

ISOMETRI TETRAHEDRAL DEGENERASI PADA RUANG METRIK

SKRIPSI

**OLEH
NUR AZIZAH
NIM. 220601110022**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

ISOMETRI TETRAHEDRAL DEGENERASI PADA RUANG METRIK

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Nur Azizah
NIM. 220601110022**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

ISOMETRI TETRAHEDRAL DEGENERASI PADA RUANG METRIK

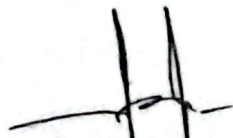
SKRIPSI

Oleh
Nur Azizah
NIM. 220601110022

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 28 April 2026

Dosen Pembimbing I



Dr. Hafrur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Dosen Pembimbing II



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

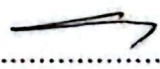
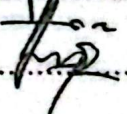
ISOMETRI TETRAHEDRAL DEGENERASI PADA RUANG METRIK

SKRIPSI

Oleh
Nur Azizah
NIM. 220601110022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Tanggal 4 Juni 2026

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si.	
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	
Anggota Penguji 3	: Dr. Fachrur Rozi, M.Si.	

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Nur Azizah
NIM : 220601110022
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Isometri Tetrahedral Degenerasi pada Ruang Metrik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini merupakan hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Nur Azizah
NIM 220601110022

MOTO

“Manusia tidak akan memperoleh selain dari apa yang diusahakan. Usahamu akan diperlihatkan, lalu dibalas dengan balasan yang sempurna.”

(QS. An-Najm:39-41)

“ Minta pertolongan dengan sabar dan sholat. Sesungguhnya Allah bersama orang-orang yang sabar.”

(QS. Al-Baqarah, 153)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji bagi Allah Swt. dengan penuh rasa syukur kepada atas segala rahmat, pertolongan, dan kemudahan yang telah diberikan, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Ibu tercinta, yang selalu memberikan kasih sayang, doa, perhatian, dan dukungan tanpa henti kepada penulis. Terima kasih atas segala pengorbanan dan cinta yang selalu menguatkan penulis dalam setiap langkah kehidupan. Bapak tercinta, yang senantiasa menjadi sosok penuh perjuangan dan tanggung jawab. Terima kasih atas doa, kerja keras, nasihat, serta dukungan yang selalu diberikan demi masa depan penulis. Kakak-kakak tersayang, yang selalu hadir memberikan semangat, perhatian, dukungan, dan motivasi kepada penulis selama menjalani proses kehidupan maupun penyusunan karya ini. Ponakan-ponakan tercinta, yang selalu membawa kebahagiaan, tawa, dan warna indah dalam kehidupan penulis sehingga menjadi penyemangat di setiap keadaan. Dan terakhir, untuk diri penulis sendiri, terima kasih karena telah mampu bertahan, bangkit, dan terus berjuang hingga dapat sampai pada titik ini.

KATA PENGANTAR

Assalaamu 'alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Segala puji bagi Allah *Subhanahu wa ta'aala* atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Isometri Tetrahedral Degenerasi pada Ruang Metrik“. Shalawat serta salam tercurahkan kepada junjungan Nabi kita Nabi Muhammad *Shallallahu 'alaihi wa sallam* yang telah membawa umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yaitu agama Islam. Harapan penulis semoga kita tergolong sebagai orang-orang yang mendapatkan syafaat kelak pada hari kiamat, *Aamiin*.

Dalam penyelesaian skripsi berjudul “Isometri Tetrahedral Degenerasi pada Ruang Metrik” ini tidak dapat lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang ditujukan:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus Dosen Pembimbing II yang telah membimbing, memberikan arahan, serta masukan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktunya serta memberikan bimbingan, nasihat, serta motivasi kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si. dan Dian Maharani, M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan evaluasi, arahan, serta saran yang sangat bermanfaat dalam skripsi ini.
6. Kepada seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Cinta pertama dan panutan, ayahanda Subiasim dan kepada pintu surga ibunda Musitti. Terima kasih atas segala pengorbanan dan tulus kasih yang diberikan. Beliau memang tidak sempat merasakan pendidikan bangku

perkuliahan, namun mereka mampu senantiasa memberikan yang terbaik untuk saya, tak kenal lelah mendoakan serta memberikan perhatian dan dukungan hingga penulis mampu menyelesaikan studinya sampai meraih gelar sarjana. Semoga ayah dan ibu panjang umur dan sehat selalu.

8. Kepada kakak saya Ahmad Sayadi dan Nur Aini terimakasih banyak atas dukungannya secara moril maupun materil, terima kasih juga atas segala motivasi dan dukungannya yang diberikan kepada penulis sehingga penulis mampu menyelesaikan studinya sampai sarjana.
9. Kepada keponakan-keponakan tercinta Aji, Haikal, Firda, dan Hafiz, terima kasih atas kelucuan-kelucuan kalian yang membuat penulis semangat. Sehingga penulis semangat untuk mengerjakan skripsi ini sampai selesai.
10. Kepada sahabat terbaik yaitu Ais dan teman terbaik yaitu Belinda, Fatim, Anggi, Jihan, Risma, Iroh, Sesha, dan Seshi yang telah menjadi rumah berkeluh kesah, selalu memberikan semangat canda tawa tiada akhir.
11. Kepada idola penulis yaitu Mila dan Valen, terimakasih yang secara tidak langsung telah menjadi inspirasi, penyemangat, dan mengisi masa-masa skripsi penulis melalui karya-karyanya sehingga menjadi lebih berwarna. Terimakasih telah mengajarkan bahwa dalam meraih impian harus ada perjuangan dan jiwa pantang menyerah.
12. Untuk diri saya sendiri terimakasih sudah bertahan sejauh ini. Terimakasih sudah tetap melangkah meski sering ragu, lelah, dan ingin menyerah. Skripsi ini mungkin tidak sempurna, tetapi proses ini menjadi pengalaman yang penuh makna dan pembelajaran pribadi yang mendalam dan skripsi ini bukti perjuangan nyata dan patut dibanggakan.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa Program Studi Matematika.

Wassalaamu 'alaikum Warahmatullaahi Wabarakaatuh

Malang, 4 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
1.6 Definisi Istilah	5
BAB II KAJIAN TEORI	7
2.1 Teori Pendukung.....	7
2.1.1 Ruang Metrik.....	7
2.1.2 Fungsi Injektif	12
2.1.3 Fungsi Surjektif	13
2.1.4 Fungsi Bijektif.....	14
2.1.5 Isometri.....	14
2.1.6 Tetrahedral Degenerasi Tipe I.....	15
2.1.7 Ruang Topologi.....	20
2.1.8 Bola Buka	21
2.1.9 Homeomorfisme	24
2.1.10 <i>Interior</i>	26
2.1.11 <i>Boundary</i>	29
2.1.12 <i>Exterior</i>	32
2.1.13 Segitiga Degenerasi.....	34
2.1.14 Subruang.....	34
2.1.15 Tetrahedron	36
2.1.16 Degenerasi	37
2.1.17 Tetrahedral Degenerasi Tipe II	39
2.1.18 Ruang Tetrahedral Degenerasi	41
2.1.19 Segitiga.....	43
2.1.20 Sifat Aditif Luas Segitiga.....	44

2.1.21 Volume Tetrahedron	45
2.1.22 Hukum Cosinus	48
2.1.23 Sudut dalam ruang metrik	48
2.2 Kajian Al-Quran tentang Keterukuran dan Keteraturan terhadap Ruang Tetrahedral Degenerasi	49
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung.....	51
BAB III METODE PENELITIAN	52
3.1 Jenis Penelitian	52
3.2 Pra Penelitian	52
3.3 Tahapan Penelitian.....	53
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	55
4.1 Tetrahedral Degenerasi di Ruang Metrik	55
4.1.1 Teorema 4.1 Tetrahedral Degenerasi	55
4.1.2 Teorema 4.2 Aturan Cosinus.....	67
4.1.3 Teorema 4.3 Pemetaan Isometri.....	76
4.1.4 Teorema 4.4 Invariansi Topologi	88
4.2 Kajian Al-Quran tentang Keterukuran dan Keteraturan terhadap Ruang Tetrahedral Degenerasi	93
BAB V PENUTUP.....	97
5.1 Kesimpulan	97
5.2 Saran	97
DAFTAR PUSTAKA.....	99
RIWAYAT HIDUP	100

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Segitiga Degenerasi.....	2
Gambar 1.2	Tetrahedral Degenerasi	3
Gambar 2.1	Tetrahedron $A = (1,1,2), B = (5,1,2), C = (1,4,2),$ $D = (3,2,2)$	16
Gambar 2.2	Tetrahedron $A = (1,2,3), B = (5,2,3), C = (2,6,3),$ $D = (2,3,7)$	26
Gambar 2.3	Tetrahedron $A = (1,1,1), B = (3,1,1), C = (1,4,1),$ $D = (1,5,5)$	36
Gambar 2.4	Tetrahedral Degenerasi $A = (1,1,2), B = (2,1,2), C = (1,3,2),$ $D = (3,4,2)$	37
Gambar 2.5	Segitiga $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$	43
Gambar 2.6	Tetrahedron E terletak pada sisi BC	44
Gambar 2.7	Tetrahedron $A = (2,3,4), B = (5, 6, 7), C = (3, 4, 5),$ $D = (4,5,6)$	46
Gambar 2.8	Segitiga sisi a_i, a_j, a_k dan sudut α_i	48
Gambar 2.9	Segitiga $x, y, z \in X$	49
Gambar 4.1	Posisi titik W terhadap segitiga XYZ	56
Gambar 4.2	Tetrahedron dengan $\Delta WXY, \Delta WYZ$, dan ΔWXZ	56
Gambar 4.3	Segitiga Degenerasi $X = (1,2), W = (4,2), Y = (7,2)$	60
Gambar 4.4	Tetrahedral Degenerasi $W = (8,5,2), X = (1,1,2), Y = (6,1,2),$ $Z = (3,6,2)$	61
Gambar 4.5	$W \in \text{ext} (\Delta XYZ)$	67

DAFTAR SIMBOL

(X, d)	: Ruang metrik, dengan X himpunan dan d fungsi metrik
$d(x, y)$	: Jarak antara titik x dan y dalam ruang metrik
T	: Tetrahedron
$\text{int}(A)$	: Interior dari himpunan A
$\text{Bdry}(A)$	: Boundary dari himpunan A
$\text{ext}(A)$	: Exterior dari himpunan A
τ	: Topologi pada suatu himpunan
a	: Pusat bola buka
δ_a	: Jari-jari bola buka dengan pusat a
$B(a, \delta)$	: Bola buka berpusat di a dengan jari-jari δ
$\mathbb{R}^3$	: Ruang Euclid tiga dimensi
$\mathbb{R}^2$	: Ruang Euclid dua dimensi
V_T	: Volume dari tetrahedron T
$\ \cdot\ $	: Norma Euclid
$f: A \rightarrow B$	: Fungsi dari himpunan A ke himpunan B
$f(x)$	: Nilai fungsi f pada x
$A \rightarrow B$	: Pemetaan dari A ke B
$Y \subset X$	: Y subhimpunan dari X
Π	: Bidang

ABSTRAK

Azizah, Nur. 2026. **Isometri Tetrahedral Degenerasi pada Ruang Metrik**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: Ruang metrik, isometri, tetrahedral degenerasi

Ruang metrik (X, d) merupakan salah satu konsep dalam matematika yang mempelajari jarak antar titik pada suatu himpunan. Dalam ruang metrik, isometri merupakan pemetaan $f: X \rightarrow Y$ yang mempertahankan jarak, yaitu $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$, sehingga struktur geometri suatu ruang tetap terjaga. Penelitian ini membahas sifat isometri pada ruang metrik tetrahedral degenerasi. Tetrahedral degenerasi merupakan tetrahedron yang mengalami degenerasi sehingga titik-titik sudutnya berada pada satu bidang yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji hubungan isometri ruang tetrahedral degenerasi terhadap subruang Euclid $\mathbb{R}^2$ serta mengkaji sifat topologi yang berkaitan dengannya. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi pustaka. Data diperoleh dari buku, jurnal, dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan ruang metrik, isometri, tetrahedral degenerasi, ruang topologi, dan homeomorfisme. Analisis dilakukan melalui penelaahan definisi, teorema, dan pembuktian matematis yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap ruang tetrahedral degenerasi bersifat isometri terhadap suatu subruang dari $\mathbb{R}^2$. Selain itu, sifat tetrahedral degenerasi tetap dipertahankan melalui homeomorfisme sehingga ruang topologi yang homeomorfisme dengan ruang tetrahedral degenerasi juga dapat diasosiasikan sebagai ruang tetrahedral degenerasi. Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi dalam pengembangan teori ruang metrik khususnya pada kajian tetrahedral degenerasi.

ABSTRACT

Azizah, Nur. 2026. **Tetrahedral Isometric Degeneration in Metric Space.**
Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and
Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Metric space, isometric, tetrahedral degeneration

Metric space (X, d) is one of the concepts in mathematics that studies the distance between points in a set. In metric space, isometries are maps $f: X \rightarrow Y$ that maintain distance, i.e. $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$, so that the geometric structure of a space is maintained. This study discusses the isometric properties of the degenerate tetrahedral metric space. Tetrahedral degeneration is a tetrahedron that undergoes degeneration so that its corner points are on the same plane. This study aims to examine the isometric relationship of degeneration tetrahedral space to Euclid subspace and examine the topological properties related to it. This study uses a qualitative approach with a literature study method. Data were obtained from books, journals, and scientific articles related to metric spaces, isometry, tetrahedral degeneration, topological spaces, and homeomorphism. The analysis is carried out through the study of relevant definitions, theorems, and mathematical proofs. The results show that each degeneration tetrahedral space is isometric to a subspace of $\mathbb{R}^2$. In addition, the tetrahedral properties of degeneration are maintained through homeomorphism so that the topological space that homeomorphism with the tetrahedral space of degeneration can also be associated as the tetrahedral space of degeneration. Thus, this research contributes to the development of metric space theory, especially in the study of tetrahedral degeneration.

مستخلص البحث

عزيزة، نور. (٢٠٢٦). التنكس الإيزومتري رباعي السطوح في الفضاء المترى. البحث العلمي. برنا قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانغ.
المشرف: (١) الدكتور خير الرحمن، الماجستير، ماجستير في العلوم (٢) الدكتور فخر الرازي، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: الفضاء المترى، التماثل الإيزومتري، التنكس رباعي السطوح

الفضاء المترى (X, d) هو إحدى المفاهيم في الرياضيات التي تدرس المسافة بين النقاط في المجموعة. في الفضاء المترى، الإيزومتريات هي خرائط تحافظ $f: X \rightarrow Y$ على المسافة $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ ، أي بحيث يتم الحفاظ على البنية الهندسية للفضاء. ناقشت هذه الدراسة الخصائص الإيزومترية للفضاء المترى رباعي الأوجه المتدهور. التنكس رباعي السطوح هو رباعي السطوح يمر بالتحلل بحيث تكون نقاط الزوايا على نفس المستوى. هدفت هذه الدراسة إلى دراسة العلاقة الإيزومترية بين الفضاء رباعي السطوح المتدهور والفضاء الجزئي لإقليدس وفحص الخصائص الطوبولوجية المرتبطة به. استخدمت هذه الدراسة نهجا نوعيا مع طريقة دراسة الأدبيات. تم الحصول على البيانات من كتب ومجلات ومقالات علمية تتعلق بالفضاءات المترية، والتساوي القياسي، والتنكس رباعي الأوجه، والفضاءات الطوبولوجية، والتماثل الداخلي. تم إجراء التحليل من خلال دراسة التعريفات والنظريات والبراهين الرياضية ذات الصلة. ظهرت النتائج أن كل فضاء رباعي السطوح متكافئ القياس مع فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$. بالإضافة إلى ذلك، تم الحفاظ على خصائص التنكس رباعي السطوح من خلال التشابه الداخلي بحيث يمكن ربط الفضاء الطوبولوجي الذي يربط فيه التماثل مع الفضاء رباعي السطوح للتحط أيضا كفضاء رباعي السطوح للتحط. وبالتالي، ساهم هذا البحث في تطوير نظرية الفضاء المترى، خاصة في دراسة تدهور رباعي الأوجه.

BAB I

PENDAHULUAN

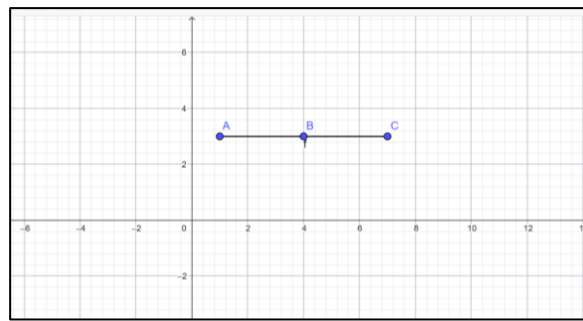
1.1 Latar Belakang

Metrik merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen dari suatu himpunan dan memenuhi beberapa aturan. Aturan yang dimaksud adalah keempat aksioma metrik, yaitu sifat non-negatif yaitu $d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$ untuk semua x dan y , sifat identitas yaitu $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$, sifat simetri yaitu $d(x, y) = d(y, x)$, dan sifat ketaksamaan segitiga yaitu $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ untuk semua x, y , dan z . Suatu himpunan tak kosong jika dilengkapi dengan metrik, maka disebut dengan ruang metrik. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Maurice Rene Frechet pada tahun 1906. Sejak diperkenalkan, konsep ini telah menjadi landasan bagi perkembangan analisis modern serta berbagai cabang matematika lainnya (Kreyszig, 1978).

Dalam teori ruang metrik, konsep isometri berperan penting sebagai fungsi yang mempertahankan jarak. Ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) dikatakan isometri jika terdapat fungsi bijektif $f: X \rightarrow Y$ yang memenuhi persamaan $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$ untuk semua $x, y \in X$ (Kreyszig, 1978). Melalui konsep ini, dapat mengidentifikasi ruang metrik yang memiliki struktur geometri serupa, meskipun didefinisikan pada himpunan yang berbeda.

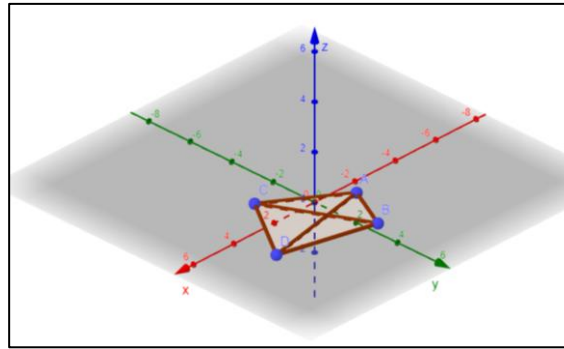
Dalam konteks kerangka konseptual ruang metrik dan isometri yang dibahas di atas, penelitian terkait karakteristik degenerasi dalam ruang metrik muncul sebagai area penelitian yang sangat relevan. Konsep degenerasi dalam geometri, metrik merujuk pada kondisi di mana suatu bangun geometri kehilangan dimensi yang

seharusnya menjadi objek dengan dimensi yang berkurang (Chvátal et al, 2024). Segitiga degenerasi didefinisikan sebagai segitiga yang titik-titiknya bersifat kolinear secara metrik, ditandai dengan persamaan $d(r,s) + d(s,t) = d(r,t)$ untuk tiga titik berbeda r, s, t dalam ruang metrik (X, d) (Richmond & Richmond, 1997). Menetapkan bukti fundamental bahwa jika (X, d) adalah ruang metrik dengan setidaknya lima titik dan setiap segitiga di dalamnya degenerasi, maka (X, d) isometri dengan subruang $(\mathbb{R}, d)$. Temuan ini menunjukkan bahwa segitiga degenerasi membatasi bentuk struktural ruang metrik sehingga hanya memiliki satu dimensi (Richmond & Richmond, 1997).



Gambar 1.1 Segitiga Degenerasi

Sebagai kelanjutan dari penelitian tentang segitiga degenerasi, Choi (2024) memperluas konsep degenerasi ke dimensi yang lebih tinggi melalui pengenalan ruang metrik tetrahedral degenerasi. Choi (2024) membagi tetrahedral degenerasi menjadi dua kategori berdasarkan sifat metriknya yaitu tipe I ditandai dengan salah satu sisi tetrahedron memiliki luas yang sama dengan total luas ketiga sisi lainnya, sedangkan tipe II diidentifikasi oleh kondisi bahwa setiap sisi memiliki luas yang lebih kecil daripada jumlah luas ketiga sisi lainnya. Dalam publikasi terbarunya, dibuktikan bahwa ruang metrik tetrahedral degenerasi dalam tipe I dan tipe II ini isometri dengan subruang Euclid $(\mathbb{R}^2, d)$. Hasil penting ini menunjukkan bahwa tetrahedral degenerasi membatasi struktur ruang metrik hanya pada dua dimensi.



