

SIFAT-SIFAT RUANG $\mathcal{F}$ -METRIK

SKRIPSI

**OLEH
DEWI SAFINATUS SOLEHA
NIM. 220601110104**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT-SIFAT RUANG $\mathcal{F}$ -METRIK

SKRIPSI

**Diberikan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Dewi Sabinatus Soleha
NIM. 220601110104**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT-SIFAT RUANG $\mathcal{F}$ -METRIK

SKRIPSI

Oleh
Dewi Safinatus Soleha
NIM. 220601110104

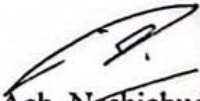
Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 26 Mei 2026

Dosen Pembimbing I


Dr. Hairun Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Dosen Pembimbing II


Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachru Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

SIFAT-SIFAT RUANG $\mathcal{F}$ -METRIK

SKRIPSI

Oleh
Dewi Safinatus Soleha
NIM. 220601110104

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dewi Safinatus Soleha
NIM : 220601110104
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini merupakan hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Dewi Safinatus Soleha
NIM.220601110104

MOTO

"Keberhasilan tidak datang tanpa usaha. Setiap proses, perjuangan, dan kerja keras yang dilakukan dalam menyelesaikan skripsi ini merupakan bentuk ikhtiar yang Insya Allah bernilai di sisi Allah SWT."

"Seberapa banyak cobaan yang datang, tetaplah berikhtiar dan jangan berputus asa. Percayalah, Allah senantiasa menemani setiap langkah perjuanganmu dan menghadirkan kemudahan bagi hamba yang bersabar dan terus berjuang dalam menghadapi kesulitan."

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji bagi Allah Swt. dengan penuh rasa syukur kepada atas segala rahmat, pertolongan, dan kemudahan yang telah diberikan, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Tercinta, yang selalu bekerja keras, setiap tetes keringat yang dikorbankan, serta cinta dan kasih sayang yang tak pernah putus. Tidak ada kata yang mampu menggambarkan betapa besar jasa dan pengorbananmu. Terima kasih telah menjadi sosok bapak yang selalu terlihat kuat didepan anak-anaknya dan selalu berusaha memberikan yang terbaik demi masa depanku.

Semoga karya sederhana ini menjadi salah satu bentuk bakti dan kebanggaanku untukmu.

Mamak tercinta, sosok ibu sekaligus tempat cerita saya, yang selalu mendoakan, mendengarkan keluh kesah, memberi nasihat, serta cinta dan kasih sayang yang tak pernah putus. Terima kasih telah menjadi sumber kekuatan dan semangat dalam setiap langkah perjuanganku.

Terima kasih atas segala perjuangan kalian, kesabaran, dan kepercayaan yang telah diberikan sehingga saya dapat menyelesaikan pendidikan dan skripsi ini. Kakak dan adikku tercinta, Kehadiran kalian menjadi salah satu alasan bagiku untuk terus berjuang dan menyelesaikan pendidikan ini.

Untuk diriku sendiri, Dewi Safinatus Soleha, yang selalu bertahan dan berjuang serta tetap kuat menghadapi berbagai cobaan, tantangan, dan kesulitan yang datang selama perjalanan menyelesaikan pendidikan ini. Terima kasih karena terus berusaha, belajar, dan bangkit setiap kali keadaan tidak berjalan sesuai harapan. Skripsi ini menjadi saksi dari setiap doa yang dipanjatkan, setiap air mata yang jatuh, setiap rasa lelah yang dirasakan, serta setiap usaha yang tidak pernah berhenti dilakukan. Semoga semua perjuangan yang telah dilalui menjadi langkah awal untuk meraih cita-cita, membahagiakan kedua orang tua, dan memberikan manfaat bagi banyak orang. Terima kasih karena tidak pernah berhenti percaya bahwa setiap kesulitan akan selalu disertai kemudahan atas izin Allah SWT.

Semoga Allah SWT. senantiasa melimpahkan rahmat, kesehatan, dan kebahagiaan kepada kalian semua. Karya sederhana ini kupersembahkan sebagai wujud rasa terima kasih dan bakti atas segala cinta, doa, serta pengorbanan yang telah diberikan.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, yang memberikan rahmat, taufik dan hidayat-Nya, sehingga penulis berkesempatan menyelesaikan skripsi dengan judul “SIFAT-SIFAT RUANG $\mathcal{F}$ -METRIK”, sebagai syarat memperoleh gelar Program Strata-1 bidang matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam tentunya selalu penulis curahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa kita ke *addinul islam*.

Proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari masukan serta arahan dari beberapa pihak. Atas dasar hal tersebut penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I, yang selalu membimbing dan mengarahkan serta senantiasa mendukung penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Ach. Nasichuddin, M.A., selaku Dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, ilmu, serta arahan kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku Ketua Penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan masukan yang membangun sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan lebih baik.
7. Dian Maharani, M.Si., selaku Anggota Penguji I yang telah meluangkan waktu, memberikan arahan, serta masukan yang sangat bermanfaat dalam penyempurnaan skripsi ini.
8. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

9. Orang tua penulis dan seluruh keluarga yang tidak lelah memberikan dukungan, mendoakan, semangat serta kasih sayang sehingga penulis selalu bersemangat dalam mengerjakan penelitian ini.
10. Teman-teman terdekatku yang telah memberikan bantuan dan mendukung dalam berbagai keadaan, serta mengajak healing dalam bentuk apapun yang penting membuat kita senang dan bahagia.
11. Serta seluruh pihak yang tidak bisa penulis sebutkan seluruhnya.
12. Terakhir, penulis mengucapkan terima kasih kepada diri sendiri, Dewi Safinatus Soleha, yang telah berjuang dan bertahan hingga sampai pada titik ini. Terima kasih karena telah tetap kuat dalam menghadapi berbagai cobaan, tantangan, dan kesulitan selama proses penyusunan skripsi ini. Terima kasih karena tidak menyerah meskipun sering merasa lelah dan ragu. Terima kasih karena telah terus melangkah, belajar, dan berusaha menyelesaikan setiap proses yang tidak selalu mudah. Semua air mata, doa, kesabaran, dan usaha yang telah dilalui menjadi bagian dari perjalanan berharga dalam menyelesaikan skripsi ini. Semoga segala perjuangan yang telah dilakukan menjadi langkah awal menuju masa depan yang lebih baik serta membawa manfaat bagi diri sendiri, keluarga, dan orang lain.

penulis menyadari bahwasanya penelitian ini banyak kekurangan, maka dari itu penulis berharap adanya saran serta kritik yang membangun agar penelitian selanjutnya dapat semakin baik. Penulis berharap penelitian yang dihasilkan nantinya bermanfaat bagi para pembaca.

Malang, 15 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO.....	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR SIMBOL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
مستخلص البحث.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah	5
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori pendukung	8
2.1.1 Ruang Metrik.....	8
2.1.2 Limit dan Barisan Konvergen	15
2.1.3 Barisan Cauchy	21
2.1.4 Ruang Metrik lengkap.....	27
2.1.5 Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik	29
2.2 Anjuran Memperluas Wawasan dan Keilmuan dalam Al-Qur'an ...	30
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	32
BAB III METODE PENELITIAN	34
3.1 Jenis Penelitian	34
3.2 Pra Penelitian	34
3.3 Tahapan Penelitian.....	34
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	35
4.1 Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik	35
4.2 Sifat-Sifat Dasar Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik dalam Perspektif Islam	70
BAB V PENUTUP	75
5.1 Kesimpulan.....	75
5.2 Saran	75
DAFTAR PUSTAKA.....	Erro
.....	r! Bookmark not defined.
RIWAYAT HIDUP.....	Erro
.....	r! Bookmark not defined.

DAFTAR SIMBOL

(X, D) : Pasangan berurutan dimana X adalah himpunan tak kosong pada bilangan Real, dan D adalah fungsi jarak pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

$X \times X$: Hasil kali Kartesius X dengan X .

$D(x, y)$: Nilai $\mathcal{F}$ -metrik antara titik x dan y .

d : Fungsi jarak ruang metrik pada X .

D : Fungsi jarak ruang $\mathcal{F}$ -metrik pada X

$\mathcal{F}$: Himpunan semua fungsi yang berisi fungsi-fungsi dari $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat $\mathcal{F}1$ dan $\mathcal{F}2$.

f : Fungsi anggota $\mathcal{F}$.

α : Konstanta tak negatif pada definisi $\mathcal{F}$ -metrik.

(x_n) : Suku ke-(n) dari suatu barisan.

(u_i) : Titik perantara pada syarat (D3).

N : Jumlah titik dalam barisan hingga (u_i) .

pada

definisi

ruang

$\mathcal{F}$ -

metrik

N : Indeks batas yang sudah dipilih dan tetap.

pada

definisi

barisan

Cauchy

ABSTRAK

Soleha, Dewi Safinatus. 2026. **Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik, $\mathcal{F}$ -Konvergen, $\mathcal{F}$ -Cauchy, $\mathcal{F}$ -Lengkap.

Ruang $\mathcal{F}$ -metrik merupakan salah satu generalisasi ruang metrik. Pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, syarat ketaksamaan segitiga pada ruang metrik diganti dengan suatu syarat yang melibatkan fungsi f dan α yang memenuhi syarat tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji beberapa karakteristik dasar ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Pembahasan meliputi hubungan antara ruang metrik dan ruang $\mathcal{F}$ -metrik, konsep $\mathcal{F}$ -konvergen, ketunggalan limit, barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy, serta ruang $\mathcal{F}$ -lengkap. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengkaji berbagai referensi yang berkaitan dengan ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Selain itu, diperoleh bahwa limit pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik bersifat tunggal dan setiap barisan $\mathcal{F}$ -konvergen merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy. Selanjutnya, ruang $\mathcal{F}$ -metrik dikatakan $\mathcal{F}$ -lengkap apabila setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy konvergen ke suatu elemen di dalam ruang tersebut. Beberapa contoh juga diberikan untuk memperjelas konsep-konsep yang dibahas.

ABTRACT

Soleha, Dewi Safinatus Soleha. 2026. **Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.
Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords $\mathcal{F}$ -metric space, $\mathcal{F}$ -convergence, $\mathcal{F}$ -Cauchy, $\mathcal{F}$ -complete.

An $\mathcal{F}$ -metric space is a generalization of a metric space. In an $\mathcal{F}$ -metric space, the triangle inequality is replaced by a condition involving a function f and a constant α satisfying certain conditions. This study aims to examine several basic characteristics of $\mathcal{F}$ -metric spaces. The discussion includes the relationship between metric spaces and $\mathcal{F}$ -metric spaces, the concept of $\mathcal{F}$ -convergence, uniqueness of limits, $\mathcal{F}$ -Cauchy, and $\mathcal{F}$ -complete. This research employs a literature review method by examining various references related to $\mathcal{F}$ -metric spaces. The results show that every metric space is an $\mathcal{F}$ -metric space. In addition, limits in $\mathcal{F}$ -metric spaces are unique, and every $\mathcal{F}$ -convergent sequence is an $\mathcal{F}$ -Cauchy sequence. Furthermore, an $\mathcal{F}$ -metric space is $\mathcal{F}$ -complete if every $\mathcal{F}$ -Cauchy sequence converges to an element within the space. Several examples are also provided to clarify the concepts discussed.

مستخلص البث

الصاحبة ، ديوي سفينة. ٢٠٢٦. **خصائص الفضاء المترى - $\mathcal{F}$** . أطروحة. برنامج دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية، مالانغ.
المشرفون: (1) الدكتور حير الرحمن ، ماجستير في العلوم (2) الدكتور أحمد. ناصح الدين، ماجستير في الآداب.

