

**SIFAT ANTARA PEMETAAN FUZZY DAN RUANG QUASI
METRIK KIRI DAN RUANG QUASI METRIK KANAN**

SKRIPSI

**OLEH
DHAFIN AFA AWAYNA
NIM. 210601110104**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**SIFAT ANTARA PEMETAAN FUZZY DAN RUANG QUASI
METRIK KIRI DAN RUANG QUASI METRIK KANAN**

SKRIPSI

**Diberikan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Dhafin Afa Awayna
NIM. 210601110104**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT ANTARA PEMETAAN FUZZY DAN RUANG QUASI METRIK KIRI DAN RUANG QUASI METRIK KANAN

SKRIPSI

Oleh
Dhafin Afa Awayna
NIM. 210601110104

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 26 Mei 2026

Dosen Pembimbing I


Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Dosen Pembimbing II


Erna Herawati, M.Pd.
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

SIFAT ANTARA PEMETAAN FUZZY DAN RUANG QUASI METRIK KIRI DAN RUANG QUASI METRIK KANAN

SKRIPSI

Oleh
Dhafin Afa Awayna
NIM. 210601110104

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 17 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dhafin Afa Awayna

NIM : 210601110104

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat antara Pemetaan Fuzzy dan Ruang Quasi Metrik Kiri
dan Ruang Quasi Metrik Kanan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Dhafin Afa Awayna
NIM. 210601110104

MOTO

“Percaya pada proses, bahkan ketika hasilnya belum terlihat.”

"Tetap berjalan, meski pelan, sebab yang berhenti tidak akan pernah sampai."

"Berjuang dalam diam, berserah dalam doa, bersyukur dalam hasil."

PERSEMBAHAN

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat-nya, sehingga peneliti berhasil menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

1. Bapak Hairur Rahman dan Ibu Erna Herawati, selaku dosen pembimbing, atas bimbingan, arahan, serta dukungan yang penuh kesabaran selama proses penyusunan skripsi ini. Terima kasih atas waktu dan ilmu yang telah diberikan.
2. Kedua orang tua penulis, Ayah Budi Purnomo dan Ibu Hayinah, atas kasih sayang, doa, dukungan, dan pengorbanan yang tiada henti. Semoga Allah SWT senantiasa memberikan kesehatan, umur panjang, serta kebahagiaan kepada Ayah dan Ibu.
3. Adik penulis, Amelia Turfa, Tsaqila Firqin Qolbi, dan Syauqi Walin Azka, atas dukungan, perhatian, dan motivasi yang selalu diberikan selama penulis menjalani pendidikan hingga penyusunan skripsi ini.
4. Seluruh keluarga besar, yang senantiasa memberikan doa, dorongan, dan dukungan moral kepada penulis dalam setiap tahap perjalanan akademik.
5. Seluruh teman dan sahabat penulis atas segala kebersamaan, dukungan, motivasi dan bantuan yang diberikan selama proses perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Diri penulis sendiri, sebagai bentuk penghargaan atas usaha, ketekunan, dan komitmen dalam menyelesaikan studi dan penyusunan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. atas segala rahmat, karunia, serta hidayah-Nya, tidak lupa shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW., sehingga penulis mampu menyelesaikan proposal dengan baik.

Skripsi dengan judul “Sifat Antara Pemetaan Fuzzy Dan Ruang Quasi Metrik Kiri Dan Ruang Quasi Metrik Kanan” ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam penyusunan skripsi ini, penulis telah banyak menerima bantuan, bimbingan serta arahan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang tulus kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., CAHRM., CRMP., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I, yang dengan sabar memberikan bimbingan, arahan, saran, serta kritik yang sangat membantu penulis dalam Menyusun dan menyelesaikan proposal skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan arahan dan masukan yang sangat bermanfaat, khususnya dalam mengintegrasikan nilai-nilai agama dengan penelitian penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Orang tua dan seluruh keluarga.
8. Seluruh mahasiswa angkatan 2021.

Penulis menyadari bahwa karya tulis ini masih jauh dari kata sempurna dan masih terdapat berbagai kekurangan. Oleh karena itu, segala bentuk kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan dan

penyempurnaan di masa mendatang. Semoga karya ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca serta menjadi kontribusi positif dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 17 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	7
1.6 Definisi Istilah	7
BAB II KAJIAN TEORI	10
2.1 Teori Pendukung	10
2.1.1 Himpunan Fuzzy	10
2.1.2 Pemetaan Fuzzy	15
2.1.3 Ruang Metrik	21
2.1.4 Ruang Quasi Metrik	27
2.1.5 Ruang Quasi Metrik Kiri	29
2.1.6 Ruang Quasi Metrik Kanan	32
2.1.7 Barisan Konvergen	34
2.1.8 Barisan Cauchy	36
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran dan Hadits	38
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung	41
BAB III METODE PENELITIAN	38
3.1 Jenis Penelitian	38
3.2 Pra Penelitian	38
3.3 Tahapan Penelitian	38
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	40
4.1 Ruang Quasi Metrik Kiri	40
4.2 Ruang Quasi Metrik Kanan	50
4.3 Kajian penelitian dalam perspektif islam	57
BAB V PENUTUP	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan	65

DAFTAR PUSTAKA	66
RIWAYAT HIDUP	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy A	14
Gambar 2.2 Grafik fungsi keanggotaan	17
Gambar 2.3 Grafik fungsi tangga.....	32

DAFTAR SIMBOL

Simbol simbol yang digunakan dalam skripsi yaitu:

- $\mu_{A(x)}$: Derajat keanggotaan himpunan fuzzy
- d : Ruang Metrik
- d_q : Ruang Quasi Metrik
- d_{lq} : Ruang Quasi Metrik Kiri
- d_{rq} : Ruang Quasi Metrik Kanan
- $\mu_{A(l)}$: Derajat keanggotaan dari l terhadap himpunan A .
- (l_n) : Barisan

ABSTRAK

Afa Awayna, Dhafin. 2026. **Sifat antara Pemetaan Fuzzy dan Ruang Quasi Metrik Kiri dan Ruang Quasi Metrik Kanan**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: pemetaan fuzzy, himpunan fuzzy, ruang quasi metrik kiri, ruang quasi metrik kanan, konvergen.

Pemetaan fuzzy merupakan pengembangan dari konsep fungsi yang memetakan setiap elemen ke suatu himpunan fuzzy dengan derajat keanggotaan tertentu. Kajian pemetaan fuzzy banyak dikembangkan pada berbagai ruang jarak, salah satunya ruang quasi metrik yang merupakan generalisasi ruang metrik dengan menghilangkan aksioma simetri. Ruang quasi metrik dibedakan menjadi ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan berdasarkan arah pengukuran jaraknya. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hubungan dan sifat-sifat antara pemetaan fuzzy dengan ruang quasi metrik kiri serta ruang quasi metrik kanan. Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka dengan menelaah berbagai literatur yang berkaitan dengan pemetaan fuzzy dan ruang quasi metrik. Analisis dilakukan melalui pembuktian beberapa lemma mengenai jarak titik terhadap himpunan fuzzy, jarak antar himpunan fuzzy, keberadaan elemen pada himpunan level- α , serta sifat konvergen pada ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada kedua ruang quasi metrik tersebut berlaku sifat-sifat yang menghubungkan jarak titik terhadap himpunan fuzzy dengan himpunan level- α , hubungan antara jarak titik dan jarak antar himpunan fuzzy, serta keberadaan elemen pada himpunan level- α dari suatu pemetaan fuzzy. Selain itu, setiap subbarisan dari barisan yang konvergen tetap konvergen menuju limit yang sama. Hasil ini menunjukkan bahwa konsep pemetaan fuzzy dapat dikembangkan pada ruang jarak yang tidak simetris dan menjadi dasar bagi penelitian lebih lanjut mengenai pemetaan fuzzy.

ABSTRACT

Afa Awayna, Dhafin. 2026. **Properties of Fuzzy Mappings in Left Quasi-Metric Spaces and Right Quasi-Metric Spaces**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: fuzzy mapping, fuzzy set, left quasi-metric space, right quasi-metric space, convergence.

Fuzzy mapping is a development of the concept of functions that map each element to a fuzzy set with a certain degree of membership. Fuzzy mapping studies have been developed on various distance spaces, one of which is quasi-metric space which is a generalization of metric space by eliminating symmetric axioms. The quasi-metric space is differentiated into the left quasi-metric space and the quasi-right metric space based on the direction of the distance measurement. This study aims to examine the relationship and properties between fuzzy mapping and left quasi-metric space and right quasi-metric space. This study uses a literature study method by examining various literature related to fuzzy mapping and quasi-metric spaces. The analysis was carried out by proving several lemmas regarding the distance of points to the fuzzy set, the distance between the fuzzy sets, the existence of elements in the level- α set, and the convergent properties of the left quasi-metric space and the quasi-right metric space. The results show that in both quasi-metric spaces, the properties that connect the distance of points to the fuzzy set with the level- α set, the relationship between the distance of points and the distance between fuzzy sets, and the presence of elements in the level- α set of a fuzzy mapping apply. In addition, each subrow of the converging row remains converging towards the same limit. These results show that the concept of fuzzy mapping can be developed at asymmetric spacecraft and forms the basis for further research on fuzzy mapping.

مستخلص البحث

أفا أوينا، ذافين. ٢٠٢٦. خصائص التطبيقات الضبابية في الفضاءات شبه المترية اليسرى والفضاءات شبه المترية اليمنى. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج الإسلامية الحكومية.

المشرف : (١) الدكتور خير الرحمن، الماجستير في العلوم؛ (٢) إيرناهيراوتي ، الماجستير في التربية

الكلمات الأساسية: التطبيقات الضبابية، المجموعات الضبابية، الفضاء شبه المترى الأيسر، الفضاء شبه المترى الأيمن، التقارب.

التحويل الضبابي هو تطوير لمفهوم الدوال التي تربط كل عنصر بمجموعة ضبابية ذات درجة معينة من الانتماء. تم تطوير دراسات للخرائط الضبابية على فضاءات المسافات المختلفة، أحدها هو الفضاء شبه المترى وهو تعميم للفضاء المترى عن طريق إزالة البديهيات المتماثلة. تم تفاضل الفضاء شبه المترى إلى الفضاء شبه المترى الأيسر والفضاء المترى شبه الأيمن بناء على اتجاه قياس المسافة. تهدف هذه الدراسة إلى دراسة العلاقة والخصائص بين التحويل الضبابي والفضاء شبه المترى الأيسر والفضاء شبه المترى الأيمن. تستخدم هذه الدراسة طريقة دراسة الأدبيات من خلال فحص مختلف الأدبيات المتعلقة بالخرائط الضبابية والفضاءات شبه المترية. تم إجراء التحليل من خلال إثبات عدة لمات تتعلق بمسافة النقاط إلى المجموعة الضبابية، والمسافة بين المجموعات الضبابية، ووجود العناصر في مجموعة α المستوى، والخصائص المقارنة للفضاء شبه المترى الأيسر والفضاء المترى شبه الأيمن. ظهرت النتائج أنه في كلا الفضاءين شبه المترين، تنطبق الخصائص التي تربط مسافة النقاط بالمجموعة الضبابية بمجموعة α المستوى، والعلاقة بين مسافة النقاط والمسافة بين المجموعات الضبابية، ووجود العناصر في مجموعة α المستوى للتحويل الضبابي. إضافة إلى ذلك، يبقى كل صف فرعي من الصف المتقارب يتقارب نحو نفس الحد. ظهرت هذه النتائج أن مفهوم الرسم الضبابي يمكن تطويره في المركبات الفضائية غير المتماثلة، ويشكل أساساً لمزيد من الأبحاث حول الرسم الضبابي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika terus mengalami pengembangan konsep untuk permasalahan yang bersifat kompleks dan mengandung ketidakpastian. Sejak Zadeh memperkenalkan pada tahun 1965, teori himpunan fuzzy menjadi alat yang efektif untuk mempresentasikan ketidakpastian melalui derajat keanggotaan dalam rentang $[0,1]$. Teori ini mendasari konsep pemetaan fuzzy (*fuzzy mapping*), yaitu pemetaan yang tidak hanya memetakan elemen pada himpunan tertentu secara pasti, tetapi juga memberikan derajat keanggotaan pada setiap elemen dari hasil pemetaan. Dengan demikian pemetaan fuzzy mempresentasikan hubungan yang mengandung ketidakpastian.

Dalam penerapannya, pemetaan fuzzy dapat dikaji dalam struktur ruang metrik. Ruang metrik merupakan pasangan (X, d) dengan X himpunan tak kosong dan $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ merupakan fungsi jarak yang memenuhi sifat non-negatif, identitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Struktur ini memungkinkan pengukuran jarak antar elemen secara pasti, sehingga barisan dalam ruang metrik dapat dianalisis kekonvergenannya. Konsep tentang ruang metrik diperkenalkan oleh Maurice Fréchet Pada tahun 1906 (Kreyszig, 1978).

Namun, ruang metrik memiliki keterbatasan karena mensyaratkan sifat simetri, yaitu $d(l, m) = d(m, l)$. Dalam beberapa kasus, jarak antara dua titik tidak harus simetris, sehingga diperlukan generalisasi dari ruang metrik, yaitu ruang quasi metrik. Sebagai contoh, misalkan jarak antara dua titik didefinisikan sebagai waktu tempuh dalam sistem lalu lintas. Pada kondisi jalan satu arah, waktu tempuh

dari titik l ke titik m dapat berbeda dengan waktu tempuh dari m ke l . Dengan demikian, berlaku $d(l, m) \neq d(m, l)$, sehingga fungsi jarak tersebut tidak memenuhi sifat simetri dan lebih tepat dimodelkan sebagai ruang quasi metrik. Ruang quasi metrik merupakan pasangan (X, d) dengan $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi sifat identitas dan ketaksamaan segitiga.

Ruang quasi metrik terbagi menjadi dua jenis, yaitu ruang quasi metrik kiri dan quasi metrik kanan yang membedakan arah simterinya. Pada ruang quasi metrik kiri, memenuhi sifat $d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$ untuk setiap $l, m, n \in X$. Sebagai pasangan ruang quasi metrik kiri, ruang quasi metrik kanan didefinisikan dengan sifat $d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$ untuk setiap $l, m, n \in X$. Dalam ruang ini, konsep konvergen barisan didefinisikan secara arah. Suatu barisan (l_n) dikatakan konvergen ke $l \in X$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{lq}(l_n, l) = 0$ untuk ruang quasi metrik kiri dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq}(l, l_n) = 0$ untuk ruang quasi metrik kanan.

Penelitian mengenai ruang quasi metrik terus mengalami perkembangan dalam berbagai kajian matematika. Salah satu penelitian dilakukan oleh (Ersan, 2024) yang membahas konsep konvergen statistik pada ruang quasi metrik. Penelitian tersebut menjelaskan bahwa sifat ketidaksimetrian pada ruang quasi metrik memengaruhi konvergen suatu barisan, sehingga konsep konvergen dalam ruang quasi metrik memiliki sifat yang berbeda dengan ruang metrik biasa. Selain itu, penelitian (Wilson, 2014) dalam On Quasi-Metric Spaces menjadi salah satu dasar perkembangan teori quasi metrik dengan memperkenalkan ruang yang tidak mensyaratkan sifat simetri pada fungsi jaraknya. Konsep tersebut kemudian berkembang dalam berbagai penelitian mengenai struktur topologi, konvergen, dan teori titik tetap pada ruang quasi metrik.