Gambar 1.2 Tetrahedral Degenerasi

Menurut perspektif Islam, menjaga jarak antara titik sangat penting. Hal ini sejalan dengan ajaran dalam Al-Qur'an yang menyatakan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu dengan ukuran yang tepat dan terdefinisi dengan jelas. Allah berfirman dalam QS. Al-Qamar ayat 49 (Kementerian Agama Republik Indonesia, 2022).

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (qadar)*” (QS. Al-Qamar : 49).

Ayat ini menjelaskan bahwa setiap ciptaan Allah memiliki ukuran dan proporsi yang jelas. Menurut Ibnu Katsir (2009), ayat ini menunjukkan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu berdasarkan qadar-nya yang telah ditentukan (ukuran dan ketentuan), termasuk aspek waktu, jumlah, bentuk, dan sifat. Sementara itu bahwa tidak ada satupun dari ciptaan Allah yang diciptakan tanpa tujuan, segala sesuatu selalu disertai dengan ukuran, ketentuan, dan aturan tertentu sesuai dengan hikmahnya. Demikian pula, dalam tafsir Kementerian Agama Republik Indonesia (2022), ayat ini dipahami sebagai penegasan bahwa keteraturan dalam alam semesta merupakan bukti kekuasaan Allah, di mana segala sesuatu diciptakan dengan ukuran dan perhitungan yang sangat tepat.

Berdasarkan pemaparan di atas, penelitian ini berfokus pada kajian karakteristik ruang metrik tetrahedral degenerasi dan pembuktian hubungan isometrinya dengan subruang $(\mathbb{R}^2, d)$. Pentingnya penelitian ini terletak pada perluasan teori degenerasi dari segitiga ke tetrahedral, serta penyelidikan interaksi antara struktur metrik dan topologi dalam ruang degenerasi. Dengan demikian, melalui analisis matematis yang cermat, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pemahaman yang lebih mendalam tentang sifat geometri ruang metrik tetrahedral degenerasi dan implikasi hasil isometri bagi ruang Euclid.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah ditetapkan, tujuan penelitian ini adalah untuk melakukan isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah ditetapkan, manfaat penelitian ini adalah memberikan kontribusi dalam pengembangan teori ruang metrik melalui isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini membatasi pada isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik dengan melalui pendekatan teori ruang metrik.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang metrik

Sebuah ruang metrik adalah pasangan (X, d) di mana X adalah sebuah himpunan, dan d adalah sebuah metrik pada X (atau fungsi jarak pada X). Fungsi ini didefinisikan pada $X \times X$, sehingga untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku:

$$(M1) \ d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M3) \ d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri)}$$

$$(M4) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (ketaksamaan segitiga)}$$

2. Isometri

Misalkan $X = (X, d)$ dan $(\tilde{X}, \tilde{d})$ adalah ruang metrik. Suatu pemetaan $T : X \rightarrow \tilde{X}$ disebut isometri jika T mempertahankan jarak, yaitu jika semua $x, y \in X$ berlaku

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

Dimana Tx dan Ty merupakan hasil pemetaan dari x dan y .

Ruang X disebut isometri dengan ruang $\tilde{X}$ apabila terdapat suatu isometri bijektif dari X onto $\tilde{X}$. Maka ruang X dan $\tilde{X}$ disebut ruang isometri.

3. Tetrahedral Degenerasi Tipe I

Apabila setidaknya satu sisi dari T memiliki luas yang sama dengan jumlah luas ketiga sisi lainnya, maka T adalah tetrahedral degenerasi. Untuk kesederhanaan, akan menyebut jenis tetrahedron ini sebagai tetrahedron tipe 1.

4. Tetrahedral Degenerasi Tipe II

Jika setiap tetrahedron T memiliki luas yang lebih kecil dari pada jumlah luas ketiga sisi lainnya, maka tetrahedron T tetap dikatakan degenerasi jika memilih satu simpul tetrahedron T tertentu, persamaan pada teorema 1.2. dalam hal ini, tetrahedron T sebagai tetrahedral degenerasi tipe II.

5. Ruang Tetrahedral Degenerasi

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, dapat disebut sebagai ruang tetrahedral degenerasi jika dan hanya jika setiap tetrahedron (baik tipe I atau tipe II) yang dapat dibentuk di (X, d) mengalami degenerasi.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Adapun beberapa teori yang akan menjadi pendukung pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik adalah suatu struktur matematika yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan fungsi jarak yang memenuhi beberapa sifat tertentu.

Definisi 2.1 (Cheung Wing-Sum, 2024)

Sebuah ruang metrik adalah pasangan (X, d) di mana X adalah sebuah himpunan, dan d adalah sebuah metrik pada X (atau fungsi jarak pada X). Fungsi ini didefinisikan pada $X \times X$, sehingga untuk semua $x, y, z \in X$, berlaku:

$$\text{M1)} \quad d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri)}$$

$$\text{M4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (ketaksamaan segitiga)}$$

Contoh 2.2

Diberikan fungsi $d: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d(x, y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|}$$

dengan $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Buktikan bahwa $(\mathbb{R}^3, d)$ merupakan ruang metrik.

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}^3, d)$ merupakan ruang metrik.

$$M1) d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) \in \mathbb{R}$$

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, berlaku $|a - b| \in \mathbb{R}$ dan $|a - b| \geq 0$, maka $1 + |a - b| > 0$. Akibatnya

$$\frac{|a - b|}{1 + |a - b|} \in \mathbb{R}.$$

Dengan demikian

$$\frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} \in \mathbb{R}.$$

Karena jumlah hingga bilangan riil adalah bilangan riil maka $d(x, y) \in \mathbb{R}$.

$$d(x, y) \geq 0$$

Karena $|x_i - y_i| \geq 0$ untuk $i = 1, 2, 3$, maka $1 + |x_i - y_i| > 0$. Sehingga

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \geq 0$$

Maka diperoleh $d(x, y) \geq 0$.

$$d(x, y) < \infty$$

Untuk setiap $t \geq 0$, berlaku

$$0 \leq \frac{t}{1 + t} < 1.$$

Ambil $t = |x_i - y_i|$, maka

$$0 \leq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} < 1.$$

Untuk $i = 1, 2, 3$, diperoleh

$$0 \leq \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} < 1,$$

$$0 \leq \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} < 1,$$

$$0 \leq \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} < 1$$

Menjumlahkan ketiganya yaitu $0 \leq d(x, y) < 3$. Maka $d(x, y)$ terbatas, sehingga $d(x, y) < \infty$.

Terbukti bahwa $d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$.

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(\Leftarrow) d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Misalkan $d(x, y) = 0$. Maka

$$\frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} = 0.$$

Untuk setiap $t \geq 0$ berlaku $\frac{t}{1+t} \geq 0$, maka setiap suku pada penjumlahan di atas adalah tidak negatif. Jumlah beberapa bilangan tidak negatif bernilai nol hanya jika masing-masing suku bernilai nol. Dengan demikian:

$$\frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} = 0, \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} = 0, \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} = 0.$$

Untuk setiap $t \geq 0$ berlaku

$$\frac{t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Sehingga diperoleh $|x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0, |x_3 - y_3| = 0$. Karena sifat nilai mutlak adalah $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, maka $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$. Jadi terbukti bahwa $x = y$.

$$(\Rightarrow) x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$$

Misalkan $x = y$, maka $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$. Akibatnya $|x_1 - y_1| = 0, |x_2 - y_2| = 0, |x_3 - y_3| = 0$. Sehingga

$$\frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} = 0, \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} = 0, \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} = 0.$$

Jadi di jumlahkan menjadi $d(x, y) = 0$.

Terbukti bahwa $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

Ambil sebarang $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$d(x, y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|}.$$

Karena $|a - b| = |b - a|$, maka

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sehingga

$$d(x, y) = \frac{|y_1 - x_1|}{1 + |y_1 - x_1|} + \frac{|y_2 - x_2|}{1 + |y_2 - x_2|} + \frac{|y_3 - x_3|}{1 + |y_3 - x_3|} = d(y, x).$$

Jadi terbukti bahwa $d(x, y) = d(y, x)$.

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ambil sebarang $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$, dan $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$.

Berdasarkan definisi,

$$d(x, y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} = \sum_{i=1}^3 \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

Perhatikan bahwa untuk $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ dan $i = 1, 2, 3$ didapatkan

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &= |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \\ &\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}, \quad |x_i - y_i| \geq 0,$$

memiliki turunan pertama positif, sehingga $\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$ naik saat $|x_i - y_i| \geq 0$. Dari

$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ didapatkan

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \leq \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} - \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ &= \frac{|x_i - z_i||z_i - y_i|(2 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|)}{(1 + |x_i - z_i|)(1 + |z_i - y_i|)(1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|)}. \end{aligned}$$

Karena $|x_i - z_i|, |z_i - y_i|, |x_i - z_i| \geq 0$, maka

$$\frac{|x_i - z_i||z_i - y_i|(2 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|)}{(1 + |x_i - z_i|)(1 + |z_i - y_i|)(1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|)} \geq 0$$

Sehingga

$$\begin{aligned} & \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} - \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \geq 0 \\ & \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} \geq \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \end{aligned}$$

Karena $\frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \geq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$, maka

$$\begin{aligned} & \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} \geq \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\ & \geq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}. \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, 2, 3$, diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} \leq \frac{|x_1 - z_1|}{1 + |x_1 - z_1|} + \frac{|z_1 - y_1|}{1 + |z_1 - y_1|}, \\ & \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} \leq \frac{|x_2 - z_2|}{1 + |x_2 - z_2|} + \frac{|z_2 - y_2|}{1 + |z_2 - y_2|}, \end{aligned}$$

$$\frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} \leq \frac{|x_3 - z_3|}{1 + |x_3 - z_3|} + \frac{|z_3 - y_3|}{1 + |z_3 - y_3|}.$$

Menjumlahkan ketiga pertidaksamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} \\ & \leq \left(\frac{|x_1 - z_1|}{1 + |x_1 - z_1|} + \frac{|x_2 - z_2|}{1 + |x_2 - z_2|} + \frac{|x_3 - z_3|}{1 + |x_3 - z_3|} \right) \\ & \quad + \left(\frac{|z_1 - y_1|}{1 + |z_1 - y_1|} + \frac{|z_2 - y_2|}{1 + |z_2 - y_2|} + \frac{|z_3 - y_3|}{1 + |z_3 - y_3|} \right). \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi fungsi d ,

$$\begin{aligned} & \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|} = d(x, y), \\ & \frac{|x_1 - z_1|}{1 + |x_1 - z_1|} + \frac{|x_2 - z_2|}{1 + |x_2 - z_2|} + \frac{|x_3 - z_3|}{1 + |x_3 - z_3|} = d(x, z), \\ & \frac{|z_1 - y_1|}{1 + |z_1 - y_1|} + \frac{|z_2 - y_2|}{1 + |z_2 - y_2|} + \frac{|z_3 - y_3|}{1 + |z_3 - y_3|} = d(z, y). \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}^3, d)$ ruang metrik. ■

2.1.2 Fungsi Injektif

Definisi 2.3 (Bartle, 2011)

Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B . Fungsi f dikatakan injektif jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$, berlaku

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Contoh 2.4

Misalkan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan fungsi injektif. Berdasarkan definisi yang ekuivalen, cukup tujukan bahwa

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 = x_2$$

Misalkan $f(x_1) = f(x_2)$. Maka

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Jadi, f merupakan fungsi injektif. ■

2.1.3 Fungsi Surjektif

Definisi 2.5 (Bartle, 2011)

Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B . Fungsi f dikatakan surjektif jika

$$f(A) = B,$$

yaitu daerah hasil $R(f) = B$.

Contoh 2.6

Misalkan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^3$. Akan ditunjukkan bahwa g merupakan fungsi surjektif.

Ambil sembarang $y \in \mathbb{R}$. Akan dicari $x \in \mathbb{R}$ sehingga

$$g(x) = y$$

$$x^3 = y$$

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

Karena $\sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$, maka

$$g(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y.$$

Jadi, untuk setiap $y \in \mathbb{R}$ terdapat $x \in \mathbb{R}$ sehingga $g(x) = y$. Dengan demikian, g merupakan fungsi surjektif. ■

2.1.4 Fungsi Bijektif

Definisi 2.7 (Bartle, 2011)

Misalkan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari A ke B . Fungsi f dikatakan bijektif jika f bersifat injektif dan surjektif.

2.1.5 Isometri

Definisi 2.8 (Leemann, 2026)

Suatu fungsi bijektif $f: X \rightarrow Y$ disebut isometri jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$. Dua ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y) dikatakan isometri apabila terdapat suatu isometri antara keduanya.

Contoh 2.9

Misalkan $X = (\mathbb{R}, d)$ dan $\tilde{X} = (\mathbb{R}, \tilde{d})$ adalah ruang metrik dengan

$$d(x, y) = |x - y|$$

dan

$$\tilde{d}(u, v) = |u - v|$$

Buktikan bahwa melalui pemetaan $T: X \rightarrow \tilde{X}$, dengan

$$T(x) = x + 5, \quad \forall x \in X$$

Ruang metrik X dan $\tilde{X}$ adalah isometri.

Akan ditunjukkan bahwa pemetaan T merupakan isometri dan bersifat bijektif.

Ambil sembarang $x, y \in X$, berlaku:

$$\tilde{d}(T(x), T(y)) = \tilde{d}(x + 5, y + 5)$$

Akan dibuktikan metrik $\tilde{d}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(T(x), T(y)) &= \tilde{d}(x + 5, y + 5) \\ &= |(x + 5) - (y + 5)| \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

$$= d(x, y)$$

Jadi terbukti bahwa metrik $\tilde{d}$ adalah $\tilde{d}(T(x), T(y)) = d(x, y)$.

Akan ditunjukkan bahwa T adalah bijektif. Misal $T(x) = T(y)$. Maka berlaku

$$T(x) = T(y)$$

$$x + 5 = y + 5$$

$$x = y$$

Jadi terbukti T injektif.

Ambil sembarang $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Akan mencari $x \in X$ sehingga $T(x) = \tilde{x}$.

Karena $T(x) = x + 5$, maka persamaan

$$x + 5 = \tilde{x}$$

$$x = \tilde{x} - 5$$

Karena $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, maka $\tilde{x} - 5 \in \mathbb{R} = X$. Maka,

$$T(x) = T(\tilde{x} - 5)$$

$$= (\tilde{x} - 5) + 5$$

$$= \tilde{x}$$

Untuk setiap $\tilde{x} \in \tilde{X}$, selalu ada $x \in X$ yang dipetakan ke $\tilde{x}$. Maka terbukti T surjektif.

Karena T isometri dan T bijektif, maka T adalah isometri bijektif dari X ke $\tilde{X}$.

Maka ruang metrik $X = (\mathbb{R}, d)$ dan $\tilde{X} = (\mathbb{R}, \tilde{d})$ adalah ruang isometri. ■

2.1.6 Tetrahedral Degenerasi Tipe I

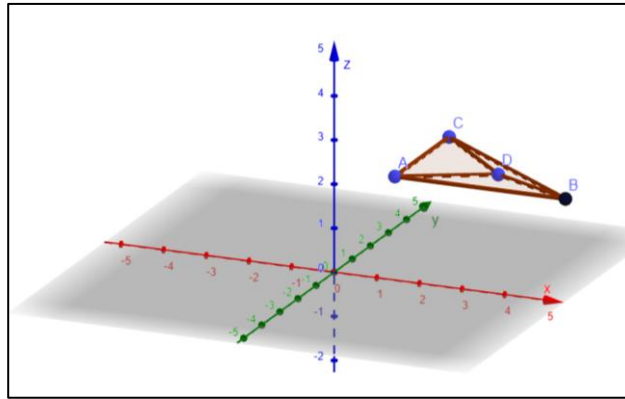
Definisi 2.10 (Choi, 2024)

Jika setidaknya satu sisi dari T memiliki luas yang sama dengan jumlah luas ketiga sisi lainnya, maka T adalah tetrahedral degenerasi. Untuk kesederhanaan, akan menyebut jenis tetrahedron ini sebagai degenerasi tipe 1.

Contoh 2.11

Diberikan empat titik di ruang Euclid $\mathbb{R}^3$ sebagai berikut:

$$A = (1,1,2), B = (5,1,2), C = (1,4,2), D = (3,2,2)$$



Gambar 2.1 Tetrahedron $A = (1,1,2), B = (5,1,2), C = (1,4,2), D = (3,2,2)$

Tentukan apakah tetrahedron $T = \{A, B, C, D\}$ pada gambar 2.1 termasuk dalam kategori degenerasi tipe 1?

Akan dibuktikan bahwa semua titik memiliki koordinat $z = 2$, sehingga keempat titik terletak pada satu bidang yang sama (koplanar). Oleh karena itu, tetrahedron yang terbentuk merupakan tetrahedral degenerasi. Tetrahedron memiliki empat sisi yaitu:

$$\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$$

Luas segitiga dalam ruang $\mathbb{R}^3$ dengan menggunakan rumus:

$$L = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Maka akan dicari luas dari $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$ yaitu:

1. Luas ΔABC

$$\text{Vektor } \overrightarrow{AB} = B - A = \langle 4, 0, 0 \rangle, \overrightarrow{AC} = C - A = \langle 0, 3, 0 \rangle.$$

Maka akan dikali silang dengan vektor:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}((0)(0) - (0)(3)) - \vec{j}((4)(0) - (0)(0)) + \vec{k}((4)(3) \\
 &\quad - (0)(0)) \\
 &= \vec{i}((0) - (0)) - \vec{j}((0) - (0)) + \vec{k}((12) - (0)) \\
 &= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(12) \\
 &= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 12\vec{k}
 \end{aligned}$$

Jadi hasil perkalian silang dari $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0i, 0j, 12k = \langle 0, 0, 12 \rangle$.

Maka akan dicari panjang vektor

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{0 + 0 + 144} = \sqrt{144} = 12$$

Disubstitusikan kepada luas segitiga

$$L_1 = \frac{1}{2}(12) = 6$$

2. Luas $\triangle ABD$, karena $D = A$ maka $\triangle ABD$ bersifat degenerasi.

Vector $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 0, 0 \rangle$, $\overrightarrow{AD} = D - A = \langle 2, 1, 0 \rangle$

Maka akan dikali silang dengan vektor

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \vec{i}((0)(0) - (0)(1)) - \vec{j}((4)(0) - (0)(2)) + \vec{k}((4)(1) \\
 &\quad - (0)(2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{i}((0) - (0)) - \vec{j}((0) - (0)) + \vec{k}((4) - (0)) \\
&= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(4) \\
&= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 4\vec{k}
\end{aligned}$$

Jadi hasil perkalian silang dari $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \langle 0, 0, 4 \rangle$.

Maka akan dicari panjang vektor yaitu

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

Disubstitusikan kepada luas segitiga

$$L_2 = \frac{1}{2}(4) = 2.$$

3. Luas ΔACD , karena $D = A$ maka ΔACD bersifat degenerasi.

Vektor $\overrightarrow{AC} = \langle 0, 3, 0 \rangle$, $\overrightarrow{AD} = \langle 2, 1, 0 \rangle$.

Maka akan dikali silang dengan vektor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}((3)(0) - (0)(1)) - \vec{j}((0)(0) - (0)(2)) + \vec{k}((0)(1) \\
&\quad - (3)(2)) \\
&= \vec{i}((0) - (0)) - \vec{j}((0) - (0)) + \vec{k}((0) - (6)) \\
&= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-6) \\
&= 0\vec{i} - 0\vec{j} + (-6)\vec{k}
\end{aligned}$$

Jadi hasil perkalian silang dari $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \langle 0, 0, -6 \rangle$.

Maka akan dicari panjang vektor yaitu

$$\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Disubstitusikan kepada luas segitiga

$$L_3 = \frac{1}{2}(6) = 3$$

4. Luas ΔBCD

Vektor $\overrightarrow{BD} = D - B = (-2, 1, 0)$

Vektor $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4, 3, 0)$

Maka akan dikali silang dengan vektor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}((0)(0) - (0)(3)) - \vec{j}((-4)(0) - (0)(-2)) \\ &\quad + \vec{k}((-4)(1) - (3)(-2)) \\ &= \vec{i}((0) - (0)) - \vec{j}((0) - (0)) + \vec{k}((-4) - (6)) \\ &= \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(2) \\ &= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

Jadi hasil perkalian silang dari $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \langle 0, 0, 2 \rangle$.

