, d, e, f\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau$
 - $\{a\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \emptyset \in \tau$
 - $\{b, c, d, e, f\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\} \in \tau$

- $\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$
- $\{b, c, d, e, f\} \cap X = \{b, c, d, e, f\} \in \tau$
- $\{c, d\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$
- $X \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$
- $\{c, d\} \cap \{a\} = \emptyset \in \tau$
- $X \cap \{a\} = \{a\} \in \tau$
- $\{c, d\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\} \in \tau$
- $X \cap \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau$
- $\{c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, d\} \in \tau$
- $X \cap \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$
- $\{c, d\} \cap X = \{c, d\} \in \tau$
- $X \cap \{b, c, d, e, f\} = \{b, c, d, e, f\} \in \tau$

Jelas terpenuhi bahwa setiap irisan dari anggota τ menghasilkan anggota τ .

Karena ketiga syarat terpenuhi, maka terbukti bahwa (X, τ) merupakan ruang topologi.

Contoh 2.5 (Topologi Diskrit)

Misalkan $X = \{1, 2\}$. Tunjukkan X topologi diskrit.

Bukti:

Diketahui $X = \{1, 2\}$. Topologi diskrit pada X berdasarkan definisi adalah $\tau^D =$

$P(X) = \{U \subseteq X\}$ maka $\tau^D = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ dengan kardinalitasnya

$$\begin{aligned}
 |\tau^D| &= 2^n \\
 &= 2^2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Contoh 2.6 (Topologi Trivial)

Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$. Tunjukkan X topologi trivial

Bukti:

Diketahui $X = \{1, 2, 3\}$. Topologi trivial pada X berdasarkan definisi adalah $\tau^H =$

$\{\emptyset, X\}$ maka $\tau^H = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$ dengan kardinalitasnya $|\tau^H| = 2$.

Setelah memahami struktur dasar ruang topologi, pada subbab berikutnya dibahas sifat-sifat khusus himpunan bagian di dalam ruang topologi, yaitu himpunan terbuka, tertutup, dan buka tutup.

2.1.2 Himpunan Terbuka, Tertutup, dan Buka Tutup

Sifat terbuka dan tertutup suatu himpunan merupakan konsep inti dalam topologi yang menentukan struktur ruang. Pada subbab ini dijelaskan pengertian himpunan terbuka, tertutup, dan buka tutup beserta contoh pembuktiannya.

Definisi 2.7 (Robert G. Bartle, 2011)

Misalkan (X, τ) ruang topologi. Himpunan $U \subseteq X$ dikatakan terbuka jika $U \in \tau$.

Definisi 2.8 (Robert G. Bartle, 2011)

Misalkan (X, τ) ruang topologi. Himpunan $F \subseteq X$ dikatakan tertutup jika dan hanya jika komplementnya $X \setminus F$ adalah himpunan terbuka di τ .

Definisi 2.9 (Munkres, 2014)

Sebuah himpunan $A \subseteq X$ dikatakan *buka tutup* jika dan hanya jika A adalah terbuka sekaligus tertutup dalam ruang topologi (X, τ) .

Sebagai pendukung pemahaman, berikut diberikan contoh pembuktian ketiga sifat tersebut pada himpunan.

Contoh 2.10

Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Himpunan $\{a\}$ dan $\{a, b\}$ adalah himpunan terbuka karena keduanya merupakan anggota τ .

Contoh 2.11

Pada ruang yang sama, himpunan $\{b, c\}$ adalah himpunan tertutup karena komplementnya $\{a\} = X \setminus \{b, c\}$ merupakan anggota τ (himpunan terbuka).

Contoh 2.12

Himpunan $\emptyset$ dan X selalu bersifat buka tutup pada setiap ruang topologi, karena keduanya terbuka (merupakan anggota τ) sekaligus tertutup (komplemen masing-masing, yaitu X dan $\emptyset$, juga merupakan anggota τ).

Konsep himpunan terbuka dan tertutup di atas akan digunakan saat mendefinisikan topologi subruang pada subbab berikutnya.

2.1.3 Subruang Topologi

Dalam mengkaji sifat keterhubungan lintasan pada himpunan bagian suatu ruang, diperlukan konsep subruang topologi. Subruang topologi merupakan himpunan bagian dari ruang topologi yang dilengkapi dengan struktur topologi yang diturunkan dari ruang asalnya.

Definisi 2.13 (Munkres, 2014)

Misalkan (X, τ) ruang topologi. $Y \subseteq X$ himpunan bagian tak kosong dari X . Koleksi

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

disebut topologi subruang pada Y . Dengan topologi ini, (Y, τ_Y) disebut subruang dari (X, τ)

Sebagai pendukung pemahaman, berikut diberikan contoh penerapan definisi subruang topologi.

Contoh 2.14

Misalkan $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, X\}$.

Dari contoh sebelumnya sudah dibuktikan bahwa (X, τ) ruang topologi. Buktikan bahwa $Y = \{c, d\}$ merupakan subruang dari ruang topologi (X, τ) .

Bukti:

Berdasarkan definisi, subruang topologi τ_Y dari (X, τ) didefinisikan sebagai

$$\tau_Y = \{Y \cap U | U \in \tau\}$$

untuk $U = \emptyset$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap \emptyset | \emptyset \in \tau\}$

untuk $U = \{a\}$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap \{a\} | \emptyset \in \tau\}$

untuk $U = \{c, d\}$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap \{c, d\} | \{c, d\} \in \tau\}$

untuk $U = \{a, c, d\}$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap \{a, c, d\} | \{c, d\} \in \tau\}$

untuk $U = \{b, c, d, e, f\}$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\} | \{c, d\} \in \tau\}$

untuk $U = X$ maka $\tau_Y = \{\{c, d\} \cap X | \{c, d\} \in \tau\}$

Maka dapat disimpulkan $\tau_Y = \{Y \cap U | U \in \tau\} = \{\emptyset, \{c, d\}\}$

Selanjutnya membuktikan bahwa $\tau_Y = \{\emptyset, \{c, d\}\}$ merupakan topologi

$$1. \quad \emptyset \in \tau_Y$$

$$Y = \{c, d\} \in \tau_Y$$

$$2. \quad \emptyset \cup \{c, d\} = \{c, d\} \in \tau_Y$$

$$\{c, d\} \cup \emptyset = \{c, d\} \in \tau_Y$$

$$3. \quad \emptyset \cap \{c, d\} = \emptyset \in \tau_Y$$

$$\{c, d\} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_Y$$

dari ketiga bukti tersebut, $\tau_Y = \{\emptyset, \{c, d\}\}$ memenuhi syarat sebagai topologi pada

Y , maka (Y, τ_Y) adalah subruang topologi pada (X, τ) .

Setelah memahami konsep subruang, selanjutnya diperkenalkan konsep keterhubungan yang merupakan unsur penting dalam pembahasan.

2.1.4 Keterhubungan Topologi

Keterhubungan (*connectedness*) menyatakan bahwa suatu ruang tidak dapat dipisahkan menjadi dua bagian yang terbuka, tak kosong, dan saling asing. Konsep ini merupakan landasan dari keterhubungan lintasan yang menjadi topik utama penelitian ini.

Definisi 2.15 (Munkres, 2014).

Ruang topologi X disebut terhubung (*connected*) jika tidak terdapat pasangan himpunan terbuka $U, V \subseteq X$ yang memenuhi 3 syarat berikut:

1. U dan V keduanya tidak kosong ($U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$)
2. U dan V saling lepas ($U \cap V = \emptyset$)
3. dan $U \cup V = X$

Jika pasangan (U, V) memenuhi syarat tersebut maka disebut suatu pemisahan (*separation*) dari X .

Contoh 2.16 (Terhubung)

Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Akan dibuktikan bahwa (X, τ) terhubung.

Bukti:

Periksa semua pasang himpunan terbuka tak kosong selain $\emptyset$ dan X . Himpunan terbuka tak kosong yang ada adalah $\{a\}$ dan $\{a, b\}$. Perhatikan bahwa

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \neq X$$

sehingga tidak ada pemisahan. Oleh karena itu, (X, τ) adalah ruang terhubung.

Contoh 2.17 (Ruang Tidak Terhubung)

Misalkan $X = \{a, b\}$ dengan topologi diskrit $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Bukti:

Pilih $U = \{a\}$ dan $V = \{b\}$. U dan V tersebut terbuka, tak kosong, $U \cap V = \emptyset$, dan $U \cup V = X$. Karena pemisahan ditemukan, maka X adalah ruang yang tidak terhubung.

Selanjutnya, penelitian ini berfokus pada ruang topologi yang himpunan dasarnya berhingga, sehingga pada subbab berikutnya dibahas secara khusus definisi dan sifat ruang topologi di himpunan berhingga.

2.1.5 Ruang Topologi di Himpunan Berhingga (*Finite Topological Space*)

Ruang topologi di himpunan berhingga (*finite topological space*) adalah pasangan (X, τ) dengan X suatu himpunan dan τ koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi syarat topologi, di mana X memiliki kardinalitas yang berhingga. Ruang inilah yang menjadi pusat pembahasan dalam penelitian ini.

Definisi 2.18 (Sukriyah, 2020)

Ruang topologi (X, τ) disebut ruang topologi di himpunan berhingga apabila himpunan X memiliki kardinalitas hingga, yaitu terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|X| = n$. Kardinalitas τ , dinotasikan $|\tau|$, menyatakan banyaknya himpunan terbuka dalam X . Secara khusus, jika τ adalah topologi diskrit maka $|\tau| = 2^n$, sedangkan jika τ adalah topologi trivial maka $|\tau| = 2$.

Berikut diberikan contoh ruang topologi di himpunan berhingga beserta pembuktian dan pemeriksaan kardinalitasnya.

Contoh 2.19

Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. Maka $|X| = 3$ dan $|\tau| = 4$. Nilai $|\tau|$ tidak sama dengan $|X|$ karena struktur topologi yang diberikan bukan topologi diskrit ($|\tau| = 2^3 = 8$) maupun topologi trivial ($|\tau| = 2$).

