

**SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG GRAND-KUASI
LEBESGUE**

SKRIPSI

**OLEH
FATMATUZ ZAHRO
NIM. 220601110007**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG GRAND-KUASI
LEBESGUE**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Fatmatuz Zahro
NIM. 220601110007**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG GRAND-KUASI LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh
Fatmatuz Zahro
NIM. 220601110007

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 5 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Dian Maharani, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001

Dosen Pembimbing II



Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrud Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG GRAND-KUASI LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh
Fatmatuz Zahro
NIM. 220601110007

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 10 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

.....
.....
.....
.....



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fatmatuz Zahro

NIM : 220601110007

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juni 2026



Fatmatuz Zahro

NIM. 220601110007

MOTO

“Jika kamu tidak tahan dengan lelahnya belajar, maka kamu harus tahan dengan perihnya kebodohan” (Imam Syafi’i)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Abi Hasan Zailani Al-Kaff dan Ummah Halimah Tussa'diyah Bafaqih tercinta,
atas doa, kasih sayang, dan dukungan yang tiada henti.

Kakak Aminatuz Zahro Al-Kaff dan abang Husein Al-Haddar, serta adik-adik
tersayang Zaenah Azzahro Al-Kaff, Fairuzzah Azzahro Al-Kaff, dan Nazwa
Azzahro Al-Kaff, terima kasih atas semangat juga kebersamaan yang selalu
menguatkan dan sangat berarti bagi penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue”. Shalawat serta salam tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi wasallam, yang telah membimbing umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang penuh cahaya ilmu dan iman.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak akan dapat terselesaikan tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh rasa hormat dan terima kasih, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu, memberikan bimbingan, arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Dr. Achmad Nashichuddin, M.A., selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, memberikan bimbingan, arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si. selaku Ketua Penguji yang telah memberikan kritik, saran, serta masukan yang membangun selama proses ujian skripsi sehingga membantu penyempurnaan skripsi ini.
7. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Penguji I yang telah memberikan evaluasi dan rekomendasi yang berharga demi penyempurnaan skripsi ini.

8. Seluruh Dosen dan Staf Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu pengetahuan selama masa perkuliahan.
9. Hasan Zaelani Al-kaff dan Halimah Bafaqih selaku orang tua tercinta yang telah memberikan dukungan dan doa yang tiada henti kepada penulis.
10. Seluruh rekan mahasiswa Matematika angkatan 2022 atas kebersamaan dan dukungannya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan ke depannya. Semoga hasil karya ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Malang, 10 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Definisi Istilah.....	5
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung	8
2.1.1 Ruang Ukuran	8
2.1.2 Ruang Lebesgue	12
2.1.3 Ruang Lebesgue L^p Lengkap	21
2.1.4 Ruang Kuasi-Norma.....	38
2.1.5 Ruang Kuasi-Norma Lengkap.....	41
2.1.6 Fungsi Monotonik	41
2.1.7 Monoton Konvergen	46
2.2 Kesempurnaan Ciptaan Allah dalam Al-Qur'an	48
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	49
BAB III METODE PENELITIAN	52
3.1 Jenis Penelitian.....	52
3.2 Pra Penelitian	52
3.3 Tahapan Penelitian	52
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	53
4.1 Teorema Aoki-Rolewicz	53
4.2 Ruang Grand Lebesgue	84
4.3 Ruang Grand-Kuasi Lebesgue	100
4.4 Integrasi Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue Berdasarkan Surah Al-Mulk: 3-4	121
BAB V PENUTUP	126
5.1 Kesimpulan	126
5.2 Saran.....	126

DAFTAR PUSTAKA	127
RIWAYAT HIDUP	129

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Visualisasi bola satuan di $\mathbb{R}^2$	84
Gambar 4.2 Fungsi step $f(x)$	85
Gambar 4.3 Fungsi $\psi(p)$	86