Selanjutnya, (Takahashi, 1970) juga mengembangkan kajian mengenai titik tetap (fixed point) dan kekonvergenan pada ruang metrik yang berkaitan dengan hubungan jarak dan proses pendekatan menuju suatu titik. Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa konsep jarak dan ketidaksimetrian memiliki peranan penting dalam analisis matematika. Dalam konteks pemetaan fuzzy, Kamal dan Abd-Elal (2022) mengkaji Titik tetap untuk pemetaan fuzzy pada berbagai jenis ruang metrik umum, termasuk ruang quasi metrik kiri dan kanan. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa struktur ruang quasi metrik berpengaruh terhadap sifat kekonvergenan barisan yang berkaitan dengan pemetaan fuzzy.

Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penelitian ini difokuskan pada kajian sifat pemetaan fuzzy pada ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan. Salah satu aspek penting dalam kajian ini adalah bagaimana pemetaan fuzzy mempengaruhi sifat konvergen pada barisan dalam ruang quasi metrik, baik dalam konteks quasi metrik kiri maupun kanan. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini untuk mengkaji sifat dari pemetaan fuzzy dalam ruang quasi metrik, khususnya pada ruang quasi metrik kiri dan kanan. Fokus utamanya adalah memahami bagaimana sifat-sifat pemetaan fuzzy memiliki hubungan dengan elemen-elemen dalam ruang tersebut.

Penelitian mengenai pemetaan fuzzy serta ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan tidak hanya memiliki nilai dalam pengembangan matematika murni, tetapi juga dapat dikaji dalam perspektif Islam. Dalam Islam, ilmu pengetahuan merupakan sarana untuk memahami keteraturan ciptaan Allah SWT. Konsep-konsep matematika yang mempelajari ketidakpastian, kedekatan, serta hubungan antar elemen dapat menjadi refleksi terhadap kehidupan manusia yang

penyua dengan proses, usaha, dan perubahan keadaan. Konsep pemetaan fuzzy menggambarkan bahwa suatu objek tidak selalu berada pada kondisi mutlak, melainkan dapat memiliki derajat keanggotaan tertentu. Hal ini sejalan dengan kehidupan manusia yang tidak selalu berada pada tingkat keimanan, amal, maupun keberhasilan yang sama. Dalam Islam dikenal konsep istiqamah dan ijtihad (usaha sungguh-sungguh) yang menunjukkan bahwa manusia terus bergerak menuju keadaan yang lebih baik melalui proses bertahap. Derajat keanggotaan dalam himpunan fuzzy dapat dianalogikan sebagai tingkatan kualitas amal dan usaha manusia di hadapan Allah SWT.

Selain itu, ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan menunjukkan adanya ketidaksimetrian jarak. Dalam kehidupan, perjalanan seseorang menuju kebaikan tidak selalu sama dengan perjalanan kembali kepada kesalahan. Ada usaha yang berat, ada pula kemudahan yang diberikan Allah SWT melalui rahmat-Nya. Ketidaksimetrian ini dapat dikaitkan dengan konsep khauf dan raja' dalam Islam. Ruang quasi metrik kiri dapat dianalogikan dengan khauf (rasa takut kepada Allah) yang mendorong manusia berhati-hati terhadap kesalahan, sedangkan ruang quasi metrik kanan dapat dikaitkan dengan raja' (harapan terhadap rahmat Allah) yang memberikan optimisme dalam memperbaiki diri. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Surah Al-A'raf ayat 56:

وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَتَ اللَّهِ قَرِيبٌ مِّنَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٥٦﴾

Artinya:

“Janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi setelah diatur dengan baik. Berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut dan penuh harap. Sesungguhnya rahmat Allah sangat dekat dengan orang-orang yang berbuat baik.”

Menurut Tafsir Al-Misbah (Shihab, 2002) ayat tersebut menunjukkan bahwa kedekatan terhadap rahmat Allah SWT dipengaruhi oleh amal dan usaha manusia. Dalam konteks matematika, konsep “jarak” dalam ruang quasi metrik dapat dimaknai sebagai kedekatan seseorang terhadap keberhasilan, keberkahan, maupun rahmat Allah SWT. Konsep *man jadda wajada* yang berarti “siapa yang bersungguh-sungguh akan berhasil” juga sejalan dengan konvergen dalam ruang metrik maupun quasi metrik. Semakin besar usaha yang dilakukan, maka semakin dekat seseorang terhadap tujuan yang ingin dicapai.

Di sisi lain, penelitian ini juga dapat dikaitkan dengan pembahasan takdir dalam Islam. Aliran Jabariyah memandang bahwa manusia sepenuhnya ditentukan oleh takdir, sedangkan Islam mengajarkan bahwa manusia tetap memiliki usaha dan pilihan dalam hidupnya. Perubahan derajat dalam pemetaan fuzzy dapat merepresentasikan bahwa kondisi manusia dapat berubah melalui usaha, doa, dan amal saleh. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT surah Ar – Ra’d ayat 11:

لَهُ مُعَقَّبَاتٌ مِنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ يَحْفَظُونَهُ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُعَيِّرُوا مَا

بِأَنْفُسِهِمْ ۖ وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُ ۚ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَالٍ ﴿١١﴾

Artinya:

“Baginya (manusia) ada (malaikat-malaikat) yang menyertainya secara bergiliran dari depan dan belakangnya yang menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum hingga mereka mengubah apa yang ada pada diri mereka. Apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, tidak ada yang dapat menolaknya, dan sekali-kali tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia.”

Menurut Tafsir Kementerian Agama RI dan Tafsir Ibnu Katsir, ayat tersebut menjelaskan bahwa perubahan keadaan manusia berkaitan dengan usaha dan tindakan yang dilakukan. Allah SWT memberikan manusia kemampuan untuk

memilih, berusaha, dan memperbaiki dirinya. Oleh sebab itu, manusia tidak boleh hanya berserah diri tanpa usaha. Dalam penelitian ini, perubahan nilai dalam pemetaan fuzzy dapat dimaknai sebagai perubahan kondisi manusia akibat usaha dan ikhtiar yang dilakukan secara terus-menerus.

Dengan demikian, antara konsep matematika dan nilai-nilai Islam dalam penelitian ini menunjukkan bahwa ketidakpastian, proses perubahan, serta hubungan kedekatan dalam struktur matematika dapat menjadi refleksi terhadap perjalanan hidup manusia dalam mencari keberkahan dan ridha Allah SWT.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian yaitu bagaimana sifat pemetaan fuzzy terhadap ruang metrik dalam konteks ruang metrik quasi-kiri dan ruang quasi metrik kanan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan peurumusan masalah yang telah disusun, tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui mengenai sifat antara pemetaan fuzzy dan ruang metrik dalam konteks ruang metrik quasi-kiri dan quasi-kanan.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan pada tujuan penelitian yang telah disusun, manfaat dari penelitian proposal ini adalah :

1. Menambah pemahaman konsep pemetaan fuzzy dalam konteks ruang quasi metrik.
2. Tambahan referensi tentang ruang quasi metrik.

1.5 Batasan Masalah

Untuk memperjelas fokus penelitian, masalah yang dibahas dibatasi pada pembuktian sifat dalam lemma ruang quasi metrik kiri dan quasi metrik kanan, bukan di ruang metrik yang lain.

1.6 Definisi Istilah

1. Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy A di dalam semesta X dinyatakan dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A(l)}: X \rightarrow [0,1]$$

yang memetakan setiap elemen $l \in X$ ke sebuah nilai antara 0 dan 1.

2. Pemetaan Fuzzy

Misalkan terdapat dua himpunan X dan Y .

Sebuah pemetaan fuzzy dari X ke Y dinyatakan sebagai:

$$F: X \rightarrow W^*(Y)$$

dengan $W^*(Y)$ menyatakan himpunan semua himpunan fuzzy pada Y .

3. Ruang Metrik

Ruang metrik dapat dinyatakan sebagai pasangan (X, d) di mana X himpunan tak kosong dan d merupakan metrik yang didefinisikan pada $X \times X$ untuk setiap $l, m, n \in X$, fungsi d memenuhi syarat-syarat berikut:

- a. $d(l, m) \geq 0$
- b. $d(l, m) = 0 \Leftrightarrow l = m$;
- c. $d(l, m) = d(m, l)$ untuk semua $l, m \in X$;
- d. $d(l, m) \leq d(l, n) + d(n, m)$, (ketaksamaan segitiga) untuk semua $l, m, n \in X$.

Setiap fungsi yang memenuhi keempat sifat ini disebut sebagai ruang metrik.

4. Ruang Quasi Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$ dan misalkan $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ suatu fungsi yang dikenal sebagai fungsi jarak. Agar fungsi ini sah disebut fungsi jarak, maka harus dipenuhi kondisi-kondisi berikut:

- a. $d_q(l, m) \geq 0$
- b. $d_q(l, m) = d_q(m, l) = 0 \Leftrightarrow l = m$;
- c. $d_q(l, m) \leq d_q(l, n) + d_q(n, m)$.

Jika d memenuhi syarat (i), (ii) dan (iii) maka (X, d_q) disebut ruang quasi metrik.

5. Ruang Quasi Metrik Kiri

Misalkan X adalah himpunan tak kosong, dan $d_{lq}: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah suatu fungsi yang merupakan metrik pada X . Pasangan (X, d_{lq}) dinamakan ruang metrik jika memenuhi kondisi berikut:

- a. $d_{lq}(l, m) = 0$, jika dan hanya jika $d_{lq}(m, l) = 0$. $l, m \in X$ (identitas)
- b. $d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$ untuk setiap $l, m, n \in X$

Jika fungsi d_{lq} memenuhi syarat diatas, maka (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik.

6. Ruang Quasi Metrik Kanan (ruang quasi metrik kanan)

Misalkan $d_{rq}: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fungsi yang memenuhi :

- a. $d_{rq}(l, m) = 0$ atau $d_{rq}(m, l) = 0$ jika dan hanya jika $l = m$
- b. $d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$ (segitiga)

Maka (X, d_{rq}) disebut sebagai ruang quasi metrik kanan.

7. Barisan konvergen

Suatu barisan (l_n) pada ruang metrik (X, d) disebut konvergen jika terdapat suatu elemen $l \in X$ sehingga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, l) = 0$$

Di mana notasi l merupakan nilai limit dari (l_n) , secara matematis hal ini dapat dituliskan sebagai:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, l) = l$$

Atau

$$l_n \rightarrow l$$

Sebaliknya, jika suatu barisan (l_n) tidak memiliki nilai limit, maka barisan tersebut disebut barisan divergen (Kreyszig, 1978).

8. Barisan Cauchy

Suatu barisan (l_n) dalam ruang metrik (X, d) memenuhi sifat Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku:

$$d(l_m, l_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $m, n > N$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Himpunan Fuzzy

Konsep himpunan fuzzy yang diperkenalkan Zadeh (1965) menggambarkan suatu himpunan yang keanggotannya tidak tegas, yang artinya setiap elemen yang terdapat dalam semesta pembicaraan X dapat menjadi anggota himpunan dengan derajat tertentu, tidak harus sepenuhnya menjadi anggota atau bukan anggota.

Definisi 2.1 (Zadeh, 1965)

Himpunan fuzzy A di dalam semesta X ditunjukkan melalui fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A(l)}: X \rightarrow [0,1]$$

yang memetakan setiap elemen $l \in X$ ke sebuah nilai antara 0 dan 1.

Nilai $\mu_{A(l)}$ disebut derajat keanggotaan dari l terhadap himpunan A .

Contoh 2.2

Misalkan $X = \mathbb{R}$, dan A adalah suatu himpunan fuzzy dalam X yang didefinisikan menggunakan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A(l)} = \begin{cases} 0, & l \leq a, \\ f(l), & a < l < b, \\ 1, & l \geq b \end{cases}$$

dengan $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, dan $f(l) \in (0,1)$ untuk $a < l < b$.

Bukti

1. Jika $l \leq a$, maka $\mu_{A(l)} = 0 \rightarrow l$ bukan anggota himpunan fuzzy A .
2. Jika $a < l < b$, maka $0 < \mu_{A(l)} < 1 \rightarrow l$ anggota sebagian dalam A .
3. Jika $l \geq b$, maka $\mu_{A(l)} = 1 \rightarrow l$ sepenuhnya termasuk dalam A .

Dengan demikian , A merupakan himpunan fuzzy pada X

Definisi 2.3 α -Cut

Dalam himpunan fuzzy, setiap elemen memiliki derajat keanggotaan antara 0 dan 1. Untuk mempermudah, himpunan fuzzy sering diubah menjadi himpunan tegas menggunakan konsep α -cut. Himpunan α -cut memuat semua elemen yang memiliki derajat keanggotaan minimal sebesar α .

Misalkan A himpunan fuzzy pada X dan $\alpha \in [0,1]$. Himpunan α -cut dari A didefinisikan sebagai

$$A_{\alpha} = \{l \in X \mid \mu_{A(l)} \geq \alpha\}.$$

Himpunan A_{α} memuat semua elemen pada X yang memiliki derajat keanggotaan lebih besar atau sama dengan α .

Contoh 2.4

Misalkan himpunan fuzzy A pada $X = [0,1]$ memiliki fungsi keanggotaan

$$\mu_{A(l)} = 1 - l$$

Ambil $\alpha = 0.5$. Maka

$$A_{0.5} = \{l \in [0,1] \mid 1 - l \geq 0.5\}$$

Diperoleh

$$l \leq 0.5$$

Sehingga

$$A_{0.5} = [0,0.5]$$

Jadi, himpunan α -cut dari A untuk $\alpha = 0.5$ adalah $A_{0.5} = [0,0.5]$.

Definisi 2.5 Himpunan kompak

Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik. Suatu himpunan $A \subseteq X$ dikatakan kompak apabila suatu barisan (l_n) di dalam A memiliki subbarisan (l_{nk}) dan terdapat $l \in A$ sehingga $\lim_{k \rightarrow \infty} l_{nk} = l$.

Dengan kata lain, setiap barisan pada A mempunyai subbarisan yang konvergen ke suatu elemen yang masih berada dalam A .

Pada ruang metrik $\mathbb{R}$, suatu himpunan dikatakan kompak jika dan hanya jika himpunan tersebut tertutup dan terbatas.

Contoh 2.6

Misalkan

$$A = [0,1].$$

Himpunan A merupakan himpunan tertutup dan terbatas di $\mathbb{R}$. berdasarkan Teorema Heine-Borel, A merupakan himpunan kompak.

Akan ditunjukkan bahwa A merupakan himpunan kompak.

Karena A merupakan himpunan tertutup dan terbatas di $\mathbb{R}^2$, maka berdasarkan Teorema Heine-Borel, A merupakan himpunan kompak.

Ambil barisan ,

$$l_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

di dalam A .