Melanjutkan dari pembahasan ruang topologi di himpunan berhingga, selanjutnya akan diperkenalkan konsep persekitaran- ε pada garis bilangan real $\mathbb{R}$, sebagai teori pendukung mengenai persekitaran minimal yang terdapat dalam bab hasil dan pembahasan.

2.1.6 Persekitaran- ε (ε -neighborhood)

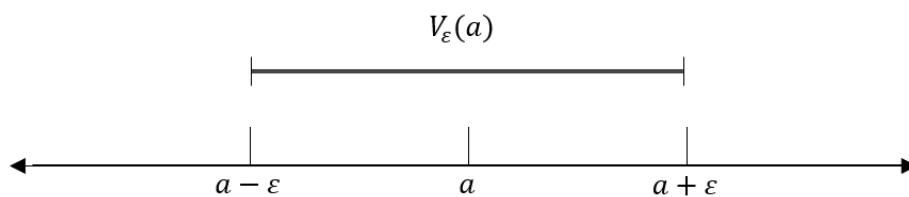
Dalam ruang metrik, khususnya pada garis bilangan real $\mathbb{R}$, kedekatan suatu titik terhadap titik lainnya dapat dinyatakan secara kuantitatif melalui

konsep persekitaran- ε . Konsep ini menggambarkan himpunan semua titik yang berjarak kurang dari ε dari suatu titik tertentu, dan menjadi landasan dalam mendefinisikan kekontinuan fungsi secara formal.

Definisi 2.20 (Munkres, 2014)

Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran- ε (ε -neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

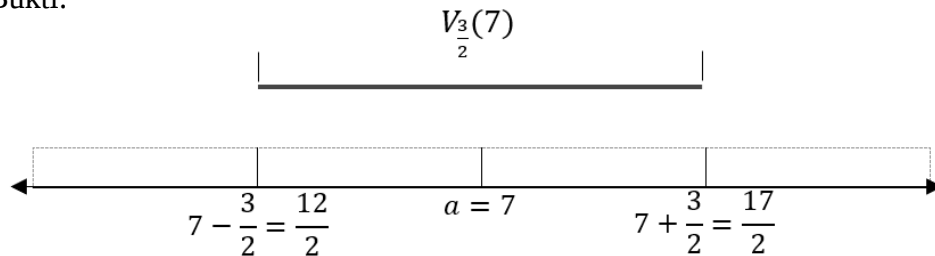


Dapat dilihat bahwa $x \in V_\varepsilon(a)$ jika dan hanya jika $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

Contoh 2.21

Misalkan $a = 7$ dan $\varepsilon = \frac{3}{2}$ tunjukkan *neighborhood* dari a

Bukti:



Dapat dilihat bahwa $x \in V_{\frac{3}{2}}(7)$ jika dan hanya jika $\frac{12}{2} < x < \frac{17}{2}$ di mana terbukti

bahwa $V_{\frac{3}{2}}(7) := \left\{x \in \mathbb{R} : |x - 7| < \frac{3}{2}\right\} = \left(7 - \frac{12}{2}, 7 + \frac{17}{2}\right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{17}{2}\right)$

Sebelum dapat mendefinisikan lintasan, diperlukan pemahaman tentang fungsi kontinu sebagai alat utama dalam mendefinisikan lintasan. Konsep tersebut dibahas pada subbab berikut ini.

2.1.7 Fungsi Kontinu

Lintasan (*path*) didefinisikan sebagai fungsi kontinu dari interval $[0,1]$ ke dalam ruang topologi. Oleh karena itu, pemahaman tentang kekontinuan fungsi merupakan prasyarat penting sebelum mendefinisikan lintasan dan keterhubungan lintasan.

Definisi 2.22 (Stewart, 2012)

Misalkan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di titik $c \in \mathbb{R}$ jika dan hanya jika memenuhi tiga syarat berikut:

1. $f(c)$ ada atau terdefinisi
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada, dan
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Definisi 2.23 (Munkres, 2014)

Diberikan dua ruang topologi (X, τ_1) dan (Y, τ_2) . Fungsi $f: X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka $H \in \tau_2$, prapeta $f^{-1}(H) \in \tau_1$ artinya

$$\forall H \in \tau_2, f^{-1}(H) \in \tau_1$$

Pada definisi 2.21 diatas, syarat kekontinuan melibatkan konsep prapeta $f^{-1}(H)$. Agar konsep tersebut dapat dipahami dengan baik, berikut diberikan definisi dari prapeta (*inverse image*).

Definisi 2.24 (Axler, 2025)

Jika $f: X \rightarrow Y$ adalah sebuah fungsi dan $A \subseteq Y$, maka himpunan $f^{-1}(A)$ didefinisikan sebagai

$$f^{-1}(A) = \{x \in X: f(x) \in A\}$$

Dengan memahami konsep prapeta di atas, kekontinuan suatu fungsi pada

ruang topologi dapat dilakukan, yaitu dengan menghitung $f^{-1}(H)$ untuk setiap himpunan terbuka H di kodomain dan memastikan hasilnya berada di topologi domain. Selain itu, kekontinuan fungsi juga dapat ditinjau pada interval tertutup, sebagaimana dinyatakan oleh definisi berikut.

Definisi 2.25 (Sherbert, 2011)

Fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ jika f kontinu pada setiap titik interval terbuka (a, b) , kontinu dari kanan di a , dan kontinu dari kiri di b .

Berikut diberikan contoh kekontinuan fungsi pada ruang topologi di himpunan berhingga, yang merupakan langkah yang akan digunakan dalam pembuktian kekontinuan lintasan.

Contoh 2.26

Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ kontinu di titik $x = 2$.

1. $f(x) = x^2 + 1$
 $f(2) = 2^2 + 1$
 $= 5$ (Terdefinisi)
2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$
 $= 4 + 1$
 $= 5$ (Ada)
3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(x)$

$f(x) = x^2 + 1$ memenuhi ketiga syarat pada definisi, dengan demikian $f(x) = x^2 + 1$ kontinu di $x = 2$.

Contoh 2.27

Misalkan $f: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = \sin x$. Maka

1. $f^{-1}((0, \infty)) = (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$

$$2. f^{-1}([0,1]) = [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \{4\pi\}$$

$$3. f^{-1}(\{-1\}) = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$$

$$4. f^{-1}((2,3)) = \emptyset$$

Contoh 2.28

Misalkan $X = \{a, b, c\}$, dengan topologi $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, dan $Y = \{1, 2\}$, dengan $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Didefinisikan fungsi $f: X \rightarrow Y$ dengan $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 2$. Tunjukkan f kontinu

Bukti:

$$1. f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$$

$$2. f^{-1}(\{1\}) = \{a, b\} \in \tau_1$$

$$3. f^{-1}(Y) = X \in \tau_1$$

Karena semua prapeta merupakan anggota τ_1 , maka f adalah fungsi kontinu.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Hadis

Subbab ini membahas integrasi antara konsep keterhubungan lintasan (*path connectedness*) pada ruang topologi di himpunan berhingga (*finite topological space*) dengan nilai-nilai yang terkandung dalam hadis Nabi Muhammad SAW. Secara matematis, suatu subruang A dari ruang topologi X dikatakan terhubung lintasan apabila untuk setiap pasangan titik $x, y \in A$, terdapat sebuah lintasan (*path*), yaitu fungsi kontinu $f: [0, 1] \rightarrow A$ dengan $f(0) = x$ dan $f(1) = y$, yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Konsep keterhubungan lintasan ini memiliki makna yang dapat dikaitkan dengan nilai-nilai keislaman, khususnya yang diajarkan oleh Nabi Muhammad SAW melalui hadis-hadis beliau. Dalam Islam, umat diajarkan untuk saling terikat,

peduli, dan bersatu dalam kebersamaan. Nilai ini sangat relevan dengan sifat matematis keterhubungan lintasan, di mana setiap elemen dalam suatu ruang harus dapat dijangkau dari elemen lainnya melalui lintasan yang kontinu, sehingga keutuhan ruang tersebut terjaga. Salah satu hadis yang relevan dengan konsep ini adalah hadis yang diriwayatkan oleh Imam Muslim, yaitu:

عَنْ النُّعْمَانِ بْنِ بَشِيرٍ قَالَ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: مَثَلُ الْمُؤْمِنِينَ فِي تَوَادُّهِمْ وَرَحْمَتِهِمْ وَنِعَاطِهِمْ مَثَلُ الْجَسَدِ إِذَا اشْتَكَى مِنْهُ عُضْوٌ تَدَاعَى لَهُ سَائِرُ الْجَسَدِ بِالسَّهَرِ وَالْحُمَّى

Artinya: “Perumpamaan orang-orang beriman dalam kasih sayang, rasa cinta, dan kepedulian di antara mereka adalah seperti satu tubuh. Jika salah satu anggota tubuh merasa sakit, maka seluruh tubuh ikut merasakan demam dan tidak bisa tidur.” (HR. Muslim 2586a)

Hadis ini mengajarkan bahwa hubungan antar sesama umat Islam haruslah erat dan saling menguatkan, sebagaimana bagian-bagian tubuh yang saling terhubung dan merespons satu sama lain ketika ada bagian yang mengalami masalah. Secara matematis, hal ini dapat dikaitkan dengan sifat keterhubungan lintasan. Dalam ruang topologi yang terhubung lintasan, setiap titik x selalu dapat dihubungkan ke titik y melalui sebuah lintasan kontinu. Dengan demikian, respons yang menyebar ke seluruh tubuh dalam hadis tersebut mencerminkan sifat transitif lintasan, di mana keterhubungan antara dua titik mana pun selalu terjamin dalam ruang yang terhubung lintasan.