Maka akan dicari panjang vektor yaitu

$$\|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

Disubstitusikan kepada luas segitiga

$$L_4 = \frac{1}{2}(2) = 1$$

Akan dibuktikan tetrahedral degenerasi tipe 1.

Diperoleh $L_1 = 6, L_2 = 2, L_3 = 3, L_4 = 1$.

Untuk $i = 1$:

$$\sum_{j \neq 1} L_j = L_2 + L_3 + L_4 = 2 + 3 + 1 = 6 = L_1$$

Sehingga $L_1 = L_2 + L_3 + L_4$.

Jadi terdapat setidaknya satu sisi yang luasnya sama dengan luas tiga sisi lainnya, maka tetrahedron $T = \{A, B, C, D\}$ adalah tetrahedral degenerasi tipe 1. ■

2.1.7 Ruang Topologi

Definisi 2.12 (Mendelson, 1990)

Misalkan X adalah himpunan tak-kosong dan τ adalah sebuah himpunan bagian dari X sedemikian sehingga:

1. $X \in \tau$
2. $\emptyset \in \tau$
3. Jika $0_1, 0_2, \dots, 0_n \in \tau$, maka $0_1 \cap 0_2 \cap \dots \cap 0_n \in \tau$
4. Jika untuk setiap $\alpha \in I, 0_\alpha \subseteq \tau$, maka $\cup_{\alpha \in I} 0_\alpha \in \tau$.

Pasangan objek (X, τ) disebut sebuah ruang topologi. Himpunan X , dan anggota dari τ disebut himpunan terbuka.

Contoh 2.13

Diberikan himpunan $X = \{a, b, c\}$ dan $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b\}\}$. Akan dibuktikan bahwa τ topologi pada X .

Akan ditunjukkan bahwa τ memenuhi syarat-syarat topologi pada X .

1. $X = \{a, b, c\} \in \tau$

Jadi terbukti $X \in \tau$

$$2. \emptyset \in \tau$$

Jadi terbukti $\emptyset \in \tau$

$$3. \{a, b\} \cap \{b\} = \{b\} \in \tau$$

$$\{a, b\} \cap X = \{a, b\} \in \tau$$

$$\{b\} \cap X = \{b\} \in \tau$$

irisan dengan $\emptyset$ selalu menghasilkan $\emptyset \in \tau$

Jadi terbukti $\{a, b\} \cap \{b\} = \{b\} \in \tau$

$$4. \{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in \tau$$

$$\{a, b\} \cup X = X \in \tau$$

$$\{b\} \cup X = X \in \tau$$

Gabungan dengan $\emptyset$ tidak mengubah himpunan. Jadi terbukti $\{a, b\} \cup \{b\} =$

$$\{a, b\} \in \tau.$$

Karena ke empatnya terpenuhi, jadi (X, τ) merupakan ruang topologi. ■

2.1.8 Bola Buka

Definisi 2.14 (Choi, 2024)

Misalkan (X, d) adalah sebuah ruang metrik. Misalkan $a \in X$ dan $\delta > 0$ diberikan. Subhimpunan dari X yang terdiri dari semua titik $x \in X$ sedemikian sehingga $d(a, x) < \delta$ disebut bola buka berpusat di a dan berjari-jari δ dinotasikan dengan $B(a, \delta)$. Dengan demikian, $x \in B(a, \delta)$ jika dan hanya jika $x \in X$ dan $d(x, a) < \delta$.

Contoh 2.15

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan metrik euclid

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

Untuk $x = (\xi_1, \xi_2)$ dan $y = (\eta_1, \eta_2)$. Diberikan $a = (1,2)$ dan $\delta = 2$. Tentukan apakah titik-titik berikut merupakan anggota dari $B_{(1,2)}(2)$ yaitu $p = (2,3)$, $q = (3,2)$, $r = (1,2)$.

Akan ditentukan keanggotaan setiap titik terhadap bola buka $B_{(1,2)}(2)$.

1. $p = (2,3)$

Identifikasi koordinat

$a = (1,2)$ yaitu $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2$

$p = (2,3)$ yaitu $\eta_1 = 2, \eta_2 = 3$

Maka

$$\begin{aligned} d(a, p) &= \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Bandingkan dengan $\delta = 2$

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\sqrt{2} < 2$$

Terbukti bahwa $p \in B_a(2)$ karena $d(a, p) = \sqrt{2} < 2$.

2. $q = (3,2)$

Identifikasi koordinat

$a = (1,2)$ yaitu $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2$

$q = (3,2)$ yaitu $\eta_1 = 3, \eta_2 = 2$

Maka

$$d(a, q) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2} \\
&= \sqrt{(-2)^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{4 + 0} \\
&= \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

Bandungkan dengan $\delta = 2$ yaitu:

$$2 \not< 2.$$

Terbukti bahwa $q \notin B_a(2)$ karena $d(a, q) = 2 \not< 2$ tidak memenuhi syarat.

3. $r = (1,2)$

Identifikasi koordinat

$a = (1,2)$ yaitu $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2$

$r = (1,2)$ yaitu $\eta_1 = 1, \eta_2 = 2$

Maka

$$\begin{aligned}
d(a, r) &= \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \\
&= \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{0 + 0} \\
&= \sqrt{0} = 0
\end{aligned}$$

Bandungkan dengan $\delta = 2$

$$0 < 2$$

Terbukti bahwa $r \in B_a(2)$ karena $d(a, r) = 0 < 2$. ■

2.1.9 Homeomorfisme

Definisi 2.16 (Mendelson, 1990)

Ruang topologi (X, τ) dan (Y, τ') disebut homeomorfik jika terdapat fungsi invers $f: X \rightarrow Y$ dan $g: Y \rightarrow X$ sedemikian sehingga f dan g keduanya kontinu. Dalam hal ini, fungsi f dan g disebut sebagai homeomorfisme antara (X, τ) dan (Y, τ') .

Contoh 2.17

Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dengan topologi $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ dan $Y = \{1, 2, 3\}$ dengan topologi $\tau' = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Y\}$. Buktikan bahwa (X, τ) dan (Y, τ') homeomorfisme dengan mencari fungsi $f: X \rightarrow Y$ dan $g: Y \rightarrow X$ yang saling invers dan keduanya kontinu.

Akan dibuktikan bahwa $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$. Diketahui:

$$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}, \tau' = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Y\}$$

Ambil fungsi $f: X \rightarrow Y$ dengan aturan

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 2, \quad f(c) = 3$$

Fungsi f bijektif. Inversnya $g: Y \rightarrow X$ adalah:

$$g(1) = a, \quad g(2) = b, \quad g(3) = c$$

$$1. \quad g \circ f^{-1}$$

$$g \circ f = id_X$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = a = id_X(a)$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = b = id_X(b)$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(3) = c = id_X(c)$$

Terbukti bahwa $(g \circ f) = id_X$

$$f \circ g = id_Y$$

$$f \circ g(1) = f(g(1)) = f(a) = 1 = id_Y(1)$$

$$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(b) = 2 = id_Y(2)$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(c) = 3 = id_Y(3)$$

Terbukti bahwa $(f \circ g) = id_Y$

Karena $g \circ f = id_X$ dan $f \circ g = id_Y$, maka $g = f^{-1}$ saling invers atau bijektif.

2. Kontinu $f: X \rightarrow Y$

Himpunan buka di Y adalah $\tau' = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, Y\}$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \in \tau$$

$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{a, b\} \in \tau$$

$$f^{-1}(Y) = X \in \tau$$

Untuk setiap himpunan buka $U \in \tau', f^{-1}(U) \in \tau$ sehingga $f: X \rightarrow Y$ kontinu.

3. Kontinu $g = f^{-1}$

Himpunan buka di X adalah $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

$$g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau'$$

$$g^{-1}(\{a\}) = \{1\} \in \tau'$$

$$g^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2\} \in \tau'$$

$$g^{-1}(X) = Y \in \tau'$$

Untuk setiap himpunan buka $V \in \tau, g^{-1}(V) \in \tau'$, sehingga $g = f^{-1}$ kontinu.

Terdapat fungsi $f: X \rightarrow Y$ dan $g: Y \rightarrow X$ yang saling invers, dan f dan g kontinu. Jadi terbukti bahwa (X, τ) homeomorfik dengan (Y, τ') . ■

2.1.10 Interior

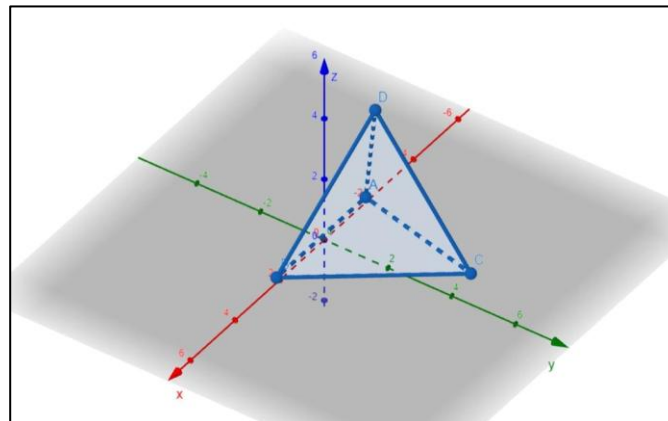
Definisi 2.18 (Mendelson, 1990)

Misalkan A adalah suatu subset dari ruang topologi X . Suatu titik $x \in A$ dikatakan sebagai titik interior dari A jika terdapat suatu himpunan terbuka $U \subseteq X$ sedemikian sehingga $x \in U \subseteq A$. Himpunan semua titik interior dari A disebut interior dari A , dan dinotasikan dengan $\text{Int}(A)$.

Contoh 2.19

Diberikan tetrahedron $T = ABCD \subset \mathbb{R}^3$ dengan titik sudut

$$A = (1,2,3), B = (5,2,3), C = (2,6,3), D = (2,3,7).$$



Gambar 2.2 Tetrahedron $A = (1,2,3), B = (5,2,3), C = (2,6,3), D = (2,3,7)$

Tunjukkan bahwa titik $P = (2.5,3,4)$ merupakan titik interior dari tetrahedron T .

Berdasarkan konsep pada ruang Euclid $\mathbb{R}^3$, suatu titik berada di interior sebuah tetrahedron jika dapat dinyatakan sebagai kombinasi konveks ketat dari titik-titik sudutnya. Artinya $p \in \text{Int}(T)$ jika terdapat $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ sehingga

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D,$$

dengan

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1.$$

Substitusikan koordinat titik-titik sudut

$$(2.5, 3, 4) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(5, 2, 3) + \gamma(2, 6, 3) + \delta(2, 3, 7).$$

Maka diperoleh

$$(2.5, 3, 4) = (\alpha + 5\beta + 2\gamma + 2\delta, 2\alpha + 2\beta + 6\gamma + 3\delta, 3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 7\delta).$$

Dengan menyamakan komponen koordinatnya diperoleh system persamaan

$$\alpha + 5\beta + 2\gamma + 2\delta = 2.5 \quad (1)$$

$$2\alpha + 2\beta + 6\gamma + 3\delta = 3 \quad (2)$$

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 7\delta = 4 \quad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \quad (4)$$

Dari persamaan (4) diperoleh

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma - \delta.$$

Substitusikan ke persamaan (1)

$$(1 - \beta - \gamma - \delta) + 5\beta + 2\gamma + 2\delta = 2.5$$

$$1 + 4\beta + \gamma + \delta = 2.5$$

$$4\beta + \gamma + \delta = 1.5 \quad (5)$$

Selanjutnya substitusikan ke persamaan (2)

$$2(1 - \beta - \gamma - \delta) + 2\beta + 6\gamma + 3\delta = 3$$

$$2 + 4\gamma + \delta = 3$$

$$4\gamma + \delta = 1 \quad (6)$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (3)

$$3(1 - \beta - \gamma - \delta) + 3\beta + 3\gamma + 7\delta = 4$$

$$3 + 4\delta = 4$$

$$\delta = \frac{1}{4}$$

(7)

Substitusikan nilai $\delta = \frac{1}{4}$ ke persamaan (6)

$$4\gamma + \frac{1}{4} = 1$$

$$4\gamma = \frac{3}{4}$$

$$\gamma = \frac{3}{16}.$$

Selanjutnya substitusikan $\gamma = \frac{3}{16}$ dan $\delta = \frac{1}{4}$ ke persamaan (5)

$$4\beta + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

Ubah penyebut menjadi 16

$$4\beta = \frac{3}{16} - \frac{7}{16} = \frac{24}{16}$$

$$4\beta + \frac{7}{16} = \frac{24}{16}$$

$$4\beta = \frac{17}{16}$$

$$\beta = \frac{17}{64}$$

Terakhir untuk menentukan α

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma - \delta$$

$$= 1 - \frac{17}{64} - \frac{3}{16} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{64}{64} - \frac{17}{64} - \frac{12}{64} - \frac{16}{64} = \frac{19}{64}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\alpha = \frac{19}{64}, \beta = \frac{17}{64}, \gamma = \frac{3}{16}, \delta = \frac{1}{4}.$$

Terlihat bahwa

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0,$$

dan

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

Karena P dapat dinyatakan sebagai kombinasi konveks ketat dari titik-titik sudut tetrahedron T , maka P berada di bagian dalam tetrahedron tersebut

Dalam teori simpleks di $\mathbb{R}^3$, hal ini ekuivalen dengan $P \in \text{Int}(T)$. Dengan demikian terbukti bahwa titik $P = (2.5, 3, 4)$ merupakan titik interior dari tetrahedron T . ■

2.1.11 Boundary

Definisi 2.20 (Mendelson, 1990)

Diberikan suatu himpunan bagian A dari suatu ruang topologi X . Suatu titik x dikatakan berada pada *boundary* dari A apabila x termasuk ke dalam penutup himpunan A dan juga termasuk ke dalam penutup komplemen dari A . Batas dari A dinotasikan dengan $\text{Bdry}(A)$.

Contoh 2.21

Diberikan tetrahedron $T = ABCD \subset \mathbb{R}^3$ dengan titik sudut

$$A = (2, 3, 4), B = (6, 3, 4), C = (3, 7, 4), D = (3, 4, 8).$$

Misalkan $P = (4, 5, 4)$. Tunjukkan bahwa P merupakan titik *boundary* dari tetrahedron T , yaitu $P \in \text{Bdry}(T)$.

Berdasarkan definisi *boundary*, cukup ditunjukkan bahwa $P \in T$ dan $P \in \mathbb{R}^3 \setminus T$.

Perhatikan bahwa titik

$$A = (2, 3, 4), B = (6, 3, 4), C = (3, 7, 4)$$

memiliki koordinat ketiga yang sama, yaitu 4, maka A, B, C terletak pada bidang $z = 4$. Sedangkan $D = (3, 4, 8)$ tidak terletak pada bidang tersebut. Jadi, ABC merupakan salah satu sisi tetrahedron T . Karena titik $P = (4, 5, 4)$ juga memiliki koordinat ketiga 4, maka P berada pada bidang yang sama. Selanjutnya

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

Dengan

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Substitusikan koordinat titik sudut

$$(4, 5, 4) = \alpha(2, 3, 4) + \beta(6, 3, 4) + \gamma(3, 7, 4).$$

Diperoleh persamaan

$$2\alpha + 6\beta + 3\gamma = 4 \quad (8)$$

$$3\alpha + 3\beta + 7\gamma = 5 \quad (9)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (10)$$

Persamaan (3)

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma$$

Substitusikan ke persamaan (3) dan (1)

$$2(1 - \beta - \gamma) + 6\beta + 3\gamma = 4$$

$$2 - 2\beta - 2\gamma + 6\beta + 3\gamma = 4$$

$$2 + 4\beta + \gamma = 4$$

$$4\beta + \gamma = 2 \quad (11)$$

Substitusikan ke persamaan (2) dan (1)

$$3(1 - \beta - \gamma) + 3\beta + 7\gamma = 5$$

$$3 - 3\beta - 3\gamma + 3\beta + 7\gamma = 5$$

$$3 + 4\gamma = 5$$

$$4\gamma = 2$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Substitusikan $\gamma = \frac{1}{2}$ ke (11)

$$4\beta + \frac{1}{2} = 2$$

$$4\beta = \frac{3}{2}$$

$$\beta = \frac{3}{8}$$

Untuk menentukan α

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$$

Diperoleh

$$\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{3}{8}, \gamma = \frac{1}{2}$$

Sehingga

$$\alpha, \beta, \gamma \geq 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Maka P terletak pada sisi ABC dari tetrahedron T . Jadi $P \in T$.

Karena P berada pada sisi ABC , maka untuk setiap $\delta > 0$:

$$B(P, \delta) \cap T \neq \emptyset$$

dan

$$B(P, \delta) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus T) \neq \emptyset.$$

Akibatnya $P \in (\mathbb{R}^3 \setminus T)$.

Jadi terbukti $P = (4, 5, 4) \in \text{Bdry}(T)$. ■

2.1.12 Exterior

Definisi 2.22 (Mendelson, 1990)

Diberikan himpunan bagian A dari ruang topologi X . Titik $x \in X$ disebut titik *exterior* dari A jika terdapat himpunan terbuka $U \subseteq X$ sehingga

$$x \in U \subseteq X \setminus A.$$

Himpunan semua titik *exterior* dari A disebut *exterior* A dan dinotasikan dengan $ext(A)$.

Contoh 2.23

Diberikan tetrahedron $T = ABCD \subset \mathbb{R}^3$ dengan titik sudut

$$A = (1,2,3), B = (5,2,4), C = (2,6,5), D = (6,4,8).$$

Misalkan titik $P = (9,8,10)$. Tunjukkan bahwa $P \in ext(T)$.

Berdasarkan definisi exterior, titik $P \in ext(T)$ jika terdapat himpunan buka $U \subset \mathbb{R}^3$ sehingga $P \in U \subset \mathbb{R}^3 \setminus T$. Akan dibuktikan dengan menggunakan bola buka di sekitar P .

Ambil bola buka berpusat di P

$$B(P, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| < \delta\}.$$

Akan dicari $\delta > 0$ sehingga

$$B(P, \delta) \cap T = \emptyset.$$

Untuk menghitung jarak Euclid dari titik P ke setiap titik sudut.

Titik P ke titik A

$$\begin{aligned} \|P - A\| &= \sqrt{(9-1)^2 + (8-2)^2 + (10-3)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 36 + 49} = \sqrt{149}. \end{aligned}$$

Titik P ke titik B

$$\|P - B\| = \sqrt{(9-5)^2 + (8-2)^2 + (10-4)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36 + 36} = \sqrt{88}.$$

Titik P ke titik C

$$\begin{aligned}\|P - C\| &= \sqrt{(9 - 2)^2 + (8 - 6)^2 + (10 - 5)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 4 + 25} = \sqrt{78}.\end{aligned}$$

Titik P ke titik D

$$\begin{aligned}\|P - D\| &= \sqrt{(9 - 6)^2 + (8 - 4)^2 + (10 - 8)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}.\end{aligned}$$

Maka jarak minimum diperoleh

$$d_{\min} = \min\{\sqrt{149}, \sqrt{88}, \sqrt{78}, \sqrt{29}\} = \sqrt{29}.$$

Maka dipilih radius bola yaitu

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{29}.$$

Maka untuk setiap $X \in B(P, \delta)$ berlaku

$$\|X - P\| < \frac{1}{2}\sqrt{29}.$$

Karena semua titik dalam T berada dalam kombinasi konveks titik A, B, C, D , maka seluruh T berada dalam daerah terbatas yang ditentukan oleh titik-titik sudut tersebut.

Sedangkan titik P memiliki jarak minimum $\sqrt{29}$ ke semua titik sudut. Dengan memilih $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{29}$, maka setiap titik dalam bola $B(P, \delta)$ masih berada di luar jangkauan tetrahedron T , sehingga:

$$B(P, \delta) \cap T = \emptyset.$$

Maka

$$B(P, \delta) \cap \mathbb{R}^3 \setminus T.$$

Ambil $U = B(P, \delta)$, maka

$$P \in U \subset \mathbb{R}^3 \setminus T.$$

Dengan demikian, berdasarkan definisi exterior, diperoleh $P \in \text{ext}(T)$. ■

2.1.13 Segitiga Degenerasi

Definisi 2.24 (Richmond & Richmond, 1997)

Jika (X, d) adalah suatu ruang metrik yang diberikan, dapat dikatakan $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq X$ membentuk sebuah segitiga degenerasi jika

$$d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) = d(x_i, x_k)$$

Untuk suatu permutasi i, j, k dari indeks $\{1, 2, 3\}$.