الكلمات المفتاحية: المترى - $\mathcal{F}$ الفضاء، التقارب - $\mathcal{F}$ ، كوشي - $\mathcal{F}$ ، الكامل - $\mathcal{F}$.

فضاء المترى - $\mathcal{F}$ هو أحد التعميمات لفضاء المترى. في فضاء مترى - $\mathcal{F}$ ، يتم استبدال شرط المتباينة المثلثية في الفضاء المترى بشرط يتضمن الدالتين f و α المتين تستوفيان شروطا معينة. تهدف هذه الدراسة إلى دراسة بعض الخصائص الأساسية لفضاء مترى - $\mathcal{F}$. تشمل المناقشة العلاقة بين الفضاء المترى والفضاء المترى - $\mathcal{F}$ ، ومفهوم التقارب - $\mathcal{F}$ ، والتفرد الحدي، وصف كوشي - $\mathcal{F}$ ، والفضاء الكامل - $\mathcal{F}$. الطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هي دراسة أدبية من خلال فحص مراجع مختلفة تتعلق بفضاء مترى - $\mathcal{F}$. تظهر النتائج أن كل فضاء مترى هو فضاء مترى - $\mathcal{F}$. بالإضافة إلى ذلك، يحصل على أن الحد في فضاء المترى - $\mathcal{F}$ هو احادي وأن كل صف متقارب - $\mathcal{F}$ هو صف كوشي - $\mathcal{F}$. علاوة على ذلك، يقال إن فضاء المترى - $\mathcal{F}$ كامل عندما يقترب كل صف كوشي - $\mathcal{F}$ إلى عنصر في ذلك الفضاء. كما تم تقديم بعض الأمثلة لتوضيح المفاهيم التي نوقش.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Ruang metrik adalah salah satu konsep dasar dalam matematika, ruang metrik menjadi landasan bagi banyak cabang matematika, seperti analisis riil, analisis kompleks dan sebagainya, karena sifat-sifatnya membahas tentang limit, kontinuitas, dan konvergensi barisan (Mungkres, 2000). Melalui ruang metrik, konsep seperti limit, barisan konvergen, barisan Cauchy, dan kelengkapan ruang dapat didefinisikan secara matematis. Ruang metrik (X, d) terdiri atas himpunan tak kosong X dengan fungsi jarak $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi ketiga aksioma, yaitu identitas $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, simetri $d(x, y) = d(y, x)$, dan ketaksamaan segitiga $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Kreyszig, 1978). Ketiga aksioma ini bisa untuk mengukur kedekatan antara dua titik dalam ruang dan menelusuri sifat-sifat seperti kontinuitas dan kekonvergenan (Bartle & Sherbert, 2011).

Dalam ruang metrik (X, d) , konsep limit tidak hanya berkaitan dengan barisan, tetapi juga dengan fungsi. Namun, dalam penelitian ini pembahasan difokuskan pada limit barisan sebagai dasar dalam memahami konsep kekonvergenan. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke suatu titik $x \in X$ apabila

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Dalam hal ini, titik x disebut sebagai limit barisan (x_n) , dan ditulis $x_n \rightarrow x$ (Bartle & Sherbert, 2011). Sementara itu, barisan Cauchy yaitu barisan (x_n) di X yang memenuhi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sehingga $m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (Morris, 2007).

Perbedaan antara barisan konvergen dan barisan Cauchy terletak pada keberadaan titik batasnya. Pada barisan konvergen setiap suku barisan semakin mendekati suatu titik tertentu yang berada di dalam ruang. Sementara itu, pada barisan Cauchy yang diperhatikan adalah suku-suku barisan tersebut semakin berdekatan satu sama lain, tanpa harus diketahui terlebih dahulu apakah barisan tersebut memiliki limit di dalam ruang. Hubungan antara keduanya penting, setiap barisan konvergen pasti merupakan barisan Cauchy, tetapi tidak semua barisan Cauchy konvergen kecuali ruang tersebut lengkap (Munkres, 2000).

Selanjutnya, suatu ruang metrik dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen ke suatu titik dalam ruang tersebut. Sifat kelengkapan ini memiliki peran fundamental dalam analisis fungsional karena menjamin eksistensi limit dari barisan-barisan tertentu (Kreyszig, 1989). Dengan demikian, hubungan antara limit, konvergensi, barisan Cauchy, dan kelengkapan merupakan fondasi dasar dalam memahami struktur suatu ruang metrik (Morris, 2007).

Namun, metrik klasik tidak selalu cukup untuk menjelaskan berbagai fenomena dalam analisis. Sebagai contoh, dalam beberapa permasalahan teori titik tetap dan analisis nonlinier, diperlukan struktur jarak yang lebih fleksibel untuk menjamin keberadaan dan keunikan solusi (Willard, 1970). Oleh karena itu, diperlukan perluasan atau modifikasi konsep jarak agar lebih sesuai dengan kebutuhan analisis tertentu. Salah satu generalisasi yang diperkenalkan oleh Jleli dan Samet (2018) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik ($\mathcal{F}$ – *metric space*), yang memungkinkan pelemahan ketaksamaan segitiga melalui suatu fungsi tertentu tanpa menghilangkan sifat-sifat dasar ruang metrik. Konsep ini didefinisikan

dengan melibatkan pasangan (f, α) , di mana f adalah fungsi monoton tertentu dan $\alpha \geq 0$. Fungsi f tersebut digunakan untuk memperlemah ketaksamaan segitiga pada ruang metrik klasik, sehingga memungkinkan terbentuknya struktur ruang yang lebih umum. Oleh karena itu, perbedaan utama antara $\mathcal{F}$ -metrik dan metrik klasik terletak pada bentuk ketaksamaan segitiganya. Pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, ketaksamaan segitiga digantikan oleh bentuk berikut:

$$D(x, y) > 0 \Rightarrow f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

untuk setiap $(x, y) \in X \times X$, dan setiap $N \in \mathbb{N} \geq 2$. Berdasarkan definisi tersebut, setiap ruang metrik klasik merupakan contoh khusus dari ruang $\mathcal{F}$ -metrik, tetapi tidak sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa konsep $\mathcal{F}$ -metrik merupakan generalisasi yang lebih luas dari ruang metrik klasik.

Salah satu aspek penting dalam ruang $\mathcal{F}$ -metrik adalah konsep limit barisan tetap dapat didefinisikan secara analog atau serupa dengan ruang metrik. Dalam hal ini, fungsi jarak metrik d digantikan oleh fungsi jarak $\mathcal{F}$ -metrik D . Sehingga, konsep kekonvergenan barisan dapat dinyatakan dalam kerangka $\mathcal{F}$ -metrik. Hasil yang diperoleh oleh Jleli dan Samet (2018) menyatakan bahwa suatu barisan (x_n) dalam (X, D) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0.$$

Oleh karena itu, penelitian mengenai sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik menjadi penting, baik untuk memperjelas posisinya di antara generalisasi ruang metrik lain, maupun untuk mendukung pengembangan teori titik tetap dalam kerangka yang lebih luas.

Dari sudut pandang Islam, perluasan konsep dari ruang metrik ke ruang $\mathcal{F}$ -metrik mencerminkan semangat untuk memperluas wawasan dan mendalami ilmu

pengetahuan, pengenalan ruang $\mathcal{F}$ -metrik merupakan bentuk nyata dari upaya memperluas konsep ruang metrik yang sudah ada, yakni memperluas ruang metrik klasik menjadi ruang yang lebih umum. Perluasan ini menggambarkan dinamika ilmu pengetahuan yang terus berkembang dari konsep dasar menuju struktur yang lebih luas, dalam konsep ini serupa dengan nilai-nilai Islam yang mendorong manusia untuk memperluas wawasan dan pengetahuan. (Kemenag, 2016) Allah SWT. Berfirman:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانْشُرُوا

يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: “Wahai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu “Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis,” lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Apabila dikatakan, “Berdirilah,” (kamu) berdirilah. Allah niscaya akan mengangkat orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan” (QS.Al-Mujadalah [58]:11).

Ayat ini menunjukkan bahwa Allah S.W.T memuliakan orang-orang yang terus memperluas dan memperdalam ilmunya. Secara filosofis, perluasan konsep dari ruang metrik klasik ke ruang $\mathcal{F}$ -metrik menggambarkan semangat keilmuan untuk memperluas batas pemahaman terhadap struktur ruang, sebagaimana Islam mendorong manusia untuk terus menuntut ilmu dan memperluas wawasan.

Dengan meneladani sifat Allah yang Maha Luas, manusia terdorong untuk memperluas batas-batas ilmu, termasuk dalam bidang matematika. Perluasan dari konsep ruang metrik ke ruang $\mathcal{F}$ -metrik dapat dimaknai sebagai upaya ilmiah dalam memperluas kerangka berpikir untuk memahami struktur dan keteraturan dalam ruang yang lebih luas. Dengan demikian, penelitian tentang sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -

metrik tidak hanya bernilai ilmiah, tetapi juga mencerminkan nilai spiritual dalam upaya memperluas cakrawala pengetahuan sebagaimana diajarkan oleh Al-Qur'an.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkaji dan membuktikan terkait sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini memberikan pemahaman teoretis mengenai sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi hanya pada pembahasan sifat-sifat yang berhubungan dengan konvergensi barisan pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik sebagaimana didefinisikan oleh Jleli dan Samet (2018). Penelitian ini tidak membahas konsep fungsi kontinu, teorema titik tetap, atau pemetaan kontraksi banach, karena fokus utama terletak pada pemahaman sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Metrik

Sebuah ruang metrik adalah pasangan (X, d) di mana X adalah sebuah himpunan, dan d adalah sebuah metrik pada X (atau fungsi jarak pada X). Fungsi ini didefinisikan pada $X \times X$, sehingga untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku:

$$(M1) \quad d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$$

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri).

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

2. Barisan Konvergen

Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Selanjutnya x dikatakan limit dari (x_n) dan dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Atau secara sederhananya $x_n \rightarrow x$. (x_n) dikatakan konvergen ke x atau mempunyai limit x . Barisan (x_n) yang tidak memiliki limit dikatakan barisan divergen.

3. Barisan Cauchy

Misal (X, d) adalah ruang metrik dan (x_n) adalah bagian di (X, d) , barisan (x_n) disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga jika $m, n \geq k$, maka $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

4. Kelengkapan Ruang Metrik

Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen di dalam X .

Artinya, jika kita ambil barisan Cauchy (x_n) dalam X , maka ada suatu $x \in X$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

5. Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik

Misalkan $\mathcal{F}$ adalah himpunan fungsi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

($\mathcal{F}_1$) f adalah tidak menurun, $0 < s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.

($\mathcal{F}_2$) Untuk setiap barisan $\{t_n\}$ dengan $t_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = -\infty$$

Misalkan X adalah himpunan tak kosong, dan misal $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah pemetaan yang diberikan. Asumsikan bahwa terdapat $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, \infty)$ sedemikian sehingga untuk sembarang $x, y \in X$ berlaku:

$$(D1) \ D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D2) \ D(x, y) = D(y, x)$$

$$(D3) \ \forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2, \text{ dan } \forall (u_i)_{i=1}^N \subset X \text{ dengan } (u_1, u_N) = (x, y),$$

didapatkan

$$D(x, y) > 0 \Rightarrow f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Maka D dikatakan sebagai $\mathcal{F}$ -metrik pada X dan pasangan (X, D) dikatakan sebagai ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori pendukung

Pada subbab ini dijelaskan beberapa teori dasar yang berhubungan dengan topik penelitian. Teori-teori tersebut meliputi ruang metrik, limit dan barisan konvergen, barisan Cauchy, serta ruang metrik lengkap. Pembahasan ini digunakan sebagai dasar untuk memahami konsep sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik yang akan dibahas pada bagian berikutnya.