Sebaliknya, apabila dalam ruang topologi terdapat satu titik yang tidak dapat dihubungkan dengan titik lainnya melalui lintasan kontinu, maka ruang tersebut tidak lagi dikategorikan sebagai ruang terhubung lintasan (*path connected*). Realita dalam kehidupan sosial umat Islam pun demikian, jika terdapat seorang individu yang terabaikan dan tidak terhubung secara emosional maupun sosial dengan yang lainnya, maka kesatuan dan kekuatan umat akan melemah. Syarat ini dalam matematika disebut sebagai ruang yang *disconnected*, yaitu ruang yang dapat

dipisahkan menjadi dua himpunan terbuka yang tidak kosong dan saling lepas.

Dengan demikian, konsep keterhubungan lintasan dalam ruang topologi di himpunan berhingga tidak hanya memiliki makna matematis yang penting, tetapi juga dapat menjadi cerminan dari nilai-nilai Islam yang mengajarkan tentang pentingnya persatuan, kepedulian, dan keterikatan yang erat antar sesama. Integrasi ini menunjukkan bahwa ilmu matematika, khususnya topologi, memiliki kaitan yang luas dan dapat dipahami melalui perspektif nilai-nilai keislaman.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Subbab ini menjelaskan teori-teori pendukung yang menjadi landasan pembahasan dalam penelitian ini, meliputi konsep lintasan (*path*), keterhubungan lintasan (*path connectedness*), hasil kali lintasan (*product path*), komponen lintasan, dan keterhubungan lintasan secara lokal (*locally path connected*) pada ruang topologi di himpunan berhingga.

Definisi 2.29 (Schlicker, 2023)

Misalkan X ruang topologi. A lintasan dari titik a ke titik b dalam X adalah sebuah fungsi kontinu $p : [0,1] \rightarrow X$ sedemikian sehingga $p(0) = a$ dan $p(1) = b$

Definisi 2.30 (Schlicker, 2023)

Subruang A dari ruang topologi X dikatakan terhubung lintasan (*path connected*) jika, untuk setiap $a, b \in A$, terdapat sebuah lintasan di A dari a ke b .

Teorema 2.31 (Schlicker, 2023)

Misalkan X dan Y ruang topologi dan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinu. Jika A subruang yang terhubung lintasan dari X , maka $f(A)$ subruang yang terhubung lintasan dari Y .

Lemma 2.32 (Schlicker, 2023)

Misalkan A dan B subset tertutup dari ruang $X = A \cup B$, dan dimisalkan $f : A \rightarrow Y$ dan $g : B \rightarrow Y$ fungsi kontinu kedalam ruang Y sedemikian sehingga $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (A \cap B)$. Maka fungsi $h : X \rightarrow Y$ didefinisikan sebagai

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } x \in A \\ g(x), & \text{jika } x \in B \end{cases}$$

maka $h(x)$ kontinu

Definisi 2.33 (Schlicker, 2023)

Misalkan p lintasan dari a ke b dan q lintasan dari b ke c di ruang X . Product lintasan $q * p$ adalah lintasan di X yang didefinisikan sebagai

$$(q * p)(x) = \begin{cases} p(2x), & \text{untuk } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ q(2x - 1), & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Definisi 2.34 (Schlicker, 2023)

Komponen lintasan dari elemen a dalam ruang topologi (X, τ) himpunan terhubung lintasan terbesar dari X yang mengandung a .

Teorema 2.35 (Schlicker, 2023)

Jika ruang topologi X adalah terhubung lintasan, maka X terhubung

Definisi 2.36 (Schlicker, 2023)

Untuk $x \in X$, persekitaran minimal U_x dari x adalah irisan dari semua himpunan terbuka yang memuat x .

Definisi 2.37 (Schlicker, 2023)

Sebuah ruang topologi (X, τ) dikatakan terhubung lintasan secara lokal di x jika setiap persekitaran dari x mengandung persekitaran terbuka yang terhubung lintasan dengan x sebagai elemennya. Ruang (X, τ) dikatakan terhubung lintasan secara lokal jika X terhubung lintasan secara lokal di setiap titik.

Lemma 2.38 (Schlicker, 2023)

Sebuah ruang X terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka O dari X , setiap komponen lintasan dari O adalah himpunan terbuka di X .

Teorema 2.39 (Schlicker, 2023)

Misalkan X ruang topologi finite. Maka X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian matematika murni yang bersifat kualitatif dengan pendekatan studi pustaka (*library research*). Penelitian studi pustaka dilakukan dengan cara mengumpulkan, membaca, mencatat, dan mengolah berbagai sumber referensi yang relevan, seperti buku, jurnal ilmiah, dan artikel matematika yang berkaitan dengan topologi, keterhubungan, dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga. Penelitian ini tidak melibatkan pengumpulan data lapangan, melainkan berfokus pada pengkajian konsep, penyusunan definisi, dan pembuktian teorema secara aksiomatik.

3.2 Pra Penelitian

Pada tahap pra penelitian, dilakukan studi literatur yang mencakup kajian terhadap teori-teori dasar topologi dan konsep keterhubungan lintasan (*path connectedness*) pada ruang topologi di himpunan berhingga (*finite topological space*). Kajian literatur ini meliputi penelaahan sumber-sumber utama, yaitu buku, serta jurnal-jurnal pendukung lainnya yang berkaitan dengan topik penelitian.

Selain itu, pada tahap ini juga dilakukan identifikasi dan pemilihan definisi, lemma, serta teorema yang akan digunakan sebagai landasan dalam penyusunan pembuktian pada Bab IV. Beberapa konsep utama yang dikaji pada tahap pra penelitian antara lain, definisi lintasan (*path*), keterhubungan lintasan (*path connectedness*), komponen lintasan (*path component*), hasil kali lintasan, keterhubungan lintasan secara lokal (*locally path connected*), serta hubungan antara

keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga.

3.3 Tahapan Penelitian

Berdasarkan jenis penelitian yang digunakan, berikut merupakan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini:

1. Mendefinisikan lintasan (*path*) dan keterhubungan lintasan (*path connected*)
 - a. Mendefinisikan lintasan sebagai fungsi kontinu $p : [0,1] \rightarrow X$ yang menghubungkan dua titik dalam ruang topologi X .
 - b. Mendefinisikan keterhubungan lintasan pada suatu subruang berdasarkan konsep lintasan.
 - c. Membuktikan sifat keterhubungan lintasan dipertahankan oleh fungsi kontinu. Membuktikan lemma mengenai kekontinuan fungsi yang didefinisikan secara terpisah pada dua himpunan tertutup.
2. Mendefinisikan hasil kali lintasan (*product path*) dan komponen lintasan (*path component*)
 - a. Mendefinisikan hasil kali dua lintasan yang berurutan untuk membentuk lintasan baru
 - b. Membuktikan bahwa relasi keterhubungan lintasan merupakan relasi ekuivalensi (refleksif, simetris, dan transitif),
 - c. Mendefinisikan komponen lintasan sebagai kelas ekuivalensi dari relasi.
 - d. Membuktikan bahwa setiap ruang yang terhubung lintasan pasti terhubung.
3. Mendefinisikan keterhubungan lintasan secara lokal (*locally path connected*)
 - a. Mendefinisikan persekitaran minimal dari suatu titik.

- b. Mendefinisikan keterhubungan lintasan secara lokal
 - c. Mendefinisikan karakterisasi keterhubungan lintasan secara lokal melalui keterbukaan komponen lintasan pada setiap himpunan terbuka.
4. Membuktikan teorema utama mengenai keekuivalenan keterhubungan dan keterhubungan lintasan

Menggabungkan dan mengaplikasikan seluruh definisi, lemma, dan teorema yang telah dibuktikan pada tahap 1 sampai 3 untuk membuktikan bahwa pada ruang topologi di himpunan berhingga, suatu ruang terhubung jika dan hanya jika ruang tersebut terhubung lintasan. Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan bahwa komponen lintasan dari setiap titik merupakan himpunan buka tutup, sehingga komponen lintasan tersebut sama dengan ruang topologi itu sendiri.

5. Mengintegrasikan hasil pembuktian dengan Al-Qur'an dan hadis

Pada tahap ini dilakukan penelaahan ayat Al-Qur'an dan hadis yang relevan dengan konsep keterhubungan dan keterhubungan lintasan, untuk menunjukkan relevansi hasil pembuktian matematis terhadap nilai-nilai keislaman.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan hasil penelitian berupa pembuktian teorema-teorema yang berkaitan dengan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga. Pembuktian dilakukan secara sistematis, dimulai dari konsep lintasan dan keterhubungan lintasan, dilanjutkan dengan sifat kekontinuan fungsi, komposisi lintasan, kemudian hasil kali lintasan, komponen lintasan, keterhubungan lintasan secara lokal, dan diakhiri dengan pembuktian teorema utama yang menyatakan kesetaraan atau keekuivalenan antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga. Setiap teorema dan lemma disertai pembuktian lengkap, dan setiap definisi dilengkapi contoh beserta pembuktiannya.

4.1 Lintasan (*Path*) dan Keterhubungan Lintasan (*Path Connected*)

Pembahasan diawali dengan mendefinisikan secara formal lintasan dan keterhubungan lintasan, kemudian dilengkapi dengan contoh pembuktian untuk mendukung pemahaman terhadap kedua konsep tersebut.

Definisi 4.1 (Schlicker, 2023)

Misalkan X ruang topologi. Sebuah lintasan (*path*) dari titik a ke titik b dalam X adalah sebuah fungsi kontinu

$$p : [0,1] \rightarrow X$$

sedemikian sehingga

$$p(0) = a \text{ dan } p(1) = b$$

Contoh 4.2

Misalkan ruang topologi $X = \mathbb{R}^2$ dan $a = (0,0), b = (1,1)$. Tunjukkan bahwa fungsi $p(t) = (t, t)$, untuk $t \in [0,1]$ adalah sebuah lintasan dari a ke b di dalam X .