2.1.14 Subruang

Definisi 2.25 (Mendelson, 1990)

Misalkan Y adalah himpunan tak kosong, (X, d) adalah ruang metrik, dan $Y \subset X$. Y dapat dikatakan sebagai ruang metrik dengan membatasi domain metrik d ke $Y \times Y$, sehingga $(Y, d|_{Y \times Y})$ adalah ruang metrik. Misalkan (X, d) dan (Y, d') adalah ruang metrik. Dapat dikatakan bahwa (Y, d') adalah sebuah subruang dari (X, d) apabila:

1. $Y \subset X$
2. $d' = d|_{Y \times Y}$

Contoh 2.26

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan d merupakan metrik euclid yaitu:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Didefinisikan himpunan $Y = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ dan fungsi $d', Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d'((x_1, 0), (x_2, 0)) = |x_1 - x_2|$$

Buktikan bahwa (Y, d') adalah subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$.

Akan dibuktikan bahwa (Y, d') memenuhi syarat sebagai subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$, yaitu:

1. $Y \subseteq \mathbb{R}^2$

Ambil sebarang $y \in Y$

Berdasarkan definisi, $y = (x, 2)$ untuk suatu $x \in \mathbb{R}$

Karena $x, 2 \in \mathbb{R}$, maka $(x, 2) \in \mathbb{R}^2$

Jadi $Y \subseteq \mathbb{R}^2$

2. $d' = d|_{Y \times Y}$

Ambil sembarang $p = (x_1, 2) \in Y, q = (x_2, 2) \in Y$

Hitung $d(p, q)$:

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 0} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\ &= |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Hitung $d'(p, q)$:

$$d'(p, q) = d'((x_1, 2), (x_2, 2)) = |x_1 - x_2|$$

Karena untuk setiap $p, q \in Y$ berlaku

$$d(p, q) = |x_1 - x_2| = d'(p, q)$$

Maka terbukti bahwa

$$d' = d|_{Y \times Y}$$

Jadi terbukti bahwa (Y, d') adalah subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$. ■

2.1.15 Tetrahedron

Definisi 2.27 (Smith, 2000)

Tetrahedron adalah empat titik tidak sebidang yang tersusun berurutan. Dari titik-titik tersebut dapat dibentuk empat segitiga. Daerah segitiga yang terbentuk disebut sisi-sisi tetrahedron. Setiap sisi berhadapan dengan titik sudut yang tersisa. Setiap rusuk terletak pada dua sisi, yang menentukan sudut yang dibentuk oleh dua bidang yang sesuai. Tetrahedron memiliki tiga pasang rusuk berhadapan yang tidak saling berpotongan.

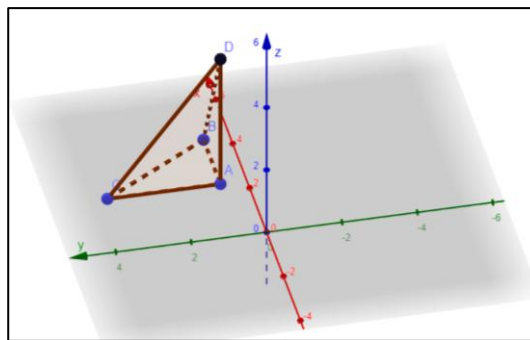
Contoh 2.28

Diberikan empat titik di ruang 3D

$$A = (1,1,1), \quad B = (3,1,1), \quad C = (1,4,1), \quad D = (1,1,5)$$

Tunjukkan bahwa titik-titik tersebut membentuk semua tetrahedron.

Perhatikan bahwa tetrahedron $ABCD$ diilustrasikan pada gambar 2.3:



Gambar 2.3 Tetrahedron $A = (1,1,1), B = (3,1,1), C = (1,4,1), D = (1,1,5)$

Pada gambar 2.3 dapat dilihat dari bentuk empat segitiga. Daerah segitiga yang terbentuk disebut sisi-sisi tetrahedron. Setiap sisi berhadapan dengan titik sudut yang tersisa. Setiap rusuk terletak pada dua sisi, yang menentukan sudut yang dibentuk oleh dua bidang yang sesuai. Tetrahedron memiliki tiga pasang rusuk berhadapan yang tidak saling berpotongan. ■

2.1.16 Degenerasi

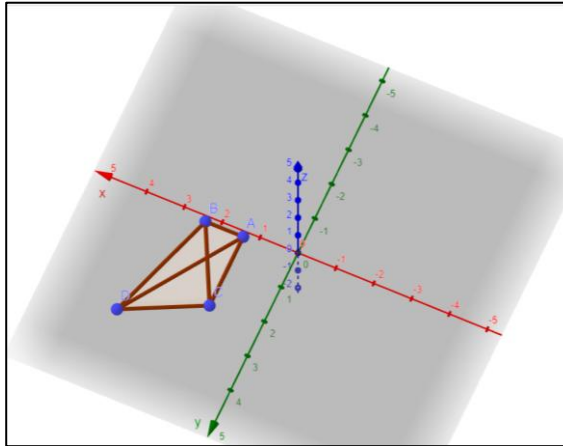
Definisi 2.29 (Choi, 2024)

Sebuah tetrahedron yang berada di $(\mathbb{R}^3, d)$ atau salah satu subruangnya dikatakan degenerasi jika dan hanya jika titik-titik sudutnya koplanar (terletak pada bidang yang sama).

Contoh 2.30

Misalkan $(\mathbb{R}^3, d)$ adalah ruang metrik Euclid. Diberikan empat titik

$$A = (1,1,2), \quad B = (2,1,2), \quad C = (1,3,2), \quad D = (3,4,2)$$



Gambar 2.4 Tetrahedral Degenerasi $A = (1,1,2), B = (2,1,2), C = (1,3,2), D = (3,4,2)$

Tentukan apakah tetrahedron yang dibentuk oleh titik-titik ini adalah degenerasi.

Pembahasan contoh tersebut yaitu, misalkan $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$. Untuk menentukan tetrahedron $ABCD$ degenerasi, akan ditunjukkan bahwa volume dari tetrahedron tersebut hasilnya nol. Misalkan M adalah matriks.

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z & 1 \\ x_x & x_y & x_z & 1 \\ y_x & y_y & y_z & 1 \\ z_x & z_y & z_z & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Misalkan matriks dengan M adalah

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maka dilakukan operasi baris

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 = (2,1,2,1) - (1,1,2,1) = (1,0,0,0)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 = (1,3,2,1) - (1,1,2,1) = (0,2,0,0)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 = (3,4,2,1) - (1,1,2,1) = (2,3,0,0).$$

Maka

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Perhatikan kolom keempat karena kolom tersebut mudah untuk dihitung

$$\det(M) = 1 \cdot c_{14} + 0 + 0 + 0 = 1 \cdot c_{14}$$

Jadi, c_{ij} adalah kofaktor, maka akan dibuktikan kofaktor yaitu:

$$C_{14} = (-1)^{1+4} \det(M_{14})$$

$$C_{14} = -\det(M_{14}).$$

Hapus baris ke-1 dan kolom ke-4

$$M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka determinan nya yaitu

$$\det(M_{14}) = 1(2 \cdot 0 - 0 \cdot 3) - 0(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + 0(0 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 0.$$

Jadi

$$\det(M) = 1 \cdot (-0) = 0.$$

Maka volumenya yaitu

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{6} |\det(M)| \\ &= \frac{1}{6} |0| = 0 \end{aligned}$$

Karena determinan nya hasilnya 0, maka volume hasinya juga 0, jadi terbukti keempat titik koplanar dan tetrahedral degenerasi. ■

2.1.17 Tetrahedral Degenerasi Tipe II

Definisi 2.31 (Choi, 2024)

Jika setiap tetrahedron T memiliki luas yang lebih kecil dari pada jumlah luas ketiga sisi lainnya, maka tetrahedron T tetap dikatakan degenerasi jika memilih satu simpul tetraheron T tertentu, persamaan pada teorema 1.2. dalam hal ini, tetrahedron T sebagai tetrahedral degenerasi tipe II.

Contoh 2.32

Diberikan empat titik di $\mathbb{R}^3$ dengan titik $A = (2,1,3)$, $B = (3,2,3)$, $C = (2,3,4)$, $D = (3,1,5)$, Keempat titik tersebut membentuk tetrahedron $T = \{A, B, C, D\}$.

Tentukan apakah tetrahedron T merupakan tetrahedral degenerasi tipe II.

Akan dibuktikan apakah tetrahedron $ABCD$ memenuhi sebagai tetrahedral degenerasi tipe II. Tetrahedron $ABCD$ memiliki empat sisi segitiga yaitu $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD$, dan ΔBCD . Maka akan mencari luas setiap segitiganya yaitu:

Luas ΔABC (sisi alas pada bidang xy), dengan vektor $AB = (1,1,0)$ dan $AC = (0,2,1)$

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 1, 2)$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Luas $\triangle ABD$, dengan vektor $AB = (1,1,0)$ dan $AD = (1,0,2)$

$$AB \times AD = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$$

$$L_{ABD} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{9} = \frac{3}{2}$$

Luas $\triangle ACD$, dengan vektor $AC = (0,2,1)$ dan $AD = (1,0,2)$

$$AC \times AD = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, 1, -2)$$

$$L_{ACD} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Luas $\triangle BCD$, dengan vektor $BC = C - D = (-1,1,1)$ dan $BD = D - B = (0, -1, 2)$

$$BC \times BD = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, 2, 1)$$

$$L_{BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Diperoleh:

$$L_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}, L_{ABD} = \frac{3}{2}, L_{ACD} = \frac{\sqrt{21}}{2}, L_{BCD} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Akan diperiksa bahwa setiap sisi memenuhi

$$L_{sisi} < \text{jumlah tiga sisi lainnya}$$

Maka akan dilihat dari setiap sisi yaitu:

Sisi $\triangle ABC$

$$L_{ABC} < L_{ABD} + L_{ACD} + L_{BCD}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Sisi $\triangle ABD$

$$L_{ABD} < L_{ABC} + L_{ACD} + L_{BCD}$$

$$\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Sisi $\triangle ACD$

$$L_{ACD} < L_{ABC} + L_{ABD} + L_{BCD}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Sisi $\triangle BCD$

$$L_{BCD} < L_{ABC} + L_{ABD} + L_{ACD}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$$

karena setiap sisi tetrahedron memiliki luas yang lebih kecil dari jumlah luas ketiga sisi lainnya, maka tetrahedron $ABCD$ adalah tetrahedral degenerasi tipe II. ■

2.1.18 Ruang Tetrahedral Degenerasi

Definisi 2.33 (Choi, 2024)

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, dapat disebut sebagai ruang tetrahedral degenerasi jika dan hanya jika setiap tetrahedron (baik tipe I atau tipe II) yang dapat dibentuk di (X, d) mengalami degenerasi.

Contoh 2.34

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$d(x, y) = |x - y|$$

1. Buktikan bahwa setiap empat titik berbeda $w, x, y, z \in X$ membentuk tetrahedral yang degenerasi.
2. Buktikan bahwa (X, d) merupakan ruang tetrahedral degenerasi.

Akan dibuktikan dalam dua bagian sebagai berikut:

1. Ambil sembarang empat titik yaitu $w, x, y, z \in \mathbb{R}$. Dalam volume tetrahedron dengan titik sudut w, x, y, z maka

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z & 1 \\ x_x & x_y & x_z & 1 \\ y_x & y_y & y_z & 1 \\ z_x & z_y & z_z & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Karena pada $X = \mathbb{R}$, setiap titik hanya memiliki satu koordinat, maka titik itu dapat ditulis dengan

$$w = (w, 0, 0), \quad x = (x, 0, 0), \quad y = (y, 0, 0), \quad z = (z, 0, 0).$$

Akan disubsitusikan menjadi matriks yang dimisalkan M , yaitu

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Karena kolom kedua dan ketiga matriks adalah nol, maka matriksnya tidak memiliki 4 kolom linier independen. Jadi $\text{rank}(M) < 4$, sehingga $\det(M) = 0$, jadi

$$V_T = \frac{1}{6} |\det(M)| = \frac{1}{6} |0| = 0$$

Karena volume tetrahedron nol, maka tetrahedron yang dibentuk oleh titik w, x, y, z adalah degenerasi.

2. Menurut definisi 4.7, ruang metrik (X, d) disebut ruang tetrahedral degenerasi jika setiap tetrahedron yang dapat dibentuk di X adalah degenerasi. Maka untuk setiap empat titik $w, x, y, z \in X = \mathbb{R}$, volume

tetrahedron selalu nol, sehingga selalu degenerasi. Jadi terbukti bahwa (X, d) adalah ruang tetrahedral degenerasi. ■

2.1.19 Segitiga

Definisi 2.35 (Widyasari, 2024)

Segitiga adalah bangun datar yang dibentuk dari yang dibentuk dari tiga ruas garis yang setiap ruas garis bertemu ujungnya. Setiap ruas garis yang membentuk segitiga disebut sisi segitiga, dan pertemuan setiap dua ruas garisnya disebut titik sudut.

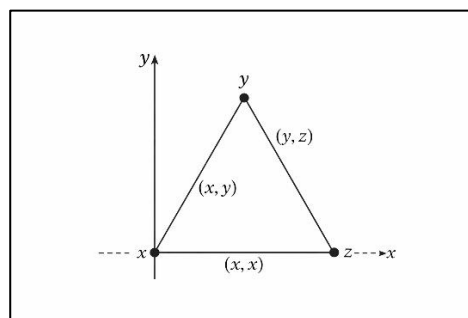
Contoh 2.36

Misalkan $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik Euclidean dengan

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$. Diberikan tiga titik $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$ yang tidak segaris. Buktikan bahwa $\{X, Y, Z\}$ membentuk segitiga.

Akan ditunjukkan bahwa tiga titik $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$ yang tidak segaris membentuk suatu segitiga. Karena X, Y, Z tidak segaris, maka vektor $Y - X, Z - X$ tidak linier dependen. Maka ruas garis XY, YZ, ZX menghubungkan setiap pasangan titik. Jadi, himpunan tiga titik tersebut membentuk bangun geometri bersisi tiga adalah segitiga. ■



Gambar 2.5 Segitiga $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$

2.1.20 Sifat Aditif Luas Segitiga

Definisi 2.37 (Hetmanenko, 2025)

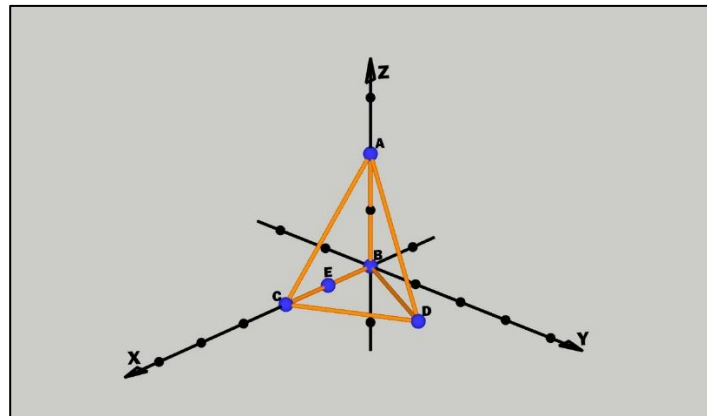
Luas segitiga memiliki sifat aditif terhingga, apabila suatu segitiga dipartisi menjadi sejumlah segitiga $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ yang saling tidak tumpang tindih, maka berlaku

$$L(\Delta) = \sum_{i=1}^n L(\Delta_i)$$

Sifat ini menjamin bahwa pembagian segitiga ke dalam bagian-bagian yang lebih kecil tidak mengubah luas total segitiga tersebut.

Contoh 2.38

Diberikan tetrahedron $T = \{A, B, C, D\} \subset \mathbb{R}^3$ seperti pada gambar 2.6. Misalkan E terletak pada sisi BC yaitu $E \in BC$,



Gambar 2.6 Tetrahedron E terletak pada sisi BC

sehingga segitiga ΔABC terbagi menjadi dua segitiga ΔABE dan ΔACE yang interiornya tidak saling tumpang tindih. Buktikan bahwa $L(\Delta ABC) = L(\Delta ABE) + L(\Delta ACE)$.

Akan dibuktikan bahwa luas segitiga ΔABC sama dengan jumlah luas segitiga ΔABE dan ΔACE . Karena $E \in BC$, maka ruas garis AE mempartisi segitiga ΔABC menjadi dua segitiga, yaitu ΔABE dan ΔACE .

Kedua segitiga tersebut memiliki interior yang tidak saling tumpang tindih dan memenuhi

$$\Delta ABC = \Delta ABE \cup \Delta ACE.$$

Berdasarkan sifat aditif luas segitiga, jika suatu segitiga dipartisi menjadi beberapa segitiga yaitu $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ yang interiornya saling lepas, maka

$$L(\Delta) = \sum_{i=1}^n L(\Delta_i)$$

$$L(\Delta ABC) = L(\Delta ABE) + L(\Delta ACE).$$

Terbukti sifat aditif. ■

2.1.21 Volume Tetrahedron

Definisi 2.39 (Burkardt, 2018)

Volume tetrahedron dengan titik sudut a, b, c, d diberikan oleh

$$V_T = \pm \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z & 1 \\ x_x & x_y & x_z & 1 \\ y_x & y_y & y_z & 1 \\ z_x & z_y & z_z & 1 \end{pmatrix} \right|$$

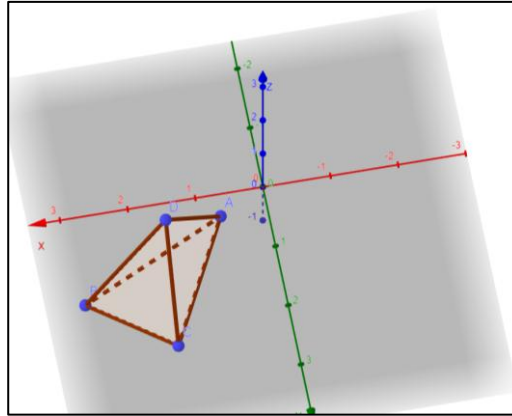
Tanda $\pm$ diabaikan karena volume yang diambil sebagai nilai positif.

Contoh 2.40

Diberikan empat titik di $\mathbb{R}^3$, yaitu

$$A = (1,2,3), \quad B = (3,2,1), \quad C = (2,4,3), \quad D = (2,3,5).$$

Tentukan volume tetrahedron $ABCD$ dengan menggunakan definisi volume tetrahedron.



Gambar 2.7 Tetrahedron $A = (1,2,3)$, $B = (3,2,1)$, $C = (2,4,3)$, $D = (2,3,5)$.