2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan salah satu konsep dasar dalam matematika yang digunakan untuk menyatakan jarak antara dua elemen pada suatu himpunan. Konsep ini penting karena menjadi dasar dalam pembahasan limit, kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, serta kelengkapan suatu ruang. Oleh karena itu, sebelum membahas ruang $\mathcal{F}$ -metrik, terlebih dahulu dijelaskan definisi ruang metrik sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Bartle & Sherbert, 2011)

Sebuah metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Sebuah ruang metrik (X, d) adalah himpunan X yang dilengkapi dengan suatu metrik d pada X .

Simbol $\times$ menunjukkan hasil kali kartesius dari himpunan X , yaitu semua pasangan berurutan (a, b) , dengan $a \in X$ dan $b \in X$. Jadi, $X \times X$ adalah himpunan semua pasangan berurutan.

Untuk memperjelas konsep ruang metrik yang telah diberikan pada Definisi 2.1, berikut contoh fungsi jarak yang memenuhi aksioma-aksioma metrik.

Contoh 2.2

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan fungsi jarak didefinisikan sebagai;

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

(M1) $d(x, y) \geq 0$.

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, selisih $x - y$ juga $\in \mathbb{R}$, $|x - y|$ juga $\in \mathbb{R}$ dan $1 + |x - y| \in \mathbb{R}$, maka $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \in \mathbb{R}$.

Karena $x, y < \infty$, maka $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} < \infty$.

Bilangan mutlak didefinisikan $|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$

dari definisi ini jelas bahwa $|x - y| \geq 0$, karena semua bilangan mutlak selalu bernilai non-negatif, selain itu $1 + |x - y| > 0$.

Pembilang tidak negatif dan penyebut positif, sehingga

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \geq 0$$

maka $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \geq 0$

jadi (M1) terbukti.

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

Jika $d(x, y) = 0$, akan dibuktikan bahwa $x = y$

Perhatikan bahwa :

$$d(x, y) = 0$$

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 0$$

Suatu pecahan bernilai nol jika dan hanya jika pembilangnya nol, sehingga

$$x - y = 0$$

maka diperoleh

$$x = y$$

jika $x = y$, akan dibuktikan $d(x, y) = 0$,

sehingga

$$\frac{0}{1 + 0} = 0$$

Maka

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

jadi (M2) terbukti.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$.

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x + (-y)| \\ &= |-y + x| \\ &= |(-1)(y - x)| \\ &= |-1||y - x| \\ &= |y - x| \end{aligned}$$

karena

$$|x - y| = |y - x|$$

maka

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \\ &= \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

jadi (M3) terbukti.

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

akan dibuktikan

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}.$$

Dari sifat ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Sehingga

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|}$$

perhatikan ruas kanan

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} = \frac{|x - z|(1 + |z - y|) + |z - y|(1 + |x - z|)}{(1 + |x - z|)(1 + |z - y|)}$$

dengan sifat distributif

$$a(b + c) = ab + ac$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
&= \frac{(|x-z| + |x-z||z-y|) + (|z-y| + |z-y||x-z|)}{(1 + |x-z|)(1 + |z-y|)} \\
&= \frac{|x-z| + |z-y| + 2|x-z||z-y|}{1 + |x-z| + |z-y| + |x-z||z-y|}
\end{aligned}$$

karena

$$2|x-z||z-y| \geq 0,$$

maka pembilang memenuhi

$$|x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2|x-z||z-y|.$$

Selain itu,

$$1 + |x-z| + |z-y| \leq 1 + |x-z| + |z-y| + |x-z||z-y|.$$

sehingga diperoleh

$$\frac{|x-z| + |z-y|}{1 + |x-z| + |z-y|} \leq \frac{|x-z| + |z-y| + 2|x-z||z-y|}{1 + |x-z| + |z-y| + |x-z||z-y|}$$

maka

$$\frac{|x-z| + |z-y|}{1 + |x-z| + |z-y|} \leq \frac{|x-z|}{1 + |x-z|} + \frac{|z-y|}{1 + |z-y|}$$

Karena

$$\frac{|x-y|}{1 + |x-y|} \leq \frac{|x-z| + |z-y|}{1 + |x-z| + |z-y|}$$

Oleh karena itu,

$$\frac{|x-y|}{1 + |x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1 + |x-z|} + \frac{|z-y|}{1 + |z-y|}$$

jadi (M4) terbukti.

Dikarenakan keempat aksioma terpenuhi maka $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

Contoh 2.3

Didefinisikan $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dengan:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Akan ditunjukkan bahwa d adalah metrik.

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$.

Karena kuadrat selalu ≥ 0 , dan akar dari bilangan non-negatif juga ≥ 0 .

Sehingga untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, berlaku

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ dan } (y_1 - y_2)^2 \geq 0.$$

Diperoleh

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq 0.$$

Maka

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0.$$

Dengan demikian, sifat (a) terpenuhi.

6. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

Misalkan

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0.$$

Maka diperoleh

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0,$$

sehingga

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0.$$

Karena untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a^2 \geq 0$, maka $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ dan

$(y_1 - y_2)^2 \geq 0$. Akibatnya, jumlah dua bilangan tak negatif bernilai nol

hanya jika masing-masing bilangan tersebut bernilai nol, sehingga diperoleh

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 \text{ dan } (y_1 - y_2)^2 = 0.$$

Dengan demikian,

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$$y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Jadi, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Sebaliknya, jika $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, jelas bahwa

$$x_1 - x_2 = 0 \text{ dan } y_1 - y_2 = 0,$$

sehingga

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0.$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

7. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in X$

Karena

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 \text{ dan } (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2,$$

maka diperoleh

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d((x_2, y_2), (x_1, y_1)).$$

Dengan demikian, sifat simetri terpenuhi.

8. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk semua $x, y, z \in X$

Tuliskan

$$x_1 - x_2 = (x_1 - x_3) + (x_3 - x_2), y_1 - y_2 = (y_1 - y_3) + (y_3 - y_2).$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ = ((x_1 - x_3) + (x_3 - x_2))^2 + ((y_1 - y_3) + (y_3 - y_2))^2. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas aljabar $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

diperoleh

$$\begin{aligned} = (x_1 - x_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_3)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\ + 2(y_1 - y_3)(y_3 - y_2). \end{aligned}$$

Kemudian dikelompokkan

$$= [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2] + [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2] \\ + 2[(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_3 - y_2)].$$

Menggunakan ketaksamaan

$$(x_1 - x_3)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_3)(y_3 - y_2) \\ \leq \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Sehingga diperoleh

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \leq (\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2})^2.$$

Ambil akar kedua ruas (yang keduanya tak negatif), diperoleh

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)).$$

Dengan demikian, sifat ketaksamaan segitiga terpenuhi.

Karena keempat sifat terpenuhi, maka $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan suatu ruang metrik.

2.1.2 Limit dan Barisan Konvergen

Dalam analisis, konsep limit mempunyai peranan penting karena digunakan untuk menjelaskan suatu barisan ketika nilai n semakin besar. Melalui konsep limit, dapat ditentukan apakah elemen dari suatu barisan semakin mendekati suatu titik tertentu. Jika hal tersebut terjadi, maka barisan dikatakan konvergen. Oleh karena itu, pada bagian ini dibahas definisi limit dan barisan konvergen pada ruang metrik.

Definisi 2.4 (Bartle & Sherbert, 2011).

Barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

selanjutnya x dikatakan limit dari (x_n) dan dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

atau secara sederhananya $x_n \rightarrow x$. (x_n) dikatakan konvergen ke x atau mempunyai limit x . Barisan (x_n) yang tidak memiliki limit dikatakan barisan divergen.

Definisi 2.5 (Kiftiah, 2021)

Jika (X, d) adalah ruang metrik dan (x_n) barisan di X , maka (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ini ekuivalen dengan barisan $d(x_n, x) \rightarrow 0$

Berikut diberikan contoh sederhana untuk menunjukkan definisi konvergen pada ruang metrik bilangan real.

Contoh 2.6

Misalkan barisan $x_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^2$, Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Menggunakan rumus limit dasar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Karena

$$1 - \frac{3}{n} = 1 + \frac{-3}{n}$$

diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}$$

Selanjutnya karena diketahui bahwa barisan $x_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^2$, maka

$$x_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right]^2.$$

Dengan menggunakan sifat limit, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (e^{-3})^2 = e^{-6}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, e^{-6}) = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} d(x_n, e^{-6}) &= |x_n - e^{-6}| \\ &= \left| \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} - e^{-6} \right|. \end{aligned}$$

Karena diperoleh bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} = e^{-6},$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} - e^{-6} \right| = 0.$$

Sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, e^{-6}) = 0.$$

Berdasarkan definisi konvergen pada ruang metrik, diperoleh bahwa barisan

$$x_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$$

konvergen ke

$$e^{-6}.$$

Contoh 2.7

Misalkan barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Untuk menentukan limitnya, dilakukan rasionalisasi sebagai berikut

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}.$$

Sehingga

$$x_n = \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} = \frac{3n}{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}.$$

Membagi pembilang dan penyebut dengan n , diperoleh

$$x_n = \frac{3}{2\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)}.$$

Karena

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0 \text{ ketika } n \rightarrow \infty,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2(1+1)} = \frac{3}{4}.$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{4}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x_n, \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$d\left(x_n, \frac{3}{4}\right) = \left| x_n - \frac{3}{4} \right|.$$

Karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{4},$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x_n - \frac{3}{4} \right| = 0.$$

Sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x_n, \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Berdasarkan definisi konvergen pada ruang metrik, diperoleh bahwa barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}$$

konvergen ke

$$\frac{3}{4}.$$

Definisi 2.8 (Jain, 2004)

Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Dalam hal ini, x disebut limit dari barisan (x_n) dan ditulis $x_n \rightarrow x$ atau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

jika (x_n) tidak konvergen, maka barisan tersebut dikatakan divergen.

Definisi di atas juga dapat ditulis dalam bentuk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Salah satu sifat penting dari barisan konvergen adalah limitnya bersifat tunggal.

Artinya, suatu barisan konvergen tidak mungkin mempunyai dua limit yang berbeda. Hasil tersebut dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 2.9 Keunikan Limit (Bartle & Sherbert, 2011)

Jika barisan (x_n) konvergen di ruang metrik (X, d) , maka limitnya tunggal.

Bukti:

Misalkan $\lim x_n = x$ dan $\lim x_n = y$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk semua $n \geq \max \{N_1, N_2\}$. Maka berlaku:

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, diperoleh $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

2.1.3 Barisan Cauchy

Selain konsep konvergensi, pada ruang metrik juga terdapat konsep barisan Cauchy. Konsep ini digunakan untuk melihat apakah elemen dari suatu barisan semakin saling mendekat ketika nilai n semakin besar. Barisan Cauchy merupakan salah satu konsep penting karena berkaitan dengan pembahasan limit dan kelengkapan ruang metrik. Oleh karena itu, pada bagian ini terlebih dahulu dibahas definisi barisan Cauchy.