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa p memenuhi syarat definisi lintasan. Pertama menentukan nilai awal dan akhir, diketahui bahwa

$$a = (0,0)$$

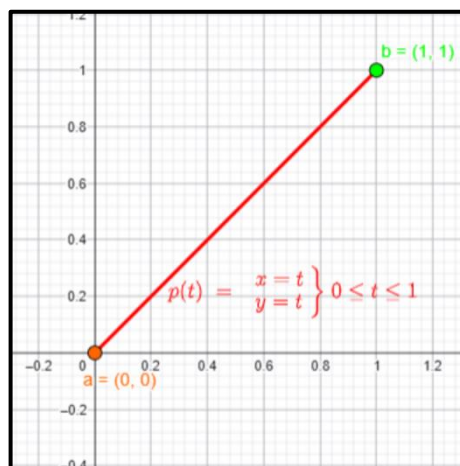
$$b = (1,1)$$

Perhatikan bahwa

$$p(0) = (0,0) = a$$

$$p(1) = (1,1) = b$$

Sehingga syarat $p(0) = a$ dan $p(1) = b$ terpenuhi. Kedua akan dibuktikan kekontinuan $p(t) = (t, t)$ dapat dinyatakan sebagai $(f(t), g(t))$ dengan $f(t) = t$, dan $g(t) = t$. Karena $f(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi linier (kontinu), maka p kontinu pada $[0,1]$. Karena kedua syarat terpenuhi, maka $p(t) = (t, t)$ adalah lintasan dari titik a ke titik b di $\mathbb{R}^2$. Berikut visualisasi dari lintasan $p(t) = (t, t)$.



Gambar 4.1 Lintasan dari Titik a ke Titik b

Berdasarkan definisi lintasan tersebut, selanjutnya dapat didefinisikan subruang yang terhubung lintasan, yaitu subruang di mana setiap dua titiknya selalu

dapat dihubungkan oleh suatu lintasan.

Definisi 4.3 (Schlicker, 2023)

Subruang A dari ruang topologi X dikatakan terhubung lintasan (*path connected*) jika untuk setiap $a, b \in A$, terdapat sebuah lintasan di A dari titik a ke titik b .

Contoh 4.4

Misalkan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Tunjukkan bahwa A terhubung lintasan di $\mathbb{R}^2$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $b, c \in A$ terdapat lintasan kontinu dari b ke c yang seluruhnya berada di dalam A . Ambil sebarang dua titik di dalam A

$$b = (x_1, y_1)$$

$$c = (x_2, y_2)$$

Didefinisikan fungsi

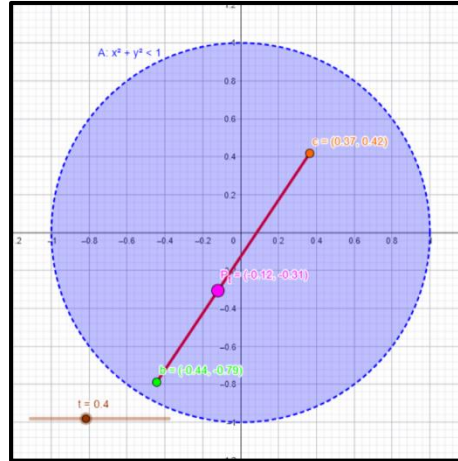
$$\begin{aligned} p(t) &= (1 - t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \\ &= ((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) \end{aligned}$$

dengan $t \in [0, 1]$ maka dapat diperoleh

- saat $t = 0, p(0) = (x_1, y_1) = b$
- saat $t = 1, p(1) = (x_2, y_2) = c$

Fungsi p kontinu karena merupakan kombinasi linier dari fungsi kontinu. Untuk setiap $t \in [0, 1]$, titik $p(t)$ berada pada segmen garis antara b dan c . Karena A merupakan lingkaran terbuka (open disk), maka $p(t) \in A$ untuk semua t . Dengan demikian p adalah lintasan dari b ke c di dalam A , sehingga A terhubung lintasan.

Berikut visualisasi dari lintasan terhubung A di $\mathbb{R}^2$.



Gambar 4.2 Lintasan Terhubung A di $\mathbb{R}^2$.

Sifat keterhubungan lintasan ternyata dipertahankan oleh fungsi kontinu. Hal ini dinyatakan oleh Teorema 4.5 berikut, yang merupakan teorema penting dalam pembuktian selanjutnya.

Teorema 4.5 (Schlicker, 2023)

Misalkan X dan Y ruang topologi dan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi kontinu. Jika A subruang yang terhubung lintasan dari X , maka $f(A)$ adalah subruang yang terhubung lintasan dari Y .

Bukti:

Diketahui $f : X \rightarrow Y$ kontinu, $A \subseteq X$ terhubung lintasan. Akan dibuktikan bahwa $f(A)$ terhubung lintasan, yaitu untuk setiap $y_0, y_1 \in f(A)$, terdapat lintasan dari y_0 ke y_1 di $f(A)$. Ambil sebarang $y_0, y_1 \in f(A)$. Karena y_0 dan y_1 berada di $f(A)$ maka terdapat $x_0, x_1 \in A$ sedemikian sehingga $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$.

Karena A terhubung lintasan dan $x_0, x_1 \in A$ maka terdapat lintasan kontinu $p : [0,1] \rightarrow A$ dengan

$$p(0) = x_0, \text{ dan } p(1) = x_1$$

Didefinisikan $\gamma = (f \circ p)$ yaitu

$$\gamma(t) = f(p(t)), \quad \forall t \in [0,1]$$

maka diperoleh

$$\gamma(0) = f(p(0)) = f(x_0) = y_0$$

$$\gamma(1) = f(p(1)) = f(x_1) = y_1$$

Karena p kontinu dan f kontinu, maka komposisi $\gamma = f \circ p$ juga merupakan fungsi kontinu. Oleh karena itu γ adalah lintasan dari y_0 ke y_1 di dalam $f(A)$. Maka terbukti bahwa $f(A)$ adalah subruang yang terhubung lintasan.

Untuk membuktikan bahwa penggabungan dua lintasan yang berurutan juga merupakan lintasan (yang disebut sebagai hasil kali lintasan), diperlukan lemma berikut. Lemma ini menjelaskan kekontinuan fungsi yang didefinisikan secara terpisah pada dua himpunan tertutup.

Lemma 4.6 (Schlicker, 2023)

Misalkan A dan B adalah subset tertutup dari suatu ruang $X = A \cup B$, misalkan $f : A \rightarrow Y$ dan $g : B \rightarrow Y$ adalah fungsi-fungsi kontinu ke dalam ruang Y sedemikian sehingga $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (A \cap B)$. Maka fungsi $h : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan sebagai

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } x \in A \\ g(x), & \text{jika } x \in B \end{cases}$$

adalah fungsi yang kontinu

Bukti:

Misalkan A dan B adalah subset tertutup dari ruang $X = A \cup B$, dan misalkan $f : A \rightarrow Y$ dan $g : B \rightarrow Y$ adalah fungsi-fungsi kontinu sedemikian sehingga $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (A \cap B)$. Definisikan $h : X \rightarrow Y$ oleh

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jika } x \in A \\ g(x), & \text{jika } x \in B \end{cases}$$

Untuk menunjukkan bahwa h kontinu, misalkan C adalah subset tertutup dari Y .

Maka

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= \{x \in X \mid h(x) \in C\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in C\} \cup \{x \in B \mid g(x) \in C\} \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \end{aligned}$$

Karena f kontinu, maka $f^{-1}(C)$ tertutup dalam topologi subruang pada A . Karena g kontinu, maka $g^{-1}(C)$ tertutup dalam topologi subruang pada B . Oleh karena itu, terdapat himpunan-himpunan tertutup D dan E dalam X sedemikian sehingga

$$f^{-1}(C) = A \cap D \quad \text{dan} \quad g^{-1}(C) = B \cap E$$

Fakta bahwa A tertutup dalam X mengakibatkan $A \cap D$ tertutup dalam X . Demikian pula, fakta bahwa B tertutup dalam X mengakibatkan $B \cap E$ tertutup dalam X . Dengan demikian,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) = (A \cap D) \cup (B \cap E)$$

merupakan gabungan hingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam X , sehingga $h^{-1}(C)$ tertutup dalam X . Karena $h^{-1}(C)$ tertutup untuk setiap himpunan tertutup C dalam Y , maka terbukti bahwa h kontinu.

Contoh 4.7

Misalkan X dan Y adalah $\mathbb{R}$. $A = (-\infty, 1]$, dan $B = [1, \infty)$. Didefinisikan

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$$g: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x - 1$$

Tunjukkan bahwa $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jika } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

adalah fungsi yang kontinu.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.6 A dan B tertutup dalam X , di mana A dan B merupakan subset tertutup dari $\mathbb{R}$ dan $X = A \cup B = \mathbb{R}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $h(x)$ kontinu.

Ambil sebarang himpunan tertutup $C \subset \mathbb{R}$ di mana $h^{-1}(C)$ tertutup dalam $X = \mathbb{R}$.

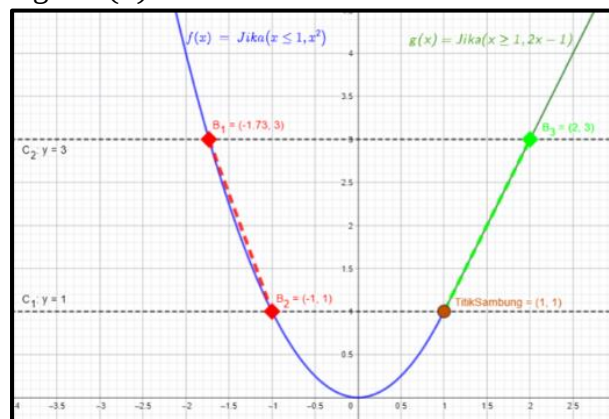
Pilih $C = [1,3]$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f^{-1}([1,3]) &= \{x \leq 1 \mid 1 \leq x^2 \leq 3\} \\ &= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1,1] \\ &= [-\sqrt{3}, -1] \cup \{1\} \\ g^{-1}([1,3]) &= \{x \geq 1 \mid 1 \leq 2x - 1 \leq 3\} \\ &= [1,2] \\ h^{-1}([1,3]) &= ([-\sqrt{3}, -1] \cup \{1\}) \cup [1,2] \\ &= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1,2] \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) = (A \cap D) \cup (B \cap E)$$

merupakan gabungan hingga dari himpunan-himpunan tertutup dalam X , sehingga $h^{-1}(C)$ tertutup dalam X . Karena $h^{-1}(C)$ tertutup untuk setiap himpunan tertutup C dalam Y , maka terbukti bahwa h kontinu. Berikut visualisasi dari fungsi kontinu pada fungsi gabungan $h(x)$.