Untuk menentukan volume tetrahedron $ABCD$, pada gambar 2.7 digunakan definisi volume tetrahedron. Berdasarkan definisi volume tetrahedron, diperoleh:

$$= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Misalkan matriks tersebut dinotasikan sebagai M , yaitu:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, dilakukan operasi baris elementer untuk menyederhanakan perhitungan determinan. Operasi yang digunakan adalah:

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1, R_3 \leftarrow R_3 - R_1, R_4 \leftarrow R_4 - R_1.$$

Diperoleh:

$$R_2 = (3,2,1,1) - (1,2,3,1) = (2,0,-2,0)$$

$$R_3 = (2,4,3,1) - (1,2,3,1) = (1,2,0,0)$$

$$R_4 = (2,3,5,1) - (1,2,3,1) = (1,1,2,0).$$

Sehingga matriks M ekuivalen dengan:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

determinan dihitung dengan ekspansi kofaktor terhadap kolom ke-4. Secara umum:

$$\det(M) = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}.$$

Dengan kofaktor didefinisikan sebagai:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Perhatikan bahwa elemen-elemen pada kolom ke-4 adalah:

$$a_{14} = 1, a_{24} = 0, a_{34} = 0, a_{44} = 0.$$

Kofaktor C_{14} didefinisikan sebagai:

$$\det(M) = 1 \cdot C_{14} + 0 \cdot C_{24} + 0 \cdot C_{34} + 0 \cdot C_{44} = 1 \cdot C_{14}$$

Selanjutnya dihitung kofaktor C_{14} :

$$C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = -M_{14}$$

Minor M_{14} diperoleh dengan menghilangkan baris ke-1 dan kolom ke-4, yaitu:

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinan tersebut dihitung sebagai:

$$\begin{aligned} M_{14} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) - 2(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 2(4) - 2(-1) \\ &= 8 + 2 = 10 \end{aligned}$$

Karena $M_{14} = 10$, maka:

$$C_{14} = (-1)^{1+4} M_{14} = -10.$$

Dengan demikian

$$\det(M) = -10.$$

Akibatnya, volume tetrahedron adalah:

$$V_T = \frac{1}{6} |\det(M)| = \frac{1}{6} \cdot 10 = \frac{5}{3}.$$

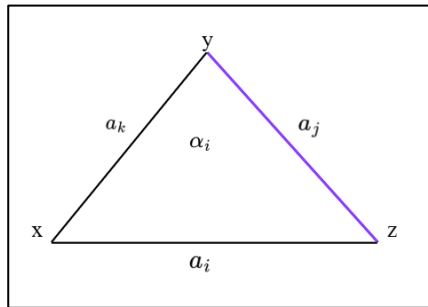
Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh bahwa volume tetrahedron $ABCD$ adalah $\frac{5}{3}$. ■

2.1.22 Hukum Cosinus

Definisi 2.41 (Mendelson, 1990)

Misalkan suatu segitiga memiliki sisi a_i, a_j, a_k dan sudut α_i yang diapit oleh sisi a_j dan a_k , dengan $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ yang saling berbeda. Hukum cosinus menyatakan bahwa:

$$a_i^2 = a_j^2 + a_k^2 - 2a_j a_k \cos \alpha_i.$$



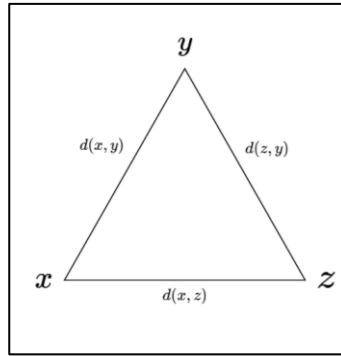
Gambar 2.8 Segitiga sisi a_i, a_j, a_k dan sudut α_i

2.1.23 Sudut dalam ruang metrik

Definisi 2.42 (Choi, 2024)

Misalkan (X, d) adalah suatu ruang metrik dan $x, y, z \in X$ dengan y sebagai titik puncak sudut, sudut $\angle xyz$ didefinisikan sebagai:

$$\angle xyz = \cos^{-1} \left(\frac{d(x, y)^2 + d(x, z)^2 - d(y, z)^2}{2d(x, y)d(x, z)} \right).$$

Gambar 2.9 Segitiga $x, y, z \in X$

2.2 Kajian Al-Quran tentang Keterukuran dan Keteraturan terhadap Ruang Tetrahedral Degenerasi

Menurut perspektif Islam, menjaga jarak antara titik sangat penting, terutama saat mempelajari ruang metrik, isometri, dan bentuk-bentuk geometri seperti tetrahedron. Jarak dalam matematika diukur dengan aturan-aturan tertentu, misalnya dengan fungsi metrik yang menghitung seberapa jauh antara dua titik terpisah. Salah satu aturannya adalah ketaksamaan segitiga, yang menunjukkan bahwa dalam geometri ada aturan dan batasan yang sudah pasti. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam QS. Al-Qamar ayat 49 (Kementerian Agama Republik Indonesia, 2022).

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (qadar)*” (QS. Al-Qamar : 49).

Ayat ini menjelaskan bahwa setiap ciptaan Allah memiliki ukuran dan proporsi yang jelas. Menurut Ibnu Katsir (2009), ayat ini menunjukkan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu berdasarkan qadar-nya yang telah ditentukan (ukuran dan ketentuan), termasuk aspek waktu, jumlah, bentuk, dan sifat. Segala sesuatu selalu disertai dengan ukuran, ketentuan, dan aturan tertentu sesuai dengan hikmahnya. Demikian pula, dalam tafsir Kementerian Agama Republik Indonesia

(2022), ayat ini dipahami sebagai penegasan bahwa keteraturan dalam alam semesta merupakan bukti kekuasaan Allah, di mana segala sesuatu diciptakan dengan ukuran dan perhitungan yang sangat tepat.

Selain itu, prinsip keteraturan ini tidak hanya menunjukkan ketelitian ciptaan, tetapi juga menegaskan bahwa segala sesuatu berjalan di atas kebenaran dan kepastian yang telah ditetapkan Allah. Prinsip kepastian dan keteguhan janji Allah semakin ditegaskan dalam Surah Al-Hijr ayat 85 (Kementerian Agama Republik Indonesia, 2022).

مَا خَلَقْنَا السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَاۤ اِلَّا بِالْحَقِّۚ وَاِنَّ السَّاعَةَ لَآتِيَةٌۭ فَاصْفَحِ الصَّفْحَ الْجَمِيْلَ ﴿٨٥﴾

Artinya: *"Dan Kami tidak menciptakan langit dan bumi dan apa yang ada antara keduanya melainkan dengan kebenaran. Dan sesungguhnya hari kiamat itu pasti akan datang, maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik."*

Menurut Ibnu Katsir (2009), kata *al-haqq* dalam ayat ini mengandung makna keadilan, ketepatan, dan kesesuaian dengan sunnatullah. Dalam kerangka ini, penelitian sifat-sifat ruang metrik tetrahedral degenerasi tidak hanya sekedar eksplorasi matematis. Temuan segitiga degenerasi yang membatasi ruang metrik ke dimensi satu Richmond & Richmond (1997), serta tetrahedral degenerasi yang membatasi struktur geometri ke dimensi dua Choi (2024) membuktikan adanya hukum-hukum matematika yang pasti dan konsisten. Hukum-hukum ini sejalan dengan konsep *al-haqq* dalam penciptaan. Hasil isometri tetrahedral degenerasi yang konsisten ke ruang dua dimensi yang menunjukkan adanya "kebenaran matematis" yang absolut, yang mencerminkan ketetapan Allah dalam menciptakan segala sesuatu dengan ukuran dan hukum yang tidak berubah.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Teorema 2.3.1 Tetrahedral Degenerasi

Misalkan $W, X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ dan misal T mempresentasikan tetrahedron yang didefinisikan oleh $\{W, X, Y, Z\}$. Misalkan W adalah puncak dari T dan misalkan alas dari tetrahedron didefinisikan oleh $\{X, Y, Z\}$. Asumsikan bahwa setiap bidang dari T memiliki luas yang lebih kecil dari jumlah luas ketiga bidang lainnya. Maka, T adalah degenerasi jika dan hanya jika W terletak di daerah di bagian $ext(\Delta XYZ)$.

Teorema 2.3.2 Aturan Cosinus

Misalkan $T = \{W, X, Y, Z\}$ adalah tetrahedral degenerasi. W berada dibagian $ext(\Delta XYZ)$ jika dan hanya jika terdapat V_1 dibagian $Int \Delta XYZ$ sedemikian sehingga persamaan berikut berlaku:

$$d(W, V_1) = \sqrt{(d(V_1, V_2))^2 + (d(W, V_2))^2 - 2(d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos(\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3))}$$

dengan $V_2, V_3 \in \{X, Y, Z\} - \{V_1\}$.

Teorema 2.3.3 Pemetaan Isometri

Setiap tetrahedral degenerasi bersifat isometri ke suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$.

Teorema 2.3.4 Invariansi Topologi

Misalkan (X, τ_X) adalah sebuah ruang topologi yang muncul dari sebuah ruang tetrahedral degenerasi. Jika (Y, τ_Y) adalah sebuah ruang topologi yang hemeomorfisme terhadap (X, τ_X) , maka (Y, τ_Y) diasosiasikan dengan ruang tetrahedral degenerasi.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan ini melibatkan pengumpulan berbagai data yang relevan untuk memperkuat argumen yang dibahas, khususnya yang berkaitan dengan ruang metrik, isometri, dan tetrahedral degenerasi. Data ini diperoleh dari literatur seperti buku, jurnal, dan artikel ilmiah yang sesuai dengan fokus penelitian, yang kemudian dianalisis secara mendalam untuk menghasilkan pemahaman yang lebih komprehensif tentang sifat-sifat ruang metrik tetrahedral degenerasi.

3.2 Pra Penelitian

Pada tahap pra penelitian dalam penelitian ini menelaah definisi-definisi pendukung yang menjadi landasan utama. Definisi ini meliputi:

1. Definisi ruang metrik (X, d) beserta empat aksioma yaitu non-negatif, identitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga.
2. Definisi isometri sebagai fungsi bijektif yang mempertahankan jarak, termasuk syarat-syarat injektif, surjektif, dan bijektif.
3. Definisi tetrahedral degenerasi tipe 1, dimana setidaknya satu sisi tetrahedral memiliki luas yang sama dengan jumlah luas ketiga sisi lainnya.
4. Melakukan penelaah definisi ruang topologi, definisi himpunan buka, dan definisi bola buka.
5. Mempelajari definisi homeomorfisme serta konsep *interior*, *batas*, dan *exterior*.

6. Mempelajari definisi segitiga degenerasi yang menjadi fondasi perluasan konsep degenerasi ke dimensi yang lebih tinggi.
7. Menelaah definisi subruang metrik dan syarat-syaratnya, yang relevan untuk pembahasan hasil isometri ke dalam ruang Euklid $\mathbb{R}^2$.

Penelaahan terhadap definisi-definisi ini bertujuan untuk menyusun kerangka pemahaman yang kokoh dan konsisten yang akan digunakan dalam analisis isometri pada ruang metrik tetrahedral degenerasi.

3.3 Tahapan Penelitian

Pada kegiatan penelitian ini, peneliti menggunakan beberapa tahapan-tahapan penelitian. Adapun tahapan-tahapan tersebut digambarkan sebagaimana berikut:

1. Meninjau penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan topik sifat-sifat ruang metrik tetrahedral degenerasi.
2. Menguraikan definisi dan teori pendukung meliputi ruang metrik, isometri, tetrahedron degenerasi tipe 1, serta konsep topologi seperti interior, batas, *exterior*, dan homeomorfisme untuk memperkuat dasar teoretis.
3. Mengidentifikasi ayat-ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan keteraturan, ukuran, dan keseimbangan sebagai dasar filosofis dan integrasi keilmuan.
4. Mengevaluasi teorema-teorema utama yang menghubungkan tetrahedral degenerasi dengan sifat isometri dalam ruang metrik, serta menganalisis bukti-bukti matematis yang relevan.
5. Menganalisis implikasi geometri dan topologi dari hasil isometri sifat-sifat ruang metrik tetrahedral degenerasi ke subruang $\mathbb{R}^2$ serta kontribusinya dalam pengembangan teori ruang metrik.

6. Merangkum hasil analisis, serta merumuskan implikasi pengembangan ruang metrik dalam analisis matematika

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Tetrahedral Degenerasi pada Ruang Metrik

Pada sub bab ini akan dijelaskan terkait sifat isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik, sebagaimana didefinisikan pada bab sebelumnya. Sebelum menjelaskan sifat tersebut, akan dijelaskan terlebih dahulu tentang teorema yang membahas tetrahedral degenerasi.

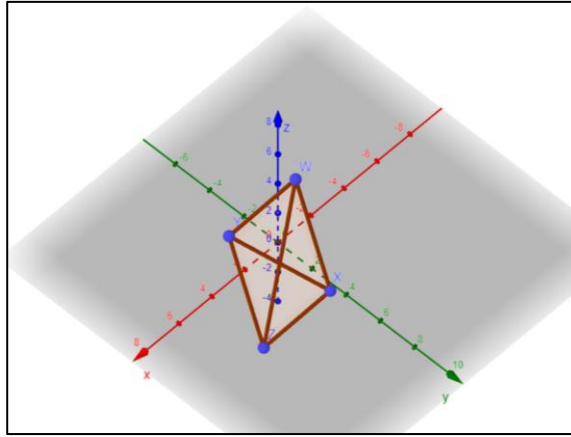
4.1.1 Teorema 4.1 Tetrahedral Degenerasi

Misalkan $W, X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ dan misal T mempresentasikan tetrahedron yang didefinisikan oleh $\{W, X, Y, Z\}$. Misalkan W adalah puncak dari T dan alas dari tetrahedron didefinisikan oleh $\{X, Y, Z\}$. Asumsikan bahwa setiap bidang dari T memiliki luas yang lebih kecil dari jumlah luas ketiga bidang lainnya. Maka, T adalah degenerasi jika dan hanya jika W terletak di daerah di bagian $ext(\Delta XYZ)$.

Bukti

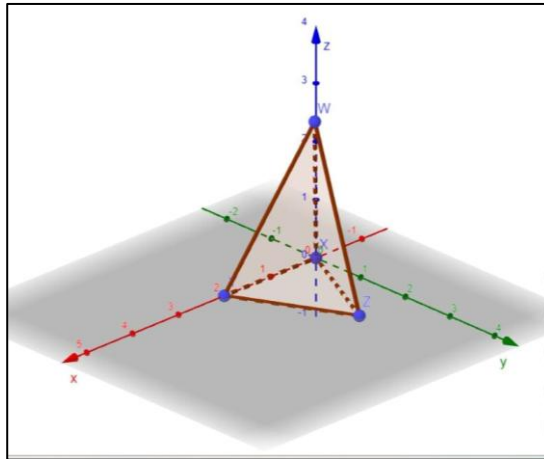
Misalkan $W, X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, akan ditunjukkan T adalah degenerasi.

($\Rightarrow$) Jika T degenerasi $\Rightarrow W \in ext(\Delta XYZ)$. Asumsikan T adalah degenerasi. Maka ke empat titik W, X, Y, Z berada dalam satu bidang Π . Perhatikan gambar dibawah ini, akan ditunjukkan W tidak mungkin berada di Int atau $Bdry \Delta XYZ$, sehingga W harus berada di $ext(\Delta XYZ)$.



Gambar 4.1 Posisi titik W terhadap segitiga XYZ

Akan dibuktikan $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$. Misalkan titik W berada di dalam ΔXYZ , maka akan dibagi menjadi tiga segitiga yaitu ΔWXY , ΔWYZ , dan ΔWXZ .



Gambar 4.2 Tetrahedron dengan ΔWXY , ΔWYZ , dan ΔWXZ

Perhatikan gambar 4.2 ketiga segitiga tersebut saling lepas di Int , sehingga dapat dimisalkan

$$A_1 = L \Delta XYZ, A_2 = L \Delta WXY, A_3 = L \Delta WYZ, A_4 = L \Delta WXZ$$

Maka diperoleh

$$A_1 = A_2 + A_3 + A_4 \quad (12)$$

Berdasarkan definisi 2.8, setiap bidang tetrahedron luasnya kurang dari jumlah luas tiga bidang lainnya. Terapkan untuk bidang ΔXYZ , didapatkan

$$A_1 < A_2 + A_3 + A_4 \quad (13)$$

Dari persamaan 12 dan 13, apabila disubsitusikan akan menjadi

$$A_2 + A_3 + A_4 < A_2 + A_3 + A_4$$

Terlihat hasilnya adalah kontradiksi. Karena tidak ada bilang real X yang memenuhi $X < X$. Sehingga terbukti bahwa $W \notin \text{Int } \Delta XYZ$.

Akan dibuktikan $W \notin \text{Bdry } (\Delta XYZ)$. Misalkan titik W ada pada sisi XY maka W ada digaris lurus yang sama dengan X dan Y .

Karena titik W, X, Y segaris, maka ΔXYZ merupakan segitiga degenerasi dengan luas nol, misalkan $A_2 = L(\Delta WXY) = 0$.

W pada sisi XY dalam ΔXYZ terbagi menjadi dua segitiga ΔWXZ dan ΔWYZ yang Int nya saling lepas. Berdasarkan definisi 2.36, maka

$$A_1 = A_3 + A_4 \quad (14)$$

Dengan menerapkan definisi 2.8, pada bidang $\Pi \Delta XYZ$ yaitu luas setiap bidang Π tetrahedron kurang dari luas ketiga bidang lainnya. Karena $A_2 = 0$, maka diperoleh

$$A_1 < A_2 + A_3 + A_4 = 0 + A_3 + A_4 = A_3 + A_4 \quad (15)$$

Substitusikan persamaan 14 dan 15

$$A_3 + A_4 < A_3 + A_4$$

Terlihat hasilnya kontradiksi, sehingga terbukti bahwa $W \notin \text{Bdry } (\Delta XYZ)$.

Karena W tidak berada di Int maupun $\text{Bdry } \Delta XYZ$ maka W berada di $\text{ext } (\Delta XYZ)$., atau dapat ditulis $W \in \text{ext } (\Delta XYZ)$.

($\Leftarrow$) Jika $W \in \text{ext } (\Delta XYZ) \Rightarrow T$ degenerasi. Asumsikan $W \in \text{ext } (\Delta XYZ)$.

Karena ΔXYZ adalah segitiga di $\mathbb{R}^2$, maka terdapat sebuah bidang Π yang memuat

titik X, Y, Z . Karena W berada di $ext(\Delta XYZ)$, maka W juga terletak di bidang Π dengan titik $W, X, Y, Z \in \Pi$, sehingga ke empat titik tersebut adalah koplanar.

Karena keempat titik W, X, Y, Z koplanar, maka vektor titik W ke titik X, Y, Z yaitu,

$$X - W, Y - W, Z - W$$

berada pada bidang Π yang sama. Ketiga vektor tersebut bergantung linier pada skalar α, β, γ yang tidak semuanya nol, sehingga

$$\alpha(X - W) + \beta(Y - W) + \gamma(Z - W) = 0$$

Akan dicari volume tetrahedron $T = (W, X, Y, Z)$ dengan berdasarkan definisi

2.38. Misalkan

$$W = (W_x, W_y, W_z), X = (X_x, X_y, X_z), Y = (Y_x, Y_y, Y_z), Z = (Z_x, Z_y, Z_z)$$

Dengan W_x, W_y, W_z menyatakan koordinat titik W , X_x, X_y, X_z menyatakan koordinat titik X , Y_x, Y_y, Y_z menyatakan koordinat titik Y , dan Z_x, Z_y, Z_z menyatakan koordinat titik Z . Maka volume tetrahedron T diberikan oleh

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} W_x & W_y & W_z & 1 \\ X_x & X_y & X_z & 1 \\ Y_x & Y_y & Y_z & 1 \\ Z_x & Z_y & Z_z & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Setiap kolom akan di operasikan dengan $c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1$, sehingga diperoleh

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} W_x & W_y & W_z & 1 \\ X_x - W_x & X_y - W_y & X_z - W_z & 1 - 1 \\ Y_x - W_x & Y_y - W_y & Y_z - W_z & 1 - 1 \\ Z_x - W_x & Z_y - W_y & Z_z - W_z & 1 - 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} W_x & W_y & W_z & 1 \\ X_x - W_x & X_y - W_y & X_z - W_z & 0 \\ Y_x - W_x & Y_y - W_y & Y_z - W_z & 0 \\ Z_x - W_x & Z_y - W_y & Z_z - W_z & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{6} |\det X - W \quad Y - W \quad Z - W|
\end{aligned}$$

Misalkan $M = X - W, Y - W, Z - W$, maka

$$\det(M) = \det (X - W, Y - W, Z - W) = 0.$$

Sehingga

$$V_T = \frac{1}{6} |M| = \frac{1}{6} |0| = 0.$$

Karena volume tetrahedron T adalah nol, maka $T = \{W, X, Y, Z\}$ adalah tetrahedral degenerasi.

Jadi terbukti ke dua arah bahwa T adalah degenerasi $\Leftrightarrow w \in \text{ext}(\Delta XYZ)$. ■

Contoh 4.1

Sebelumnya akan diberikan contoh segitiga degenerasi, perhatikan bahwa segitiga ini yang memenuhi persyaratan-persyaratan yang ada di Defini 2.22.

Diberikan ruang metrik (X, d) dengan $X = \mathbb{R}^2$ dan metrik Euclid

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Misalkan diberikan tiga titik $X = (1, 2), W = (4, 2), Y = (7, 2)$. Tentukan apakah himpunan $\{X, W, Y\}$ membentuk segitiga degenerasi.