Definisi 2.10 (Bartle & Sherbert, 2011)

Misal (X, d) adalah ruang metrik dan (x_n) adalah bagian di (X, d) , barisan (x_n) disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga jika $m, n \geq k$, maka $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Contoh 2.11

Misalkan barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Berdasarkan definisi, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Perhatikan bahwa

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}.$$

Dengan merasionalkan pembilang diperoleh

$$x_n = \frac{3n}{2(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}.$$

Membagi pembilang dan penyebut dengan n , diperoleh

$$x_n = \frac{3}{2\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)}.$$

Karena $n \geq 1$, maka

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \geq 1.$$

Sehingga

$$2\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right) \geq 4.$$

maka

$$x_n \leq \frac{3}{4}.$$

Selanjutnya, untuk $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{3}{2\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)} - \frac{3}{2\left(\sqrt{1 + \frac{3}{m}} + 1\right)} \right|.$$

Misalkan

$$A_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1, A_m = \sqrt{1 + \frac{3}{m}} + 1.$$

Maka

$$|x_n - x_m| = \frac{3}{2} \left| \frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_m} \right| = \frac{3}{2} \frac{|A_m - A_n|}{A_n A_m}.$$

Karena

$$A_n \geq 2, \quad A_m \geq 2,$$

maka

$$A_n A_m \geq 4.$$

Sehingga

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{8} |A_m - A_n|.$$

Selain itu,

$$|A_m - A_n| = \left| \sqrt{1 + \frac{3}{m}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right|.$$

Gunakan identitas

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \frac{|a - b|}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

maka

$$|A_m - A_n| = \frac{\left| \frac{3}{m} - \frac{3}{n} \right|}{\sqrt{1 + \frac{3}{m}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}.$$

Karena penyebut lebih besar dari 2, diperoleh

$$|A_m - A_n| \leq \frac{3}{2} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

Sehingga

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{9}{16} \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

Selanjutnya,

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Karena $n, m \geq N$,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N}.$$

Sehingga

$$|x_n - x_m| \leq \frac{9}{8N}.$$

Pilih

$$N > \frac{9}{8\varepsilon}.$$

Maka untuk setiap $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Karena

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m|,$$

maka

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dengan demikian, barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}$$

merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$.

Contoh 2.12

Diberikan barisan (x_n) pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik

$$d(x, y) = |x - y|$$

dan

$$x_n = 1 - \frac{n-1}{n(n+1)},$$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Perhatikan jarak antara dua suku barisan

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| 1 - \frac{n-1}{n(n+1)} - \left(1 - \frac{m-1}{m(m+1)} \right) \right| \\
&= \left| \frac{m-1}{m(m+1)} - \frac{n-1}{n(n+1)} \right|.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak,

$$|a - b| \leq |a| + |b|,$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq \left| \frac{m-1}{m(m+1)} \right| + \left| \frac{n-1}{n(n+1)} \right| \\
&= \frac{m-1}{m(m+1)} + \frac{n-1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Karena

$$n-1 < n+1,$$

maka

$$\frac{n-1}{n(n+1)} < \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Demikian pula

$$\frac{m-1}{m(m+1)} < \frac{m+1}{m(m+1)} = \frac{1}{m}.$$

Sehingga

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$N > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Jika $m, n \geq N$, maka

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$$

dan

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{N}.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &< \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\ &= \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Karena

$$N > \frac{2}{\varepsilon},$$

sehingga

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jadi, barisan

$$x_n = 1 - \frac{n-1}{n(n+1)}$$

merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$.

Definisi 2.13 (Morris, 2007)

Suatu barisan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dari titik-titik dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 , sehingga untuk semua bilangan bulat $m \geq n_0$ dan $n \geq n_0$, berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposisi 2.14 (Morris, 2007)

Misalkan (X, d) ruang metrik dan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ suatu barisan titik dalam (X, d) .

Jika terdapat titik $a \in X$ sedemikian hingga barisan tersebut konvergen ke a , yaitu $x_n \rightarrow a$, maka barisan tersebut merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$. Misalkan $\delta = \varepsilon/2$. Karena $x_n \rightarrow a$, maka terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk semua $n > n_0$, berlaku $d(x_n, a) < \delta$.

Ambil $m > n_0$ dan $n > n_0$. Maka $d(x_n, a) < \delta$ dan $d(x_m, a) < \delta$.

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga untuk metrik, diperoleh:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \delta + \delta = \varepsilon.$$

Maka, barisan tersebut benar merupakan barisan Cauchy.

2.1.4 Ruang Metrik lengkap

Setelah membahas barisan Cauchy, selanjutnya diberikan konsep kelengkapan pada ruang metrik. Kelengkapan berkaitan dengan keberadaan limit dari setiap barisan Cauchy di dalam ruang yang sama. Konsep ini penting karena tidak semua ruang metrik mempunyai sifat lengkap.

Definisi 2.15 (Maharani, 2025)

Ruang metrik (X, D) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen di dalam X .

Artinya, jika diambil barisan Cauchy (x_n) dalam X , maka ada suatu $x \in X$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Definisi tersebut menunjukkan bahwa dalam ruang lengkap, setiap barisan yang elemennya semakin saling mendekat pasti mempunyai limit, dan limit tersebut tetap berada di dalam ruang itu.

Berikut diberikan contoh ruang metrik yang lengkap.

Contoh 2.16

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{n+1}{n}$ untuk $n = 1, 2, \dots$ adalah barisan Cauchy pada ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dan konvergen ke 1 sehingga ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

Langkah 1: Akan ditunjukkan barisan (x_n) konvergen ke 1

Perhatikan:

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Hitung jarak ke 1:

$$d(x_n, 1) = |x_n - 1| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Karena

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ ketika } n \rightarrow \infty,$$

maka

$$d(x_n, 1) \rightarrow 0.$$

Jadi, barisan (x_n) konvergen ke 1 di $(\mathbb{R}, d)$.

Langkah 2: Akan ditunjukkan barisan (x_n) adalah barisan Cauchy

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Untuk m, n cukup besar, berlaku:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= |x_n - x_m| \\ &= \left| \frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

Karena $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, maka:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Sehingga

$$\forall \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N} \text{ sehingga } m, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jadi, (x_n) adalah barisan Cauchy.

Karena (x_n) adalah barisan Cauchy dan konvergen ke 1, dengan $1 \in \mathbb{R}$ maka ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

2.1.5 Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik

Sebelum mendefinisikan ruang $\mathcal{F}$ -metrik, terlebih dahulu dijelaskan fungsi-fungsi yang digunakan dalam definisinya.

Definisi 2.17 (Jleli & Samet, 2018)

Misalkan $\mathcal{F}$ adalah himpunan semua fungsi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

($\mathcal{F}_1$) f adalah tidak menurun, $0 < s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.

($\mathcal{F}_2$) Untuk setiap barisan $\{t_n\}$ dengan $t_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = -\infty$$

Setelah diberikan fungsi $\mathcal{F}$, berikut didefinisikan ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Definisi 2.18 (Jleli & Samet, 2018)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong, dan misal $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah pemetaan yang diberikan. Asumsikan bahwa terdapat $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, +\infty)$ sedemikian sehingga untuk sembarang $x, y \in X$ berlaku:

(D1) $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D2) $D(x, y) = D(y, x)$

(D3) $\forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2$, dan $\forall (u_i)_{i=1}^N \subset X$ dengan $(u_1, u_N) = (x, y)$, didapatkan

$$D(x, y) > 0 \Rightarrow f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Maka D dikatakan sebagai $\mathcal{F}$ –metrik pada X , dan pasangan (X, D) dikatakan sebagai ruang $\mathcal{F}$ –metrik.

2.2 Anjuran Memperluas Wawasan dan Keilmuan dalam Al-Qur'an

Islam memberikan perhatian yang sangat besar terhadap ilmu pengetahuan. Dalam beberapa ayat Al-Qur'an, Allah S.W.T memuliakan orang-orang yang beriman dan berilmu, serta mendorong manusia untuk selalu menambah pengetahuan agar semakin mengenal kebesaran dan kekuasaan-Nya. Salah satu ayat yang menegaskan pentingnya memperluas wawasan dan ilmu pengetahuan adalah firman Allah dalam surah Al-Mujadalah [58]: 11 berikut:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُزُوا فَانْشُزُوا
يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: “Wahai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu “Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis,” lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Apabila dikatakan, “Berdirilah,” (kamu) berdirilah. Allah niscaya akan mengangkat orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan.”.

Menurut Tafsir Al-Maragi (1993), ayat ini secara lahiriah memerintahkan umat Islam agar berlapang-lapang dalam majelis ilmu dan menghormati sesama penuntut ilmu. Namun secara maknawi, perintah ini juga menjadi isyarat akan pentingnya kelapangan hati dan keluasan wawasan dalam menuntut ilmu. Orang yang berilmu tidak hanya memperoleh pengetahuan, tetapi juga memperoleh

kelapangan jiwa dalam memahami hakikat ciptaan Allah serta interaksi sosialnya dengan sesama manusia.

Dalam Tafsir Ibnu Katsir, disebutkan bahwa Allah akan meninggikan derajat dua golongan manusia, yaitu *“orang-orang yang beriman dan orang-orang yang berilmu.”* Ibnu Katsir menjelaskan bahwa ilmu merupakan sebab Allah mengangkat derajat seseorang di dunia dan akhirat. Orang yang berilmu akan lebih memahami perintah dan larangan Allah, lebih mudah berbuat adil, serta menjadi penerang bagi masyarakat di sekitarnya (Ibnu Katsir, 2009).

Selain itu, dalam Tafsir Al-Qurtubi (2006) juz 18, Ibnu Mas'ud berkata, "Allah SWT memuji para ulama dalam ayat ini, maknanya adalah: Bahwasanya Allah SWT meninggikan derajat orang yang beriman tetapi berilmu, daripada orang yang beriman tetapi tidak memiliki ilmu". Ada pula yang berpendapat, bahwa yang dimaksud dengan orang yang menuntut ilmu adalah orang-orang yang membaca Al Qur'an. Yahya bin Yahya mengatakan dari Malik, maksud dari

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ

“ Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu,”

adalah para sahabat RA. Sedangkan,

وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ

“Dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat”

adalah Allah SWT meninggikan derajat orang yang alim dan pencari kebenaran. Maka (Al-Qutubi, 2006) mengatakan bahwa makna yang umum, dan lebih mengena dalam pembahasan ayat di atas adalah Allah SWT mengangkat derajat orang yang beriman karena keimanannya, ini yang pertama. Kedua karena ilmunya.

Selain QS. Al-Mujadalah [58]:11, terdapat pula beberapa ayat lain yang senada dan memperkuat anjuran untuk memperluas ilmu pengetahuan. Yaitu firman Allah dalam QS. Thaha [20]: 114:

﴿١١٤﴾ وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

Artinya: “*dan katakanlah, “Ya Tuhanku, tambahkanlah ilmu kepadaku.”*”

Dalam Tafsir Al-Maragi (1993), ayat ini menunjukkan bahwa menuntut tambahan ilmu adalah perintah langsung dari Allah kepada Nabi Muhammad S.A.W, dan secara tidak langsung kepada seluruh umatnya. Semakin tinggi ilmu seseorang, semakin luas pula pandangannya terhadap tanda-tanda kebesaran Allah di alam semesta.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Subbab ini menjelaskan tentang definisi, proposisi serta contoh yang akan di buktikan terkait ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan sifat-sifatnya.

Proposisi 2.19

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Misal (x_n) adalah barisan di X , dan $x \in X$.

Pernyataan berikut ini ekuivalen dengan:

1. (x_n) adalah $\mathcal{F}$ -konvergen ke x .
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$.

Proposisi 2.20

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan (x_n) adalah barisan di X . Jika $(x, y) \in X \times X$ memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) = 0, \text{ maka } x = y.$$

Definisi 2.21

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Misal (x_n) adalah suatu barisan di X .