Gambar 4.3 Fungsi kontinu pada fungsi gabungan $h(x)$

4.2 Hasil Kali Lintasan (*Product Path*), Ekuivalensi Keterhubungan

Lintasan dan Komponen Lintasan (*Path Component*)

Berdasarkan Lemma 4.6 yang telah dibuktikan sebelumnya, berikut didefinisikan hasil kali dua lintasan berurutan yang membentuk sebuah lintasan baru. Definisi ini menjadi landasan untuk membuktikan sifat transitif relasi keterhubungan lintasan, yang pada akhirnya menghasilkan struktur komponen lintasan.

Definisi 4.8 (Schlicker, 2023)

Misalkan p lintasan dari a ke b dan q lintasan dari b ke c di ruang X . Hasil kali lintasan (*Product path*) $q * p$ adalah fungsi $h: [0,1] \rightarrow X$ yang didefinisikan sebagai

$$(q * p)(t) = \begin{cases} p(2t), & \text{untuk } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ q(2t - 1), & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dari definisi komponen lintasan tersebut, dapat ditunjukkan bahwa relasi $\sim$ yang terbentuk merupakan suatu relasi ekuivalensi pada ruang topologi. Sebagaimana dinyatakan berikut.

Definisi 4.9 (Schlicker, 2023)

Diberikan ruang topologi (X, τ) , didefinisikan relasi $\sim$ pada X sebagai berikut.
 $a \sim b$ jika dan hanya jika terdapat sebuah lintasan di X dari a ke b .

Proposisi 4.10 (Schlicker, 2023)

Relasi $\sim$ yang didefinisikan pada Definisi 4.9 adalah suatu relasi ekuivalensi pada X , yaitu memenuhi tiga sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Bukti:

1. Relasi $\sim$ adalah relasi refleksif

Relasi $\sim$ dikatakan refleksif apabila untuk setiap $a \in X$, berlaku $a \sim a$.

Akan dibuktikan untuk setiap titik $a \in X$, terdapat lintasan dari a ke a .

Berdasarkan definisi lintasan, sebuah lintasan dari titik a ke titik b adalah fungsi kontinu

$$f: [0,1] \rightarrow X$$

dengan $f(0) = a$ dan $f(1) = b$. Selanjutnya didefinisikan fungsi $c_a : [0,1] \rightarrow X$ sebagai berikut:

$$c_a(s) = a \text{ untuk setiap } s \in [0,1].$$

Fungsi c_a adalah kontinu karena merupakan fungsi konstanta. Setiap fungsi konstanta dari ruang topologi satu ke ruang topologi lainnya selalu kontinu, karena untuk setiap himpunan terbuka $U \subseteq X$, prapetanya adalah

$$c_a^{-1}(U) = \begin{cases} [0,1], & \text{jika } a \in U \\ \emptyset, & \text{jika } a \notin U \end{cases}$$

$[0,1]$ maupun $\emptyset$, adalah himpunan terbuka dalam $[0,1]$, sehingga c_a terbukti kontinu. Selanjutnya mencari titik awal dan akhir.

$$c_a(0) = a \quad \text{dan} \quad c_a(1) = a$$

Terbukti c_a adalah lintasan dari a ke a . Karena untuk setiap titik $a \in X$, maka berlaku $a \sim a$ untuk setiap $a \in X$. Jadi relasi $\sim$ bersifat refleksif.

2. Relasi $\sim$ adalah relasi simetris

Relasi $\sim$ dikatakan simetris jika untuk setiap $a, b \in X$, ketika $a \sim b$ maka berlaku juga $b \sim a$. Akan dibuktikan jika terdapat lintasan dari a ke b , maka terdapat pula lintasan dari b ke a . Karena $a \sim b$, terdapat lintasan $p: [0,1] \rightarrow X$ yang kontinu dengan $p(0) = a$ dan $p(1) = b$. Didefinisikan fungsi

$$q(s) = p(1 - s), \quad s \in [0,1]$$

Fungsi q merupakan lintasan balik (*reverse path*) dari p , sedangkan fungsi

$q(s) = p(1 - s)$ adalah komposisi dari dua fungsi kontinu, sehingga q kontinu. Selanjutnya akan diperoleh titik awal dan akhir, perhatikan bahwa

$$q(0) = p(1 - 0) = p(1) = b$$

$$q(1) = p(1 - 1) = p(0) = a$$

Jadi q adalah lintasan dari b ke a yang berarti $b \sim a$. Jadi dapat disimpulkan bahwa relasi $\sim$ bersifat simetris. Berikut visualisasi relasi $\sim$ bersifat simetris.

3. Relasi $\sim$ adalah relasi transitif

Relasi $\sim$ dikatakan transitif jika untuk setiap $a, b, c \in X$ ketika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$. Akan dibuktikan jika terdapat lintasan dari a ke b dan lintasan dari b ke c , maka ada lintasan dari a ke c .

Karena $a \sim b$, terdapat lintasan $p: [0,1] \rightarrow X$ kontinu dengan $p(0) = a$ dan $p(1) = b$. Karena $b \sim c$, terdapat lintasan $q: [0,1] \rightarrow X$ kontinu dengan $q(0) = b$ dan $q(1) = c$. Didefinisikan hasil kali lintasan $q * p: [0,1] \rightarrow X$ sebagai berikut

$$(q * p)(s) = \begin{cases} p(2s), & \text{untuk } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ q(2s - 1), & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Untuk menunjukkan hasil kali lintasan tersebut terdefinisi, maka dipilih $s = \frac{1}{2}$, perhatikan bahwa

$$p\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = p(1) = b$$

$$q\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) = q(0) = b$$

Keduanya menghasilkan nilai b , sehingga hasil kali lintasan $q * p$ terdefinisi. Selanjutnya akan ditunjukkan $q * p$ kontinu. Didefinisikan dua

himpunan tertutup

$$A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{dan} \quad B = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Pada A , fungsi $p(2s)$ kontinu (komposisi fungsi linear dan p yang keduanya kontinu). Pada B , fungsi $q(2s - 1)$ kontinu (komposisi fungsi linear dan q yang keduanya kontinu). Di titik $s = \frac{1}{2}$, kedua fungsi bernilai b . Berdasarkan Lemma 4.6 hasil kali lintasan $q * p$ adalah kontinu pada seluruh $[0,1]$. Selanjutnya diperoleh titik awal dan akhir, perhatikan bahwa

$$(q * p)(0) = p(2 \times 0) = p(0) = a$$

$$(q * p)(1) = q(2 \times 1 - 1) = q(1) = c$$

Jadi $q * p$ adalah lintasan dari a ke c yang berarti $a \sim c$. Maka dari itu relasi $\sim$ bersifat transitif. Berikut visualisasi relasi $\sim$ bersifat transitif.

Karena relasi $\sim$ pada ruang topologi (X, τ) terbukti bersifat refleksif, simetris, dan transitif, maka $\sim$ adalah suatu relasi ekuivalensi pada X . Relasi ekuivalensi ini mempartisi X menjadi kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas. Kelas ekuivalensi dari suatu elemen $a \in X$, yaitu

$$[a] = \{x \in X | x \sim a\}$$

disebut sebagai komponen lintasan (*path component*) dari X , dan merupakan subset terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a . Akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.11 (Schlicker, 2023)

Komponen lintasan (*path component*) dari suatu elemen a dalam ruang topologi (X, τ) adalah subset terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a .

Dapat disimpulkan bahwa, komponen lintasan $[a]$ adalah himpunan semua titik di X yang dapat dihubungkan ke a melalui suatu lintasan, yaitu

$$[a] = \{x \in X | x \sim a\} = \{x \in X | \text{terdapat lintasan di } X \text{ dari } x \text{ ke } a\}$$

Berdasarkan Proposisi 4.10, relasi $\sim$ yang adalah relasi ekuivalensi. Karena $\sim$ adalah relasi ekuivalensi, maka $\sim$ mempartisi X menjadi kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas (tidak beririsan) dan mencakup seluruh X . Setiap kelas ekuivalensi inilah yang disebut sebagai komponen lintasan dari X . Didefinisikan sebagai

$$X = \cup \{[a] | a \in X\}$$

dengan $[a] \cap [b] = \emptyset$ atau $[a] = [b]$ untuk setiap $a, b \in X$.

Contoh 4.12

Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$. Tentukan komponen lintasan dari setiap elemen di X .

Bukti:

Diketahui himpunan terbuka dalam (X, τ) adalah $\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}$, dan X . Perhatikan bahwa $\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$ adalah dua himpunan terbuka yang saling lepas dan gabungannya adalah X . Sehingga X tidak terhubung (*disconnected*).

1. Menunjukkan $1 \sim 2$.

Akan ditunjukkan bahwa terdapat lintasan dari 1 ke 2. Misalkan $p: [0,1] \rightarrow X$ adalah lintasan dengan $p(0) = 1$. Karena $\{1,2\}$ bersifat buka tutup di X dan p kontinu, maka prapeta

$$p^{-1}(\{1,2\})$$

bersifat buka tutup di $[0,1]$. Karena $p(0) = 1 \in \{1,2\}$, maka $0 \in p^{-1}(\{1,2\})$, sehingga $p^{-1}(\{1,2\}) \neq \emptyset$. Karena $[0,1]$ terhubung, satu-satunya himpunan buka tutup tak kosong di $[0,1]$ adalah $[0,1]$ itu sendiri.

Maka

$$p^{-1}(\{1,2\}) = [0,1]$$

yang berarti,

$$p([0,1]) \subseteq \{1,2\}$$

Khususnya $p(1) \in \{1,2\}$. Karena $p(1) = 2 \in \{1,2\}$, lintasan dari 1 ke 2 ada. Jadi $1 \sim 2$.