Akan ditunjukkan apakah $\{X, W, Y\}$ memenuhi definisi segitiga degenerasi, yaitu terdapat suatu permutasi titik yang memenuhi

$$d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) = d(x_i, x_k).$$

Pertama, hitung jarak antar titik.

$$d(X, W) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Selanjutnya,

$$d(W, Y) = \sqrt{(4 - 7)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Kemudian,

$$d(X, Y) = \sqrt{(1 - 7)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Untuk permutasi $\{X, W, Y\}$, diperoleh

$$d(X, W) + d(W, Y) = 3 + 3 = 6.$$

Sedangkan

$$d(X, Y) = 6.$$

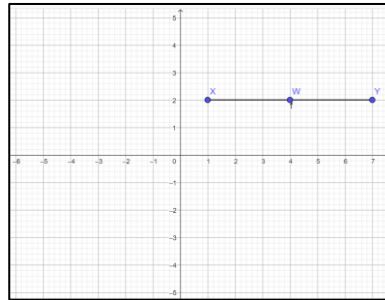
Maka

$$d(X, W) + d(W, Y) = d(X, Y).$$

Karena terdapat suatu permutasi yang memenuhi

$$d(x_i, x_j) + d(x_j, x_k) = d(x_i, x_k),$$

maka himpunan $\{X, W, Y\}$ membentuk segitiga degenerasi. ■



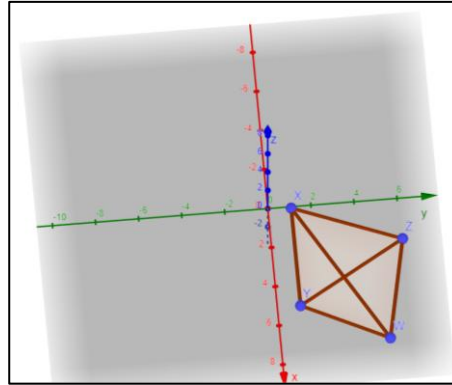
Gambar 4.3 Segitiga Degenerasi $X = (1, 2), W = (4, 2), Y = (7, 2)$

Contoh 4.2

Contoh pada ruang tiga dimensinya akan dijelaskan pada contoh berikut.

Diberikan titik-titik

$$W = (8, 5, 2), X = (1, 1, 2), Y = (6, 1, 2), Z = (3, 6, 2)$$



Gambar 4.4 Tetrahedral Degenerasi $W = (8,5,2), X = (1,1,2), Y = (6,1,2), Z = (3,6,2)$ di $\mathbb{R}^3$. Misalkan T mempresentasikan tetrahedron yang didefinisikan oleh $T = \{W, X, Y, Z\}$. Diasumsikan bahwa setiap bidang dari T memiliki luas yang lebih kecil dari jumlah luas ketiga bidang lainnya. Akan dibuktikan bahwa T degenerasi jika dan hanya jika $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$.

Misalkan $W, X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$. Akan ditunjukkan bahwa tetrahedron T adalah tetrahedral degenerasi jika dan hanya jika $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$. Pembuktian dilakukan dalam dua arah.

($\Rightarrow$) jika T degenerasi $\Rightarrow W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$

Asumsikan T adalah tetrahedral degenerasi. Maka titik-titik W, X, Y, Z berada pada satu bidang yang sama atau koplanar. Karena seluruh titik memiliki koordinat ketiga sama dengan 2, yaitu

$$W = (8,5,2), X = (1,1,2), Y = (6,1,2), Z = (3,6,2),$$

maka keempat titik berada pada bidang

$$\prod: z = 2.$$

Akan ditunjukkan bahwa titik W tidak berada pada *interior* maupun *boundary* dari ΔXYZ .

Akan dibuktikan $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$.

Misalkan $W \in \text{Int}(\Delta XYZ)$. Maka titik W membagi ΔXYZ menjadi tiga segitiga, yaitu $\Delta WXY, \Delta WYZ, \Delta WXZ$. Misalkan

$$A_1 = L(\Delta XYZ), A_2 = L(\Delta WXY), A_3 = L(\Delta WYZ), A_4 = L(\Delta WXZ).$$

Karena ketiga segitiga tersebut saling lepas pada interiornya dan membentuk ΔXYZ , berlaku

$$A_1 = A_2 + A_3 + A_4.$$

Akan dihitung masing-masing luas dari segitiga.

Menghitung $A_1 = L(\Delta XYZ)$, karena

$$X = (1,1), Y = (6,1), Z = (3,6),$$

Maka luas segitiga diberikan oleh

$$A_1 = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Substitusikan titik-titik diperoleh

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} |1(1 - 6) + 6(6 - 1) + 3(1 - 1)| \\ &= \frac{1}{2} |1(-5) + 6(5) + 3(0)| \\ &= \frac{1}{2} |-5 + 30 + 0| \\ &= \frac{1}{2} |25| = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Menghitung $A_2 = L(\Delta WXY)$, karena

$$W = (8,5), X = (1,1), Y = (6,1),$$

maka

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} |8(1 - 1) + 1(1 - 5) + 6(5 - 1)| \\ &= \frac{1}{2} |8(0) + 1(-4) + 6(4)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} |0 - 4 + 24| \\
&= \frac{1}{2} |20| = 10.
\end{aligned}$$

Menghitung $A_3 = L(\Delta WYZ)$, karena

$$W = (8,5), Y = (6,1), Z = (3,6),$$

maka

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2} |8(1 - 6) + 6(6 - 5) + 3(5 - 1)| \\
&= \frac{1}{2} |8(-5) + 6(1) + 3(4)| \\
&= \frac{1}{2} |(-40) + 6 + 12| \\
&= \frac{1}{2} |-22| = 11.
\end{aligned}$$

Menghitung $A_4 = L(\Delta WXZ)$, karena

$$W = (8,5), X = (1,1), Z = (3,6),$$

maka

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{2} |8(1 - 6) + 1(6 - 5) + 3(5 - 1)| \\
&= \frac{1}{2} |8(-5) + 1(1) + 3(4)| \\
&= \frac{1}{2} |(-40) + 1 + 12| \\
&= \frac{1}{2} |-27| = \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

Jadi

$$A_2 + A_3 + A_4 = 10 + 11 + \frac{27}{2} = \frac{20}{2} + \frac{22}{2} + \frac{27}{2} = \frac{69}{2}.$$

Sedangkan

$$A_1 = \frac{25}{2}.$$

Maka diperoleh

$$A_1 \neq A_2 + A_3 + A_4$$

Hasil yang diperoleh adalah kontradiksi, jadi terbukti bahwa $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$.

Akan dibuktikan $W \notin \text{Bdry}(\Delta XYZ)$.

Misalkan $W \in \text{Bdry}(\Delta XYZ)$. Maka titik W berada pada salah satu sisi segitiga, misalnya sisi XY . Akibatnya titik W, X, Y segaris sehingga

$$L(\Delta WXY) = 0.$$

Karena W berada pada *boundary*, maka ΔXYZ terbagi menjadi dua segitiga yang *interior*-nya saling lepas, yaitu

$$\Delta WXZ \text{ dan } \Delta WYZ.$$

Misalkan

$$A_1 = L(\Delta XYZ), A_2 = L(\Delta WXY), A_3 = L(\Delta WYZ), A_4 = L(\Delta WXZ).$$

Karena ΔWXY degenerasi, maka $A_2 = 0$.

Selain itu berlaku

$$A_1 = A_3 + A_4.$$

Berdasarkan asumsi bahwa setiap bidang tetrahedron memiliki luas lebih kecil dari jumlah luas ketiga bidang lainnya, maka

$$A_1 < A_2 + A_3 + A_4.$$

Karena $A_2 = 0$, maka

$$A_1 < A_3 + A_4.$$

Substitusikan persamaan , diperoleh

$$A_3 + A_4 < A_3 + A_4.$$

Kurangkan kedua ruas dengan $A_3 + A_4$, maka diperoleh

$$0 < 0.$$

Hal ini kontradiksi karena tidak ada bilangan real yang memenuhi $0 < 0$. Dengan demikian $W \notin Bdry(\Delta XYZ)$.

Karena W tidak berada pada interior maupun boundary dari ΔXYZ , maka $W \in ext(\Delta XYZ)$.

($\Leftarrow$) jika $W \in ext(\Delta XYZ) \Rightarrow T$ degenerasi

Asumsikan $W \in ext(\Delta XYZ)$. Karena

$$X = (1,1,2), Y = (6,1,2), Z = (3,6,2),$$

Maka ketiga titik tersebut berada pada bidang $\Pi: z = 2$. Karena $W = (8,5,2)$ juga memenuhi persamaan $z = 2$, maka titik W juga berada pada bidang Π . Dengan demikian titik W, X, Y, Z adalah koplanar.

Karena keempat titik koplanar, maka vektornya

$$X - W, Y - W, Z - W$$

bergantung linier. Diperoleh

$$X - W = (1 - 8, 1 - 5, 2 - 2) = (-7, -4, 0),$$

$$Y - W = (6 - 8, 1 - 5, 2 - 2) = (-2, -4, 0),$$

dan

$$Z - W = (3 - 8, 6 - 5, 2 - 2) = (-5, 1, 0).$$

Akan dicari volume tetrahedron T .

Misalkan

$$W = (W_x, W_y, W_z) = (8, 5, 2),$$

$$X = (X_x, X_y, X_z) = (1, 1, 2),$$

$$Y = (Y_x, Y_y, Y_z) = (6, 1, 2),$$

$$Z = (Z_x, Z_y, Z_z) = (3, 6, 2).$$

Maka volume tetrahedron yaitu

$$V_T = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Setiap kolom dioperasikan dengan

$$c_2 - c_1, c_3 - c_1, c_4 - c_1.$$

Sehingga diperoleh

$$= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & -4 & -5 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right|.$$

Karena volume tetrahedron dapat dinyatakan menggunakan vektor

$$X - W, Y - W, Z - W,$$

Matriks yang di misalkan dengan M , maka diperoleh

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -7 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Karena baris ketiga matriks M seluruh elemennya bernilai nol, maka

$$\det(M) = 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

berdasarkan sifat determinan matriks diperoleh

$$\det(M) = 0$$

Akibatnya

$$V_T = \frac{1}{6} |\det(M)| = \frac{1}{6} |0| = 0.$$

Karena volume tetrahedron sama dengan nol, maka T merupakan tetrahedron degenerasi.

Jadi terbukti bahwa T degenerasi $\Leftrightarrow W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$. ■

4.1.2 Teorema 4.2 Aturan Cosinus

Misalkan $T = \{W, X, Y, Z\}$ adalah tetrahedral degenerasi. W berada di bagian $ext(\Delta XYZ)$ jika dan hanya jika terdapat V_1 di bagian $Int \Delta XYZ$ sedemikian sehingga persamaan berikut berlaku:

$$d(W, V_1)$$

$$= \sqrt{(d(V_1, V_2))^2 + (d(W, V_2))^2 - 2(d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos(\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3))}$$

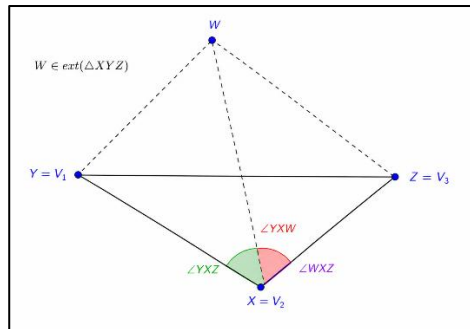
dengan $V_2, V_3 \in \{X, Y, Z\} - \{V_1\}$.

Bukti

Diketahui bahwa T adalah tetrahedral degenerasi akan dibuktikan $W \in ext(\Delta XYZ) \Leftrightarrow V_1 \in \Delta XYZ$. Maka akan ditunjukkan bahwa:

($\Rightarrow$) Asumsikan $W \in ext(\Delta XYZ)$

Ambil sebarang tetrahedral degenerasi $T = \{W, X, Y, Z\}$. Karena T merupakan tetrahedral, maka titik W, X, Y, Z terletak pada satu bidang. Pilih $V_1 \in \{X, Y, Z\}$ dan misalkan $V_2, V_3 \in \{X, Y, Z\} - \{V_1\}$.



Gambar 4.5 Tetrahedral Degenerasi $W \in ext(\Delta XYZ)$

Perhatikan gambar 4.5, karena $W \in ext(\Delta XYZ)$, terdapat V_1 sehingga titik W dan V_1 terletak pada sisi berlawanan terhadap garis V_2, V_3 . Akibatnya, sudut di titik V_2 memenuhi

$$\angle V_1 V_2 W = \angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3$$

Pada ΔWV_1V_2 . Berdasarkan definisi 2.40 dengan sisi a_i, a_j, a_k dan sudut α_i yang dihadapan dengan sisi a_i berlaku

$$a_i^2 = a_j^2 + a_k^2 - 2a_ja_k \cos \alpha_i.$$

Dalam ΔWV_1V_2 dapat dimisalkan

$$a_i = d(W, V_1), a_j = d(V_1, V_2), a_k = d(W, V_2), \alpha_i = \angle V_1V_2W$$

yang merupakan sudut yang berhadapan dengan sisi a_i , sehingga diperoleh

$$d(W, V_1)^2 = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos(\angle V_1V_2W)$$

dengan mensubstitusikan

$$\angle V_1V_2W = \angle V_1V_2V_3 + \angle WV_2V_3,$$

diperoleh

$$d(W, V_1)^2 = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos(\angle V_1V_2W)$$

$$d(W, V_1)^2 = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1V_2V_3 \\ + \angle WV_2V_3$$

$$d(W, V_1) =$$

$$\sqrt{d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1V_2V_3 + \angle WV_2V_3} \blacksquare$$

($\Leftarrow$) Asumsikan $V_1 \in \{X, Y, Z\}$ memenuhi persamaan. Ambil sebarang $V_1 \in \{X, Y, Z\}$ yang memenuhi

$$d(W, V_1)$$

$$= \sqrt{d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1V_2V_3 + \angle WV_2V_3)}$$

dengan $V_2, V_3 \in \{X, Y, Z\} - \{V_1\}$. Perhatikan bahwa

$$d(W, V_1)$$

$$= \sqrt{d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1V_2V_3 + \angle WV_2V_3)}$$

$$\begin{aligned}
& [d(W, V_1)]^2 \\
&= \left[\sqrt{d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3)} \right]^2 \\
& d(W, V_1)^2 = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1 V_2 V_3 \\
& \quad + \angle W V_2 V_3)
\end{aligned}$$

berdasarkan definisi 2.40 diperoleh

$$d(W, V_1)^2 = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2 - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1, V_2, W)$$

Misalkan persamaan

$$A = d(V_1, V_2)^2 + d(W, V_2)^2$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned}
d(W, V_1)^2 &= A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3) \\
d(W, V_1)^2 &= A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1, V_2, W).
\end{aligned}$$

Karena kedua ruas kiri sama, maka

$$\begin{aligned}
& A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3 \\
& \quad = A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1, V_2, W \\
& [A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3] - A \\
& \quad = [A - 2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos \angle V_1, V_2, W] - A
\end{aligned}$$

jadi dari ke dua ruas

$$\begin{aligned}
& -2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3) \\
& \quad = -2d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos (\angle V_1, V_2, W)
\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan $-2d(V_1, V_2)d(W, V_2)$, sehingga didapatkan

$$\cos (\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3) = \cos (\angle V_1, V_2, W).$$

Dalam geometri Euklid sudut ada beberapa sudut

a. $\angle V_1 V_2 V_3$: sudut dalam segitiga $\rightarrow 0 < \angle V_1 V_2 V_3 < \pi$

b. $\angle WV_2V_3$: sudut antara 2 bidang yang berpotongan pada garis $V_2, V_3 \rightarrow 0 \leq \angle WV_2V_3 < \pi$

c. $\angle V_1V_2W$: sudut antara bidang V_1, V_2, V_3 dan bidang $V_1, V_2, W \rightarrow 0 < \angle V_1V_2W < \pi$

karena $\angle V_1V_2V_3, \angle WV_2V_3, \angle V_1V_2W \in [0, \pi]$ dan fungsi cosinus yang injektif pada interval $[0, \pi]$, maka

$$\angle V_1V_2W = \angle V_1V_2V_3 + \angle WV_2V_3$$

Titik W dan V_1 berada disisi berlawanan terhadap garis V_2V_3 , maka $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$.

Andaikan $W \in \text{Bdry}(\Delta XYZ)$, maka salah satu bidang memiliki luas yang sama dengan jumlah luas tiga bidang lainnya. Karena tidak ada bidang yang luasnya sama, maka $W \notin \text{Bdry}(\Delta XYZ)$.

Lalu karena $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$ dan $W \notin \text{Bdry}(\Delta XYZ)$, maka $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$,

Jadi kedua arah terbukti. ■

Contoh 4.3

Misalkan diberikan titik-titik

$$W = (8,5,2), X = (1,1,2), Y = (6,1,2), Z = (3,6,2)$$

di $\mathbb{R}^3$ dengan metrik Euclid

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Diketahui $T = \{W, X, Y, Z\}$ merupakan tetrahedral degenerasi. Buktikan bahwa $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$ jika dan hanya jika terdapat titik $V_1 \in \{X, Y, Z\}$ sedemikian sehingga berlaku

$$d(W, V_1)$$

$$= \sqrt{(d(V_1, V_2))^2 + (d(W, V_2))^2 - 2(d(V_1, V_2)d(W, V_2) \cos(\angle V_1 V_2 V_3 + \angle W V_2 V_3))}$$

dengan $V_2, V_3 \in \{X, Y, Z\} - \{V_1\}$.

Akan di tunjukkan, karena seluruh titik memiliki koordinat ketiga sama, yaitu $z = 2$, maka titik-titik W, X, Y, Z terletak pada satu bidang yang sama. Dengan demikian, $T = \{W, X, Y, Z\}$ merupakan tetrahedral degenerasi. Dipilih

$$V_1 = Z = (3, 6, 2),$$

Serta

$$V_2 = Y = (6, 1, 2), V_3 = X = (1, 1, 2).$$

($\Rightarrow$) Asumsikan $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$. Karena T merupakan tetrahedral degenerasi dan $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$, maka titik W, X, Y, Z membentuk segi empat cembung. Karena titik W dan titik Z berada pada sisi berlawanan terhadap garis YX , maka sudut di titik Y memenuhi

$$\angle ZYW = \angle ZYX + \angle WYX.$$

Pada segitiga WZY , berdasarkan hukum cosinus diperoleh

$$d(W, Z)^2 = (d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYW)).$$

Dengan mensubsitusikan

$$\angle ZYW = \angle ZYX + \angle WYX,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(W, Z)^2 &= (d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 \\ &\quad - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX)). \end{aligned}$$

Selanjutnya akan di hitung masing-masing jarak.

Jarak $d(W, Z)$,

$$\begin{aligned} d(W, Z) &= \sqrt{(8-3)^2 + (5-6)^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Jarak $d(Z, Y)$,

$$\begin{aligned} d(Z, Y) &= \sqrt{(3-6)^2 + (6-1)^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Jarak $d(W, Y)$,

$$\begin{aligned} d(W, Y) &= \sqrt{(8-6)^2 + (5-1)^2 + (2-2)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}. \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan sudut $\angle ZYX$. Perhatikan vektor

$$\overrightarrow{YZ} = Z - Y = (3 - 6, 6 - 1, 2 - 2) = (-3, 5, 0)$$

dan

$$\overrightarrow{YX} = X - Y = (1 - 6, 1 - 1, 2 - 2) = (-5, 0, 0).$$

Berdasarkan hasil kali titik dua vektor, diperoleh

$$\cos(\angle ZYX) = \frac{\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{YX}}{|\overrightarrow{YZ}| |\overrightarrow{YX}|}.$$

Selanjutnya,

$$\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{YX} = (-3)(-5) + (5)(0) + (0)(0) = 15.$$

Selain itu,

$$|\overrightarrow{YZ}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{34},$$

dan

$$|\overrightarrow{YX}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Dengan demikian

$$\cos(\angle ZYX) = \frac{15}{5\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Sehingga diperoleh $\angle ZYX \approx 59.04^\circ$.