1. Barisan (x_n) disebut $\mathcal{F}$ -Cauchy, jika

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0$$

2. Ruang (X, D) dikatakan $\mathcal{F}$ -lengkap, jika setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy di X adalah $\mathcal{F}$ -konvergen ke suatu elemen di X .

Proposisi 2.22

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Jika (x_n) di X adalah $\mathcal{F}$ -konvergen, maka ia adalah $\mathcal{F}$ -Cauchy.

Contoh 2.23

Misal $X = \mathbb{N}$, dan misal $D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah sebuah pemetaan yang didefinisikan oleh

$$D(x, y) = \begin{cases} \exp(|x - y|), & \text{jika } x \neq y, \\ 0, & \text{jika } x = y, \end{cases}$$

(X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dengan $f(t) = \frac{-1}{t}$, $t > 0$, dan $\alpha = 1$. Tunjukkan bahwa (X, D) adalah $\mathcal{F}$ -lengkap.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan penulis adalah penelitian kajian pustaka, yaitu penulis mempelajari beberapa artikel dan jurnal tertulis mengenai Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan awal sebelum melakukan penelitian yaitu dengan cara mengumpulkan artikel-artikel yang berkaitan dengan topik penelitian. Artikel yang digunakan sebagai referensi untuk memahami topik mengenai Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

3.3 Tahapan Penelitian

Di dalam kegiatan penelitian ini, Penulis menggunakan beberapa tahapan-tahapan penelitian. Adapun tahapan-tahapan tersebut digambarkan sebagaimana berikut ini:

1. Mempelajari dan memahami jurnal peneliti sebelumnya mengenai ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan sifat-sifatnya.
2. Mengumpulkan referensi terkait sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik.
3. Memaparkan definisi mengenai ruang metrik ruang $\mathcal{F}$ -metrik, barisan dan limit pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, dan $\mathcal{F}$ -lengkap.
4. Menentukan ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan penelitian.
5. Membuktikan sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik.
6. Menentukan kesimpulan berdasarkan teorema yang digunakan dalam pembuktian pada bab pembahasan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik

Bab ini membahas pembuktian sifat-sifat dasar ruang $\mathcal{F}$ -metrik yang menjadi fokus penelitian ini, khususnya kekonvergenan barisan, hubungan antara konvergensi dan barisan Cauchy, serta kelengkapan ruang. Sebelum membahas sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik, terlebih dahulu perlu diberikan definisi yang jelas mengenai ruang metrik dan ruang $\mathcal{F}$ -metrik itu sendiri.

Definisi 4.1 (Bartle & Sherbert, 2011)

Sebuah metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Sebuah ruang metrik (X, d) adalah himpunan X yang dilengkapi dengan suatu metrik d pada X .

Definisi 4.2 (Jleli & Samet, 2018)

Misalkan $\mathcal{F}$ adalah himpunan semua fungsi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi:

$(\mathcal{F}_1)$ f adalah tidak menurun, $0 < s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.

$(\mathcal{F}_2)$ Untuk setiap barisan $\{t_n\}$ dengan $t_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = -\infty$$

Definisi 4.3 (Jleli dan Samet, 2018)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong, dan misal $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah pemetaan yang diberikan. Asumsikan bahwa terdapat $(f, \alpha) \in \mathcal{F} \times [0, \infty)$ sedemikian sehingga sehingga untuk sembarang $x, y \in X$ berlaku:

$$(D1) \ D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D2) \ D(x, y) = D(y, x)$$

$$(D3) \ \forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2, \text{ dan } \forall (u_i)_{i=1}^N \subset X \text{ dengan } (u_1, u_N) = (x, y), \text{ didapatkan}$$

$$D(x, y) > 0 \Rightarrow f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Maka D dikatakan sebagai $\mathcal{F}$ -metrik pada X , dan pasangan (X, D) dikatakan sebagai ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Contoh 4.4

Diketahui

$$X = \mathbb{N}$$

dan fungsi

$$D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

didefinisikan oleh

$$D(x, y) = \begin{cases} (x-y)^2, & (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3], \\ |x - y|, & (x, y) \notin [0, 3] \times [0, 3]. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa D bukan metrik pada X , tetapi D memenuhi sifat (D1),

(D2) dan (D3) pada Definisi 4.3 sehingga D merupakan $\mathcal{F}$ -metrik pada X .

(D1) Akan ditunjukkan

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Misalkan

$$x = y.$$

Pertama, jika

$$(x, y) \in [0,3] \times [0,3],$$

maka berdasarkan definisi D diperoleh

$$D(x, y) = (x - y)^2 = (0)^2 = 0.$$

Selanjutnya, jika

$$(x, y) \notin [0,3] \times [0,3],$$

maka berdasarkan definisi D diperoleh

$$D(x, y) = |x - y| = 0.$$

Dengan demikian,

$$x = y \Rightarrow D(x, y) = 0.$$

Sebaliknya, misalkan

$$D(x, y) = 0.$$

Jika

$$(x, y) \in [0,3] \times [0,3],$$

maka

$$D(x, y) = (x - y)^2 = 0.$$

Sehingga,

$$x - y = 0,$$

dengan demikian

$$x = y.$$

Selanjutnya, jika

$$(x, y) \notin [0,3] \times [0,3],$$

maka

$$D(x, y) = |x - y| = 0.$$

Sehingga,

$$x = y.$$

Jadi diperoleh

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Jadi D1 terpenuhi.

(D2)

Akan ditunjukkan

$$D(x, y) = D(y, x).$$

Jika

$$(x, y) \in [0, 3] \times [0, 3],$$

maka

$$D(x, y) = (x - y)^2.$$

Karena

$$(x - y)^2 = (y - x)^2,$$

maka

$$D(x, y) = D(y, x).$$

Jika

$$(x, y) \notin [0, 3] \times [0, 3],$$

maka

$$D(x, y) = |x - y|.$$

Karena

$$|x - y| = |y - x|,$$

maka

$$D(x, y) = D(y, x).$$

Jadi D2 terpenuhi.

(D3) Akan ditunjukkan

$$D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y).$$

Ambil

$$x = 1, y = 3, z = 2.$$

Maka

$$D(1,3) = (1 - 3)^2 = 4.$$

Sedangkan

$$D(1,2) = (1 - 2)^2 = 1,$$

dan

$$D(2,3) = (2 - 3)^2 = 1.$$

Sehingga

$$D(1,2) + D(2,3) = 1 + 1 = 2.$$

Diperoleh

$$4 > 2,$$

$$D(1,3) > D(1,2) + D(2,3).$$

Padahal pada ruang metrik harus berlaku

$$D(1,3) \leq D(1,2) + D(2,3).$$

Jadi, ketaksamaan segitiga pada ruang metrik tidak terpenuhi, sehingga $D(x, y)$ bukan metrik pada X .

Meskipun demikian, akan ditunjukkan bahwa D memenuhi sifat D3 pada Definisi 4.3 dengan menggunakan fungsi $f(t) = \ln t$ dan $\alpha = \ln 3$.

Misalkan $x, y \in X$ sedemikian sehingga

$$D(x, y) > 0.$$

Ambil sembarang $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, dan barisan hingga

$$(u_i)_{i=1}^N \subset X$$

yang memenuhi

$$u_1 = x$$

dan

$$u_N = y.$$

Definisikan himpunan

$$I = \{i = 1, 2, \dots, N - 1 : (u_i, u_{i+1}) \in [0, 3] \times [0, 3]\}$$

dan

$$J = \{1, 2, \dots, N - 1\} \setminus I.$$

Himpunan I berisi semua indeks yang pasangan titik berturut-turutnya berada pada daerah $[0, 3] \times [0, 3]$, sedangkan himpunan J berisi semua indeks yang tidak berada pada daerah tersebut.

Karena setiap indeks berada tepat pada salah satu himpunan I atau J , maka

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) = \sum_{i \in I} D(u_i, u_{i+1}) + \sum_{j \in J} D(u_j, u_{j+1}).$$

Berdasarkan definisi D , diperoleh

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) = \sum_{i \in I} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j|. \quad (1)$$

Selanjutnya misalkan,

$$(x, y) \notin [0, 3] \times [0, 3].$$

Menurut definisi D ,

$$D(x, y) = |x - y|.$$

Karena

$$u_1 = x, u_N = y,$$

maka berdasarkan ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak diperoleh

$$|x - y| \leq \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

Dengan membagi penjumlahan tersebut berdasarkan himpunan I dan J , diperoleh

$$D(x, y) \leq \sum_{i \in I} |u_{i+1} - u_i| + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j|. \quad (2)$$

Untuk setiap $i \in I$, berlaku

$$u_i, u_{i+1} \in [0, 3].$$

Karena $X = \mathbb{N}$, maka

$$|u_{i+1} - u_i| \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Sehingga,

$$|u_{i+1} - u_i| \leq (u_{i+1} - u_i)^2.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan tersebut pada (2), diperoleh

$$D(x, y) \leq \sum_{i \in I} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j|.$$

Berdasarkan (1), maka

$$D(x, y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}). \quad (3)$$

Dan misalkan

$$(x, y) \in [0, 3] \times [0, 3].$$

Menurut definisi D ,

$$D(x, y) = (x - y)^2 = |x - y|^2.$$

Karena

$$x, y \in [0, 3],$$

maka

$$|x - y| \leq 3.$$

Sehingga,

$$|x - y|^2 \leq 3 |x - y|.$$

Sehingga

$$D(x, y) \leq 3 |x - y|. \quad (4)$$

Dari ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x - y| \leq \sum_{i \in I} |u_{i+1} - u_i| + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j|.$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan 3, diperoleh

$$D(x, y) \leq 3 \left(\sum_{i \in I} |u_{i+1} - u_i| + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j| \right). \quad (5)$$

Untuk setiap $i \in I$, telah diketahui bahwa

$$|u_{i+1} - u_i| \leq (u_{i+1} - u_i)^2.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan tersebut pada (5), diperoleh

$$D(x, y) \leq 3 \left(\sum_{i \in I} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{j \in J} |u_{j+1} - u_j| \right).$$

Berdasarkan (1), maka

$$D(x, y) \leq 3 \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}). \quad (6)$$

Sehingga diperoleh

$$D(x, y) > 0 \Rightarrow D(x, y) \leq 3 \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}).$$

Selanjutnya dipilih fungsi $f(t) = \ln t$ dan $\alpha = \ln 3$.

$$\ln D(x, y) \leq \ln \left(3 \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) \right).$$

Dengan menggunakan sifat logaritma

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

diperoleh

$$\ln D(x, y) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) \right) + \ln 3.$$

Maka

$$f(D(x, y)) \leq f \left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) \right) + \alpha.$$

Dengan demikian, sifat (D3) terpenuhi.

Karena D memenuhi sifat (D1), (D2), dan (D3), maka D merupakan suatu $\mathcal{F}$ -metrik pada X , dan pasangan (X, D) merupakan ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Contoh 4.5

Diketahui

$$X = \mathbb{R}$$

dan fungsi

$$D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

didefinisikan oleh

$$D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ |x - y| + 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Dipilih fungsi

$$f(t) = -\frac{1}{t}, t > 0,$$

dan konstanta

$$\alpha = 1.$$

(D1)

Akan ditunjukkan bahwa

$$D(x, y) = 0 \iff x = y.$$

Jika

$$x = y,$$

maka berdasarkan definisi fungsi D ,

$$D(x, y) = 0.$$

Jadi,

$$x = y \Rightarrow D(x, y) = 0.$$

Sebaliknya, misalkan

$$D(x, y) = 0.$$

Jika

$$x \neq y,$$

maka menurut definisi D ,

$$D(x, y) = |x - y| + 1.$$

Karena

$$|x - y| > 0,$$

maka

$$|x - y| + 1 > 1 > 0.$$

Padahal diasumsikan bahwa

$$D(x, y) = 0.$$

Oleh karena itu, harus berlaku

$$x = y.$$

Dengan demikian,

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Jadi sifat (D1) terpenuhi.