2. Menunjukkan $1 \not\sim 3$.

Selanjutnya akan diperiksa lintasan antara titik dalam $\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$.

Misalkan ada lintasan $p: [0,1] \rightarrow X$ dari 1 ke 3, yaitu $p(0) = 1$ dan $p(1) =$

3. Karena p kontinu dan $\{1,2\}$ bersifat buka tutup di X , maka

$$p^{-1}(\{1,2\})$$

bersifat buka tutup di $[0,1]$. Karena $p(0) = 1 \in \{1,2\}$, maka $0 \in p^{-1}(\{1,2\})$, sehingga

$$p^{-1}(\{1,2\}) \neq \emptyset$$

Karena $[0,1]$ terhubung, satu-satunya himpunan buka tutup tak kosong di $[0,1]$ adalah $[0,1]$ itu sendiri. Maka

$$p^{-1}(\{1,2\}) = [0,1]$$

artinya $p(1) \in \{1,2\}$. Namun pernyataan ini bertentangan dengan $p(1) =$

$3 \in \{3,4\}$. Sedangkan $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$. Jadi tidak ada lintasan dari 1 ke 3.

Dengan pernyataan yang sama, tidak ada juga lintasan dari 1 ke 4, dari 2 ke 3, maupun dari 2 ke 4.

Berdasarkan 1. dan 2., serta sifat reflektif, diperoleh seluruh relasi pada X sebagai berikut

$$1 \sim 1, 1 \sim 2, 2 \sim 1, 2 \sim 2, 3 \sim 3, 3 \sim 4, 4 \sim 3, 4 \sim 4$$

$$1 \not\sim 3, 1 \not\sim 4, 2 \not\sim 3, 2 \not\sim 4, 3 \not\sim 1, 3 \not\sim 2, 4 \not\sim 1, 4 \not\sim 2$$

Sehingga komponen lintasan dari setiap elemen adalah

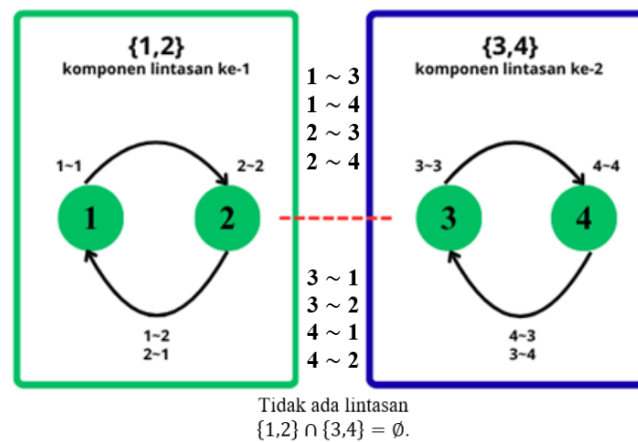
$$[1] = [2] = \{1, 2\}$$

$$[3] = [4] = \{3, 4\}$$

X memiliki tepat dua komponen lintasan yaitu $\{1,2\}$ dan $\{3,4\}$. Perhatikan bahwa

$$X = \{1,2\} \cup \{3,4\} \text{ dan } \{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset.$$

Sehingga kedua komponen lintasan tersebut saling lepas dan mencakup seluruh X . Untuk mendukung pemahaman terkait contoh ini, berikut ilustrasi komponen lintasan dalam bentuk diagram.



Gambar 4.4 Komponen lintasan dalam bentuk diagram

Komponen lintasan merupakan susunan dari suatu ruang topologi dilihat dari sifat keterhubungan lintasan. Dengan menggunakan konsep ini, berikut dibuktikan bahwa setiap ruang terhubung lintasan pasti terhubung.

Teorema 4.13 (Schlicker, 2023)

Jika ruang topologi X adalah terhubung lintasan, maka X terhubung.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan cara kontradiksi. Andaikan X terhubung lintasan tetapi tidak terhubung. Karena X tidak terhubung, terdapat himpunan terbuka $U, V \subseteq X$ sedemikian sehingga

$$U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, \text{ dan } U \cup V = X.$$

Pilih $a \in U$ dan $b \in V$. Karena X terhubung lintasan, terdapat lintasan $p: [0,1] \rightarrow X$ kontinu dengan $p(0) = a$ dan $p(1) = b$. Didefinisikan $U' = p^{-1}(U)$ dan $V' = p^{-1}(V)$ di $[0,1]$. Karena p kontinu dan U, V terbuka di X , maka $U' = p^{-1}(U)$, dan $V' = p^{-1}(V)$ terbuka di $[0,1]$. Selanjutnya akan diperiksa sifat-sifat U' dan V'

$$p(0) = a \in U \Rightarrow 0 \in U' \Rightarrow U' \neq \emptyset$$

$$p(1) = b \in V \Rightarrow 1 \in V' \Rightarrow V' \neq \emptyset$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} U' \cap V' &= p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \\ &= p^{-1}(U \cap V) \\ &= p^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U' \cup V' &= p^{-1}(U) \cup p^{-1}(V) \\ &= p^{-1}(U \cup V) \\ &= p^{-1}(X) \\ &= [0,1] \end{aligned}$$

Karena $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U' \cap V' = \emptyset$, dan $U' \cup V' = [0,1]$, serta U' dan V' terbuka, maka U' dan V' merupakan pemisahan dari $[0,1]$. Namun $[0,1]$ terhubung, sehingga tidak memiliki pemisahan. Oleh karena itu pengandaian bahwa X tidak terhubung adalah salah. Jadi, terbukti jika X terhubung lintasan, maka X terhubung.

4.3 Keterhubungan Lintasan Secara Lokal (*Locally Path Connected*)

Untuk melengkapi teori pada ruang topologi di himpunan berhingga, akan dibahas terlebih dahulu mengenai konsep persekitaran minimal sebagai dasar dalam mendefinisikan sifat lokal dari keterhubungan lintasan.

Definisi 4.14 (Schlicker, 2023)

Untuk $x \in X$, persekitaran minimal U_x dari x adalah irisan dari semua himpunan terbuka yang memuat x , yaitu

$$U_x = \cap \{U \in \tau | x \in U\}$$

Contoh 4.15

Misalkan $X = \{1,2,3\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Tentukan persekitaran minimal setiap titik di X .

Bukti:

Diketahui (X, τ) dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Akan ditunjukkan himpunan-himpunan terbuka sebagai berikut.

1. Himpunan terbuka yang memuat 1 adalah $\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}$
2. Himpunan terbuka yang memuat 2 adalah $\{1,2\}, \{1,2,3\}$
3. Himpunan terbuka yang memuat 3 adalah $\{1,2,3\}$

Selanjutnya akan ditunjukkan irisan dari masing-masing U_1, U_2 , dan U_3 (persekitaran minimal)

$$U_1 = \{1\} \cap \{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1\}$$

$$U_2 = \{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}$$

$$U_3 = \{1,2,3\} = X$$

Karena dalam ruang topologi di himpunan berhingga, irisan sebarang banyak himpunan terbuka merupakan himpunan terbuka, maka persekitaran minimal berikut adalah himpunan terbuka di X , sedemikian sehingga

$$U_1 = \{1\}, U_2 = \{1,2\}, U_3 = X$$

U_1, U_2, U_3 adalah himpunan terbuka terkecil yang memuat titik tersebut. Jadi, $\{1\}, \{1,2\}$, dan X adalah persekitaran minimal dari titik 1, 2, dan 3 di X .

Berdasarkan persekitaran minimal tersebut, selanjutnya dapat didefinisikan sifat keterhubungan lintasan secara lokal di setiap titik ruang topologi.

Definisi 4.16 (Schlicker, 2023)

Sebuah ruang topologi (X, τ) dikatakan terhubung lintasan secara lokal di x jika setiap persekitaran dari x mengandung persekitaran terbuka yang terhubung lintasan dengan x sebagai elemennya. Ruang (X, τ) dikatakan terhubung lintasan secara lokal jika X terhubung lintasan secara lokal di setiap titik.

Contoh 4.17

Misalkan $X = \{1,2,3\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Tunjukkan bahwa (X, τ) terhubung lintasan secara lokal.

Bukti:

Diketahui (X, τ) dengan $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Akan dibuktikan (X, τ) terhubung lintasan secara lokal. Berdasarkan definisi ruang topologi (X, τ) dikatakan terhubung lintasan secara lokal di x jika setiap persekitaran dari x mengandung persekitaran terbuka yang terhubung lintasan dengan x sebagai elemennya. Selanjutnya akan di periksa untuk masing-masing himpunan. Perhatikan bahwa

1. Untuk $U_1 = \{1\}$

Himpunan $\{1\}$ terbuka dan terhubung lintasan. Setiap persekitaran dari 1 memuat $\{1\}$.

Untuk $U_2 = \{1,2\}$

Akan ditunjukkan $\{1,2\}$ terhubung lintasan. Didefinisikan

$$p(s) = \begin{cases} 1, & \text{jika } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2, & \text{jika } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Sedemikian sehingga prapeta

$$\text{untuk } p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\text{untuk } p^{-1}(\{1\}) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{untuk } p^{-1}(\{1,2\}) = [0,1]$$

Jadi p kontinu dan $\{1,2\}$ terhubung lintasan.

2. Untuk $U_3 = X$

Setiap persekitaran dari titik 3 memuat $X = \{1,2,3\}$ yang sudah terbukti terhubung lintasan. Karena setiap titik di X memiliki persekitaran terbuka yang terhubung lintasan, maka (X, τ) terhubung lintasan secara lokal.

Keterhubungan lintasan secara lokal memiliki karakterisasi melalui komponen lintasan dari himpunan terbuka, sebagaimana dinyatakan oleh lemma berikut.

Lemma 4.18 (Schlicker, 2023)

Sebuah ruang X terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka O dari X , setiap komponen lintasan dari O adalah himpunan terbuka di X .