Menentukan sudut $\angle WYX$. perhatikan vektor

$$\overrightarrow{YW} = W - Y = (8 - 6,5 - 1,2 - 2) = (2,4,0)$$

dan

$$\overrightarrow{YX} = (-5,0,0).$$

Berdasarkan hasil kali titik dua vektor, diperoleh

$$\cos(\angle WYX) = \frac{\overrightarrow{YW} \cdot \overrightarrow{YX}}{|\overrightarrow{YW}| |\overrightarrow{YX}|}.$$

Selanjutnya,

$$\overrightarrow{YW} \cdot \overrightarrow{YX} = (2)(-5) + (4)(0) + (0)(0) = -10.$$

Selain itu,

$$|\overrightarrow{YW}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20},$$

dan

$$|\overrightarrow{YX}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Dengan demikian

$$\cos(\angle WYX) = \frac{-10}{5\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sehingga diperoleh $\angle WYZ \approx 116.57^\circ$. Maka

$$\angle WYZ = \angle ZYX + \angle WYX = 59.04^\circ + 116.57^\circ = 175.61^\circ.$$

Substitusikan nilai-nilai tersebut ke persamaan hukum cosinus

$$(\sqrt{26})^2 = (\sqrt{34})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2(\sqrt{34})(\sqrt{20}) \cos(175.61^\circ).$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} d(W, Z)^2 &= (d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 \\ &\quad - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX)). \end{aligned}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} d(W, Z) &= \sqrt{(d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX))}. \end{aligned}$$

Jadi terdapat titik $V_1 = Z \in \{X, Y, Z\}$ yang memenuhi persamaan pada teorema. ■

($\Leftarrow$) Asumsikan terdapat titik $V_1 = Z \in \{X, Y, Z\}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} d(W, Z) &= \sqrt{(d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX))}. \end{aligned}$$

Dari perhitungan sebelumnya diperoleh

$$d(W, Z) = \sqrt{26}, d(Z, Y) = \sqrt{34}, d(W, Y) = \sqrt{20}.$$

Selain itu

$$\angle ZYX \approx 59.04^\circ, \angle WYX \approx 116.57^\circ.$$

Sehingga

$$\angle ZYX + \angle WYX = 59.04^\circ + 116.57^\circ = 175.61^\circ.$$

Substitusikan nilai-nilai tersebut ke persamaan yang di asumsikan.

$$\begin{aligned} d(W, Z) &= \sqrt{(\sqrt{34})^2 + (\sqrt{20})^2 - 2(\sqrt{34})(\sqrt{20}) \cos(175.61^\circ)} \\ &= \sqrt{34 + 20 - 2(\sqrt{680})(0.997)} \\ &= \sqrt{54 - 2(26.076)(0.997)} \\ &= \sqrt{54 + 52(0.997)} = \sqrt{26} \end{aligned}$$

Sesuai dengan hasil perhitungan langsung jarak titik W dan Z .

Selanjutnya, berdasarkan hukum cosinus pada segitiga WZY , diperoleh

$$d(W, Z)^2 = (d(Z, Y))^2 + (d(W, Y))^2 - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYW))$$

Misalkan $A = d(Z, Y)^2 + d(W, Y)^2$. Maka diperoleh

$$d(W, Z)^2 = A - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX))$$

dan

$$d(W, Z)^2 = A - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYW)).$$

Karena kedua ruas kiri sama maka

$$\begin{aligned} A - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX)) \\ &= A - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYW)) \\ &\quad - 2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYX + \angle WYX)) \\ &= -2(d(Z, Y)d(W, Y) \cos(\angle ZYW)) \\ &\quad \cos(\angle ZYX + \angle WYX) = \cos(\angle ZYW). \end{aligned}$$

Karena $\angle ZYX, \angle WYX, \angle ZYW \in [0, \pi]$ dan fungsi $\cos$ bersifat injektif pada interval $[0, \pi]$, maka diperoleh

$$\angle ZYW = \angle ZYX + \angle WYX.$$

Akibatnya titik W dan titik Z berada pada sisi berlawanan terhadap garis YX , sehingga $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$.

Andaikan $W \in \text{Bdry}(\Delta XYZ)$, maka salah satu sisi tetrahedron memiliki luas yang sama dengan jumlah luas tiga sisi lainnya. Karena hal tersebut tidak terjadi, maka $W \notin \text{Bdry}(\Delta XYZ)$.

Karena $W \notin \text{Int}(\Delta XYZ)$ dan $W \notin \text{Bdry}(\Delta XYZ)$ maka diperoleh $W \in \text{ext}(\Delta XYZ)$.

Jadi kedua arah terbukti. ■

4.1.3 Teorema 4.3 Pemetaan Isometri

Setiap tetrahedral degenerasi bersifat isometri ke suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$.

Bukti

Misalkan (X, d_x) adalah ruang metrik sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

$$c_1 d_x(x, y) + c_2 d_x(y, z) = d_x(x, z)$$

dengan $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$, maka setiap segitiga pada X bersifat degenerasi. Dengan demikian, (X, d_x) merupakan ruang metrik segitiga degenerasi.

Richmond & Richmond, 1997 menunjukkan bahwa setiap ruang metrik segitiga degenerasi bersifat isometri terhadap subruang dari $\mathbb{R}$, maka terdapat pemetaan isometri

$$f_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$$

sedemikian sehingga

$$|f_0(x) - f_0(y)| = d_x(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Untuk memetakan X ke $\mathbb{R}^2$, didefinisikan pemetaan

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dengan

$$g(x) = (f_0(x), 0).$$

Untuk $x, y \in X$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(g(x), g(y)) &= \sqrt{(f_0(x) - f_0(y))^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{(f_0(x) - f_0(y))^2 + 0} \\ &= \sqrt{(f_0(x) - f_0(y))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f_0(x) - f_0(y)| \\
&= d_X(x, y).
\end{aligned}$$

Jadi, g merupakan isometri dari (X, d_X) ke subruang $g(X) \subset \mathbb{R}^2$.

Selanjutnya, misalkan (X, d_X) merupakan ruang tetrahedral degenerasi.

1. Andaikan (X, d_X) memuat tetrahedral degenerasi tipe I. berdasarkan Definisi 2.8, misalkan $\{p, a, b, c\} \subset X$ merupakan titik-titik sudut tetrahedron tersebut sehingga ruas ap, pb , dan pc membentuk konfigurasi menyerupai huruf T atau Y , dan segitiga $\{a, b, c\}$ memiliki luas maksimum.
2. Jika tidak terdapat tetrahedral degenerasi tipe I maka, ambil tetrahedral degenerasi tipe II, yang berdasarkan Definisi 2.30 terdapat empat titik $p, a, b, c \in X$ sehingga p dan a merupakan dua titik sudut yang saling berhadapan pada segiempat cembung yang di bentuk oleh ke empat titik tersebut.

Dalam tipe I dan tipe II dapat dipilih $p \in X$ sebagai titik pusat dan $a \in X$ sebagai titik acuan arah. Titik-titik b dan c digunakan untuk menentukan tanda koordinat y .

Ambil titik $p, a \in X$ sebagaimana yang telah dipilih. Setiap $x \in X$ adalah sudut antara ruas ap dan px di titik p sehingga dapat di tulis dengan

$$\theta = \angle apx.$$

Selain itu, terdapat sudut lain dengan titik o yang dapat di tulis dengan

$$\alpha = \angle apc, \quad \beta = \angle apb.$$

Berdasarkan definisi pemetaan $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan aturan korespondensi

$f(x)$

$$= \begin{cases} d_X(p, x)\cos\theta, d_X(p, x)\sin\theta) \text{ if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ dan } \alpha = \theta + \angle cpx \text{ atau } \alpha = \theta - \angle cpx \\ d_X(p, x)\cos\theta, d_X(p, x)\sin\theta) \text{ if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ dan } \alpha = \theta + \angle cpx \text{ atau } \alpha = \theta - \angle cpx \\ d_X(p, x)\cos\theta, -d_X(p, x)\sin\theta) \text{ if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ dan } \alpha = \beta + \angle bpx \text{ atau } \beta = \theta - \angle bpx \\ d_X(p, x)\cos\theta, -d_X(p, x)\sin\theta) \text{ if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ dan } \alpha = \beta + \angle bpx \text{ atau } \beta = \theta - \angle bpx. \end{cases}$$

Pemetaan tersebut memperluas konsep empat kuadran pada bidang Euclid.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f terdefinisi.

Karena fungsi invers cosinus bernilai pada interval $[0, \pi]$, maka untuk setiap $x \in$

X tepat satu dari kondisi

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

atau

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$$

selalu berlaku.

Misalkan $\theta \in \{0, \pi\}$. Jika $\theta = 0$, maka titik a, p, x segaris. Oleh karena itu,

$$\alpha = \angle apc = \angle cpx$$

dan

$$\beta = \angle apb = \angle bpx.$$

Akibatnya

$$\alpha = \theta + \angle cpx$$

dan

$$\beta = \theta + \angle bpx.$$

Jika $\theta = \pi$, maka berlaku

$$\pi = \angle cpx + \angle apx$$

dan

$$\pi = \angle bpx + \angle apx.$$

Selanjutnya, andaikan kedua kondisi

$$\alpha = \theta + \angle cpx \text{ dan } \beta = \theta + \angle bpx$$

atau

$$\alpha = \theta - \angle cpx \text{ dan } \beta = \theta - \angle bpx$$

berlaku bersamaan. Pertama, jika

$$\alpha = \theta + \angle cpx \text{ dan } \beta = \theta + \angle bpx$$

maka

$$\theta + \angle cpx + \angle bpx \geq \pi.$$

Ketika $\theta < \alpha$, diperoleh

$$\angle cpx = \alpha - \theta$$

dan

$$\angle bpx = \theta + \beta.$$

Jika $\theta + \beta \leq \pi$, maka

$$\angle bpx = 2\pi - (\theta + \beta).$$

Jika $\theta + \beta > \pi$, maka

$$\angle bpx = \theta + \beta.$$

Sehingga diperoleh kontradiksi karena $\theta = 0$. Sebaliknya, jika

$$\angle bpx = 2\pi - (\theta + \beta),$$

maka diperoleh $\theta = \pi$, yang juga kontradiksi. Dengan argumen serupa,

$$\alpha = \theta - \angle cpx$$

tidak mungkin berlaku bersamaan. Akibatnya, dua kondisi pada f dapat berlaku bersamaan jika dan hanya jika $\theta \in \{0, \pi\}$. Jika $\theta = 0$, maka

$$(d_X(p, x) \cos \theta, d_X(p, x) \sin \theta) = (d_X(p, x), 0).$$

Jika $\theta = \pi$, maka

$$(d_X(p, x) \cos \theta, d_X(p, x) \sin \theta) = (-d_X(p, x), 0).$$

Dengan demikian, setiap titik $x \in X$ dipetakan ke tepat satu titik pada $\mathbb{R}^2$. Jadi, f terdefinisi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f bersifat injektif.

Misalkan $x, y \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$. Pertama, andaikan

$$\angle xpy = 0,$$

maka diperoleh

$$\angle apx = \angle apy.$$

Karena $x \neq y$, maka

$$d_X(p, x) \neq d_X(p, y),$$

sehingga

$$f(x) \neq f(y),$$

Jadi hasilnya kontradiksi. Selanjutnya, andaikan $\angle xpy > 0$. Karena

$$f(x) = f(y),$$

maka

$$d_X(p, x) \cos (\angle apx) = d_X(p, y) \cos (\angle apy)$$

dan

$$d_X(p, x) \sin (\angle apx) = d_X(p, y) \sin (\angle apy).$$

Dengan membagi kedua persamaan tersebut diperoleh

$$\tan \angle apx = \tan \angle apy.$$

Karena fungsi tangen injektif pada interval $[0, \pi]$, maka

$$\angle apx = \angle apy.$$

Akibatnya

$$\angle xpy = 0,$$

Kontradiksi. Jadi, f bersifat injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f bersifat surjektif terhadap $f(X)$.

Misalkan $y \in f(X)$ adalah suatu titik sembarang. Karena

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\},$$

maka terdapat suatu elemen $x \in X$ sedemikian sehingga

$$f(x) = y.$$

Dengan demikian, f bersifat surjektif terhadap $f(X)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f mempertahankan jarak. Kasus pertama misalkan

$$f(x) = (d_X(p, x) \cos(\angle apx), d_X(p, x) \sin(\angle apx))$$

dan

$$f(y) = (d_X(p, y) \cos(\angle apy), d_X(p, y) \sin(\angle apy)),$$

maka berdasarkan definisi metrik di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= [(d_X(p, x) \cos(\angle apx) - d_X(p, y) \cos(\angle apy))^2 \\ &\quad + (d_X(p, x) \sin(\angle apx) - d_X(p, y) \sin(\angle apy))^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= [d_X(p, x)^2 + d_X(p, y)^2 \\ &\quad - 2d_X(p, x)d_X(p, y)\cos((\angle apx) - (\angle apy))]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Berdasarkan hukum cosinus,

$$d_X(x, y)^2 = d_X(p, x)^2 + d_X(p, y)^2 - 2d_X(p, x)d_X(p, y)\cos(\angle xpy)$$

dan karena

$$\angle xpy = (\angle apx) - (\angle apy),$$

maka

$$d(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Kasus kedua, misalkan

$$f(x) = (d_X(p, x) \cos(\angle apx), d_X(p, x) \sin(\angle apx))$$

dan

$$f(y) = (d_X(p, y) \cos(\angle apx), d_X(p, y) \sin(\angle apy)).$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= [d_X(p, x)^2 + d_X(p, y)^2 \\ &\quad - 2d_X(p, x)d_X(p, y)\cos((\angle apx) - (\angle apy))]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Karena

$$\angle xpy = (\angle apx) + (\angle apy),$$

maka berdasarkan hukum cosinus diperoleh

$$d(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Kasus ketiga, misalkan

$$f(x) = (d_X(p, x) \cos(\angle apx), -d_X(p, x) \sin(\angle apx))$$

dan

$$f(y) = (d_X(p, y) \cos(\angle apx), -d_X(p, y) \sin(\angle apy)).$$

Dengan perhitungan serupa diperoleh

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= [d_X(p, x)^2 + d_X(p, y)^2 \\ &\quad - 2d_X(p, x)d_X(p, y)\cos((\angle apx) - (\angle apy))]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Karena

$$\angle xpy = (\angle apx) - (\angle apy),$$

maka berdasarkan definisi 2.40 diperoleh

$$d(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Dengan demikian, f adalah mempertahankan jarak.

Karena f bijektif dan mempertahankan jarak, maka f merupakan isometri dari (X, d_X) ke subruang $f(X) \subset \mathbb{R}^2$. Jadi, setiap ruang tetrahedral degenerasi isometri terhadap suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$. ■

Contoh 4.4

Misalkan diberikan titik-titik

$$p = (1, 2, 3), a = (5, 2, 3), b = (2, 5, 3), c = (6, 5, 3)$$

di $\mathbb{R}^3$ dengan metrik Euclid

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Diketahui bahwa $X = \{p, a, b, c\}$ merupakan ruang tetrahedral degenerasi.

Buktikan bahwa (X, d) isometri terhadap suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$.

Diketahui titik-titik $p = (1, 2, 3), a = (5, 2, 3), b = (2, 5, 3), c = (6, 5, 3)$ memiliki koordinat ketiga yang sama, yaitu 3. Akibatnya seluruh titik berada pada satu bidang yang sama, yaitu bidang $z = 3$. Dengan demikian $X = \{p, a, b, c\}$ merupakan ruang tetrahedral degenerasi.

Selain itu, terdapat tiga titik p, a , dan b yang tidak segaris sehingga Δoab merupakan segitiga tidak degenerasi. Oleh karena itu, (X, d) bukan ruang segitiga degenerasi.

Selanjutnya dipilih titik $p = (1, 2, 3)$ sebagai titik pusat dan titik $a = (5, 2, 3)$ sebagai titik acuan arah.

Untuk setiap $x \in X$, didefinisikan

$$\theta = \angle apx.$$

Kemudian dibentuk pemetaan

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dengan

$$f(x) = (d(p, x) \cos \theta, d(p, x) \sin \theta).$$

Selanjutnya akan dicari bayangan titik p, a, b, c pada $\mathbb{R}^2$.

Pertama akan ditentukan bayangan titik p . Karena $p = (1, 2, 3)$, maka jarak titik p dan titik p itu sendiri yaitu

$$\begin{aligned} d(p, p) &= \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} \\ &= \sqrt{0+0+0} = \sqrt{0} = 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan pemetaan

$$f(x) = (d(p, x) \cos \theta, d(p, x) \sin \theta),$$

untuk $x = p$ diperoleh

$$f(p) = (d(p, p) \cos \theta, d(p, p) \sin \theta).$$

Karena

$$d(p, p) = 0,$$

maka

$$f(p) = (0 \cos \theta, 0 \sin \theta) = (0, 0)$$

Jadi bayangan titik p pada $\mathbb{R}^2$ adalah $f(p) = (0, 0)$. Kemudian akan ditentukan bayangan titik a . Karena sudut yang dibentuk oleh ruas pa dengan ruas pa sendiri adalah sudut nol, maka diperoleh $\angle apa = 0$. Selanjutnya, jarak antara titik p dan titik a adalah

$$d(p, a) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Karena $\cos 0 = 1$ dan $\sin 0 = 0$, maka

$$\begin{aligned} f(a) &= (d(p, a) \cos 0, d(p, a) \sin 0) \\ &= (4 \cos 0, 4 \sin 0) = (4(1), 4(0)) = (4, 0). \end{aligned}$$

Jadi bayangan titik a pada $\mathbb{R}^2$ adalah $f(a) = (4, 0)$. Kemudian untuk menentukan bayangan titik b , terlebih dahulu ditentukan sudut $\angle apb$. Perhatikan vektor

$$\overrightarrow{pa} = a - p = (5 - 1, 2 - 2, 3 - 3) = (4, 0, 0).$$

dan

$$\overrightarrow{pb} = b - p = (2 - 1, 5 - 2, 3 - 3) = (1, 3, 0).$$

Hasil kali kedua vektor adalah

$$\overrightarrow{pa} \cdot \overrightarrow{pb} = (4)(1) + (0)(3) + (0)(0) = 4.$$

Selanjutnya menentukan panjang vektor $\overrightarrow{pa}$, yaitu

$$|\overrightarrow{pa}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Sedangkan panjang vektor $\overrightarrow{pb}$, yaitu

$$|\overrightarrow{pb}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 9 + 0} = \sqrt{10}.$$

Sehingga diperoleh

$$\cos(\angle apb) = \frac{\overrightarrow{pa} \cdot \overrightarrow{pb}}{|\overrightarrow{pa}| |\overrightarrow{pb}|} = \frac{4}{(4)(\sqrt{10})} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Selanjutnya,

$$\sin(\angle apb) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Selain itu,

$$d(p, b) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (3 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 9 + 0} = \sqrt{10}.$$

Maka diperoleh

$$f(b) = \left(\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = (1, 3).$$

Jadi bayangan titik b pada $\mathbb{R}^2$ adalah $f(b) = (1, 3)$. Kemudian untuk menentukan bayangan titik c , terlebih dahulu ditentukan sudut $\angle apc$. Perhatikan vektor

$$\overrightarrow{pc} = c - p = (6 - 1, 5 - 2, 3 - 3) = (5, 3, 0).$$

Hasil kali kedua vektor adalah

$$\overrightarrow{pa} \cdot \overrightarrow{pc} = (4)(5) + (0)(3) + (0)(0) = 20.$$

Panjang vektor $\overrightarrow{pc}$ yaitu

$$|\overrightarrow{pc}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 9 + 0} = \sqrt{34}.$$

Sehingga diperoleh

$$\cos(\angle apc) = \frac{20}{(4)(\sqrt{34})} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Selanjutnya

$$\sin(\angle apc) = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{34}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{34}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Selain itu

$$\begin{aligned} d(p, c) &= \sqrt{(6 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 9 + 0} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$f(c) = \left(\sqrt{34} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}, \sqrt{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \right) = (5, 3).$$

Selanjutnya akan diperiksa bahwa jarak antar titik pada $\mathbb{R}^3$ sama dengan jarak antar bayangannya di $\mathbb{R}^2$. Jarak antara titik a dan titik b pada $\mathbb{R}^3$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 d(a, b) &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2 + (3-3)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}.
 \end{aligned}$$

Pada hasil pemetaan diperoleh

$$d(f(a), f(b)) = \sqrt{(4-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}.$$

Karena $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$, maka jarak antara titik a dan titik b dipertahankan oleh pemetaan f . Kemudian, jarak antara titik b dan titik c pada ruang asal diperoleh

$$\begin{aligned}
 d(b, c) &= \sqrt{(6-2)^2 + (5-5)^2 + (3-3)^2} \\
 &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{16+0+0} = \sqrt{16} = 4.
 \end{aligned}$$

Pada hasil pemetaan diperoleh

$$d(f(b), f(c)) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Karena $d(f(b), f(c)) = d(b, c)$, maka jarak antara titik b dan titik c dipertahankan oleh pemetaan f . Lalu, jarak antara titik a dan titik c pada ruang asal diperoleh

$$\begin{aligned}
 d(a, c) &= \sqrt{(6-5)^2 + (5-2)^2 + (3-3)^2} \\
 &= \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

Pada hasil pemetaan diperoleh

$$d(f(a), f(c)) = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Karena $d(f(a), f(c)) = d(a, c)$, maka jarak antara titik a dan titik c dipertahankan oleh pemetaan f . Dengan cara yang sama dapat diperiksa bahwa untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Akibatnya pemetaan

$$f: X \rightarrow f(X) \subset \mathbb{R}^2$$

mempertahankan jarak.