(D2)

Akan ditunjukkan bahwa

$$D(x, y) = D(y, x).$$

Jika

$$x = y,$$

maka

$$D(x, y) = 0 = D(y, x).$$

Jika

$$x \neq y,$$

maka

$$D(x, y) = |x - y| + 1.$$

Karena

$$|x - y| = |y - x|,$$

maka

$$D(x, y) = |y - x| + 1 = D(y, x).$$

Dengan demikian,

$$D(x, y) = D(y, x)$$

untuk setiap

$$x, y \in X.$$

Jadi sifat (D2) terpenuhi.

(D3)

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap

$$x, y \in X$$

dengan

$$D(x, y) > 0,$$

dan setiap barisan hingga

$$(u_i)_{i=1}^N \subset X$$

yang memenuhi

$$u_1 = x$$

dan

$$u_N = y,$$

berlaku

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Misalkan

$$D(x, y) > 0.$$

Karena $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, maka

$$x \neq y.$$

Sehingga,

$$D(x, y) = |x - y| + 1.$$

Dari ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x - y| \leq \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

Menambahkan 1 pada kedua ruas menghasilkan

$$|x - y| + 1 \leq \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i| + 1.$$

Karena

$$D(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} 0, & u_i = u_{i+1}, \\ |u_{i+1} - u_i| + 1, & u_i \neq u_{i+1}, \end{cases}$$

maka untuk setiap i ,

$$D(u_i, u_{i+1}) \geq |u_{i+1} - u_i|.$$

Sehingga,

$$\sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}).$$

Maka diperoleh

$$D(x, y) = |x - y| + 1 \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) + 1.$$

Dengan demikian,

$$D(x, y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) + 1.$$

Selanjutnya gunakan fungsi $f(t) = -\frac{1}{t}$ dan $\alpha = 1$,

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) + 1\right).$$

$$-\frac{1}{D(x, y)} \leq -\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) + 1}.$$

Karena

$$\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) > 0,$$

maka

$$-\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}) + 1} < -\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})} + 1.$$

Sehingga,

$$-\frac{1}{D(x, y)} \leq -\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})} + 1.$$

maka diperoleh

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + 1.$$

Karena

$$\alpha = 1,$$

maka diperoleh

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Dengan demikian, sifat (D3) terpenuhi.

Karena D memenuhi sifat (D1), (D2) dan (D3), maka D merupakan suatu $\mathcal{F}$ -metrik pada X . Oleh karena itu, pasangan (X, D) merupakan ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Proposisi 4.6 (Jleli dan Samet, 2018)

Setiap metrik pada X merupakan $\mathcal{F}$ -metrik pada X .

Bukti:

Misalkan X suatu himpunan dan d adalah metrik pada X , akan ditunjukkan bahwa d memenuhi syarat-syarat $\mathcal{F}$ -metrik, yaitu (D1), (D2) dan (D3).

(D1)

Karena d adalah metrik pada X , maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Selain itu, jika $x \neq y$, maka

$$d(x, y) > 0.$$

Dengan demikian, sifat (D1) terpenuhi.

(D2)

Karena d adalah metrik, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku sifat simetri, yaitu

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Jadi, sifat (D2) terpenuhi.

(D3)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat fungsi $f \in \mathcal{F}$ dan konstanta $\alpha \geq 0$ sehingga syarat (D3) berlaku.

Ambil fungsi

$$f(t) = \ln t, \quad t > 0$$

Dan pilih

$$\alpha = 0.$$

Untuk setiap $x, y \in X$, setiap $N \in \mathbb{N}$ dengan $N \geq 2$, dan setiap barisan $(u_i)_{i=1}^N \subset X$ dengan

$$(u_1, u_N) = (x, y),$$

berdasarkan ketaksamaan segitiga pada metrik diperoleh

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} d(u_i, u_{i+1}).$$

Karena fungsi $\ln t$ naik pada $t > 0$, maka dengan menerapkan fungsi logaritma pada kedua ruas diperoleh

$$\ln d(x, y) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^{N-1} d(u_i, u_{i+1}) \right).$$

Karena $f(t) = \ln t$, maka

$$f(d(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} d(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Dengan demikian, metrik d memenuhi sifat (D1), (D2) dan (D3) dengan fungsi $f(t) = \ln t$ untuk $t > 0$ dan konstanta $\alpha = 0$.

Contoh 4.7

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan fungsi $D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ oleh

$$D(x, y) = |x - y|.$$

Akan ditunjukkan bahwa (X, D) merupakan ruang metrik sekaligus ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

(M1) Non-negatif.

Akan ditunjukkan bahwa

$$D(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Karena

$$D(x, y) = |x - y|,$$

dan nilai mutlak selalu tidak negatif, maka

$$|x - y| \geq 0.$$

Sehingga,

$$D(x, y) \geq 0.$$

Jadi sifat (M1) terpenuhi.

(M2) Identitas.

Akan ditunjukkan bahwa

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Karena

$$D(x, y) = |x - y|,$$

maka

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0.$$

Sifat nilai mutlak menyatakan bahwa

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Dengan demikian,

$$x = y.$$

Jadi

$$D(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Maka sifat (M2) terpenuhi.

(M3) Simetri.

Akan ditunjukkan bahwa

$$D(x, y) = D(y, x)$$

Karena

$$D(x, y) = |x - y|,$$

dan berlaku sifat nilai mutlak

$$|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|,$$

maka

$$D(x, y) = |x - y| = |y - x| = D(y, x).$$

Jadi sifat (M3) terpenuhi.

(M4) Ketaksamaan segitiga.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap

$$x, y, z \in X,$$

berlaku

$$D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y).$$

Karena

$$D(x, y) = |x - y|,$$

maka berdasarkan ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak diperoleh

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|.$$

Akibatnya,

$$D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y).$$

Dengan demikian, sifat ketaksamaan segitiga pada ruang metrik terpenuhi.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa D juga memenuhi sifat (D3) pada Definisi 4.3.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap

$$x, y \in X$$

dengan

$$D(x, y) > 0,$$

dan setiap barisan hingga

$$(u_i)_{i=1}^N \subset X$$

yang memenuhi

$$u_1 = x$$

dan

$$u_N = y,$$

berlaku

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Misalkan

$$D(x, y) > 0.$$

Karena

$$D(x, y) = |x - y|,$$

maka berdasarkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x - y| \leq \sum_{i=1}^{N-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

Sehingga,

$$D(x, y) \leq \sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1}).$$

Karena fungsi

$$f(t) = \ln t$$

merupakan fungsi yang memenuhi kedua sifat $\mathcal{F}1$ pada definisi 4.2, maka diperoleh

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right).$$

Karena

$$\alpha = 7 > 0,$$

maka

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + 7.$$

Oleh karena itu,

$$f(D(x, y)) \leq f\left(\sum_{i=1}^{N-1} D(u_i, u_{i+1})\right) + \alpha.$$

Dengan demikian, sifat (D3) terpenuhi.

Sehingga (X, D) merupakan ruang metrik sekaligus ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Definisi 4.8 (Jleli dan Samet, 2018)

Misalkan (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan (x_n) adalah barisan di X . Barisan (x_n) dikatakan $\mathcal{F}$ -konvergen ke $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$D(x_n, x) < \varepsilon.$$

maka x disebut limit dari barisan (x_n) .

Proposisi 4.9 (Jleli dan Samet, 2018)

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan (x_n) adalah barisan di X , $x \in X$.

Pernyataan berikut ini ekuivalen.

- (i) (x_n) $\mathcal{F}$ -konvergen ke x .
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$.

Bukti:

Karena yang dibuktikan adalah ekuivalensi, maka harus dibuktikan dua arah:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Bukti (i) $\Rightarrow$ (ii)

Misalkan (x_n) $\mathcal{F}$ -konvergen ke x . Menurut definisi 4.6,

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$,

$$D(x_n, x) < \varepsilon.$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|D(x_n, x) - 0| < \varepsilon,$$

maka berdasarkan definisi limit barisan bilangan real diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0.$$

Bukti (ii) $\Rightarrow$ (i)

Sekarang membuktikan arah sebaliknya.

Misalkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0.$$

Berdasarkan definisi limit barisan bilangan real, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|D(x_n, x) - 0| < \varepsilon.$$

Karena $D(x_n, x) \geq 0$, maka

$$|D(x_n, x) - 0| = D(x_n, x).$$

sehingga,

$$D(x_n, x) < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi 4.8, diperoleh bahwa (x_n) adalah barisan $\mathcal{F}$ -konvergen ke x .

Karena kedua implikasi telah dibuktikan, maka pernyataan (i) dan (ii) adalah ekuivalen.

Contoh 4.10

Misalkan barisan $x_n = \left(1 - \frac{3}{n^2+4}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik $(\mathbb{R}, D)$ dengan $\mathcal{F}$ -metrik

$$D(x, y) = |x - y|.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{3}{n^2+4} < 1.$$

Sehingga,

$$0 < 1 - \frac{3}{n^2+4} < 1.$$

maka

$$0 < \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^n < 1.$$

Dengan demikian,

$$0 < x_n < 1.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$1 - x_n = 1 - \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^n.$$

Gunakan rumus identitas

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}),$$

dengan

$$a = 1 - \frac{3}{n^2 + 4}.$$

Maka diperoleh

$$1 - x_n = \frac{3}{n^2 + 4} \left[1 + \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right) + \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^2 + \cdots + \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^{n-1} \right].$$

Karena

$$0 < 1 - \frac{3}{n^2 + 4} < 1,$$

maka setiap suku di dalam kurung bernilai kurang dari atau sama dengan 1.

Selain itu, terdapat tepat n suku pada penjumlahan tersebut.

Oleh karena itu,

$$1 + \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^{n-1} \leq n.$$

Maka,

$$0 \leq 1 - x_n \leq \frac{3}{n^2 + 4} \cdot n.$$

Sehingga diperoleh

$$0 \leq 1 - x_n \leq \frac{3n}{n^2 + 4}.$$

Selanjutnya, Karena derajat penyebut (n^2) lebih tinggi dari pembilang (n), maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 + 4} = 0,$$

Selain itu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Maka berdasarkan Teorema Apit diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0.$$

Sehingga,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, 1) = 0.$$

Karena

$$D(x_n, 1) = |x_n - 1|,$$

maka

$$D(x_n, 1) = \left| 1 - \frac{3}{n^2 + 4} \right|.$$

Karena fungsi nilai mutlak kontinu dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 1| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1 \right| = |1 - 1| = 0.$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, 1) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 4.9, diperoleh bahwa barisan

$$x_n = \left(1 - \frac{3}{n^2 + 4}\right)^n$$

$\mathcal{F}$ -konvergen ke 1.

Dengan demikian,

$$x_n \rightarrow 1.$$

Contoh 4.11

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan fungsi $D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ oleh

$$D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ (x - y)^2, & x \neq y, \end{cases}$$

diketahui bahwa (X, D) merupakan ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

Dan misalkan barisan $(x_n) = \left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa barisan

(x_n) konvergen pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik $(\mathbb{R}, D)$.