Pilih subbarisan

$$l_{nk} = \frac{1}{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} = 0$$

Karena

$$0 \in A,$$

Maka subbarisan (l_{nk}) konvergen ke elemen yang masih berada di dalam A .

Definisi 2.7 *Approximate Quantity*

Misalkan X himpunan tak kosong. Himpunan fuzzy A pada X disebut *approximate quantity* apabila untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, himpunan α -cut dari A , yaitu

$$A_\alpha = \{l \in X \mid \mu_{A(l)} \geq \alpha\}.$$

Merupakan himpunan kompak tak kosong di X . Himpunan semua *approximate quantity* dinotasikan dengan $W^*(X)$ dengan $W^*(X) \subseteq F(X)$, dimana $F(X)$ menyatakan semua himpunan fuzzy pada X .

Contoh 2.8

Misalkan $X = [0,2]$ dan didefinisikan himpunan fuzzy A pada X dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{A(l)} = 1 - \frac{|l-1|}{1}, \quad l \in [0,2].$$

Atau

$$\mu_{A(l)} = \mu_{A(l)} = \begin{cases} l, & 0 \leq l \leq 1 \\ 2 - l, & 1 < l \leq 2 \end{cases}$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, himpunan α -cut dari A adalah

$$A_\alpha = \{l \in [0,2] \mid \mu_{A(l)} \geq \alpha\}$$

Karena

$$1 - |l - 1| \geq \alpha$$

maka

$$|l - 1| \leq 1 - \alpha$$

Akibatnya,

$$-(1 - \alpha) \leq l - 1 \leq 1 - \alpha$$

Sehingga

$$\alpha \leq l \leq 2 - \alpha$$

Jadi,

$$A_\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$$

Karena $\alpha \in [0,1]$, maka

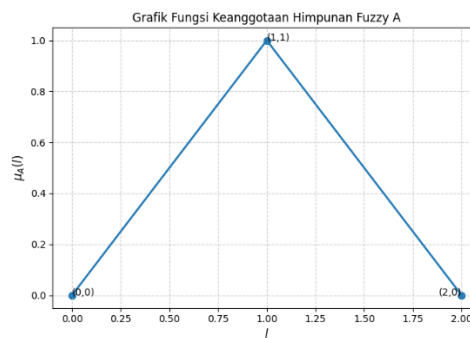
$$\alpha \leq 2 - \alpha$$

Karena A_α merupakan interval tertutup dan terbatas pada $\mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema Heine-Borel, A_α merupakan himpunan kompak.

Dengan demikian, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, himpunan A_α merupakan himpunan kompak tak kosong. Oleh karena itu,

$$A \in W^*(X).$$

Berdasarkan fungsi keanggotaan yang telah didefinisikan, diperoleh grafik himpunan fuzzy A sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.1. Dari grafik tersebut terlihat bahwa setiap α -cut membentuk interval tertutup yang akan digunakan untuk menunjukkan bahwa A merupakan *approximate quantity*.



Gambar 2.1 Grafik fungsi keanggotaan himpunan fuzzy A

Dari Gambar 2.1 terlihat bahwa nilai maksimum fungsi keanggotaan dicapai pada $l = 1$, yaitu $\mu_A(1) = 1$. Selanjutnya, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, himpunan α -cut dari

A berbentuk interval tertutup $[\alpha, 2 - \alpha]$, sehingga merupakan himpunan kompak tak kosong. Oleh karena itu, A merupakan *approximate quantity*.

2.1.2 Pemetaan Fuzzy

Pemetaan fuzzy merupakan perluasan dari konsep fungsi matematis, di mana himpunan hasil dari pemetaan tidak lagi berupa elemen tunggal yang pasti, melainkan berupa himpunan fuzzy, yaitu himpunan yang anggotanya memiliki derajat keanggotaan antara 0 dan 1.

Definisi 2.9 (Azam & Beg, 2009)

Misalkan X dan Y merupakan dua himpunan tak kosong. Suatu pemetaan fuzzy dari X ke Y dinyatakan sebagai:

$$F: X \rightarrow W^*(Y)$$

dengan $W^*(Y)$ menyatakan semua himpunan fuzzy pada Y .

Artinya, untuk setiap elemen $l \in X$, pemetaan F memetakan l ke suatu himpunan pada Y , yang dinotasikan sebagai:

$$F(l) = A_l$$

di mana A_l merupakan himpunan fuzzy pada Y dan setiap A_l memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A(l)}: Y \rightarrow [0,1]$$

Nilai $\mu_{A(l)}(m)$ menunjukkan derajat keanggotaan dari $m \in Y$ terhadap himpunan fuzzy A_l .

Contoh 2.10

Misalkan $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan fuzzy $F: X \rightarrow W^*(Y)$ untuk setiap $l \in X$, dengan $F(l) = A_l$

dimana A_l adalah himpunan fuzzy pada Y yang memiliki fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A_l}(m) = \begin{cases} 0, & m \leq l, \\ \frac{m-l}{k}, & l < m < l+k, \\ 1, & m \geq l+k \end{cases}$$

dengan $k > 0$.

Ambil $l = 2$ dan $k = 4$, sehingga

$$\mu_{A_l}(m) = \begin{cases} 0, & m \leq 2, \\ \frac{m-2}{4}, & 2 < m < 6, \\ 1, & m \geq 6 \end{cases}$$

dengan $k > 0$.

Akan ditunjukkan bahwa F merupakan pemetaan fuzzy, untuk setiap $l \in X$, didefinisikan $f(l) = A_l$ dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A(l)}: Y \rightarrow [0,1]$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mu_{A(l)}(m) \in [0,1]$ untuk setiap $m \in Y$.

1. $m \leq 2$

$$\mu_{A(l)}(m) = 0$$

Jelas bahwa,

$$0 \in [0,1]$$

2. $2 < m < 6$

$$\mu_{A_l}(m) = \frac{m-2}{4}$$

Karena $2 < m < 6$, maka

$$0 < m - 2 < 4$$

$$0 < \frac{m-2}{4} < 1$$

Sehingga

$$\mu_{A_l}(m) \in [0,1]$$

$$3. \quad m \geq 6$$

$$\mu_{A_l}(m) = 1$$

Jelas bahwa,

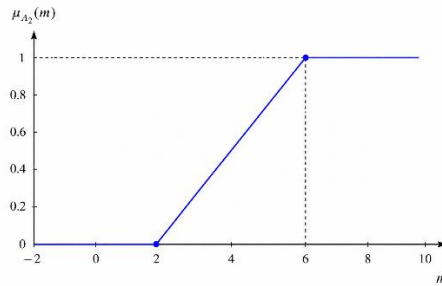
$$1 \in [0,1]$$

Oleh karena itu, $0 \leq \mu_{A_l}(m) \leq 1, \forall m \in Y$. Sehingga μ_{A_l} merupakan fungsi keanggotaan.

Karena untuk setiap $l \in X$, berlaku $F(l) = A_l \in W^*(Y)$, maka

$F: X \rightarrow W^*(Y)$ merupakan pemetaan fuzzy.

Selanjutnya, untuk memberikan ilustrasi yang lebih jelas mengenai fungsi keanggotaan A_l , grafik $A_l(m)$ disajikan pada Gambar 2.1. Grafik ini menunjukkan perubahan derajat keanggotaan elemen m terhadap himpunan fuzzy A_l .



Gambar 2.2 Grafik fungsi keanggotaan $\mu_{A_l}(m)$ untuk $l = 2$ dan $k = 4$

Definisi 2.11 Jarak Hausdorff

Untuk mengukur jarak antara dua himpunan fuzzy digunakan jarak Hausdorff melalui himpunan α -cut.

Misalkan A dan B merupakan himpunan kompak tak kosong pada ruang metrik (X, d) . Jarak Hausdorff antara A dan B didefinisikan sebagai:

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{l \in A} d(l, B), \sup_{m \in B} d(m, A) \right\}$$

dengan

$$d(l, B) = \inf_{m \in B} d(l, m)$$

Dan

$$d(m, A) = \inf_{l \in A} d(m, l)$$

Contoh 2.12

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik $d(l, m) = |l - m|$

Diberikan $A_\alpha = [0, 1]$, dan $B_\alpha = [1, 2]$. Akan dicari jarak Hausdorff antara A_α dan B_α .

Berdasarkan definisi jarak titik ke himpunan, untuk setiap $l \in A_\alpha$ berlaku

$$d(l, B_\alpha) = \inf_{m \in B_\alpha} |l - m|$$

Karena $B_\alpha = [1, 2]$, maka titik pada B_α yang paling dekat dengan $l \in [0, 1]$ adalah $m = 1$. Maka

$$d(l, B_\alpha) = |l - 1|$$

selanjutnya

$$\sup_{l \in A_\alpha} d(l, B_\alpha) = \sup_{l \in [0, 1]} |l - 1|$$

Nilai maksimum dicapai saat $l = 0$, sehingga

$$\sup_{l \in A_\alpha} d(l, B_\alpha) = 1$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $m \in B_\alpha$,

$$d(m, A_\alpha) = \inf_{l \in A_\alpha} |m - l|$$

Karena $A_\alpha = [0, 1]$, maka titik pada A_α yang dekat dengan $m \in [1, 2]$ yaitu $l = 1$.

Maka diperoleh

$$d(m, A_\alpha) = |m - 1|$$

sehingga

$$\sup_{m \in B_\alpha} d(m, A_\alpha) = \sup_{m \in [1, 2]} |m - 1|$$

Nilai maksimum dicapai saat $m = 2$, sehingga

$$\sup_{m \in B_\alpha} d(m, A_\alpha) = 1$$

Berdasarkan definisi jarak Hausdorff,

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{l \in A} d(l, B), \sup_{m \in B} d(m, A) \right\}$$

Maka diperoleh

$$H(A, B) = \max\{1, 1\} = 1$$

Dengan demikian,

$$D_\alpha(A, B) = 1.$$

Definisi 2.13 Jarak pada Himpunan Fuzzy

Misalkan (X, d) ruang metrik dan $A, B \in W^*(X)$. Untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$, didefinisikan:

$$P_\alpha(l, A) = \inf\{d(l, m) \mid m \in A_\alpha\},$$

Yang disebut jarak titik l terhadap himpunan fuzzy A .

Selanjutnya,

$$D_\alpha(A, B) = H(A_\alpha, B_\alpha)$$

Dengan H menyatakan jarak Hausdorff antara A_α dan B_α .

Contoh 2.14

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dengan metrik

$$d(l, m) = \frac{1 - |l, m|}{1 + |l - m|}, \quad l, m \in X$$

Didefinisikan dua himpunan fuzzy $A, B \in W^*(X)$ dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - |x - 2|, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{lainnya,} \end{cases}$$

dan

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 - |x - 4|, & 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Akan ditentukan jarak titi terhadap himpunan fuzzy dan jarak antara dua

himpunan fuzzy untuk $\alpha = 0,5$

Berdasarkan definisi 2.12, diperoleh

$$A_{0,5} = \{x \in \mathbb{R} | \mu_A(x) \geq 0,5\} = [1,5,2,5],$$

dan

$$B_{0,5} = \{x \in \mathbb{R} | \mu_B(x) \geq 0,5\} = [3,5,4,5].$$

Selanjutnya, ambil $l = 2$. Maka jarak titik l terhadap himpunan fuzzy B adalah

$$P_{0,5}(2, B) = \inf\{d(2, m) | m \in B_{0,5}\}$$

Karena titik terdekat dari 2 ke interval $[3,5,4,5]$ adalah $m = 3,5$, maka

$$P_{0,5}(2, B) = d(2, 3,5) = \frac{|2 - 3,5|}{1 + |2 - 3,5|} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

Jadi,

$$P_{0,5}(2, B) = 0,6.$$

Selanjutnya akan dihitung jarak antara himpunan fuzzy A dan B . Berdasarkan

Definisi 2.12

$$D_{0,5}(A, B) = H(A_{0,5}, B_{0,5}),$$

Dengan H menyatakan jarak hausdorff.

Karena

$$A_{0,5} = [1,5,2,5] \quad \text{dan} \quad B_{0,5} = [3,5,4,5]$$

maka

$$\sup_{x \in A_{0,5}} \inf_{y \in B_{0,5}} d(x, y) = d(1,5, 3,5) = \frac{|1,5 - 3,5|}{1 + |1,5 - 3,5|} = \frac{2}{3},$$

dan

$$\sup_{x \in A_{0,5}} \inf_{y \in B_{0,5}} d(x, y) = d(2,5, 4,5) = \frac{|2,5 - 4,5|}{1 + |2,5 - 4,5|} = \frac{2}{3},$$

Dengan demikian,

$$H(A_{0,5}, B_{0,5}) = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

Sehingga diperoleh

$$D_{0,5}(A, B) = \frac{2}{3}$$

Jadi, untuk $\alpha = 0,5$

$$P_{0,5}(2, B) = 0,6$$

dan

$$D_{0,5}(A, B) = \frac{2}{3}$$

2.1.3 Ruang Metrik

Dalam bagian ini dijelaskan mengenai definisi dan contoh dari ruang metrik.

Definisi 2.15 (Bartle & Sherbert, 2011)

Ruang metrik dapat dinyatakan sebagai pasangan (X, d) di mana X merupakan himpunan tak kosong dan d merupakan metrik yang didefinisikan pada $X \times X$ untuk setiap $l, m, n \in X$, fungsi d memenuhi syarat-syarat berikut:

- a. $d(l, m) \geq 0$
- b. $d(l, m) = 0 \Leftrightarrow l = m$;
- c. $d(l, m) = d(m, l)$ untuk semua $l, m \in X$;
- d. $d(l, m) \leq d(l, n) + d(n, m)$, (ketaksamaan segitiga)

untuk semua $l, m, n \in X$.

Setiap fungsi yang memenuhi ketiga sifat ini disebut sebagai ruang metrik.

Contoh 2.16

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$. Didefinisikan fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2},$$

untuk setiap $(l_1, l_2), (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$.