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{Q}$	: Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$(X, \mathcal{B}, \mu)$	: Ruang ukuran dengan σ -aljabar $\mathcal{B}$ dan ukuran μ
$\mathcal{B}$	: Sigma aljabar pada suatu himpunan
μ	: Ukuran
E	: Himpunan terukur
χ_A	: Fungsi karakteristik dari himpunan A
$m^*(A)$	: Ukuran luar dari himpunan A
$\ \cdot\ $	: Norma atau kuasi-norma. Pada ruang yang berlaku ketaksamaan segitiga biasa, maka $\ \cdot\ $ adalah norma. pada ruang yang berlaku ketaksamaan kuasi-segitiga, maka $\ \cdot\ $ adalah kuasi-norma.
C	: Konstanta kuasi-segitiga
L^p	: Ruang Lebesgue dengan $1 \leq p < \infty$
p	: Parameter pada ruang Lebesgue L^p
$\ f\ _p$	: Norma pada ruang Lebesgue dengan $\ f\ _p = \left(\int_E f ^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$C[a, b]$	: Ruang fungsi kontinu pada interval tutup $[a, b]$
ℓ^p	: Ruang barisan ℓ^p
$G\psi_{\alpha, \beta}$	: Ruang grand Lebesgue dengan $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$
(α, β)	: Interval buka untuk parameter p pada ruang grand Lebesgue dengan $1 \leq \alpha < p < \beta \leq \infty$
$G\psi_{a, b}$	: Ruang grand-kuasi Lebesgue dengan $0 < a < b \leq 1$
(a, b)	: Interval buka untuk parameter p pada ruang grand-kuasi Lebesgue dengan $0 < a < p < b \leq 1$
$\ f\ _{G\psi_{\alpha, \beta}}$	: Norma pada ruang grand Lebesgue dengan $\ f\ _{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \frac{\ f\ _p}{\psi(p)}$
$\ f\ _{G\psi_{a, b}}$	: Kuasi-norma pada ruang grand-kuasi Lebesgue dengan $\ f\ _{G\psi_{a, b}} = \sup_{p \in (a, b)} \frac{\ f\ _p}{\psi(p)}$

- $\psi(p)$: Fungsi kontinu yang bernilai positif pada suatu interval buka
 $\Psi(\alpha, \beta)$: Himpunan semua fungsi $\psi(p)$ yang memenuhi $\psi(p) = \|f\|_p$ untuk suatu f
 Θ : Notasi untuk deret konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|z_k\|_{G\psi_{a,b}}$
 $|||\cdot|||$: Kuasi-norma baru yang ekuivalen dengan kuasi norma awal pada Teorema Aoki-Rolewicz
 $f_n \rightarrow f$: Barisan (f_n) konvergen ke suatu f dalam norma atau kuasi-norma pada X
 $\Lambda^{(k)}(x)$: Turunan ke- k dari fungsi $\Lambda(x)$

ABSTRAK

Zahro, Fatmatuz. 2026. **Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Ruang Grand-Kuasi Lebesgue, Kelengkapan, Ruang Kuasi-Norma, Ruang Kuasi-Banach

Ruang grand-kuasi Lebesgue merupakan perluasan dari ruang grand Lebesgue dengan perbedaan utama pada rentang p , yaitu $[1, \infty]$ pada ruang grand Lebesgue dan $(0,1]$ pada ruang grand-kuasi Lebesgue, sedemikian sehingga ruang grand Lebesgue merupakan ruang Banach dan ruang grand-kuasi Lebesgue hanya merupakan ruang kuasi-Banach karena memenuhi ketaksamaan kuasi-segitiga. Penelitian ini bertujuan membuktikan sifat kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue melalui pendekatan studi literature dengan merujuk pada Formica dkk. (2021) serta literature terkait. Sebelum itu ditunjukkan terlebih dulu ruang tersebut adalah ruang kuasi-norma. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ruang grand-kuasi Lebesgue $G\psi_{a,b}$ dengan $0 < a < b \leq 1$ merupakan ruang kuasi-norma dengan konstanta kuasi-segitiga $C = 2^{\frac{1}{a}-1}$ dan memenuhi kriteria kelengkapan ruang kuasi-norma di mana setiap deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$ akan konvergen ke suatu fungsi di $G\psi_{a,b}$ dan memenuhi ketaksamaan $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\|_{G\psi_{a,b}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}}$, sehingga merupakan ruang kuasi-Banach.

ABSTRACT

Zahro, Fatmatuz. 2026. **Completeness Property of Grand-Quasi Lebesgue Spaces.** Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: Grand-Quasi Lebesgue Space, Completeness, Quasi-Normed Space, Quasi-Banach Space