Selain itu, setiap titik pada X memiliki bayangan yang berbeda di $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$f(p) \neq f(a) \neq f(b) \neq f(c),$$

sehingga f bersifat injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f bersifat surjektif terhadap $f(X)$.

Misalkan $y \in f(X)$ adalah suatu titik sembarang. Karena

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\},$$

maka terdapat suatu elemen $x \in X$ sedemikian sehingga

$$f(x) = y.$$

Dengan demikian, f bersifat surjektif terhadap $f(X)$.

Karena f injektif, surjektif terhadap $f(X)$, dan mempertahankan jarak, maka f merupakan isometri dari (X, d) ke subruang dari $f(X) \subset \mathbb{R}^2$. Jadi, (X, d) isometrik terhadap suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$. ■

4.1.4 Teorema 4.4 Invariansi Topologi

Misalkan (X, τ_X) adalah sebuah ruang topologi yang muncul dari sebuah ruang tetrahedral degenerasi. Jika (Y, τ_Y) adalah sebuah ruang topologi yang homeomorfisme terhadap (X, τ_X) , maka (Y, τ_Y) diasosiasikan dengan ruang tetrahedral degenerasi.

Bukti:

Misalkan (X, d_X) adalah ruang metrik tetrahedral degenerasi yang menginduksi topologi τ_X .

Berdasarkan Teorema 4.3, setiap ruang tetrahedral degenerasi isometri terhadap suatu subruang dari $(\mathbb{R}^2, d)$, dengan d adalah metrik Euclid. Maka terdapat pemetaan isometri

$$f: (X, d_X) \rightarrow (f(X), d)$$

Sedemikian sehingga

$$d_X(x, y) = d(f(x), f(y)), \forall x, y \in X.$$

Misalkan τ adalah topologi yang diinduksi oleh metrik d pada $f(X)$. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan homeomorfisme antara (X, τ_X) dan $(f(X), \tau)$ berdasarkan Definisi 2.14.

Ambil sebarang $O \in \tau_X$. Karena τ_X diinduksi oleh d_X , maka

$$O = \bigcup_{a \in I} B_{d_X}(a, \delta_a)$$

untuk suatu himpunan indeks I .

Ambil sebarang $x \in B_{d_X}(a, \delta_a)$ sedemikian sehingga

$$d_X(x, a) < \delta_a.$$

Karena f adalah isometri, diperoleh

$$d(f(x), f(a)) = d_X(x, a) < \delta_a.$$

Akibatnya

$$f(x) \in B_d(f(a), \delta_a) \cap f(X).$$

Dengan demikian,

$$f(B_{d_X}(a, \delta_a)) = B_d(f(a), \delta_a) \cap f(X).$$

Oleh karena itu,

$$f(O) = \bigcup_{a \in I} (B_d(f(a), \delta_a) \cap f(X)),$$

yang merupakan gabungan himpunan buka pada $(f(X), \tau)$. Jadi,

$$f(O) \in \tau.$$

Akibatnya, f kontinu.

Karena f bijektif, maka terdapat invers

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X.$$

Ambil sebarang $U \in \tau$. Karena τ diinduksi oleh d , maka

$$U = \bigcup_{b \in J} B_d(b, \delta_b)$$

untuk suatu himpunan indeks J . Karena f isometri, maka untuk setiap bola buka

$B_d(b, \delta_b)$, berlaku

$$f^{-1}(B_d(b, \delta_b)) = B_{d_X}(f^{-1}(b), \delta_b).$$

Akibatnya,

$$f^{-1}(U) \in \tau_X.$$

Jadi f^{-1} kontinu. Karena f bijektif serta f dan f^{-1} kontinu, maka f merupakan homeomorfisme di (X, τ_T) terhadap (X, τ_X) dan $(f(X), \tau)$.

Selanjutnya, karena (Y, τ_Y) homeomorfisme terhadap (X, τ_X) , dan homeomorfisme bersifat transitif, maka

$$(Y, \tau_Y) \cong (f(X), \tau).$$

Misalkan

$$g: Y \rightarrow f(X)$$

adalah homeomorfisme. Definisikan fungsi

$$d_Y: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan

$$d_Y(y_1, y_2) = d(g(y_1), g(y_2)), \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Akan ditunjukkan bahwa d_Y adalah metrik pada Y . Ambil sebarang $y_1, y_2, y_3 \in Y$.

$$\text{M1) } d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$$

Karena d adalah metrik pada $\mathbb{R}^2$, maka

$$d(g(y_1), g(y_2)) \in \mathbb{R}, \quad d(g(y_1), g(y_2)) < \infty, \quad d(g(y_1), g(y_2)) \geq 0$$

sehingga

$$d_Y(y_1, y_2) \in \mathbb{R}, \quad d_Y(y_1, y_2) < \infty, \quad d_Y(y_1, y_2) \geq 0$$

terbukti bahwa M1 terpenuhi.

$$\text{M2) } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

($\Rightarrow$) Asumsikan $d(y_1, y_2) = 0$, maka

$$d_Y(y_1, y_2) = 0$$

$$d(g(y_1), g(y_2)) = 0$$

$$g(y_1) = g(y_2)$$

$$y_1 = y_2$$

($\Leftarrow$) Asumsikan $y_1 = y_2$, maka

$$y_1 = y_2$$

$$g(y_1) = g(y_2)$$

$$d(g(y_1), g(y_2)) = 0$$

$$d_Y(y_1, y_2) = 0$$

terbukti bahwa M2 terpenuhi.

$$\text{M3) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$d_Y(y_1, y_2) = d(g(y_1), g(y_2))$$

$$= d(g(y_2), g(y_1))$$

$$= d_Y(y_2, y_1)$$

terbukti bahwa M3 terpenuhi.

$$M4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\begin{aligned} d_Y(y_1, y_3) &= d(g(y_1), g(y_3)) \\ &\leq d(g(y_1), g(y_2)) + d(g(y_2), g(y_3)) \\ &= d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) \end{aligned}$$

Maka terbukti M4 terpenuhi.

Dengan demikian d_Y memenuhi seluruh aksioma metrik sehingga (Y, d_Y) merupakan ruang metrik.

Selanjutnya, untuk setiap $y_1, y_2 \in Y$,

$$d_Y(y_1, y_2) = d(g(y_1), g(y_2)).$$

Akibatnya, g merupakan isometri antara (Y, d_Y) dan $(f(X), d)$. Karena sifat tetrahedral degenerasi dipertahankan oleh isometri dan $(f(X), d)$ merupakan ruang tetrahedral degenerasi, maka (Y, d_Y) juga merupakan ruang tetrahedral degenerasi.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa topologi yang diinduksi oleh d_Y sama dengan τ_Y . Ambil sebarang bola buka

$$B_{d_Y}(y, \delta).$$

Karena g adalah isometri, maka

$$g(B_{d_Y}(y, \delta)) = B_d(g(y), \delta) \cap f(X),$$

yang merupakan himpunan buka pada $(f(X), \tau)$. Karena g homeomorfisme, maka

$$B_{d_Y}(y, \delta) \in \tau_Y.$$

Sebaliknya, ambil sebarang $V \in \tau_Y$. Karena g homeomorfisme, maka

$$g(V) \in \tau.$$

Karena τ diinduksi oleh metrik d , maka $g(V)$ merupakan gabungan bola buka pada $(f(X), d)$, yaitu

$$g(V) = \bigcup_{a \in I} (B_d(a, \delta_a) \cap f(X)).$$

Karena g adalah isometri, diperoleh

$$V = \bigcup_{a \in I} B_{d_Y}(g^{-1}(a), \delta_a).$$

Dengan demikian, V merupakan gabungan bola buka pada (Y, d_Y) . Jadi,

$$V \in \tau(d_Y).$$

Akibatnya,

$$\tau_Y = \tau(d_Y).$$

Oleh karena itu, terdapat metrik d_Y pada Y sehingga (Y, d_Y) merupakan ruang tetrahedral degenerasi dan menginduksi topologi τ_Y . Jadi, (Y, τ_Y) diasosiasikan dengan ruang tetrahedral degenerasi. ■

4.2 Kajian Al-Quran tentang Keterukuran dan Keteraturan terhadap

Ruang Tetrahedral Degenerasi

Pembahasan dalam bab ini telah dibuktikan secara matematis bahwa ruang metrik tetrahedral degenerasi, memiliki struktur yang sangat teratur hingga dapat diisometrian ke dalam ruang dua dimensi. Adanya ukuran jarak yang konsisten adalah hubungan yang pasti antar titik mencerminkan adanya keteraturan dan "ukuran" yang melekat pada struktur geometris tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa dalam abstraksi matematis terdapat sunnatullah, yaitu hukum-hukum tetap yang Allah tetapkan dalam ciptaan-Nya. Keteraturan dan ukuran yang melekat ini sesuai dengan firman Allah dalam QS. Al-Qamar ayat 49 (Kementerian Agama Republik Indonesia, 2022).

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (qadar)*” (QS. Al-Qamar : 49).

Tafsir Kementerian Agama Republik Indonesia (2022), menjelaskan bahwa ayat ini berarti Allah menciptakan segala sesuatu menurut ukuran, yaitu suatu sistem dan ketentuan yang telah ditetapkan. Sedangkan menurut Ibnu Katsir (2009), dalam tafsirnya juga menegaskan bahwa Allah telah menetapkan takdir (ukuran dan ketentuan) segala sesuatu sebelum menciptakannya.

Selain itu, prinsip keterukuran tersebut juga ditegaskan dalam QS. Ar-Ra’d ayat 8 (Kementrian Agama Republik Indonesia, 2022).

وَكُلُّ شَيْءٍ عِنْدَهُ بِمِقْدَارٍ ﴿٨﴾

Artinya : “*Dan segala sesuatu disisinya ada ukurannya*” (QS. Ar-Ra’d : 8).

Menurut Ibnu Katsir (2009), ayat بِمِقْدَارٍ dalam QS. Ar-Ra’d : 8 bermakna bahwa segala sesuatu berada dalam ukuran, kadar, dan batas yang telah ditetapkan. Pada dasarnya tidak ada satupun makhluk yang tercipta tanpa ketentuan yang jelas, baik dari segi jumlah, waktu, bentuk, maupun sifat. Seluruh ciptaan tunduk kepada ketetapan yang telah ditentukan sesuai dengan ilmu dan kehendaknya, sehingga menunjukkan adanya sistem keteraturan yang sempurna dalam penciptaan.

Sejalan dengan itu, tafsir yang diterbitkan oleh Kementerian Agama Republik Indonesia (2022), menjelaskan bahwa ayat ini menegaskan kesempurnaan ilmu Allah dimana setiap ciptaan memiliki kadar dan proporsi yang tepat serta tidak menyimpang dari ketentuannya. Dengan demikian, QS. Ar-Ra’d : 8 menunjukkan bahwa seluruh realitas berjalan dalam ukuran dan hukum yang pasti, yang secara konseptual sejalan dengan prinsip keterukuran dan konsistensi dalam stuktur matematis.

Selain itu, konsistensi dan kepastian hukum matematis yang ditemukan dalam penelitian ini juga sejalan dengan firman Allah dalam QS. Al-Hijr ayat 85 Kementerian Agama Republik Indonesia (2022).

وَمَا خَلَقْنَا السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا إِلَّا بِالْحَقِّ وَإِنَّ السَّاعَةَ لَآتِيَةٌ فَاصْصَبْ الصَّبْرَ الْجَمِيلَ ﴿٨٥﴾

Artinya: "Dan Kami tidak menciptakan langit dan bumi dan apa yang ada antara keduanya melainkan dengan kebenaran. Dan sesungguhnya hari kiamat itu pasti akan datang, maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik."

Menurut tafsir Kementerian Agama Republik Indonesia (2022), menjelaskan bahwa Allah menciptakan alam semesta ini dengan *al-haqq*, yaitu dengan kebenaran, tidak sia-sia, dan penuh hikmah. Quraish Shihab dalam Tafsir Al-Misbah (2002) menambahkan bahwa kata *bil-haqqi* mengandung makna bahwa penciptaan langit dan bumi adalah benar, tepat guna, dan memiliki tujuan yang hakiki. Ibnu Katsir (2009) dalam tafsirnya juga menegaskan bahwa Allah menciptakan semua itu dengan keadilan dan kebijaksanaan, bukan sebagai permainan tanpa tujuan.

Penelitian tentang sifat-sifat ruang metrik tetrahedral degenerasi menunjukkan adanya hukum matematika yang pasti dan konsisten. Temuan segitiga degenerasi yang membatasi ruang ke dimensi satu serta degenerasi tetrahedron yang membatasi struktur ke dimensi dua, menegaskan bahwa setiap relasi jarak tunduk pada aksioma dan ukuran yang jelas. Hal ini secara konseptual sesuai dengan makna *qadar* dalam Surah Al-Qamar, *miqdār* dalam Surah Ar-Ra'd, dan *al-haqq* dalam surah Al-Hijr, bahwa segala sesuatu diciptakan dengan ukuran dan ketetapan dan kebenaran yang pasti disisi Allah Swt.

Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya berkontribusi pada pengembangan teori ruang metrik, tetapi juga memperkuat keyakinan bahwa hukum-hukum

matematika, termasuk yang mengatur ruang tetrahedral degenerasi, merupakan bagian dari *sunnatullah* yang tetap dan konsisten. Hal ini menjadi pengingat bahwa di balik setiap keteraturan matematis terdapat kebesaran dan kekuasaan Allah yang menciptakan segala sesuatu dengan ukuran dan kebenaran yang sempurna.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan pada penelitian ini tentang isometri tetrahedral degenerasi pada ruang metrik, dapat disimpulkan bahwa tetrahedral degenerasi terbagi menjadi dua tipe berdasarkan sifat metriknya, yaitu tipe I dimana setidaknya satu sisi memiliki luas yang sama dengan total luas ketiga sisi lainnya, dan tipe II dimana setiap sisi memiliki luas lebih kecil dari jumlah luas ketiga sisi lainnya. Selain itu memberikan karakterisasi bahwa tetrahedron $T = \{W, X, Y, Z\}$ adalah degenerasi jika dan hanya jika titik puncak W terletak di *exterior* yaitu alas dari ΔXYZ , dengan kriteria metrik tertentu yang melibatkan persamaan jarak dan sudut.

Hasil fundamental penelitian ini adalah yang membuktikan bahwa setiap ruang metrik tetrahedral degenerasi (X, d) bersifat isometri dengan subruang dari $\mathbb{R}^2$ melalui pemetaan bijektif $f: X \rightarrow f(X) \subseteq \mathbb{R}^2$ yang mempertahankan jarak. Menunjukkan bahwa sifat tetrahedral degenerasi invarian dibawah homeomorfisme, sehingga karakteristik ini merupakan sifat topologi yang fundamental. Penelitian ini berhasil membuktikan bahwa struktur ruang tetrahedral degenerasi secara esensial ekuivalen dengan ruang euclid dua dimensi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, beberapa saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu:

1. Penelitian lanjutan dapat mengeksplorasi perluasan konsep degenerasi ke dimensi yang lebih tinggi, seperti simpleks n -dimensi.
2. Investigasi lebih lanjut terhadap aplikasi praktis dari ruang metrik tetrahedral degenerasi dalam bidang-bidang seperti grafika komputer atau analisis data spasial.
3. Pengembangan algoritma komputasional untuk mendeteksi dan memverifikasi sifat degenerasi dalam ruang metrik yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Burkardt, J. (2018). *Computational Geometry Lab: TETRAHEDRONS*. <http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/presentations/cglabtetrahedrons.pdf>
- Bartle, R. G. ; S. D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*.
- Choi, S. H. (2024). *The Properties of Metric Spaces in Which All Tetrahedra Are Degenerate*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.36149.69602>
- Cheung Wing-Sum. (2024). *Metric Space Topology: Examples, Exercises and Solutions*. <http://www.worldscientific.com/series/saac>
- Chvátal, V., de Rancourt, N., Gamboa Quintero, G., Kantor, I., & Szabó, P. G. N. (2024). Metric spaces in which many triangles are degenerate. *Discrete Applied Mathematics*, 350, 97–99. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.02.021>
- Hetmanenko, L. (2025). Exploring Additivity in Triangle Areas: Methodological Insights for Mathematics Education. *Educational Process: International Journal*, 16. <https://doi.org/10.22521/edupij.2025.16.247>
- Ibnu Katsir, I. bin U. (2009). *Ibnu Katsir*. Darul Fikr
- Kementerian Agama Republik Indonesia. (2022). *Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an*.
- Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley.
- Leemann, P.-H. (2026). *Metric spaces Lecture notes for MTH224 2025-2026*.
- Mendelson, B. (1990). *Introduction to Topologi*. T6GF BR.
- Richmond, B., & Richmond, T. (1997). Metric Spaces in which All Triangles Are Degenerate. In *American Mathematical Monthly* (Vol. 104, Issue 8).
- Smith, J. T. (2000). *Methods of Geometry*. New York.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Widyasari, T. (2024). GEOMETRI DASAR. *Teori-Teori Dasar Matematika*, 42. https://books.google.co.id/books?hl=id&lr=&id=LW0nEQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA42&dq=definisi+segitiga&ots=QxtraKRfW&sig=zcFuP5iJBSusiHo4vLRiCPZ80-0&redir_esc=y#v=onepage&q=definisi%20segitiga&f=false

RIWAYAT HIDUP



Nur Azizah lahir di Probolinggo pada tanggal 8 Juli 2004. Penulis berdomisili di Desa Brumbungan Kidul, Kabupaten Probolinggo, Provinsi Jawa Timur. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara, putri dari Bapak Subiasim dan Ibu Musitti. Perjalanan pendidikan penulis dimulai di SD Brumbungan Kidul I dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan di MTS Nurul Qur'an dan lulus pada tahun 2019. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan di MAN I Probolinggo dan menyelesaikan pendidikan pada tahun 2022. Selanjutnya penulis melanjutkan studi Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh pendidikan diperguruan tinggi, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Program Studi "integral" Matematika sebagai anggota Divisi Kewirausahaan dan Dewan Eksekutif Mahasiswa di Fakultas Sains dan Teknologi. Selain itu, penulis juga aktif sebagai anggota Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia di rayon "Galileo". Melalui perjalanan pendidikan, pengalaman organisasi, serta proses pembelajaran yang telah dilalui, penulis berharap ilmu, pengalaman, dan nilai-nilai kehidupan yang diperoleh dapat menjadi bekal untuk terus berkembang, memberikan manfaat bagi keluarga, masyarakat, dan lingkungan sekitar, serta menjadi bagian dari kontribusi nyata dalam dunia pendidikan, sosial, dan pengabdian kepada umat.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nur Azizah
NIM : 220601110022
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Isometri Tetrahedral Degnerasi Pada Ruang Metrik
Dosen Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Dosen Pembimbing II : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Agustus 2025	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	2 September 2025	Konsultasi Topik dan Data	2.
3.	10 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	15 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	19 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	24 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	26 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	7.
8.	2 Oktober 2025	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	7 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	29 Oktober 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	3 November 2025	ACC Seminar Proposal	11.
12.	25 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	16 Desember 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	7 April 2026	ACC Bab IV dan V	14.
15.	9 April 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.
16.	13 April 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.

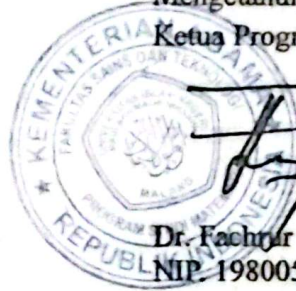


17.	16 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	17. <i>FP</i>
18.	20 April 2026	ACC Seminar Hasil	18. <i>f</i>
19.	4 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19. <i>A</i>
20.	12 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20. <i>f</i>
21.	25 Mei 2026	ACC Sidang Skripsi	21. <i>f</i>
22.	4 juni 2026	ACC Keseluruhan	22. <i>f</i>

Malang, 4 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi
Dr. Fachrur Rozi, M.Si

NIP. 19800527 200801 1 012