Akan dibuktikan bahwa d merupakan ruang metrik.

$$1. \quad d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) \geq 0$$

Karena kuadrat suatu bilangan selalu bernilai non-negatif, maka

$$(l_1 - m_1)^2 \geq 0 \quad \text{dan} \quad (l_2 - m_2)^2 \geq 0$$

Sehingga

$$(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2 \geq 0$$

Akar kuadrat dari bilangan non-negatif juga bernilai tidak negatif, maka

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) \geq 0$$

dan karena $(l_1, l_2), (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$ maka terbukti

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) < \infty.$$

$$2. \quad d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = 0 \Leftrightarrow l_1, l_2 = m_1, m_2$$

$$(\Rightarrow) \text{ jika } d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = 0$$

akan ditunjukkan bahwa $l_1, l_2 = m_1, m_2$

$$\sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2} = 0,$$

Maka

$$(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2 = 0$$

Karena jumlah dua bilangan non-negatif bernilai nol, maka

$$(l_1 - m_1)^2 \text{ dan } (l_2 - m_2)^2 = 0$$

akibatnya

$$l_1 = m_1 \text{ dan } l_2 = m_2$$

sehingga

$$(l_1, l_2) = (m_1, m_2)$$

($\Leftrightarrow$) jika $(l_1, l_2) = (m_1, m_2)$

akan ditunjukkan bahwa $d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = 0$

$$l_1 = m_1 \text{ dan } l_2 = m_2$$

Maka

$$\begin{aligned} d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) &= \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2} \end{aligned}$$

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = 0$$

Jadi terbukti bahwa $d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = 0 \Leftrightarrow l_1, l_2 = m_1, m_2$

$$3. \quad d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = d((m_1, m_2), (l_1, l_2))$$

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = \sqrt{(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2}$$

karena

$$(l_1 - m_1)^2 = (l_1 - m_1)^2 \text{ dan } (l_2 - m_2)^2 = (l_2 - m_2)^2$$

maka

$$\begin{aligned} d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) &= \sqrt{(m_1 - l_1)^2 + (m_2 - l_2)^2} \\ &= d((m_1, m_2), (l_1, l_2)) \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) = d((m_1, m_2), (l_1, l_2))$$

$$4. \quad d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) \leq d((l_1, l_2), (n_1, n_2)) + d((n_1, n_2), (m_1, m_2))$$

$\forall (l_1, l_2), (m_1, m_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$, menggunakan ketaksamaan segitiga

$$\sqrt{(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2} \leq \sqrt{(l_1 - n_1)^2 + (l_2 - n_2)^2} + \sqrt{(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2}$$

Maka

$$d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) \leq d((l_1, l_2), (n_1, n_2)) + d((n_1, n_2), (m_1, m_2))$$

Sehingga terbukti bahwa $d((l_1, l_2), (m_1, m_2)) \leq d((l_1, l_2), (n_1, n_2)) + d((n_1, n_2), (m_1, m_2))$.

Karena d memenuhi 1-4 maka $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang metrik.

Contoh 2.17

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan fungsi jarak didefinisikan sebagai;

$$d(l, m) = \frac{|l - m|}{1 + |l - m|}$$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

1. $d(x, y) \geq 0$.

Untuk setiap $l, m \in \mathbb{R}$, $|l - m| \geq 0$ dan $1 + |l - m| > 0$ karena dari definisi $|l - m| \geq 0$

Karena pembilang tidak negatif dan penyebut positif, sehingga

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \geq 0$$

maka terbukti bahwa $d(l, m) = \frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \geq 0$

2. $d(l, m) = 0$ jika dan hanya jika $l = m$

$\Rightarrow$ Jika $d(l, m) = 0$, akan dibuktikan bahwa $l = m$

Perhatikan bahwa:

$$d(l, m) = 0$$

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} = 0$$

Suatu pecahan bernilai nol jika dan hanya jika pembilangnya nol,
sehingga

$$|l - m| = 0$$

maka diperoleh

$$l = m$$

$\Leftrightarrow$ Jika $l = m$, akan dibuktikan $d(l, m) = 0$,

$$d(l, l) = \frac{|l - l|}{1 + |l - l|} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Maka terbukti bahwa

$$d(l, m) = 0 \Leftrightarrow l = m.$$

3. $d(l, m) = d(m, l)$

$$d(l, m) = \frac{|l - m|}{1 + |l - m|}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |l - m| &= |-(m - l)| \\ &= |(-1)(m - l)| \\ &= |-1||m - l| \\ &= |m - l| \end{aligned}$$

karena

$$|l - m| = |m - l|$$

Maka:

$$\begin{aligned} d(l, m) &= \frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \\ &= \frac{|m - l|}{1 + |m - l|} \\ &= d(m, l) \end{aligned}$$

$$4. \quad d(l, m) \leq d(l, n) + d(n, m)$$

$$d(l, m) = \frac{|l - m|}{1 + |l - m|}$$

akan dibuktikan

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \leq \frac{|l - n|}{1 + |l - n|} + \frac{|n - m|}{1 + |n - m|}$$

Menggunakan ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak:

$$|l - m| \leq |l - n| + |n - m|$$

Sehingga

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \leq \frac{|l - n| + |n - m|}{1 + |l - n| + |n - m|}$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$\frac{|l - n| + |n - m|}{1 + |l - n| + |n - m|} \leq \frac{|l - n|}{1 + |l - n|} + \frac{|n - m|}{1 + |n - m|}$$

Misalkan $a = |l - n| \geq 0$ dan $b = |n - m| \geq 0$

Ruas kanan setelah disamakan penyebutnya:

$$\frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} = \frac{a(1 + b) + b(1 + a)}{1 + a + (1 + b)} = \frac{a + b + 2ab}{1 + a + b + ab}$$

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a + b + 2ab}{1 + a + b + ab}$$

Masukkan persamaan awal diperoleh

$$\frac{|l - n| + |n - m|}{1 + |l - n| + |n - m|} \leq \frac{|l - n| + |n - m| + 2|l - n||n - m|}{1 + |l - n| + |n - m| + |l - n||n - m|}$$

maka

$$\frac{|l - n| + |n - m|}{1 + |l - n| + |n - m|} \leq \frac{|l - n|}{1 + |l - n|} + \frac{|n - m|}{1 + |n - m|}$$

Karena

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \leq \frac{|l - n| + |n - m|}{1 + |l - n| + |n - m|}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa

$$\frac{|l - m|}{1 + |l - m|} \leq \frac{|l - n|}{1 + |l - n|} + \frac{|n - m|}{1 + |n - m|}$$

Dikarenakan keempat aksioma terpenuhi maka $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

2.1.4 Ruang Quasi Metrik

Ruang quasi metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik yang mempertahankan sifat-tertentu dari metrik. Definisi ruang quasi metrik pada ruang X adalah sebagai berikut

Definisi 2.18 (Romaguera, 2024)

Suatu quasi metrik pada himpunan X adalah fungsi $d_q: X \times X$ ke $\mathbb{R}$ yang memenuhi dua kondisi berikut $\forall l, m, n \in X$:

- a. $d_q(l, m) \geq 0$
- b. $d_q(l, m) = d_q(m, l) = 0 \Leftrightarrow l = m$;
- c. $d_q(l, m) \leq d_q(l, n) + d_q(n, m)$.

Jika d memenuhi syarat (a), (b) dan (c) maka (X, d_q) disebut ruang quasi metrik.

Contoh 2.19

Diberikan $X = [0, 1]$ dan pemetaan $d_q: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ yang didefinisikan oleh

$$d_q(l, m) = |l - m| + |l|, \quad \forall l, m, n \in X$$

tunjukkan bahwa (X, d_q) adalah ruang quasi metrik, akan tetapi bukan termasuk ruang metrik.

Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa (X, d_q) adalah ruang quasi metrik.

Ambil sebarang $l, m, n \in X$.

1. Karena $d_q(l, m) = d_q(m, l)$ berarti

$$d_q(l, m) = |l - m| + |l|$$

$$d_q(l, m) = |m - l| + |m|$$

Dengan memperhatikan sifat nilai mutlak selalu tidak negatif, dan jumlah dua bilangan tak negatif hanya mungkin nol bila keduanya nol, maka berlaku:

$$|l - m| + |l| = 0 \Leftrightarrow |l - m| = 0 \wedge |l| = 0 \Leftrightarrow l = m \wedge l = 0$$

dan

$$|m - l| + |m| = 0 \Leftrightarrow |m - l| = 0 \wedge |m| = 0 \Leftrightarrow m = l \wedge m = 0$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $l = m$.

2. Dengan memanfaatkan sifat ketaksamaan segitiga, diperoleh:

$$\begin{aligned} d_q(l, m) &= |l - m| + |l| \\ &= |l - n + n - m| + |l| \\ &\leq |l - n| + |n - m| + |l| \\ &\leq |l - n| + |n - m| + |l| + |n| \\ &= |l - n| + |l| + |n - m| + |n| \\ &= d_q(l, n) + d_q(n, m) \end{aligned}$$

Karena kedua syarat terpenuhi, maka d_q adalah suatu quasi metrik pada X , dengan demikian pasangan (X, d_q) adalah ruang quasi metrik.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pasangan (X, d_q) bukan merupakan ruang metrik. Perhatikan bahwa :

$$d_q(l, m) = |l - m| + |l|, \quad d_q(m, l) = |m - l| + |m|$$

Secara umum, $|l - m| = |m - l|$, tetapi $|l|$ tidak selalu sama $|m|$.

Dengan demikian, fungsi d tidak memenuhi syarat dasar metrik, yaitu $d_q(l, m) \neq d_q(m, l)$. Oleh karena itu pasangan (X, d_q) bukanlah ruang metrik.

2.1.5 Ruang Quasi Metrik Kiri

Definisi 2.20 (Kamal & Abd-Elal, 2021)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong, dan $d_{lq} : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ adalah suatu fungsi yang disebut metrik pada X . Pasangan (X, d_{lq}) dinamakan ruang metrik jika memenuhi:

- a. $d_{lq}(l, m) = 0$ atau $d_{lq}(m, l) = 0, \Leftrightarrow l = m$
- b. $d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$

Jika fungsi d memenuhi syarat diatas, maka (X, d_{lq}) disebut ruang quasi metrik kiri.

Contoh 2.21

Ambil $X = \{l: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} | l \text{ fungsi tangga}\}$. Didefinisikan fungsi

$$d_{lq}(l, m) = \sup_{x \in [0,1]} |m(x) - l(x)|.$$

Karena menggunakan nilai mutlak, maka d_{lq} selalu bernilai non-negatif.

Misalkan

$$l(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$m(x) = \begin{cases} e, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 + e, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

dengan $e \approx 2.71828$

untuk setiap $x \in [0,1]$, diperoleh

$$|l(x) - m(x)| = \begin{cases} |0 - e| = e, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ |1 - (1 + e)| = e, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Sehingga

$$|l(x) - m(x)| = e$$

untuk setiap $x \in [0,1]$.

Akibatnya,

$$d_{lq}(l, m) = \sup_{x \in [0,1]} |l(x) - m(x)| = \sup\{e\} = e.$$

Dengan demikian, jarak antara fungsi tangga l dan m pada ruang lq -metrik X , d_{lq} adalah

$$d_{lq}(l, m) = e.$$

Akan dibuktikan bahwa d_{lq} adalah ruang quasi metrik kiri.

$$1. \quad d_{lq}(l, m) = 0 \text{ atau } d_{lq}(m, l) = 0, \Leftrightarrow l = m$$

($\Rightarrow$) jika $d_{lq}(l, m) = 0$ akan ditunjukkan bahwa $l = m$

Misalkan

$$d_{lq}(l, m) = 0,$$

Maka

$$\sup_{x \in [0,1]} |l(x) - m(x)| = 0$$

Karena nilai mutlak selalu non-negatif, maka

$$|l(x) - m(x)| = 0$$

untuk setiap $x \in [0,1]$.

Akibatnya

$$l(x) = m(x)$$

Dengan demikian,

$$l = m$$

($\Leftarrow$) jika $l = m$ akan ditunjukkan bahwa $|l(x) - m(x)| = 0$

Untuk setiap $x \in [0,1]$, sehingga

$$d_{lq}(l, m) = \sup_{x \in [0,1]} 0 = 0$$

Karena

$$d_{lq}(l, m) = d_{lq}(m, l),$$

maka

$$d_{lq}(f, g) = 0 \text{ atau } d_{lq}(g, f) = 0 \Leftrightarrow f = g.$$

Jadi aksioma 1 terpenuhi.

$$2. \quad d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$$

Ambil sembarang $l, m, n \in X$. Untuk setiap $x \in [0,1]$,

$$l(x) - m(x) = [l(x) - n(x) + [n(x) - m(x)]].$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|l(x) - m(x)| \leq |l(x) - n(x)| + |n(x) - m(x)|$$

Selanjutnya, dengan mengambil supremum pada kedua ruas diperoleh

$$\sup_{x \in [0,1]} |l(x) - m(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |l(x) - n(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |n(x) - m(x)|$$

Berdasarkan definisi fungsi jarak d_{lq} , diperoleh

$$d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$$

Karena

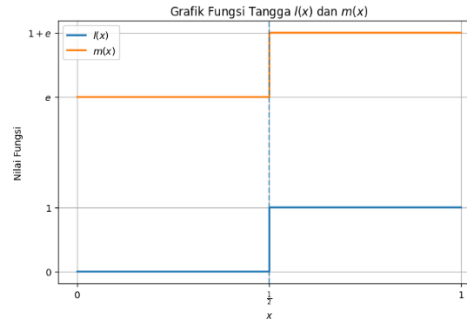
$$d_{lq}(l, n) = d_{lq}(n, l)$$

Maka

$$d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m).$$

Dengan demikian aksioma 2 terpenuhi.

Untuk memberikan gambaran visual mengenai fungsi tangga l dan m yang digunakan pada contoh di atas, grafik kedua fungsi ditunjukkan pada gambar



Gambar 2.3 Grafik fungsi tangga $l(x)$ dan $m(x)$

Berdasarkan gambar 2.3 terlihat bahwa fungsi l dan m merupakan fungsi tangga yang bernilai konstan pada setiap subinterval dan mengalami loncatan pada titik $x = \frac{1}{2}$. Selain itu, fungsi m berada tepat e satuan di atas fungsi l pada titik $x \in [0, 1]$.

Oleh karena itu, untuk setiap $x \in [0, 1]$ berlaku

$$|l(x) - m(x)| = e$$

Akibatnya,

$$d_{lq}(l, m) = \sup_{x \in [0, 1]} |l(x) - m(x)| = \sup\{e\} = e.$$

Dengan demikian, jarak antara fungsi tangga l dan m pada ruang lq -metrik adalah e .

2.1.6 Ruang Quasi Metrik Kanan

Definisi 2.22 (Kamal & Abd-Elal, 2021)

Misalkan $d_{rq} : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fungsi yang memenuhi :

- $d_{rq}(l, m) = 0$ atau $d_{rq}(m, l) = 0 \Leftrightarrow l = m$
- $d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$

Maka (X, d) disebut sebagai ruang quasi metrik kanan.

Contoh 2.23

Ambil $X = \mathbb{R}$ dan didefinisikan fungsi:

$$d_{rq}(l, m) = \begin{cases} 0, & \text{jika } l = m \\ |m - l| + 1, & \text{jika } l \neq m \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa d_{rq} adalah ruang quasi metrik kanan.

$$1. \quad d_{rq}(l, m) = 0 \text{ atau } d_{rq}(m, l) = 0 \Leftrightarrow l = m$$

($\Rightarrow$) jika $d_{rq}(l, m) = 0$ akan ditunjukkan bahwa $l = m$

$$d_{rq}(l, m) = 0, \text{ jika } l = m$$

$$d_{rq}(l, m) = |m - l| + 1, \text{ jika } l \neq m$$

Berdasarkan definisi nilai 0 jika , jika $l = m$

maka

$$l = m$$

($\Leftarrow$) jika $l = m$ akan ditunjukkan bahwa $d_{rq}(l, m) = 0$

Karena $l = m$, maka

$$d_{rq}(l, m) = 0$$

Jadi terbukti bahwa $d_{rq}(l, m)$ atau $d_{rq}(m, l) = 0 \Leftrightarrow l = m$

$$2. \quad d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$$

Untuk $l = m$

$\forall l, m, n \in X$ berlaku ketaksamaan segitiga nilai mutlak:

$$|m - l| \leq |m - n| + |n - l| = |n - m| + |n - l|$$

Tambah 1 pada kedua ruas maka,

$$|m - l| + 1 \leq |n - m| + |n - l| + 1 \leq |n - m| + |n - l| + 2$$

jadi

$$\begin{aligned}
d_{rq}(l, m) &= |m - l| + 1 \leq |n - l| + |n - m| + 2 \\
&= d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$$

Maka terbukti bahwa $d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$.