Untuk menentukan limit barisan tersebut, digunakan pendekatan deret Taylor fungsi kosinus di sekitar nol, yaitu

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots.$$

karena

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ ketika } n \rightarrow \infty,$$

Untuk t yang mendekati nol, deret Taylor kosinus dapat didekati oleh dua suku pertamanya, yaitu

$$\cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2}.$$

maka dengan mensubstitusikan

$$t = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

diperoleh

$$\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

Karena

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{n},$$

maka

$$\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1 - \frac{1}{2n}.$$

Sehingga,

$$x_n \left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n \approx \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n.$$

Selanjutnya digunakan rumus limit dasar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a.$$

Karena

$$1 - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{-1/2}{n},$$

maka diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^n = e^{-1/2}.$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n = e^{-1/2}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, e^{-1/2}) = 0.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap n ,

$$x_n \neq e^{-1/2}.$$

Maka berdasarkan definisi fungsi D , diperoleh

$$D(x_n, e^{-1/2}) = (x_n - e^{-1/2})^2.$$

Substitusi bentuk x_n memberikan

$$D(x_n, e^{-1/2}) = \left[\left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n - e^{-1/2} \right]^2.$$

Karena diperoleh bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n = e^{-1/2},$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n - e^{-1/2} \right] = 0.$$

Akibatnya,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n - e^{-1/2} \right]^2 = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, e^{-1/2}) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 4.9, diperoleh bahwa barisan

$$x_n = \left(\cos \sqrt{\frac{1}{n}} \right)^n$$

$\mathcal{F}$ -konvergen ke

$$e^{-1/2}.$$

Dengan demikian,

$$x_n \rightarrow e^{-1/2}.$$

Proposisi 4.12 (Jleli dan Samet, 2018)

Proposisi berikut menjelaskan bahwa jika suatu barisan $\mathcal{F}$ -konvergen, maka titik limitnya hanya satu. Dengan kata lain, limit pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik bersifat tunggal.

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dan (x_n) adalah barisan di X . Jika $(x, y) \in X \times X$ memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) = 0, \text{ maka } x = y.$$

Bukti:

Misalkan $x, y \in X$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa $x = y$.

Misalkan $x \neq y$. Berdasarkan sifat (D1), diperoleh

$$D(x, y) > 0.$$

Selanjutnya, ambil $N = 3$ dan pilih barisan hingga

$$(u_1, u_2, u_3) = (x, x_n, y).$$

Jelas bahwa

$$(u_1, u_3) = (x, y).$$

Selain itu,

$$\sum_{i=1}^2 D(u_i, u_{i+1}) = D(u_1, u_2) + D(u_2, u_3).$$

Dengan mensubstitusikan

$$u_1 = x, u_2 = x_n, u_3 = y,$$

diperoleh

$$\sum_{i=1}^2 D(u_i, u_{i+1}) = D(x, x_n) + D(x_n, y).$$

Karena $D(x, y) > 0$, maka berdasarkan sifat (D3) diperoleh

$$f(D(x, y)) \leq f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) + \alpha.$$

Selanjutnya, karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) = 0,$$

maka berdasarkan sifat simetri (D2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x, x_n) = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, y) = 0.$$

Karena jumlah dua barisan yang masing-masing konvergen ke nol juga konvergen ke nol, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D(x, x_n) + D(x_n, y)) = 0.$$

Selain itu,

$$D(x, x_n) + D(x_n, y) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oleh karena itu, berdasarkan sifat (F2), diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) = -\infty.$$

Karena sifat (D3)

$$f(D(x, y)) \leq f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) + \alpha, \quad n \in \mathbb{N},$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) = -\infty,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) + \alpha) = -\infty.$$

Sehingga terdapat n cukup besar sehingga

$$f(D(x, x_n) + D(x_n, y)) + \alpha < f(D(x, y)).$$

Oleh karena itu, asumsi

$$x \neq y$$

salah.

Jadi harus berlaku

$$x = y.$$

Dengan demikian limit barisan pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik bersifat tunggal.

Definisi 4.13 (Jleli dan Samet, 2018)

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Misal (x_n) adalah suatu barisan di X .

(i) Barisan (x_n) disebut $\mathcal{F}$ -Cauchy, jika

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0$$

(ii) Ruang (X, D) disebut $\mathcal{F}$ -lengkap, jika setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy di X adalah

$\mathcal{F}$ -konvergen ke suatu elemen di X .

Remark 4.14

Pada Definisi 4.13 (i), barisan (x_n) disebut barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy apabila

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Artinya, untuk indeks yang cukup besar, nilai $\mathcal{F}$ -metrik antara dua suku barisan dapat dibuat sekecil mungkin.

Pada Definisi 4.13 (ii), ruang (X, D) disebut $\mathcal{F}$ -lengkap apabila setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy di X $\mathcal{F}$ -konvergen ke suatu elemen yang juga berada di X .

Dengan kata lain, setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy pada ruang tersebut memiliki limit di dalam ruang yang sama.

Proposisi 4.15 (Jleli dan Samet, 2018)

Misal (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Jika (x_n) di X adalah $\mathcal{F}$ -konvergen, maka ia adalah $\mathcal{F}$ -Cauchy.

Bukti:

Misalkan (x_n) $\mathcal{F}$ -konvergen ke $x \in X$. Maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy, yaitu

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $f \in \mathcal{F}$ memenuhi sifat (F2), maka terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) < f(\varepsilon) - \alpha.$$

Karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0,$$

maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$,

$$D(x_n, x) < \frac{\delta}{2}.$$

Demikian pula, untuk setiap $m \geq N$,

$$D(x_m, x) < \frac{\delta}{2}.$$

Sehingga, untuk setiap $m, n \geq N$,

$$D(x_n, x) + D(x_m, x) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Selanjutnya, ambil $n, m \geq N$. Akan ditinjau dua kasus,

Misal $x_n = x_m$

Berdasarkan sifat (D1), diperoleh

$$D(x_n, x_m) = 0 < \varepsilon.$$

jika $x_n \neq x_m$ maka dari sifat (D1) berlaku

$$D(x_n, x_m) > 0.$$

Karena $D(x_n, x) + D(x_m, x) < \delta$, diperoleh

$$0 < D(x_n, x) + D(x_m, x) < \delta,$$

dari sifat $\mathcal{F}2$ diperoleh

$$f(D(x_n, x) + D(x_m, x)) < f(\varepsilon) - \alpha.$$

Selanjutnya, berdasarkan sifat (D3),

$$f(D(x_n, x_m)) \leq f(D(x_n, x) + D(x_m, x)) + \alpha.$$

Sehingga,

$$f(D(x_n, x_m)) < f(\varepsilon).$$

Karena f tidak menurun (sifat $\mathcal{F}1$), maka diperoleh

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dari kedua kasus tersebut, untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jadi,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Dengan demikian, (x_n) adalah barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy.

Contoh 4.16

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan $\mathcal{F}$ -metrik

$$D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ (x-y)^2, & x \neq y, \end{cases}$$

dan misalkan barisan $(x_n) = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$

Perhatikan bahwa

$$\frac{2n-1}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+1},$$

sehingga

$$x_n = \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^{2n}.$$

Karena

$$\frac{2}{2n+1} \rightarrow 0$$

dan

$$2n \cdot \frac{2}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1} \rightarrow 2,$$

maka berdasarkan limit eksponensial diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^{2n} = e^{-2}.$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{-2}.$$

Selanjutnya,

$$D(x_n, e^{-2}) = (x_n - e^{-2})^2.$$

Karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - e^{-2}) = 0,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - e^{-2})^2 = 0.$$

Sehingga,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, e^{-2}) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 4.9, diperoleh bahwa

$$x_n \rightarrow e^{-2}.$$

Karena telah diperoleh

$$x_n \rightarrow e^{-2},$$

maka berdasarkan Proposisi 4.15 diperoleh bahwa setiap barisan $\mathcal{F}$ -konvergen merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy, Sehingga barisan (x_n) merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy.

Dengan demikian,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Karena

$$D(x_n, x_m) = \begin{cases} 0, & x_n = x_m, \\ (x_n - x_m)^2, & x_n \neq x_m, \end{cases}$$

maka jarak antara dua suku barisan akan semakin kecil ketika n dan m semakin besar. Dengan demikian, barisan merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik (X, D) .

Contoh 4.17

Misalkan

$$X = \mathbb{R}$$

dengan $\mathcal{F}$ -metrik

$$D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ (x - y)^2, & x \neq y. \end{cases}$$

Dan, misalkan barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy.

Berdasarkan contoh sebelumnya telah diperoleh bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik $(\mathbb{R}, D)$ dengan

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Karena (x_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang metrik biasa, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Jika $x_n = x_m$, maka

$$D(x_n, x_m) = 0 < \varepsilon.$$

Jika $x_n \neq x_m$, maka berdasarkan definisi $\mathcal{F}$ -metrik diperoleh

$$D(x_n, x_m) = (x_n - x_m)^2.$$

Karena

$$|x_n - x_m| < \sqrt{\varepsilon},$$

maka

$$(x_n - x_m)^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Diperoleh

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$,

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jadi,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Berdasarkan Definisi 4.13, diperoleh bahwa barisan

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{2}$$

merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik (X, D) .

Contoh 4.18 (Jleli dan Samet, 2018)

Misal $X = \mathbb{N}$, dan misal $D: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah sebuah pemetaan yang didefinisikan oleh

$$D(x, y) = \begin{cases} \exp(|x - y|), & \text{jika } x \neq y, \\ 0, & \text{jika } x = y, \end{cases}$$

(X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -metrik dengan $f(t) = \frac{-1}{t}$, $t > 0$, dan $\alpha = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa (X, D) adalah $\mathcal{F}$ -lengkap.

Misalkan $(x_n) \in X$ adalah suatu barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy. Berdasarkan definisi barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy, berlaku

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(x_n, x_m) = 0.$$

Artinya, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$D(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$D(x_n, x_m) < \frac{1}{2}, n, m \geq N.$$

Selanjutnya, misalkan terdapat $n, m \geq N$ dengan $x_n \neq x_m$. Berdasarkan definisi D , diperoleh

$$D(x_n, x_m) = \exp(|x_n - x_m|).$$

Karena $|x_n - x_m| \geq 1$, maka

$$\exp(|x_n - x_m|) \geq 1$$

karena $e > 1$.

Sehingga diperoleh

$$1 \leq D(x_n, x_m) = \exp(|x_n - x_m|) < \frac{1}{2}.$$

Hal ini merupakan kontradiksi. Oleh karena itu, harus berlaku

$$x_n = x_m, \text{ untuk setiap } n, m \geq N.$$

Sehingga, semua suku barisan mulai indeks ke- N bernilai sama, yaitu

$$x_n = x_N, n \geq N.$$

Selanjutnya diperoleh

$$D(x_n, x_N) = 0, n \geq N.$$

Maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x_N) = 0.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) $\mathcal{F}$ -konvergen ke x_N .

Karena setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy di X konvergen ke suatu elemen di X , maka (X, D) adalah ruang $\mathcal{F}$ -lengkap.

4.2 Sifat-Sifat Dasar Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik dalam Perspektif Islam

Islam memberikan perhatian yang sangat besar terhadap pentingnya menuntut ilmu dan memperluas wawasan. Anjuran ini tidak hanya terbatas pada

ilmu keagamaan, tetapi juga mencakup seluruh bidang ilmu pengetahuan, termasuk matematika. Dengan memperluas wawasan dan pengetahuan, manusia diharapkan mampu memahami berbagai fenomena secara lebih mendalam serta mengenali keteraturan yang terdapat dalam kehidupan. Sebagaimana telah dijelaskan pada surat Al-Mujadalah [58]:11, bahwa Allah Swt. memuliakan orang-orang yang beriman dan berilmu, serta meninggikan derajat mereka, (Kemenag,2016).