Bukti:

$\Rightarrow$ Andaikan X terhubung lintasan secara lokal.

Misalkan O himpunan terbuka di X dan C komponen lintasan dari O . Ambil sembarang $x \in C$. Karena $C \subseteq O$ dan $x \in C$, maka $x \in O$. Karena O terbuka, maka O adalah suatu persekitaran dari x .

Karena X terhubung lintasan secara lokal, terdapat himpunan terbuka V sedemikian sehingga $x \in V \subseteq O$ dan V terhubung lintasan. Karena $x \in V$ dan $x \in C$, maka $x \in V \cap C$, sehingga $V \cap C \neq \emptyset$. Karena V terhubung

lintasan dan $V \cap C \neq \emptyset$, serta C adalah komponen lintasan terbesar yang memuat x di O , maka $V \subseteq C$.

Sedemikian sehingga, untuk setiap $x \in C$ terdapat himpunan terbuka V dengan $x \in V \subseteq C$. Karena C memuat persekitaran terbuka di setiap titiknya, maka C terbuka di X .

$\Leftarrow$ Andaikan setiap komponen lintasan dari himpunan terbuka $O \subseteq X$ adalah terbuka di X .

Ambil sembarang $x \in X$ dan sembarang persekitaran N dari x . Karena N adalah persekitaran dari x , terdapat himpunan terbuka O sedemikian sehingga $x \in O \subseteq N$. Misalkan C komponen lintasan dari O yang memuat x . Berdasarkan hipotesis, C terbuka di X .

Karena $C \subseteq O \subseteq N$ dan C terhubung lintasan dan memuat x , maka N memuat persekitaran terbuka C yang terhubung lintasan dan memuat x . Karena x dan N dipilih sembarang, maka X terhubung lintasan secara lokal.

Dari ke dua pembuktian tersebut terbukti bahwa sebuah ruang X terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika untuk setiap himpunan terbuka O dari X , setiap komponen lintasan dari O adalah himpunan terbuka di X .

4.4 Keekuivalenan Keterhubungan dan Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi di Himpunan Berhingga

Semua hasil yang telah dibuktikan di atas, dari Teorema 4.5, Teorema 4.13, dan Lemma 4.18 kini digunakan bersama untuk membuktikan teorema utama penelitian ini. Teorema ini menyatakan bahwa pada ruang topologi di himpunan berhingga, keterhubungan dan keterhubungan lintasan adalah dua sifat yang ekuivalen.

Teorema 4.19 (Schlicker, 2023)

Misalkan X ruang topologi di himpunan berhingga (*finite*). Maka X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan

Bukti:

$\Rightarrow$ Jika X terhubung lintasan, maka X terhubung

Berdasarkan teorema 4.13 sudah terbukti bahwa jika X terhubung lintasan, maka X terhubung.

$\Leftarrow$ Jika X terhubung, maka X terhubung lintasan

Misalkan X ruang topologi hingga yang terhubung, dan a sebarang titik di X . Karena X berhingga, berdasarkan Definisi 4.14 untuk setiap $x \in X$ terdapat persekitaran minimal

$$U_x = \cap \{U \in \tau \mid x \in U\}$$

Selanjutnya didefinisikan himpunan komponen lintasan dari titik a sebagai

$$C(a) = \{x \in X \mid \text{terdapat lintasan di } X \text{ dari } a \text{ ke } x\}$$

Berdasarkan proposisi 4.10, $C(a)$ adalah komponen lintasan dari a di X . Kemudian akan di buktikan **$C(a)$ himpunan terbuka** di X . Ambil sebarang titik $y \in U_x$, Karena U_x himpunan terbuka yang memuat x dan y , dapat didefinisikan lintasan

$$q: [0,1] \rightarrow U_x, q(t) = \begin{cases} x, & \text{untuk } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ y, & \text{untuk } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Fungsi q kontinu karena untuk setiap himpunan terbuka $V \in \tau$, prapetanya $q^{-1}(V)$ merupakan himpunan terbuka di $[0,1]$. Perhatikan bahwa

$$q(0) = x \text{ dan } q(1) = y$$

Dengan menggunakan hasil kali lintasan $q * p$ sebagaimana dibahas pada

Definisi 4.8, diperoleh lintasan dari a ke y di X , sehingga $y \in C(a)$. Karena y dipilih sembarang di U_x , maka terbukti bahwa $U_x \subseteq C(a)$. Oleh karena itu untuk setiap $x \in C(a)$ terdapat himpunan terbuka $U_x \subseteq C(a)$, sehingga $C(a)$ adalah himpunan terbuka di X .

Selanjutnya akan dibuktikan **$C(a)$ himpunan tertutup** di X dengan menunjukkan $X \setminus C(a)$ himpunan terbuka. Misalkan $z \in X \setminus C(a)$ artinya tidak ada lintasan dari a ke z . Akan ditunjukkan bahwa $U_z \subseteq C(a)$.

Andaikan sebaliknya terdapat $w \in U_z \cap C(a)$. Karena $w \in U_z$ berarti ada lintasan dari a ke w . Karena $w \in U_z$ dan $z \in U_z$, dapat didefinisikan sebuah lintasan

$$r: [0,1] \rightarrow U_z \text{ dari } w \text{ ke } z$$

Dengan menggunakan hasil kali lintasan $r * p$, diperoleh lintasan dari a ke z , sehingga $z \in C(a)$. Karena kontradiksi menunjukkan bahwa $U_z \cap C(a) = \emptyset$, sehingga $U_z \subseteq X \setminus C(a)$. Karena untuk setiap $z \in X \setminus C(a)$ terdapat himpunan terbuka $U_z \subseteq X \setminus C(a)$, maka terbukti bahwa $X \setminus C(a)$ himpunan terbuka, sehingga $C(a)$ adalah himpunan tertutup di X . Karena $C(a)$ terbukti merupakan himpunan terbuka dan tertutup maka $C(a)$ adalah himpunan buka tutup.

Selanjutnya berdasarkan Proposisi 4.10, karena $a \in C(a)$ maka $C(a) \neq \emptyset$

$$\text{maka berlaku } C(a) = X$$

Sedemikian sehingga setiap titik $b \in X$ terdapat lintasan ke a . Dengan demikian X terhubung lintasan. Maka terbukti, jika X terhubung, maka X terhubung lintasan

Dari ke dua pembuktian tersebut, terbukti bahwa X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan.

4.5 Integrasi Topik dengan AL-Quran dan Hadist

Dalam pandangan Islam, setiap ilmu pengetahuan merupakan bagian dari upaya manusia untuk mengenal dan memahami ciptaan Allah SWT. Al-Qur'an dan hadits memuat banyak isyarat tentang pentingnya berpikir kritis, memperhatikan peraturan alam semesta, serta mendalami ilmu pengetahuan. Penelitian ini memiliki keterkaitan dengan nilai-nilai yang terkandung dalam Al-Qur'an dan hadits, khususnya yang berkaitan dengan konsep keterhubungan.

Keterhubungan antar titik dalam ruang topologi ini memiliki kaitan dalam ajaran Rasulullah SAW tentang hakikat ikatan antara sesama manusia. Beliau bersabda

الْمُسْلِمُ أَخُو الْمُسْلِمِ لَا يَظْلِمُهُ وَلَا يُسْلِمُهُ، وَمَنْ كَانَ فِي حَاجَةِ أَخِيهِ كَانَ اللَّهُ فِي حَاجَتِهِ

Artinya: "Seorang Muslim adalah saudara bagi Muslim yang lain; ia tidak menzaliminya dan tidak membiarkannya (dalam kesulitan). Barangsiapa memenuhi kebutuhan saudaranya, maka Allah akan memenuhi kebutuhannya." (H.R. Bukhari no. 2442 dan Muslim no. 2580)

Hadits ini menggambarkan bahwa dalam kaum muslim, tidak ada satu pun anggota yang terputus dari yang lain setiap individu selalu dapat dijangkau oleh saudaranya. Syarat ini berkorespondensi langsung dengan sifat keterhubungan lintasan yaitu dalam ruang yang terhubung lintasan, untuk setiap dua titik $a, b \in X$ selalu terdapat lintasan kontinu p sedemikian sehingga $p(0) = a$ dan $p(1) = b$. Tidak ada satu titik pun yang terisolasi tanpa lintasan penghubung menuju titik manapun dalam ruang tersebut.

Keistimewaan utama yang dibuktikan dalam penelitian ini adalah bahwa ruang topologi di himpunan berhingga memiliki sifat yang tidak dimiliki ruang topologi umum, yaitu keekuivalenan antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan. Sifat istimewa ini tercermin dalam firman Allah dalam Q.S. Al-Mulk ayat

3.

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ﴿٢٠﴾

Artinya: "Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat?" (Kementerian Agama, 2019)

Ayat ini menjelaskan bahwa ciptaan Allah tidak mengandung cacat maupun ketidakseimbangan. Dalam penelitian ini, pembuktian menunjukkan bahwa komponen lintasan $C(a)$ dari setiap titik $a \in X$ merupakan himpunan buka tutup, sehingga karena X terhubung dan $C(a) \neq \emptyset$, diperoleh $C(a) = X$. Artinya tidak ada retakan atau celah tersembunyi dalam ruang berhingga yang terhubung, setiap titik pasti dapat dicapai dari titik manapun melalui lintasan kontinu. Struktur matematis ini menjadi cerminan bahwa keteraturan yang sempurna adalah tanda kebesaran Allah SWT.