2.1.7 Barisan Konvergen

Definisi 2.24 Barisan Konvergen (Maharani, 2025)

Suatu barisan (l_n) pada ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat elemen $l \in X$ sehingga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, l) = 0$$

Di mana notasi x merupakan nilai limit dari (l_n) , dapat dituliskan sebagai:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, l) = l$$

Atau

$$l_n \rightarrow l$$

Sebaliknya, jika suatu barisan (l_n) tidak konvergen, maka disebut barisan divergen.

Contoh 2.25

Misalkan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik dengan $d(l, m) = |l - m|$ dan $l = 0$.

Terdapat barisan (l_n) dengan $(l_n) = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa (l_n) konvergen ke 0.

Akan ditunjukkan bahwa (l_n) konvergen ke 0. Misalkan ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Berdasarkan sifat Archimedean, terdapat bilangan bulat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Maka, jika $n \geq N$ didapat

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Akibatnya, apabila $n \geq N$, maka berlaku

$$d(l_n, 0) = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Dengan demikian, terbukti bahwa barisan $(l_n) \rightarrow 0$.

Contoh 2.26

Misalkan diberikan barisan

$$l_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-3n}$$

Akan ditunjukkan bahwa barisan (l_n) konvergen.

Menggunakan rumus dasar limit dari barisan (l_n)

Diketahui bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

karena

$$l_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3n} = \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right]^{-3}$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = (e^2)^{-3} = e^{-6}$$

$$l_n \rightarrow e^{-6}$$

Jadi, barisan l_n konvergen ke e^{-6} .

2.1.8 Barisan Cauchy

Definisi 2.27 (Kreyszig, 1978)

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) memenuhi sifat Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $m, n > N$.

Setiap barisan yang konvergen di ruang metrik (X, d) adalah sebuah barisan Cauchy.

Contoh 2.28

Suatu barisan (l_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ di ruang metrik (X, d) pada contoh 2.3 adalah barisan Cauchy.

Akan ditunjukkan bahwa (l_n) merupakan barisan Cauchy.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedean terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N > \frac{2}{\varepsilon}$, jika $n, m \geq N$

Maka,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \text{ dan } \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$$

Sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Jadi terbukti barisan l_n Adalah barisan Cauchy.

Contoh 2.29

Misalkan diberikan barisan

$$l_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-3n}$$

Akan ditunjukkan bahwa (l_n) merupakan barisan Cauchy.

Karena

$$l_n \rightarrow e^{-6},$$

maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$,

$$|l_n - e^{-6}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $m, n \geq N$, berlaku

$$|l_n - e^{-6}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$|l_m - e^{-6}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned} |l_n - l_m| &= |l_n - e^{-6} + e^{-6} - l_m| \\ &\leq |l_n - e^{-6}| + |e^{-6} - l_m|. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$|l_n - l_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

akibatnya

$$d(l_n, l_m) = \frac{|l_n - l_m|}{1 + |l_n - l_m|}$$

karena

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

maka

$$d(l_n, l_m) = \frac{|l_n - l_m|}{1 + |l_n - l_m|} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

karena

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \varepsilon$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka diperoleh $d(l_n, l_m) < \varepsilon$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq N$,

$$d(l_n, l_m) < \varepsilon$$

Jadi, (l_n) merupakan barisan Cauchy.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran dan Hadits

Dalam bab ini, membahas tentang bagaimana Al-Qur'an berperan menjadi sumber utama dalam ajaran Islam dan panduan bagi kehidupan orang muslim, menjelaskan pentingnya keteraturan, keseimbangan, arah, serta proses perubahan dalam kehidupan manusia yang sejalan dengan konsep ruang metrik yang dijelaskan pada bab sebelumnya. Al-Qur'an tidak hanya berfungsi sebagai petunjuk spiritual, tetapi juga memberikan landasan nilai dalam memahami keteraturan alam semesta dan dinamika kehidupan manusia. Hal ini sangat relevan dengan konsep pemetaan fuzzy serta ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan yang sama-sama membahas tentang hubungan, kedekatan, dan perubahan kondisi secara bertahap.

Dalam perspektif Islam, kehidupan manusia selalu berada dalam proses perubahan. Konsep pemetaan fuzzy menggambarkan bahwa suatu elemen tidak selalu berada dalam keadaan mutlak benar atau salah, tetapi memiliki derajat keanggotaan tertentu. Hal ini sejalan dengan realitas kehidupan manusia yang tidak selalu berada pada tingkat keimanan, amal, dan usaha yang sama. Ada saat manusia berada pada kondisi sangat baik, ada pula saat menurun, sehingga diperlukan usaha

yang terus-menerus untuk memperbaiki diri. Allah SWT menegaskan pentingnya usaha dalam firman-Nya dalam surah An-Najm ayat 39:

وَأَنْ لَّيْسَ لِلْإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَى ﴿٣٩﴾

Artinya:

“Bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya.”

Berdasarkan Tafsir Kementerian Agama RI dan Tafsir Al-Misbah, ayat ini menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh manusia sangat bergantung pada usaha yang dilakukan. Dalam tafsirnya, ayat ini menegaskan prinsip keadilan Allah SWT bahwa setiap manusia akan mendapatkan balasan sesuai dengan jerih payahnya. Tidak ada hasil tanpa proses, dan tidak ada keberhasilan tanpa perjuangan. Hal ini sangat selaras dengan konsep matematika dalam pemetaan fuzzy, di mana perubahan nilai tidak terjadi secara tiba-tiba, tetapi melalui proses bertahap yang dipengaruhi oleh input atau usaha tertentu. Selain itu, Allah SWT juga berfirman dalam surah Al-Insyirah ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya:

“Maka sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan.”

Menurut Tafsir Kementerian Agama RI, ayat ini menjelaskan bahwa setiap kesulitan yang dialami manusia pasti disertai dengan kemudahan dari Allah SWT. Kesulitan bukanlah akhir dari perjalanan, melainkan bagian dari proses menuju kemudahan dan keberhasilan. Hal ini dapat dianalogikan dengan proses dalam ruang metrik yang menunjukkan adanya jarak atau perbedaan kondisi yang harus dilalui sebelum mencapai titik tujuan. Dengan kata lain, setiap proses dalam

kehidupan maupun dalam penelitian ilmiah membutuhkan tahapan yang tidak selalu mudah, tetapi selalu disertai solusi dari Allah SWT.

Konsep ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan menunjukkan adanya ketidaksimetrian dalam jarak, yaitu jarak dari satu titik ke titik lain tidak selalu sama dengan arah sebaliknya. Dalam kehidupan manusia, hal ini mencerminkan bahwa jalan menuju kebaikan pada dasarnya Allah memudahkan dan tidak memerlukan biaya maupun beban materi yang besar, seperti beribadah dan berbuat kebaikan yang dapat dilakukan dengan sederhana namun bernilai tinggi. Sebaliknya, keburukan memang sering tampak mudah dilakukan, tetapi sesungguhnya membawa konsekuensi yang lebih berat, baik secara moral, spiritual, maupun dampak dalam kehidupan. Hal ini sejalan dengan firman Allah SWT surah Az-Zumar ayat 53:

قُلْ يُعْبَادِي الَّذِينَ أَسْرَفُوا عَلَىٰ أَنْفُسِهِمْ لَا تَقْنَطُوا مِنْ رَحْمَةِ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ يَغْفِرُ الذُّنُوبَ جَمِيعًا إِنَّهُ هُوَ الْعَفُورُ
الرَّحِيمُ ﴿٥٣﴾

Artinya:

“Katakanlah (Nabi Muhammad), “Wahai hamba-hamba-Ku yang melampaui batas (dengan menzalimi) dirinya sendiri, janganlah berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya Allah mengampuni dosa semuanya. Sesungguhnya Dialah Yang Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.”

Ayat ini memiliki makna bahwa manusia tidak boleh berputus asa meskipun telah melakukan banyak kesalahan. Allah SWT tetap membuka pintu ampunan bagi hamba-Nya yang ingin kembali. Dalam tafsirnya, ayat ini menegaskan luasnya rahmat Allah SWT dan kesempatan bagi manusia untuk memperbaiki diri. Hal ini sangat relevan dengan konsep pemetaan fuzzy, karena suatu keadaan tidak bersifat tetap, tetapi dapat berubah secara bertahap menuju kondisi yang lebih baik. Selain itu, Allah SWT juga berfirman dalam surah Al-Ankabut ayat 69:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

Artinya:

“Orang-orang yang berusaha dengan sungguh-sungguh untuk (mencari keridaan) Kami benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan Kami. Sesungguhnya Allah benar-benar bersama orang-orang yang berbuat kebaikan.”

Dalam tafsirnya, ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT akan memberikan petunjuk dan kemudahan kepada orang-orang yang bersungguh-sungguh dalam berusaha. Kesungguhan dalam beramal dan menuntut ilmu akan membuka jalan kemudahan dari Allah SWT. Hal ini sejalan dengan konsep konvergen dalam ruang quasi metrik, di mana suatu proses akan mendekati tujuan apabila dilakukan secara konsisten dan berkelanjutan. Selain itu, Rasulullah SAW juga bersabda:

“Barang siapa menempuh jalan untuk mencari ilmu, maka Allah akan mudahkan baginya jalan menuju surga.” (HR. Muslim)

Hadis ini menunjukkan bahwa perjalanan dalam mencari ilmu merupakan bentuk ibadah yang sangat mulia. Dalam konteks penelitian ini, proses mempelajari konsep pemetaan fuzzy dan ruang quasi metrik dapat dipahami sebagai bagian dari perjalanan ilmiah yang bernilai spiritual, karena di dalamnya terdapat usaha memahami keteraturan ciptaan Allah SWT. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa konsep pemetaan fuzzy serta ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan tidak hanya memiliki makna matematis, tetapi juga memiliki makna filosofis dan spiritual dalam Islam. Ketidaksimetrian, perubahan, kedekatan, serta proses dalam konsep tersebut dapat menjadi refleksi dari kehidupan manusia yang penuh dengan usaha, doa, harapan, dan perjalanan menuju kebaikan.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Adapun definisi dan teorema yang akan dibahas yaitu :

1. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Fuzzy dalam Ruang Quasi Metrik Kiri

Lemma Misalkan (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik kiri dan misalkan

$x \in X, A \in W^*(X)$. Maka $l \in A_\alpha$ yaitu $\{l\} \subseteq A \Leftrightarrow P_\alpha(l, A) = 0$.

Lemma Misalkan (X, d) merupakan ruang quasi metrik kiri dan misalkan $\{l_0\} \subseteq A$. Maka $P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B)$, untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Lemma Misalkan (X, d_{lq}) merupakan sebuah quasi metrik kiri, $T : X \rightarrow W^*(X)$ merupakan sebuah pemetaan fuzzy dan $x_0 \in X$. Maka terdapat $x_1 \in X$ sedemikian sehingga $(x_1) \subset T(l_0)$.

Lemma Misalkan (X, d_{lq}) merupakan sebuah ruang quasi metrik kiri. Maka setiap subbarisan dari barisan yang konvergen dalam lq di X adalah konvergen dalam lq .

Lemma Misalkan (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik kiri dan misalkan $A \in W^*(X)$. Maka $P_\alpha(l, A) \leq d(n, l) + P_\alpha(n, A)$, untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

2. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Fuzzy dalam Ruang Quasi Metrik kanan.

Lemma Misalkan (X, d_{rq}) sebuah ruang quasi metrik kanan dan misalkan $l \in X, A \in W^*(X)$. Maka $l \in A_\alpha$ yaitu $\{l\} \subseteq A \Leftrightarrow P_\alpha(l, A) = 0$.

Lemma Misalkan (X, d_{rq}) sebuah ruang quasi metrik kanan dan misalkan $\{l_0\} \subseteq A$. Maka $P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B)$, untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Lemma Misalkan (X, d_{rq}) merupakan ruang quasi metrik kanan, $T : X \rightarrow W^*(X)$ merupakan pemetaan fuzzy dan $l_0 \in X$. Maka terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga $(l_n) \subset T(l_0)$.

Lemma Misalkan (X, d_{rq}) merupakan sebuah ruang quasi metrik kanan.

Maka setiap barisan konvergen dalam r_q di X adalah konvergen dalam r_q .

Lemma Misalkan (X, d_{r_q}) merupakan sebuah ruang quasi metrik kanan dan misalkan $A \in W^*(X)$. Maka untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan menggunakan metode kualitatif atau penelitian kajian pustaka, yaitu kegiatan dengan pengumpulan beberapa artikel, membaca, menganalisa serta mengelolah jurnal tertulis mengenai teorema ruang quasi metrik.

3.2 Pra Penelitian

Dalam proses menyiapkan penelitian ini, peneliti menggunakan beberapa tahapan. Tahapan perisapan melibatkan analisis terhadap masalah yang ada, mengumpulkan berbagai referensi, menyusun proposal penelitian, dan terlibat dalam sesi bimbingan dengan pembimbing skripsi.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian yang akan dilakukan diuraikan sebagai berikut:

1. Mengkaji konsep dasar dan memahami isi jurnal terkait topik penelitian
2. Mengumpulkan referensi yang relevan terkait pembuktian teorema ruang quasi metrik.
3. Memaparkan dan menyusun definisi serta sifat-sifat mengenai ruang metrik, ruang quasi metrik, fuzzy mapping, konvergensi barisan dalam ruang quasi metrik.
4. Menganalisis serta membuktikan sifat-sifat ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan, yang mencakup ketidaksimetrian, hubungan antara keduanya, serta karakteristik yang membedakannya dari ruang metrik, sekaligus penerapannya dalam pembuktian teorema-teorema tertentu.
5. Mencari dan mencantumkan ayat-ayat Al-Qur'an yang terkait penelitian.

6. Mengkaji tentang teori integrasi Ruang quasi metrik kiri dan kanan dalam Al-Qur'an.
7. Menyimpulkan kesimpulan dari hasil analisis dan pembuktian untuk menambah pemahaman yang lebih mendalam terkait struktur serta karakteristik ruang quasi metrik.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Quasi Metrik Kiri

Pada subbab ini akan dibahas beberapa sifat yang dimiliki oleh ruang quasi metrik kiri. Berdasarkan pada definisi 2.20 dinamakan ruang quasi metrik kiri jika memenuhi syarat berikut

- a. $d_{lq}(l, m) = 0$ atau $d_{lq}(m, l) = 0, \Leftrightarrow l = m$
- b. $d_{lq}(l, m) \leq d_{lq}(n, l) + d_{lq}(n, m)$

Jika fungsi d memenuhi syarat di atas, maka (X, d_{lq}) disebut ruang quasi metrik kiri.