Hal ini menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan memiliki kedudukan yang sangat penting dalam Islam. Selain itu, dalam Al-Qur'an juga terdapat perintah untuk senantiasa menambah ilmu, sebagaimana firman Allah Swt. dalam QS. Thaha [20]:114 yang berbunyi:

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴿١١٤﴾

Artinya: *“Ya Tuhanku, tambahkanlah ilmu kepadaku.”*

Ayat ini dijelaskan bahwa manusia hendaknya terus memohon tambahan ilmu kepada-Nya. Dalam Al-Qur'an dan Tafsirnya menegaskan bahwa proses mencari ilmu merupakan suatu kegiatan yang berkelanjutan. Allah yang Mahatinggi, Mahabesar amat luas ilmu-Nya yang dengan ilmu-Nya itu Dia mengatur segala sesuatu dan membuat peraturan-peraturan yang sesuai dengan kepentingan makhluk-Nya, tidak terkecuali peraturan-peraturan untuk keselamatan dan kebahagiaan umat manusia, (Kemenag, 2011). Dalam hadis Nabi Muhammad saw. Juga disebutkan bahwa “Menuntut ilmu itu wajib bagi setiap Muslim.” (HR. Ibnu Majah). Hadis ini menunjukkan bahwa pencarian ilmu tidak dibatasi pada jenis ilmu tertentu, melainkan mencakup seluruh ilmu yang bermanfaat bagi kehidupan, termasuk ilmu matematika.

Dalam kaitannya dengan penelitian ini, pengembangan sifat-sifat dasar ruang $\mathcal{F}$ -metrik merupakan salah satu bentuk implementasi dari anjuran Islam untuk memperluas wawasan dan ilmu pengetahuan. Kajian mengenai ruang $\mathcal{F}$ -metrik melibatkan proses berpikir yang sistematis, logis, dan terstruktur, khususnya dalam memahami konsep konvergensi, barisan Cauchy, dan kelengkapan ruang. Konsep-konsep tersebut menunjukkan adanya proses yang teratur menuju suatu tujuan tertentu berdasarkan syarat-syarat yang jelas. Nilai keteraturan, ketelitian, dan ketetapan ini sejalan dengan ajaran Islam yang menjelaskan bahwa segala sesuatu diciptakan Allah Swt. dengan ukuran dan ketentuan tertentu. (Kemenag,2016) Allah Swt. berfirman dalam Al-Qur'an Surah Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*”

Menurut Tafisr Al-Qurtubi (2016) Ayat tersebut menjelaskan bahwa seluruh ciptaan Allah Swt. berada dalam aturan, ukuran, dan ketetapan yang sempurna. Dalam matematika, hal ini dapat dikaitkan dengan adanya definisi dan aksioma yang menjadi dasar terbentuknya suatu konsep. Pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, setiap sifat yang dimiliki fungsi jarak D harus memenuhi syarat tertentu agar struktur tersebut dapat disebut sebagai ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Dengan demikian, konsep keteraturan dalam matematika merupakan salah satu bentuk refleksi dari keteraturan ciptaan Allah Swt.

Selain itu, konsep barisan konvergen menggambarkan suatu urutan elemen yang semakin mendekati satu titik tertentu. Hal ini dapat dimaknai sebagai gambaran bahwa setiap usaha yang dilakukan secara terus-menerus dan terarah

akan membawa seseorang menuju tujuan yang diharapkan. (Kemenag,2016) Allah Swt. berfirman dalam Surah An-Najm ayat 39:

وَأَنْ لَّيْسَ لِلْإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَى ﴿٣٩﴾

Artinya: “Dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya.”

Dalam Tafsir Al-Mishbah Ayat tersebut menegaskan pentingnya proses dan usaha yang berkelanjutan. Dalam kaitannya dengan matematika, setiap suku dalam barisan dapat dipandang sebagai langkah-langkah yang dilakukan secara bertahap menuju limit. Meskipun perubahan tiap langkah terlihat kecil, secara keseluruhan langkah tersebut mengarah pada tujuan akhir yang jelas, (Shihab, 2002).

Hadis Nabi Muhammad saw. juga mengatakan bahwa “Amalan yang paling dicintai oleh Allah adalah amalan yang dilakukan secara terus-menerus walaupun sedikit.” (HR. Bukhari dan Muslim). Hadis tersebut menunjukkan bahwa suatu proses yang dilakukan secara konsisten akan menghasilkan sesuatu yang bernilai. Dalam matematika, hal ini dapat diibaratkan dengan barisan konvergen, di mana setiap langkah kecil yang dilakukan secara terus-menerus akan membawa pada suatu hasil akhir, yaitu limit.

Selanjutnya, konsep ruang $\mathcal{F}$ -lengkap menyatakan bahwa setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy akan $\mathcal{F}$ -konvergen ke suatu elemen di dalam ruang tersebut. Hal ini menunjukkan adanya kepastian hasil ketika syarat-syarat yang ditentukan telah terpenuhi. Nilai tersebut sejalan dengan ajaran Islam bahwa setiap proses yang dilakukan dengan aturan dan kesungguhan akan menghasilkan ketetapan sesuai kehendak Allah Swt. Dengan demikian, pembahasan ruang $\mathcal{F}$ -metrik tidak hanya menunjukkan struktur matematis, tetapi juga menunjukkan adanya keselarasan

antara nilai-nilai keteraturan, proses bertahap, dan konsistensi dalam matematika dengan ajaran Islam.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai sifat-sifat ruang $\mathcal{F}$ -metrik, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Ruang $\mathcal{F}$ -metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik, yaitu dengan mengganti ketaksamaan segitiga menggunakan syarat yang melibatkan fungsi $f \in \mathcal{F}$ dan konstanta $\alpha \geq 0$.
2. Setiap ruang metrik merupakan ruang $\mathcal{F}$ -metrik. Hal ini menunjukkan bahwa konsep ruang $\mathcal{F}$ -metrik mencakup ruang metrik sebagai kasus khusus.
3. Pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, limit suatu barisan $\mathcal{F}$ -konvergen bersifat tunggal. Artinya, jika suatu barisan konvergen ke dua titik, maka kedua titik tersebut harus sama.
4. Setiap barisan $\mathcal{F}$ -konvergen merupakan barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy. Dengan demikian, kekonvergenan menjamin bahwa jarak antar elemen barisan menjadi semakin kecil.
5. Ruang $\mathcal{F}$ -metrik dikatakan $\mathcal{F}$ -lengkap apabila setiap barisan $\mathcal{F}$ -Cauchy konvergen ke suatu elemen di dalam ruang tersebut.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan adalah sebagai berikut.

1. Penelitian selanjutnya dapat membahas sifat-sifat lain pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik, seperti kekompakan, keterhubungan, kontinuitas, serta topologi yang dibangun oleh ruang $\mathcal{F}$ -metrik.

2. Kajian lebih lanjut dapat diarahkan pada penerapan teorema titik tetap pada ruang $\mathcal{F}$ -metrik.
3. Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih memiliki keterbatasan, sehingga diharapkan penelitian selanjutnya dapat menyempurnakan pembahasan dan memperkaya contoh-contoh yang relevan.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, A. M. (1993). *Tafsir Al-Maraghi*. Mustafa Al-Bab Al-Halabi.
- Al-Qurtubī, Muḥammad bin Aḥmad. (2006). *Al-Jāmi‘ li Ahkām al-Qur’ān* (Ed. Abdullah Al-Turki). Beirut: Al-Risālah al-‘Ālamiyyah. ISBN 978-9933-424-510.
- Bartle & Sherbert. (2011). *INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS*. In *Bartle & Sherbert* (Vol. 1, Issue 1).
- Ibnu Katsir, I. bin U. (2009). *Ibnu Katsir*. Darul Fikr.
- Jain, Pawan K., dan Khalil Ahmad. 2004. *Metric Spaces*. New Delhi: Narosa Publishing House. ISBN 978-8173194993.
- Jleli, M., & Samet, B. (2018). *On a new generalization of metric spaces*. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20(3), 1–20. <https://doi.org/10.1007/s11784-018-0606-6>
- Kementerian Agama RI. (2011). *Al-Qur’an dan Tafsirnya (Edisi yang Disempurnakan), Jilid VI*. Jakarta: Widya Cahaya.
- Kemenag. (2016). *Qur’an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/>
- Kiftiah, M. (2021). *Kekonvergenan barisan pada ruang metrik modular*. June. <https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i4.35884>
- Kreyszig. (1978). *Introductory Functional Analysis*. In *Metrics, Norms and Integrals*. https://doi.org/10.1142/9789812836588_0011
- Maharani, Dian. (2025). *Penjelajahan Ruang dalam Analisis Fungsional*. Malang: UIN Maliki Press.
- Munkres, James R. (2000). *Topology* Prentice Hall, Incorporated, by James R. Munkres ([z-lib.org](https://www.z-lib.org)).pdf. (n.d.).
- Morris, S. (2007). *Topology without tears*. *World War II*, October 2007, 373. <http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf>
- Shihab, M. Quraish. (2002). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur’an, Jilid X*. Jakarta: Lentera Hati.
- Williard, S. (1970). *General Topology*. Mineola, NY: Dover Publications.

RIWAYAT HIDUP



Dewi Safinatus Soleha lahir di Pamekasan pada tanggal 07 Januari 2003. Penulis berdomisili di Kabupaten Pamekasan, Provinsi Jawa Timur. Penulis merupakan putri kedua dari tiga bersaudara yang lahir dari pasangan Bapak Ali Mansur dan Ibu Iva Maryamah. Perjalanan pendidikan penulis dimulai di SDI Miftahul Qulub Polagan Galis Pamekasan. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan di MTs Miftahul Qulub serta menempuh pendidikan kepesantrenan di Pondok Pesantren Miftahul Qulub Polagan Galis Pamekasan. Setelah menyelesaikan pendidikan menengah pertama, penulis melanjutkan pendidikan di SMA Islam Almaarif Singosari Malang dan menempuh pendidikan kepesantrenan di Pondok Pesantren Al-Hasani Singosari Malang hingga menyelesaikan pendidikan pada jenjang tersebut. Pada tahun 2022, penulis melanjutkan studi Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti berbagai kegiatan akademik dalam bidang akademik maupun non-akademik. Dalam bidang organisasi, penulis aktif sebagai anggota Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika serta tergabung dalam Komunitas Serambi Matematika Aktif. Melalui perjalanan pendidikan, pengalaman organisasi, serta proses pembelajaran yang telah dilalui, penulis berharap ilmu pengetahuan, pengalaman, dan nilai-nilai kehidupan yang diperoleh dapat menjadi bekal untuk terus berkembang, memberikan manfaat bagi keluarga, masyarakat, dan lingkungan sekitar, serta berkontribusi dalam pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dewi Safinatus Soleha
NIM : 220601110104
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ruang $\mathcal{F}$ -Metrik
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Agustus 2025	Konsultasi Topik	1.
2.	8 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	28 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	28 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	29 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	29 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	31 Oktober 2025	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	31 Oktober 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	3 November 2025	ACC Seminar Proposal	10.
11.	28 November 2025	Seminar Proposal	11.
12.	30 Januari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	12 Februari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	8 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	14 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	15 April 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	21 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	23 April 2026	ACC Bab IV dan V	18.
19.	25 April 2026	ACC Seminar Hasil	19.
20.	26 Mei 2026	Seminar Hasil	20.
21.	4 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	5 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	22.
23.	8 Juni 2026	ACC Sidang Skripsi	23.
24.	15 Juni 2026	ACC Keseluruhan	24.

Malang, 15 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si

NIP. 19800527 200801 1 012