Keekuivalenan antara dua sifat yang secara definisi berbeda antara keterhubungan dan keterhubungan lintasan, namun ternyata saling menyiratkan satu sama lain dalam ruang berhingga, mengingatkan pada hadits Rasulullah SAW tentang dua hal yang pada hakikatnya tidak terpisahkan:

تَرَكْتُ فِيكُمْ أَمْرَيْنِ لَنْ تَضِلُّوا مَا تَمَسَّكْتُمَا بِمَا كَتَبَ اللَّهُ وَسُنَّةَ نَبِيِّهِ

Artinya: "Aku tinggalkan kepada kalian dua perkara; kalian tidak akan tersesat selama berpegang teguh pada keduanya, yaitu Kitab Allah (Al-Qur'an) dan Sunnah Nabi-Nya." (H.R. Malik dalam Al-Muwaththa' no. 1661)

Dalam hadits ini, Al-Qur'an dan Sunnah adalah dua sumber yang berbeda, namun keduanya saling melengkapi dan menyempurnakan satu sama lain dan tidak dapat dipisahkan. Pernyataan ini berhubungan dengan hasil penelitian yaitu keterhubungan dan keterhubungan lintasan adalah dua konsep dengan definisi yang berbeda, namun dalam konteks ruang topologi di himpunan berhingga keduanya

ternyata ekuivalen. Peneliti yang mengkaji salah satu sifat secara tidak langsung telah memperoleh sifat yang lain, sebagaimana memahami Al-Qur'an tidak dapat dipisahkan dari pemahaman terhadap Sunnah.

Dengan demikian, penelitian ini tidak semata-mata merupakan kajian matematika murni, melainkan juga merupakan upaya mempelajari dan mendalami mengenai keteraturan dan kesempurnaan ciptaan Allah melalui ilmu pengetahuan, sebagaimana yang dikehendaki oleh Al-Qur'an dan hadits Rasulullah SAW

BAB V

PENUTUP

1.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan yang disusun secara bertahap sebagai berikut.

1. Konsep dasar lintasan dan keterhubungan lintasan, yaitu fungsi kontinu $p : [0,1] \rightarrow X$ dengan $p(0) = a$ dan $p(1) = b$ yang menghubungkan dua titik dalam ruang topologi X , serta subruang $A \subseteq X$ yang dikatakan terhubung lintasan apabila setiap pasang titik di A dapat dihubungkan oleh suatu lintasan (Definisi 4.1 dan Definisi 4.3). Berdasarkan konsep ini, dibuktikan bahwa sifat keterhubungan lintasan dipertahankan oleh fungsi kontinu (Teorema 4.5), dan bahwa fungsi yang didefinisikan secara terpisah pada dua himpunan tertutup tetap kontinu apabila kedua definisi tersebut bersesuaian pada irisannya (Lemma 4.6).
2. Hasil kali lintasan $q * p$ yang membentuk lintasan baru dari a ke c (Definisi 4.8), dibuktikan bahwa relasi keterhubungan lintasan $\sim$ pada X merupakan relasi ekuivalensi yang memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif (Proposisi 4.10). Relasi ekuivalensi ini mempartisi X menjadi komponen-komponen lintasan, yaitu kelas ekuivalensi $[a]$ yang merupakan subset terhubung lintasan terbesar dari X yang memuat a (Definisi 4.11). Berdasarkan struktur ini, dibuktikan bahwa setiap ruang yang terhubung lintasan pasti terhubung (Teorema 4.13), meskipun implikasi sebaliknya tidak berlaku pada ruang topologi secara umum.
3. Konsep keterhubungan lintasan secara lokal melalui persekitaran minimal U_x

dari suatu titik (Definisi 4.14 dan Definisi 4.16), dengan karakterisasi bahwa suatu ruang terhubung lintasan secara lokal jika dan hanya jika setiap komponen lintasan dari setiap himpunan terbuka di X merupakan himpunan terbuka (Lemma 4.18).

4. Keseluruhan hasil nomor 1,2, dan 3 kemudian digunakan untuk membuktikan teorema utama penelitian ini (Teorema 4.19), yaitu bahwa pada ruang topologi di himpunan berhingga, X terhubung jika dan hanya jika X terhubung lintasan. Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan bahwa komponen lintasan $C(a)$ dari setiap titik $a \in X$ merupakan himpunan buka tutup, dengan menggunakan persekitaran minimal U_x untuk menunjukkan keterbukaan dan ketertutupan $C(a)$. Karena X terhubung dan $C(a) \neq \emptyset$, diperoleh $C(a) = X$, yang berarti setiap titik di X dapat dihubungkan ke titik a melalui suatu lintasan, sehingga X terhubung lintasan.

Dengan demikian, penelitian ini telah menjawab rumusan masalah bahwa keterhubungan dan keterhubungan lintasan, yang secara umum tidak bersifat ekuivalen, terbukti ekuivalen secara khusus pada ruang topologi di himpunan berhingga. Keekuivalenan ini merupakan kekhasan ruang topologi di himpunan berhingga yang tidak berlaku pada ruang topologi umum, sebagaimana telah dibatasi dalam ruang lingkup penelitian ini.

1.2 Saran

Penelitian ini telah membuktikan keekuivalenan keterhubungan dan keterhubungan lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga. Bagi peneliti selanjutnya yang ingin mengembangkan penelitian ini, disarankan untuk melakukan penelitian mengenai sifat homotopi lintasan dan struktur grup

fundamental $\pi_1(X, x_0)$ pada ruang topologi di himpunan berhingga, meneliti kesetaraan serupa pada ruang yang lebih khusus seperti ruang T_0 berhingga atau ruang *Alexandrov*, serta mengkaji karakterisasi komponen lintasan pada ruang topologi di himpunan berhingga yang tidak terhubung, termasuk menentukan syarat perlu dan cukup agar banyaknya komponen lintasan sama dengan banyaknya komponen terhubung dari ruang tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Bukhari, M. I. (2002). *Shahih al-Bukhari* (M. Z. Nashir, Ed.). Dar Ibn Kathir.
- Axler, S. (2025). *Measure, Integration & Real Analysis*.
- Barmak, J. A. (2011). *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. London: Springer Heidelberg Dordrecht .
- Maharani, D. (2025). *Penjelajahan ruang dalam analisis fungsional*.
- Ibn Anas, M. (1985). *Al-Muwaththa'* (M. F. Abdul Baqi, Ed.). Dar Ihya' al-Turats al-'Arabi.
- Ismail, N. S. dan Maharani, D. Himpunan Buka Infra, Interior Infra, dan Himpunan i-Genuine. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*.
- Julaieha, S. (2015). *Pengantar Topologi*. Bandung: Matematika sains UIN SGD.
- Kartono, F. N. (1995). *Pengantar Topologi*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Kementrian. A. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.
- Munkres, J. R. (2014). *Topology 2nd*. Harlow, England: Pearson Education Limited.
- Muslim, A. a.-H.-H.-H. (n.d.). *Shahih Muslim* (atau *Al-Jami' al-Sahih*). Beirut: Dar Ihyat al-Turats al-Arabi.
- Muslim ibn al-Hajjaj. (1972). *Shahih Muslim* (M. F. Abdul Baqi, Ed.). Dar Ihya' al-Turats al-'Arabi.
- Nurwiyati, K. (1995). *Pengantar Topologi - Google Books*. Andi Offset.
https://www.google.co.id/books/edition/Pengantar_Topologi/3FaugQOsWm0C?hl=id&gbpv=1
- Robert G. Bartle, D. R. (2011). *Introduction To Real Analysis (4th ed.)*. Hoboken: NJ: John Wiley & Sons.
- Schlicker, S. (2023). *Topology: An Inquiry-Based Approach*. Allendale, Michigan: Grand Valley State University Libraries.
- Sharp, H. (1968). Cardinality of finite topologies. *Journal of Combinatorial Theory*, 82-86.
- Sherbert, R. G. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Stewart, J. (2012). *Calculus Early Transcendentals*. New York: Brooks/Cole

Cengage Learning.

Sukriyah, D. (2020). *Matriks Keterhubungan Langsung Topologi Hingga*. Sidoarjo: Jedma Jurnal Edukasi Matematika.

RIWAYAT HIDUP



Risma Siti Nurchasanah, lahir di Malang pada tanggal 07 April 2003. Putri pertama dari dua bersaudara dari Ayah Supardi dan Ibu Siti Rohimah. Sedari kecil ia dibesarkan di Desa Poncokusumo RT 01 RW 07, Kecamatan Poncokusumo, Kabupaten Malang. Selama berkuliah di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, Risma aktif berkegiatan di luar kampus, yaitu sebagai Pengurus PAC IPNU IPPNU

Poncokusumo dan anggota POKDARWIS Desa Poncokusumo.

Adapun pendidikan formal yang ditempuh Risma mulai dari sekolah dasar di MI Sunan Muria Poncokusumo. Kemudian melanjutkan pendidikan di MTs AL-ITTIHAD Belung Poncokusumo. Setelah menyelesaikan pendidikan di tingkat MTs, Risma melanjutkan pendidikan di MA AL-ITTIHAD Belung Poncokusumo. Selama menempuh pendidikan, Risma aktif mengikuti berbagai kegiatan organisasi dan kemasyarakatan. Selama menempuh pendidikan di MA AL-ITTIHAD Belung Poncokusumo, Risma dikenal sebagai salah satu siswa yang berprestasi di bidang akademik, khususnya dalam bidang sains. Kemampuan tersebut mendorongnya untuk melanjutkan studi di Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Risma Siti Nurchasanah
NIM : 210601110005
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Keterhubungan Lintasan pada Ruang Topologi di
Himpunan Berhingga
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	08 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	10 Januari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	04 Maret 2025	Konsultasi Bab IV dan V	3.
4.	19 Mei 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	19 Mei 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	19 Mei 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	28 Agustus 2025	ACC Bab I, II, dan III	7.
8.	29 Agustus 2025	ACC Seminar Proposal	8.
9.	01 September 2025	Seminar Proposal	9.
10.	25 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	27 November 2025	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	28 November 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	25 Februari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	27 April 2026	ACC Bab IV dan V	14.
15.	12 Mei 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	12 Mei 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	16.
17.	18 Mei 2026	ACC Seminar Hasil	17.
18.	22 Mei 2026	Seminar Hasil	18.
19.	02 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	07 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	07 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	08 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Kajian Agama Bab IV	22.
23.	08 Juni 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	23.
24.	08 Juni 2026	ACC Naskah Skripsi	24.
25.	17 Juni 2026	ACC Keseluruhan	25.

Malang, 17 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012