Sebelum memasuki pembahasan yang lebih mendalam, terlebih dahulu dipaparkan sifat-sifat ruang quasi metrik kiri sebagai dasar pemahaman.

Remark 4.1 menunjukkan bahwa ruang lq metrik merupakan generalisasi dari ruang metrik. Hal ini karena setiap metrik memenuhi seluruh aksioma lq-metrik, sehingga setiap ruang metrik adalah ruang lq-metrik. Namun, tidak setiap ruang lq-metrik merupakan ruang metrik karena ruang lq-metrik tidak mensyaratkan sifat simetri pada fungsi jaraknya.

Definisi 4.2 Konvergen pada Ruang lq-metrik

Misalkan (X, d_{lq}) adalah suatu ruang lq-metrik, barisan (l_n) lq-konvergen ke $l \in X$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{lq}(l_n, l) = 0.$$

Dalam hal ini, l disebut lq-limit dari barisan (l_n) .

Contoh 4.3

Misalkan diberikan ruang lq-metrik (X, d_{lq}) dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan

$$d_{lq}(l, m) = \sqrt{(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2}$$

Karena setiap ruang metrik merupakan kasus khusus dari ruang lq-metrik dan rq-metrik, maka contoh di atas dapat digunakan untuk konsep konvergen dan barisan cauchy.

dan diberikan barisan

$$l_n = \left(3 + \frac{(-1)^n}{n}, 2 - \frac{2}{n^2} \right),$$

akan ditunjukkan bahwa

$$l_n = (3, 2).$$

Maka

$$d_{lq}(l_n, l) = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + \left(-\frac{2}{n^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^4}}$$

Karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^4}} = 0,$$

Maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{lq}(l_n, l) = 0$$

Dengan demikian,

$$\left(3 + \frac{(-1)^n}{n}, 2 - \frac{2}{n^2} \right) \rightarrow (3, 2)$$

Jadi terbukti bahwa barisan

$$l_n = \left(3 + \frac{(-1)^n}{n}, 2 - \frac{2}{n^2} \right)$$

lq-konvergen ke titik (3,2).

Definisi 4.4 Barisan Cauchy pada Ruang lq-Metrik

Misalkan (X, d) adalah suatu ruang lq-metrik, sebuah barisan (l_n) dikatakan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $N \in \mathbb{N}(\varepsilon)$ sehingga:

$$d_{lq}(l_n, l_m) < \varepsilon \text{ untuk semua } n, m > N.$$

Contoh 4.5

Misalkan diberikan ruang lq-metrik (X, d_{lq}) dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan

$$d_{lq}(l, m) = \sqrt{(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2}$$

dan diberikan barisan

$$l_n = \left(4 + \frac{(-1)^n}{n}, 3 - \frac{2}{n^2} \right),$$

akan ditunjukkan bahwa (l_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang lq-metrik.

Menurut definisi 4.4 untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$d_{lq}(l_n, l_m) < \varepsilon \text{ untuk semua } n, m > N.$$

Misalkan

$$l_n = \left(4 + \frac{(-1)^n}{n}, 3 - \frac{2}{n^2} \right) \text{ dan } l_m = \left(4 + \frac{(-1)^m}{m}, 3 - \frac{2}{m^2} \right)$$

Maka

$$d_{lq}(l_n, l_m) = \sqrt{\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m} \right)^2 + \left(-\frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \right)^2}$$

Dengan menggunakan sifat

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|,$$

Diperoleh

$$d_{lq}(l_n, l_m) \leq \left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m} \right| + \left| -\frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \right|$$

Selanjutnya, berdasarkan ketaksamaan segitiga,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^m}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

dan

$$\left| -\frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \right| \leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

Sehingga

$$d_{lq}(l_n, l_m) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

Karena

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, \frac{2}{n^2}, \frac{2}{m^2} \rightarrow 0$$

saat $n, m \rightarrow \infty$,

maka

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \rightarrow 0$$

Akibatnya, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} < \varepsilon$$

untuk semua $n, m > N$.

Dengan demikian,

$$d_{lq}(l_n, l_m) < \varepsilon$$

untuk semua $n, m > N$.

Dengan demikian terbukti barisan

$$l_n = \left(4 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^2 + \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)^2$$

merupakan barisan Cauchy pada ruang l_q -metrik.

Lemma 4.6

Misalkan diberikan (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik kiri, di mana $W^*(X)$ menyatakan semua himpunan fuzzy pada X . Untuk setiap $A \in W^*(X)$, fungsi keanggotaan $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ menyatakan derajat keanggotaan setiap elemen pada himpunan fuzzy A . Untuk setiap $m \in X$, nilai $\mu_{A(m)}$ menyatakan derajat keanggotaan elemen m pada himpunan fuzzy A . Selanjutnya, A_α (α -cut) didefinisikan sebagai $A_\alpha = \{m \in X \mid \mu_{A(m)} \geq \alpha\}$, yaitu himpunan semua elemen $m \in X$ yang memiliki derajat keanggotaan terhadap himpunan fuzzy A lebih besar atau sama dengan α , dan $P_\alpha(l, A) = \inf_{m \in A_\alpha} d_{lq}(l, m)$ yaitu jarak minimum dari titik l ke himpunan A_α . Maka untuk setiap $l \in X$, berlaku

$$l \in A_\alpha \Leftrightarrow P_\alpha(l, A) = 0.$$

Bukti

($\Rightarrow$) Jika $l \in A_\alpha$, berdasarkan definisi,

$$P_\alpha(l, A) = \inf_{m \in A_\alpha} d_{lq}(l, m)$$

Karena $l \in A_\alpha$, ambil $m = l$.

Berdasarkan sifat quasi metrik:

$$d_{lq}(l, l) = 0.$$

Sehingga

$$P_\alpha(l, A) \leq 0$$

Karena $d_{lq}(l, m) \geq 0$ untuk setiap $m \in X$, maka

$$P_\alpha(l, A) \geq 0$$

Oleh karena itu,

$$P_\alpha(l, A) = 0.$$

($\Leftarrow$) Jika $P_\alpha(l, A) = 0$, maka $l \in A_\alpha$

Misalkan

$$P_\alpha(l, A) = 0.$$

Berdasarkan definisi,

$$\inf_{m \in A_\alpha} d_{lq}(l, m) = 0.$$

Berdasarkan definisi infimum, untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $m_\varepsilon \in A_\alpha$ sehingga

$$d_{lq}(l, m_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dengan $n \in \mathbb{N}$, maka terdapat barisan $(m_n) \in A_\alpha$ sehingga

$$d_{lq}(l, m_n) < \frac{1}{n}$$

Sehingga

$$d_{lq}(l, m_n) \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Karena setiap $m_n \in A_\alpha$, maka

$$\mu_A(m_n) \geq \alpha \quad \forall n$$

Oleh karena itu,

$$l \in A_\alpha \Leftrightarrow P_\alpha(l, A) = 0.$$

Lemma 4.7

Misalkan (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik kiri, di mana $P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B)$ yaitu hubungan antara jarak suatu titik ke himpunan dan jarak antara dua himpunan fuzzy pada level α , dan $P_\alpha(l_0, B) = \inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l_0, m)$ menunjukkan jarak terdekat dari titik l_0 ke himpunan dan B_α , $D_\alpha(A, B) = \sup_{l \in A_\alpha} \inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l, m)$ yaitu jarak maksimum dari semua jarak minimum elemen di A_α terhadap B_α dan misalkan $\{l_0\} \subseteq A$. Maka

$$P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B),$$

untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Bukti

Karena $\{l_0\} \subseteq A$, maka

$$l_0 \in A_\alpha$$

Berdasarkan definisi jarak antara dua himpunan fuzzy diperoleh

$$D_\alpha(A, B) = \sup_{l \in A_\alpha} \inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l, m)$$

Dari definisi supremum, maka untuk setiap $l_0 \in A_\alpha$ berlaku

$$\inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l_0, m) \leq D_\alpha(A, B)$$

Karena $l_0 \in A_\alpha$, maka dengan mengambil $l = l_0$ diperoleh

$$\inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l, m) \leq D_\alpha(A, B)$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi jarak titik ke himpunan fuzzy diperoleh

$$P_\alpha(l_0, B) = \inf_{m \in B_\alpha} d_{lq}(l_0, m),$$

Sehingga diperoleh

$$P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B)$$

Karena $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$, maka terbukti bahwa

$$P_\alpha(l_0, B) \leq D_\alpha(A, B)$$

untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Lemma 4.8

Misalkan (X, d_{lq}) merupakan quasi metrik kiri dan $T : X \rightarrow W^*(X)$ merupakan pemetaan fuzzy. Maka untuk setiap $l_0 \in X$ terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga

$$\{l_1\} \subset T(l_0)$$

Artinya, terdapat suatu titik l_1 yang termasuk dalam himpunan fuzzy $T(l_0)$.

Bukti

Karena T merupakan pemetaan fuzzy, maka untuk setiap $l \in X$ berlaku:

$$T(l_0) \in W^*(X)$$

Berdasarkan definisi himpunan $W^*(X)$, untuk setiap $\alpha \in (0,1]$, himpunan α – cut dari $T(l_0)$, yaitu

$$T(l_0))_\alpha = \{l \in X \mid T(l_0)(l) \geq \alpha\},$$

merupakan himpunan tak kosong.

Ambil sebarang $\alpha \in (0,1]$. Karena $T(l_0))_\alpha \neq \emptyset$, maka terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga

$$l_1 \in T(l_0))_\alpha$$

$$T(l_0)(l_1) \geq \alpha$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi himpunan fuzzy, diperoleh bahwa untuk setiap $\alpha \in (0,1]$ berlaku:

$$(\{l_1\})_\alpha = \{l_1\}$$

Karena $l_1 \in T(l_0))_\alpha$, maka

$$\{l_1\} \subseteq T(l_0))_\alpha$$

$$\{l_1\} \subseteq T(l_0)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga,

$$\{l_1\} \subseteq T(l_0).$$

Lemma 4.9

Misalkan (X, d_{lq}) merupakan sebuah ruang quasi metrik kiri. Maka setiap subbarisan dari barisan yang konvergen dalam lq di X adalah konvergen dalam lq .

Bukti

Misalkan (l_n) adalah barisan di X yang konvergen ke $l \in X$. Berdasarkan definisi konvergen pada ruang quasi metrik kiri, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{lq}(l_n, l) = 0$$

Atau dapat dituliskan sebagai

$$l_n \rightarrow l$$

Misalkan (l_{n_k}) adalah subbarisan dari l_n , dengan

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \text{ dan } n_k \rightarrow \infty \text{ saat } k \rightarrow \infty$$

Selanjutnya berdasarkan definisi limit, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku:

$$d_{lq}(l_n, l) < \varepsilon$$

Karena $n_k \rightarrow \infty$, maka terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq k_0$ berlaku

$$n_k \geq N$$

Akibatnya, untuk setiap $k \geq k_0$, diperoleh

$$d_{lq}(l_{n_k}, l) < \varepsilon$$

Sehingga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{lq}(l_{n_k}, l) = 0$$

Dengan demikian

$$l_{n_k} \rightarrow l$$

Artinya, subbarisan (l_{n_k}) juga konvergen ke l pada quasi metrik kiri.

Lemma 4.10

Misalkan (X, d_{lq}) merupakan ruang quasi metrik kiri dan misalkan $A \in W *$

(X) A. Maka $P_\alpha(l, A) \leq d_{lq}(m, l) + P_\alpha(m, A)$, untuk setiap $l, m \in X$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Dimana jarak titik ke himpunan fuzzy

$$P_\alpha(l, A) = \inf_{n \in A_\alpha} d_{lq}(l, n)$$

Bukti

Berdasarkan definisi jarak titik ke himpunan fuzzy

$$P_\alpha(l, A) = \inf_{n \in A_\alpha} d_{lq}(l, n)$$

Karena (X, d_{lq}) adalah ruang quasi metrik kiri, maka berlaku sifat segitiga

$$d_{lq}(l, n) \leq d_{lq}(m, l) + d_{lq}(m, n)$$

Untuk setiap $n \in A_\alpha$, berlaku

$$d_{lq}(l, n) \leq d_{lq}(m, l) + d_{lq}(m, n)$$

Dengan mengambil infimum terhadap semua $n \in A_\alpha$, sehingga

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{lq}(l, n) \leq \inf_{n \in A_\alpha} (d_{lq}(m, l) + d_{lq}(m, n))$$

Karena $d_{lq}(m, l)$ konstanta yang tidak bergantung pada n , maka

$$\inf_{n \in A_\alpha} (d_{lq}(m, l) + d_{lq}(m, n)) = d_{lq}(m, l) + \inf_{n \in A_\alpha} d_{lq}(m, n)$$

Selanjutnya, berdasarkan definisi

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{lq}(m, n) = P_\alpha(m, A)$$

Maka diperoleh

$$P_\alpha(l, A) \leq d_{lq}(m, l) + P_\alpha(m, A)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$P_\alpha(l, A) \leq d_{lq}(m, l) + P_\alpha(m, A).$$

4.2 Ruang Quasi Metrik Kanan

Sebelum memasuki pembahasan yang lebih mendalam, terlebih dahulu dipaparkan sifat-sifat ruang quasi metrik kanan sebagai dasar pemahaman.

Remark 4.11 Jelas bahwa konsep rq-metrik merupakan suatu generalisasi lain dari ruang metrik.

Definisi 4.12 Konvergen pada Ruang rq-Metrik

Misalkan (X, d_{rq}) adalah suatu ruang rq-metrik, barisan (l_n) dikatakan rq-konvergen ke l jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq}(l, l_n) = 0.$$

Dalam hal ini, l disebut rq-limit dari barisan (l_n) .

Contoh 4.13

Misalkan diberikan ruang rq-metrik (X, d_{rq}) dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan

$$d_{rq}(l, m) = \sqrt{(l_1 - m_1)^2 + (l_2 - m_2)^2}$$

dan diberikan barisan

$$l_n = \left(5 + \frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{3}{n^2} \right),$$

akan ditunjukkan bahwa

$$l_n \rightarrow (5, 1).$$

Bukti

Menurut definisi 4.10, harus dibuktikan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq}((5, 1), l_n) = 0$$

maka

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq} \left((5,1), \left(5 + \frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{3}{n^2} \right) \right) &= \sqrt{\left(5 - \left(5 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right)^2 + \left(1 - \left(1 - \frac{3}{n^2} \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{(-1)^n}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^4}}\end{aligned}$$

karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^4} \right) = 0,$$

Maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{9}{n^4}} = 0,$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq} \left((5,1), l_n \right) = 0$$

Jadi terbukti bahwa barisan

$$l_n = \left(5 + \frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{3}{n^2} \right)$$

Lq-konvergen ke titik (5,1).