The grand-quasi Lebesgue space is an extension of the grand Lebesgue space. The main difference lies in the range of p , namely $[1, \infty]$ in the grand Lebesgue space and $(0,1]$ in the grand-quasi Lebesgue space. Consequently, the grand Lebesgue space is a Banach space, while the grand-quasi Lebesgue space is only a quasi-Banach space because it satisfies the quasi-triangle inequality instead of the ordinary triangle inequality. This study aims to prove the completeness property of the grand-quasi Lebesgue space through a literature study approach, referring to Formica et al. (2021) and other related resources. Before proving the completeness, it must first be shown that the space is a quasi-normed space. The results show that the grand-quasi Lebesgue space $G\psi_{a,b}$ with $0 < a < b \leq 1$ is a quasi-normed space with quasi-triangle constant $C = 2^{\frac{1}{a}-1}$. Furthermore, it satisfies the completeness criterion for quasi-normed spaces, i.e., every series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ satisfying $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$ converges to some function in $G\psi_{a,b}$ and satisfies the inequality $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\|_{G\psi_{a,b}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}}$. Therefore, the grand-quasi Lebesgue space is a quasi-Banach space.

مستخلص البحث

الزهرى, فطمة. ٢٠٢٦. **خاصيات الاكتمال فيفضاء غراند-كشبه لوبيغ**. رسالة جامعية. قسم الرياضيات, كليات العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرفان: (١) ديان ماهاراني, الماجستير في العلوم. (٢) الدكتور احمد ناصح الدين, الماجستير في التربية.
الكلمات الأساسية: غراند-كشبه لوبيغ, الإكتمال, فضاء شبه المعياري, فضاء شبه باناخ.

يعتبر فضاء غراند-كشبه لوبيغ امتدادا لفضاء غراند لوبيغ, ويكمن الفرق الرئيسي بينهما في نطاق القيمة p , حيث يكون $p \in [1, \infty]$ في فضاء غراند لوبيغ, و $p \in (0,1]$ في فضاء غراند-كشبه لوبيغ. وبناء على ذلك, فإن فضاء غراند لوبيغ يعد فضاء باناخ, بينما فضاء غراند-كشبه لوبيغ يعد فقط فضاء شبه باناخ لأنه يحقق متباينة شبه المثلث بدلا من متباينة المثلث العادية. هدف هذا البحث خاصية الإكتمال في فضاء غراند-كشبه لوبيغ من خلال منهج الدراسة المكتبية, بالاعتماد على بحث فورميكا وآخرين (٢٠٢١) والمراجع ذات الصلة. وقبل إثبات الإكتمال, يجب أولا إثبات أن هذا الفضاء يعد فضاء معياري. ظهرت النتائج أن فضاء غراند-كشبه لوبيغ $G\psi_{a,b}$ حيث $0 < a < b \leq 1$ يعد فضاء شبه معياري بثابت شبه المثلث $C = 2^{\frac{1}{a}-1}$. كما أنه يحقق معيار الإكتمال لفضاءات شبه المعيارية, أي أن كل متسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ تحقق $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$ تتقارب إلى دالية في $G\psi_{a,b}$ وتحقق المتباينة $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\|_{G\psi_{a,b}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}}$. وبناء على ذلك, فإن فضاء غراند-كشبه لوبيغ يعد فضاء شبه باناخ.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang Lebesgue pertama kali diperkenalkan oleh Frigyes Riesz pada tahun 1910, yang dibangun atas teori integral yang dikembangkan oleh Henri Lebesgue pada tahun 1902. Kemudian ruang Lebesgue berkembang menjadi salah satu ruang fungsi paling fundamental dalam analisis fungsional yang berperan dalam berbagai cabang matematika modern. Didefinisikan $L^p(E)$ untuk $1 \leq p < \infty$ adalah koleksi fungsi-fungsi terukur f pada himpunan terukur Lebesgue E sedemikian sehingga $\int_E |f|^p < \infty$. Ruang Lebesgue merupakan pasangan $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$, di mana $\|\cdot\|_p$ adalah norma yang didefinisikan untuk setiap $f \in L^p(E)$ sebagai

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

(Royden & Fitzpatrick, 2010). Selanjutnya, pada penelitian ini notasi L^p akan digunakan untuk menyatakan ruang Lebesgue.

Barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan juga dipelajari pada ruang Lebesgue seperti yang dijelaskan oleh Royden & Fitzpatrick (2010). Suatu barisan (f_n) pada ruang Lebesgue $L^p, 1 \leq p < \infty$ dikatakan konvergen ke $f \in L^p(E)$ atau $(f_n) \rightarrow f$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk $n > K$, berlaku $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$ atau $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Sedangkan suatu barisan (f_n) pada ruang Lebesgue $L^p, 1 \leq p < \infty$ dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $N \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk $m, n > N$, berlaku $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$ atau $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$. Berdasarkan

teorema Riezs-Fischer, ruang Lebesgue L^p merupakan ruang Banach (Royden & Fitzpatrick, 2010). Sedangkan ruang Banach adalah suatu ruang bernorma yang lengkap, di mana untuk setiap barisan Cauchy pada ruang bernorma tersebut akan konvergen ke suatu elemen di ruang itu (Muscat, 2024).