Definisi 4.14 Barisan Cauchy pada Ruang rq-Metrik

Misalkan (X, d_{rq}) adalah suatu ruang rq-metrik, sebuah barisan (l_n) dikatakan

Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $N =$

$N(\varepsilon)$ sehingga

$$d_{rq}(l_n, l_m) < \varepsilon \text{ untuk semua } n, m > N.$$

Lemma 4.15

Misalkan (X, d_{rq}) ruang quasi metrik kanan, di mana $A_\alpha = \{m \in X \mid \mu_A(m) \geq \alpha\}$

adalah α -cut dari himpunan fuzzy A dan $P_\alpha(A, l) = \inf_{m \in A_\alpha} d_{rq}(l, m)$ adalah jarak lq

dari titik l ke himpunan fuzzy A . dan misalkan $l \in X, A \in W^*(X)$. Maka $l \in A_\alpha$ yaitu $\{l\} \subseteq A \Leftrightarrow P_\alpha(A, l) = 0$.

Bukti

($\Rightarrow$) jika $l \in A_\alpha$, maka $P_\alpha(A, l) = 0$.

Asumsikan:

$$l \in A_\alpha$$

Artinya $l \in \{n \in X | A(n) \geq \alpha\}$ l anggota himpunan α -cut.

Maka pada definisi:

$$P_\alpha(A, l) = \inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, l)$$

Karena $l \in A_\alpha$, maka l sebagai salah satu elemen di dalam himpunan, sehingga

$d_{rq}(l, l)$ termasuk dalam himpunan $\{d_{rq}(n, l) | n \in A_\alpha\}$

Dari definisi rq metrik,

$$d_{rq}(l, m) = 0 \text{ atau } d_{rq}(m, l) = 0$$

Ambil $l = l, m = l$

Maka

$$d_{rq}(l, l) = 0$$

$$\inf_{m \in A_\alpha} d_{rq}(n, l) \leq d_{rq}(l, l) = 0$$

$$\inf_{m \in A_\alpha} d_{rq}(n, l) \geq 0$$

$$0 \leq P_\alpha(A, l) \leq 0$$

Sehingga

$$P_\alpha(A, L) = 0.$$

($\Leftarrow$) jika $P_\alpha(A, l) = 0$, maka $l \in A_\alpha$

Misalkan:

$$P_\alpha(A, l) = 0.$$

Artinya,

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, l) = 0.$$

Berdasarkan definisi infimum, untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $m_\varepsilon \in A_\alpha$ sehingga

$$d_{rq}(m_\varepsilon, l) < \varepsilon$$

Ambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dengan $n \in \mathbb{N}$, maka terdapat barisan $(m_n) \subseteq A_\alpha$ sehingga

$$d_{rq}(m_n, l) < \frac{1}{n}$$

Sehingga

$$d_{rq}(m_n, l) \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Karena setiap $m_n \in A_\alpha$, maka

$$\mu_A(m_n) \geq \alpha \quad \forall n$$

Gunakan syarat rq-metrik (ii)

$$d_{rq}(l, m) \leq d_{rq}(l, n) + d_{rq}(m, n)$$

Misalkan $l = l, m = m_n, n = m_k$, maka diperoleh

$$d_{rq}(l, m_n) \leq d_{rq}(l, m_k) + d_{rq}(m_n, m_k)$$

Karena $P_\alpha(l, A) = 0$, maka terdapat barisan $(m_n) \subseteq A_\alpha$ sehingga

$$d_{rq}(m_k, l) \rightarrow 0 \text{ dan } d_{rq}(m_n, l) \rightarrow 0$$

Dari ketaksamaan diatas diperoleh jarak antar elemen

$$d_{rq}(m_n, m_k)$$

$$d_{rq}(m_n, l) \rightarrow 0$$

$$m_n \rightarrow l$$

Karena setiap $m_n \in A_\alpha$ dan A_α tertutup sifat $W^*(X)$, maka limitnya juga berda di dalamnya, sehingga

$$l \in A_\alpha$$

Oleh karena itu,

$$P_\alpha(l, A) = 0 \Rightarrow l \in A_\alpha$$

Maka terbukti bahwa,

$$l \in A_\alpha \Leftrightarrow P_\alpha(A, l) = 0.$$

Lemma 4.16

Misalkan (X, d_{rq}) sebuah ruang quasi metrik kanan, di mana $P_\alpha(B, l_0) =$

$$\inf_{n \in B_\alpha} d_{rq}(n, l_0) \text{ dan } D_\alpha(B, A) = \inf_{n \in B_\alpha, m \in A_\alpha} d_{rq}(n, m) \text{ dan misalkan } \{l_0\} \subseteq A.$$

Maka $P_\alpha(B, l_0) \leq D_\alpha(B, A)$, untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Bukti

Karena $\{l_0\} \subseteq A$, maka:

$$l_0 \in A_\alpha$$

Ambil sebarang $n \in B_\alpha$. Karena $l_0 \in A_\alpha$, maka pada definisi $D_\alpha(B, A)$, elemen m dapat dipilih sebagai l_0 . Oleh karena itu,

$$D_\alpha(B, A) = \inf_{n \in B_\alpha, m \in A_\alpha} d_{rq}(n, m) \leq d_{rq}(n, l_0)$$

Karena pertidaksamaan berlaku untuk setiap $n \in B_\alpha$, maka ambil infimum terhadap semua $n \in B_\alpha$ diperoleh

$$D_\alpha(B, A) \leq \inf_{n \in B_\alpha} d_{rq}(n, l_0) = P_\alpha(B, l_0)$$

Dengan demikian,

$$P_\alpha(B, l_0) \leq D_\alpha(B, A)$$

Jadi terbukti bahwa

$$P_\alpha(B, l_0) \leq D_\alpha(B, A)$$

Untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Lemma 4.17

Misalkan (X, d_{rq}) merupakan ruang quasi metrik kanan, $T : X \rightarrow W^*(X)$ merupakan pemetaan fuzzy dan $l_0 \in X$. Maka terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga

$$\{l_1\} \subset T(l_0).$$

Artinya, terdapat suatu elemen $l_1 \in X$ yang menjadi anggota himpunan fuzzy $T(l_0)$.

Bukti

Karena $T : X \rightarrow W^*(X)$, merupakan pemetaan fuzzy, maka untuk setiap $l_0 \in X$ berlaku:

$$T(l_0) \in W^*(X)$$

Berdasarkan definisi himpunan $W^*(X)$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, himpunan level- α dari $T(l_0)$, yaitu

$$(T(l_0))_\alpha = \{m \in X | T(l_0)(m) \geq \alpha\}$$

Merupakan himpunan tak kosong.

maka terdapat, $l_1 \in X$ sedemikian sehingga

$$l_1 \in (T(l_0))_\alpha$$

Berdasarkan definisi himpunan level- α , diperoleh

$$T(l_0)(l_1) \geq \alpha$$

Sehingga

$$\{l_1\} \subset T(l_0)$$

Jadi terbukti terdapat $l_1 \in X$ sedemikian sehingga $\{l_1\} \subset T(l_0)$.

Lemma 4.18

Misalkan (X, d_{rq}) merupakan ruang quasi metrik kanan. Jika barisan $(l_n)_{rq}$ konvergen ke $l \in X$, maka setiap subbarisan dari (l_n) juga rq konvergen ke l .

Bukti

Misalkan (l_n) adalah barisan di X yang rq konvergen ke $l \in X$.

Berdasarkan definisi konvergen pada ruang quasi metrik kanan, berlaku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{rq}(l, l_n) = 0$$

Artinya, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga:

$$d_{rq}(l, l_n) < \varepsilon \text{ untuk setiap } n > N$$

Ambil sembarang subbarisan (l_{n_m}) dari (l_n) dengan:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_m < \dots$$

Karena (l_{n_m}) merupakan subbarisan dari (l_n) , maka indeks n_m selalu bertambah.

Akibatnya, terdapat bilangan asli M sehingga untuk setiap $m > M$, berlaku

$$n_m \geq m$$

sehingga

$$d_{rq}(l, l_{n_m}) < \varepsilon$$

Menurut definisi konvergen pada ruang quasi metrik kanan, diperoleh:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_{rq}(l, l_{n_m}) = 0$$

Sehingga subbarisan (l_{n_m}) juga rq-konvergen ke l .

Jadi terbukti bahwa setiap subbarisan dari barisan rq-konvergen juga rq-konvergen ke limit yang sama.

Lemma 4.19

Misalkan (X, d_{rq}) merupakan sebuah ruang quasi metrik kanan dan misalkan $A \in W * (X)$. Maka $P_\alpha(A, l) \leq P_\alpha(A, m) + d_{rq}(l, m)$, untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$.

Bukti

Definisi $P_\alpha(A, l)$

$$P_\alpha(A, l) = \inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, l)$$

Definisi $P_\alpha(A, m)$

$$P_\alpha(A, m) = \inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, m)$$

Menggunakan sifat quasi metrik kanan

$$d_{rq}(n, l) \leq d_{rq}(n, m) + d_{rq}(l, m)$$

$\forall n \in A_\alpha$, berlaku

$$d_{rq}(n, l) \leq d_{rq}(n, m) + d_{rq}(l, m)$$

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, l) \leq \inf_{n \in A_\alpha} (d_{rq}(n, m) + d_{rq}(l, m))$$

$$\inf_{n \in A_\alpha} (d_{rq}(n, m) + d_{rq}(l, m)) \leq \inf_{n \in A_\alpha} (d_{rq}(n, m) + d_{rq}(l, m))$$

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, m) = P_\alpha(A, m)$$

$$\inf_{n \in A_\alpha} d_{rq}(n, l) \leq P_\alpha(A, m) + d_{rq}(l, m)$$

$$P_\alpha(A, l) \leq P_\alpha(A, m) + d_{rq}(l, m)$$

Maka terbukti bahwa untuk setiap $A, B \in W^*(X)$ dan $\alpha \in [0, 1]$, berlaku

$$P_\alpha(A, l) \leq P_\alpha(A, m) + d_{rq}(l, m).$$

4.3 Kajian penelitian dalam perspektif islam

Penelitian mengenai pemetaan fuzzy serta ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan tidak hanya memberikan kontribusi terhadap pengembangan matematika murni, tetapi juga dapat dikaji dalam perspektif Islam. Konsep-konsep matematika yang membahas hubungan, kedekatan, arah, dan ketidaksimetrian dapat menjadi refleksi terhadap kehidupan manusia yang penuh dengan proses,

usaha, perubahan, serta perjalanan menuju keberhasilan dan keberkahan hidup. Hal ini menunjukkan bahwa ilmu matematika tidak berdiri sendiri, tetapi memiliki keterkaitan dengan nilai-nilai kehidupan yang bersifat filosofis dan spiritual.

Dalam konsep pemetaan fuzzy, suatu elemen tidak selalu berada pada kondisi mutlak, melainkan memiliki derajat keanggotaan tertentu. Konsep ini menunjukkan bahwa suatu keadaan dapat berubah secara bertahap. Dalam kehidupan manusia, kondisi keimanan, ilmu, amal, dan kualitas diri juga tidak bersifat tetap. Ada manusia yang berada pada tingkat kebaikan yang tinggi, sedang, maupun rendah. Tingkatan tersebut dapat berubah melalui usaha, doa, dan ketekunan dalam menjalani kehidupan.

Islam mengajarkan bahwa manusia diperintahkan untuk terus berusaha memperbaiki dirinya melalui ikhtiar dan ijtihad. Hal ini sejalan dengan konsep *man jadda wajada*, yaitu siapa yang bersungguh-sungguh maka akan memperoleh hasil. Dalam konteks penelitian ini, perubahan derajat keanggotaan pada pemetaan fuzzy dianalogikan sebagai perubahan kualitas hidup manusia akibat usaha yang dilakukan secara terus-menerus. Allah SWT berfirman dalam surah Yusuf ayat 76:

فَبَدَأَ بِأَوْعِيَّتِهِمْ قَبْلَ وَعَاءِ أَخِيهِ ثُمَّ اسْتَخْرَجَهَا مِنْ وَعَاءِ أَخِيهِ كَذَلِكَ كِدْنَا لِيُوسُفَ مَا كَانَ لِيَأْخُذَ أَخَاهُ فِي دِينِ الْمَلِكِ إِلَّا أَنْ يَشَاءَ اللَّهُ نَرْفَعُ دَرَجَاتٍ مَن نَّشَاءُ وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴿٧٦﴾

Artinya :

“Maka, mulailah dia (memeriksa) karung-karung mereka sebelum (memeriksa) karung saudaranya sendiri (Bunjamin), kemudian dia mengeluarkannya (cawan raja itu) dari karung saudaranya. Demikianlah Kami mengatur (rencana) untuk Yusuf. Dia tidak dapat menghukum saudaranya menurut hukum raja, kecuali Allah menghendakinya. Kami angkat derajat orang yang Kami kehendaki; dan di atas setiap orang yang berpengetahuan ada yang lebih mengetahui.”

Berdasarkan Tafsir Ibnu Katsir (2000), ayat tersebut menjelaskan bahwa setinggi apa pun ilmu yang dimiliki manusia, tetap terdapat ilmu yang lebih tinggi

darinya hingga akhirnya seluruh ilmu bermuara kepada Allah SWT Yang Maha Mengetahui. Dalam penelitian matematika, pemahaman terhadap suatu konsep diperoleh melalui proses belajar, analisis, dan pembuktian yang berkelanjutan. Hal ini sejalan dengan konsep pemetaan fuzzy yang menunjukkan bahwa pengetahuan terhadap suatu objek tidak selalu bersifat mutlak, melainkan dapat berada pada berbagai tingkat pemahaman tertentu. Selain itu, Allah juga berfirman dalam surah Al-Hasyr ayat 18:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ وَاتَّقُوا اللَّهَ إِنَّ اللَّهَ خَبِيرٌ بِمَا تَعْمَلُونَ ﴿١٨﴾

Artinya:

“Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat). Bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan.”

Menurut Tafsir (Al-Tabari, 2001) ayat tersebut mengajarkan agar manusia senantiasa melakukan evaluasi terhadap dirinya dan mempersiapkan bekal untuk masa depan. Dalam penelitian matematika, proses memperoleh hasil memerlukan tahapan yang panjang dan berkesinambungan. Setiap langkah yang dilakukan, mulai dari memahami definisi hingga membuktikan teorema, merupakan bagian dari proses menuju tujuan akhir. Hal ini memiliki kesamaan dengan konsep konvergen yang menunjukkan pendekatan secara bertahap menuju suatu titik tertentu. Allah SWT juga berfirman dalam surah At-Taubah ayat 120:

مَا كَانَ لِأَهْلِ الْمَدِينَةِ وَمَنْ حَوْلَهُمْ مِنَ الْأَعْرَابِ أَنْ يَتَخَلَّفُوا عَنْ رَسُولِ اللَّهِ وَلَا يَرْغَبُوا بِأَنفُسِهِمْ عَنْ نَفْسِهِ ذَلِكَ بِأَنَّهُمْ لَا يُصِيبُهُمْ ظَمَأٌ وَلَا نَصَبٌ وَلَا مَخْمَصَةٌ فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَلَا يَطَئُونَ مَوْطِئًا يَغِيظُ الْكُفَّارَ وَلَا يَنَالُونَ مِنْ عَدُوٍّ نِيْلًا إِلَّا كُتِبَ لَهُمْ بِهِ عَمَلٌ صَالِحٌ إِنَّ اللَّهَ لَا يُضِيعُ أَجْرَ الْمُحْسِنِينَ ﴿١٢٠﴾

Artinya:

“Tidak sepatutnya bagi penduduk Madinah dan orang-orang Arab Badui yang berdiam di sekitar mereka untuk tidak turut menyertai Rasulullah (pergi berperang) dan tidak pantas (pula) bagi mereka untuk lebih mencintai diri mereka daripada (mencintai) dirinya (Rasulullah). Yang demikian itu karena mereka tidak

ditimpa kehausan, kepayahan, dan kelaparan di jalan Allah; tidak (pula) menginjak suatu tempat yang membangkitkan amarah orang-orang kafir; dan tidak menimpakan suatu bencana kepada musuh, kecuali (semua) itu akan dituliskan bagi mereka sebagai suatu amal kebajikan. Sesungguhnya Allah tidak menyalakan pahala orang-orang yang berbuat baik.”

Menurut tafsir (Ibnu Katsir, 2024) ayat tersebut, setiap usaha dan amal baik manusia akan memperoleh balasan dari Allah SWT, sekecil apa pun usaha tersebut. Hal ini mengajarkan bahwa setiap proses memiliki nilai dan tidak ada usaha yang sia-sia. Dalam penelitian matematika, proses berpikir dan pencarian solusi merupakan bagian penting yang bernilai, meskipun memerlukan waktu yang panjang. Konsep ini dapat dikaitkan dengan perubahan derajat dalam pemetaan fuzzy, di mana perubahan kecil tetap memiliki makna dalam menentukan hasil akhir.

Konsep ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan menunjukkan adanya ketidaksimetrian jarak. Dalam ruang tersebut, jarak dari titik pertama ke titik kedua belum tentu sama dengan jarak dari titik kedua ke titik pertama. Ketidaksimetrian ini dapat dianalogikan dengan perjalanan hidup manusia yang tidak selalu berjalan seimbang. Dalam perspektif Islam, konsep quasi metrik kiri dapat dikaitkan dengan khauf, yaitu rasa takut kepada Allah SWT. Rasa takut tersebut membuat manusia berhati-hati dalam bertindak dan menjauhi perbuatan dosa. Perjalanan menuju kebaikan sering kali membutuhkan perjuangan yang berat dan penuh kesabaran. Allah SWT berfirman surah An-Nazi’at ayat 40-41:

وَأَمَّا مَنْ خَافَ مَقَامَ رَبِّهِ وَهَيَّيْنَا النَّفْسَ عَنِ الْهَوَىٰ ﴿٤٠﴾ فَإِنَّ الْجَنَّةَ هِيَ الْمَأْوَىٰ ﴿٤١﴾

Artinya:

“Adapun orang-orang yang takut pada kebesaran Tuhannya dan menahan diri dari (keinginan) hawa nafsunya, sesungguhnya surgalah tempat tinggal(-nya).”

Dalam (Tafsir Al-Azhar, 2019) ayat tersebut dijelaskan bahwa orang yang mampu mengendalikan hawa nafsu dan memiliki rasa takut kepada Allah SWT akan memperoleh keselamatan dan kebahagiaan di akhirat. Ayat ini menunjukkan bahwa perjuangan melawan hawa nafsu bukanlah hal yang mudah. Manusia membutuhkan usaha besar untuk menjaga dirinya tetap berada pada jalan yang benar.

Sementara itu, ruang quasi metrik kanan dapat dikaitkan dengan konsep raja', yaitu harapan terhadap rahmat dan ampunan Allah SWT. Dalam kehidupan, manusia tidak boleh hanya memiliki rasa takut, tetapi juga harus memiliki harapan bahwa Allah SWT akan memberikan pertolongan dan rahmat-Nya. Allah SWT berfirman dalam surah Al-Baqarah ayat 286:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

Artinya:

“Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya. Baginya ada sesuatu (pahala) dari (kebajikan) yang diusahakannya dan terhadapnya ada (pula) sesuatu (siksa) atas (kejahatan) yang diperbuatnya. (Mereka berdoa,) “Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami salah. Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau bebani kami dengan beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tidak sanggup kami memikulnya. Maafkanlah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah pelindung kami. Maka, tolonglah kami dalam menghadapi kaum kafir.”

Dalam Tafsir Kementerian Agama RI (Kemenag, 2022) ayat ini menunjukkan bahwa setiap manusia diberikan kemampuan sesuai kapasitasnya masing-masing. Dalam kehidupan, manusia memiliki kesempatan untuk terus berkembang dan memperbaiki dirinya sesuai dengan kemampuan yang dimiliki. Hal ini selaras dengan konsep pemetaan fuzzy yang menunjukkan bahwa suatu keadaan dapat

berubah secara bertahap menuju kondisi yang lebih baik. Perubahan tersebut terjadi melalui proses yang sesuai dengan kemampuan dan usaha yang dilakukan secara terus-menerus.

Dengan demikian, konsep pemetaan fuzzy serta ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan tidak hanya memiliki makna matematis, tetapi juga dapat menjadi sarana refleksi terhadap kehidupan manusia dalam perspektif Islam. Ketidaksimetrian, kedekatan, perubahan, dan proses dalam struktur matematika dapat menggambarkan perjalanan hidup manusia yang dipenuhi usaha, harapan, rasa takut kepada Allah SWT, serta keyakinan bahwa keberhasilan dan keberkahan dapat dicapai melalui ikhtiar dan doa.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembahasan yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Ruang quasi metrik kiri dan ruang quasi metrik kanan merupakan generalisasi dari ruang metrik yang tidak mensyaratkan sifat simetri pada fungsi jarak, namun tetap memenuhi sifat non-negatif, identitas, dan ketaksamaan segitiga. Perbedaan utama keduanya terletak pada arah jarak, yaitu arah kiri dan kanan.
2. Dalam kedua ruang, berlaku hubungan penting antara titik dan himpunan fuzzy, yaitu:

- a. Pada quasi metrik kiri:

$$l \in A_\alpha \Leftrightarrow P_\alpha(l, A) = 0$$

- b. Pada quasi metrik kanan:

$$l \in A_\alpha \Leftrightarrow P_\alpha(A, l) = 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa keanggotaan elemen dalam himpunan fuzzy pada level- α dapat dikarakterisasi melalui konsep jarak.

3. Diperoleh bahwa jarak antara titik dan himpunan fuzzy memenuhi ketaksamaan:

- a. Pada quasi metrik kiri:

$$P_\alpha(l, A) \leq d_{lq}(m, l) + P_\alpha(m, A)$$

- b. Pada quasi metrik kanan:

$$P_\alpha(A, l) \leq P_\alpha(A, m) + d_{rq}(l, m)$$

Hal ini menunjukkan bahwa arah pada ruang quasi metrik memengaruhi bentuk ketaksamaan jarak dalam pemetaan fuzzy.

4. Pada ruang quasi metrik kiri dan kanan, jarak titik terhadap himpunan fuzzy memenuhi sifat ketaksamaan segitiga yang melibatkan elemen ruang dan himpunan fuzzy. Sifat ini menunjukkan adanya keterikatan antara struktur ruang quasi metrik dan konsep jarak pada pemetaan fuzzy.

$$P_{\alpha}(l, B) \leq D_{\alpha}(A, B)$$

Yang menunjukkan adanya keterkaitan antara elemen dan struktur himpunan fuzzy dalam ruang quasi metrik.

5. Baik pada ruang quasi metrik kiri maupun kanan, barisan konvergen dan barisan cauchy dapat didefinisikan dan memenuhi sifat bahwa setiap subbarisan dari barisan konvergen juga konvergen. Hal ini menunjukkan bahwa konsep limit tetap berlaku meskipun ruang tidak simetris.
6. Untuk setiap pemetaan fuzzy $T: X \rightarrow W * (X)$, terdapat elemen $m \in X$ sehingga:

$$T(l)(m) > 0$$

yang menunjukkan bahwa hasil pemetaan fuzzy selalu memiliki elemen yang dapat dianalisis pada level α .

7. Pemetaan fuzzy dalam ruang quasi metrik kiri dan kanan memiliki sifat yang konsisten dan terstruktur, di mana hubungan antara titik dan himpunan fuzzy dapat dinyatakan melalui konsep jarak. Perbedaan arah pada quasi metrik hanya memengaruhi formulasi, tetapi tidak menghilangkan keteraturan yang ada.

Dengan demikian, penelitian ini memperkuat bahwa pemetaan fuzzy dan ruang quasi metrik kiri serta kanan merupakan dua konsep yang saling melengkapi dalam pengembangan teori matematika. Ruang quasi metrik menunjukkan konsep arah dalam jarak, sedangkan pemetaan fuzzy sebagai konsep derajat dalam keanggotaan. Integrasi kedua konsep ini menghasilkan suatu sistem yang tidak hanya lebih umum, tetapi juga lebih fleksibel dalam menggambarkan realitas yang kompleks dan tidak selalu bersifat pasti maupun simetris.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

1. Penelitian ini masih terbatas pada pembuktian sifat dan lemma dalam ruang quasi metrik kiri dan kanan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan kajian pada teorema titik tetap (fixed point) untuk pemetaan fuzzy dalam ruang quasi metrik, baik dalam bentuk pemetaan tunggal maupun multivalued mapping
2. Penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian pada struktur ruang yang lebih umum, seperti quasi-pseudometrik atau generalized metric space, sehingga diperoleh pemahaman yang lebih luas mengenai hubungan antara struktur ruang dan pemetaan fuzzy.
3. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji hubungan antara sifat topologi dan struktur fuzzy, seperti kekompakan, kelengkapan, dan kontinuitas dalam ruang quasi metrik, sehingga diperoleh hasil yang lebih mendalam.
4. Penelitian ini masih menggunakan pendekatan kajian pustaka, sehingga penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan pendekatan komputasi atau numerik untuk melihat implementasi nyata dari konsep pemetaan fuzzy dan ruang quasi metrik.

DAFTAR PUSTAKA

- (HAMKA), H.A.M.K.A. (2019). *Tafsir al-Azhar*. Archive.Org.
<https://www.bing.com/search?q=Tafsir+Al-Azhar&FORM=SSQNT1&PC=ASTS>
- Al-Tabari, M. bin J. (2001). *Jami' al-Bayan fi Ta'wil al-Qur'an*. Dar al-Kutub al-'Ilmiyyah.
- Azam, A., & Beg, I. (2009). Common fixed points of fuzzy maps. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(7–8), 1331–1336.
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.11.011>
- Bartle & Sherbert. (2011). Introduction To Real Analysis. In *Bartle & Sherbert* (Vol. 1, Issue 1).
- Ersan, S. (2024). On p -statistical convergence in neutrosophic normed spaces. *Georgian Mathematical Journal*, 31(2), 253–259.
<https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2076>
- Ibnu Katsir Tafsir Al-Quran. (2024). *Tafsir Al-Quran Al-Azhim*. Alkhoirot.
<https://archive.org/details/tafsir-ibnu-katsir-juz-i/Tafsir-Ibnu-Katsir-Surat-Yunus/mode/1up>
- Kamal, A., & Abd-Elal, A. M. (2021). Fixed point for fuzzy mappings in different generalized types of metric spaces. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 25(1), 84–90. <https://doi.org/10.22436/jmcs.025.01.07>
- Kemenag. (2022). *Qur'an Kemenag*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis ~ Applications*.
- Maharani, D. (2025). *Penjelajahan Ruang dalam Analisis Fungsional*. UIN Maliki Press.
- Muslim, I. (n.d.). *Hadis tentang keutamaan menuntut ilmu*. HadeethEnc.Com.
<https://hadeethenc.com/id/home>
- Romaguera, S. (2024). *On Protected Quasi-Metrics*.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah Jakarta: lentera hati*. 352.
- Takahashi, W. (1970). A convexity in metric space and nonexpansive mappings, I. *Kodai Mathematical Journal*, 22(2), 142–149.
<https://doi.org/10.2996/kmj/1138846111>
- Wilson, W. . A. . (2014). *On Quasi-Metric Spaces*. 53(3), 675–684.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Computing in Civil and Building Engineering - Proceedings of the 2014 International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, 353, 1562–1569.
<https://doi.org/10.1061/9780784413616.194>

RIWAYAT HIDUP



Dhafin Afa Awayna, lahir di Jembrana pada 15 Oktober 2002. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Budi Purnomo dan Ibu Hayinah serta kakak dari Amelia Turfa, Tsaqila Firqin Qolbi, dan Syauqi Walin Azka. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK Permata Iman yang lulus pada tahun 2009, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di MIN 3 Jembrana dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di MTsN 4 Jembrana dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di MAN 1 Jembrana dan lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang penulis diterima menjadi mahasiswa pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan menjalankan perkuliahan hingga menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, penulis aktif dalam berbagai kegiatan yang mendukung pengembangan kemampuan akademik maupun nonakademik. Penulis pernah aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) Matematika yang memberikan pengalaman dalam bekerja sama, berkomunikasi, serta berorganisasi. Selain itu, pada tahun 2024 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tanggung, Kecamatan Turen, Kabupaten Malang yang menjadi sarana untuk belajar berinteraksi dan berkontribusi langsung kepada masyarakat.

Penulis juga mengikuti program Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT ASABRI (Persero) Kantor Cabang Malang. Melalui kegiatan tersebut, penulis memperoleh pengalaman dalam bidang administrasi, pengelolaan dokumen, dan pengolahan data di lingkungan kerja profesional. Di samping itu, selama masa perkuliahan penulis juga bekerja di bidang fnb. Pengalaman tersebut mengajarkan pentingnya kedisiplinan, tanggung jawab, kemampuan melayani pelanggan, serta manajemen waktu dalam menyeimbangkan antara pekerjaan dan perkuliahan. Berbagai pengalaman tersebut menjadi bekal berharga bagi penulis dalam mengembangkan keterampilan, memperluas wawasan, dan mempersiapkan diri menghadapi dunia kerja maupun hidup bermasyarakat.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dhafin Afa Awayna
NIM : 210601110104
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat antara Pemetaan Fuzzy dan Ruang Quasi Metrik Kiri dan Ruang Quasi Metrik Kanan
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Mei 2025	Konsultasi Topik	1.
2.	24 Juni 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	12 Agustus 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	18 Agustus 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	08 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	16 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	29 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	27 Oktober 2025	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	03 November 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	10 November 2025	ACC Seminar Proposal	10.
11.	11 Februari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11.
12.	06 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	09 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	05 Mei 2026	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	07 Mei 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	08 Mei 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	16. <i>[Signature]</i>
17.	14 Mei 2026	Konsultasi Bab IV dan V	17. <i>[Signature]</i>
18.	15 Mei 2026	ACC Bab IV dan V	18. <i>[Signature]</i>
19.	19 Mei 2026	ACC Seminar Hasil	19. <i>[Signature]</i>
20.	04 Juni 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20. <i>[Signature]</i>
21.	05 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	21. <i>[Signature]</i>
22.	17 Juni 2026	ACC Keseluruhan	22. <i>[Signature]</i>

Malang, 17 Juni 2026

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrud Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012