Sifat kelengkapan menjamin bahwa setiap barisan yang konvergen secara Cauchy di dalam ruang tersebut, akan memiliki limit yang juga merupakan anggota dari ruang yang sama. Konsep keteraturan pada sifat kelengkapan ini merupakan cerminan dari kesempurnaan ciptaan Sang Pencipta. Dunia ini diciptakan dengan hukum dan aturan yang sempurna, teratur, dan konsisten, layaknya sebuah sistem matematika yang lengkap. Setiap fenomena alam, dari pergerakan planet hingga pertumbuhan sel, mengikuti "aturan" yang telah ditetapkan. Keteraturan ini bukanlah suatu kebetulan, melainkan cerminan dari kesempurnaan ciptaan Allah. Sebagaimana firman-Nya dalam surat Al-Mulk ayat 3-4 (Kemenag, 2022) yang berbunyi:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوُّتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ ۖ هَلْ تَرَىٰ
مِن فُطُورٍ ۚ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ۝

Artinya: "(Yaitu) Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian pandanglah sekali lagi, niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan cacat dan ia (penglihatanmu) dalam keadaan payah." (QS. Al-Mulk: 3-4).

Ayat ini mengajak manusia untuk merenungi ciptaan-Nya yang terbebas dari segala bentuk cacat dan kerusakan. Ibnu Katsir dalam tafsirnya mengutip penjelasan As-Suddi bahwa kata futhur dimaknai sebagai "kerusakan" (Katsir, 2004). Penegasan ini menunjukkan bahwa kesempurnaan ciptaan Allah itu bersifat mutlak, tanpa celah kelemahan sedikit pun. Inspirasi dari ayat inilah yang

mendasari ketertarikan peneliti untuk mengkaji sifat kelengkapan secara mendalam, khususnya pada generalisasi dari ruang Lebesgue L^p .

Namun, sifat kelengkapan pada ruang Lebesgue L^p tidak berlaku untuk $0 < p < 1$. Ketika $0 < p < 1$ norma (1) tidak memenuhi sifat ketaksamaan segitiga pada definisi norma. Pada kasus ini Aoki (1942) memperkenalkan konsep kuasi-norma di mana konsep ini melemahkan sifat ketaksamaan segitiga pada norma. Sehingga $L^p(E)$ dengan $0 < p < 1$ bukan merupakan ruang Banach, namun merupakan contoh dari ruang kuasi-Banach (Nekvinda & Peša, 2024). Hal ini sesuai dengan teorema Aoki-Rolewicz, di mana setiap ruang kuasi-norma yang lengkap ekuivalen dengan suatu norma- p untuk $0 < p \leq 1$.

Banyak peneliti yang mengembangkan ruang Lebesgue, salah satu contoh dari pengembangan ruang Lebesgue ini adalah ruang grand Lebesgue. Ruang ini pertama kali diperkenalkan oleh Iwaniec & Sbordone (1992) dalam bentuk umum yang dikenal dengan L^p dan dikembangkan lebih lanjut oleh Fiorenza dkk. (2018). Perbedaan mendasar antara ruang Lebesgue dan ruang grand Lebesgue terletak pada pendekatan terhadap p , di mana pada ruang grand Lebesgue p dilihat dari suatu interval buka (α, β) .

Penelitian mengenai ruang grand Lebesgue juga dilakukan oleh Formica dkk. (2021). Pada penelitiannya ruang grand Lebsgue disimbolkan dengan $G\psi_{\alpha,\beta}$. Selanjutnya, pada penelitian ini notasi tersebut akan digunakan untuk menyatakan ruang grand Lebesgue. Dalam penelitian Formica dkk. (2021) ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha,\beta}$ didefinisikan dengan memisalkan $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar dan μ adalah ukuran yang terdefinisi pada $(Q, \mathcal{B})$ tidak nol dan berhingga dan memisalkan $\psi(p) = \psi_{\alpha,\beta}(p)$ dengan $p \in (\alpha, \beta)$, untuk $1 \leq$

$\alpha < \beta \leq \infty$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka (α, β) sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (\alpha, \beta)} \psi(p) > 0.$$

Ruang Grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ memuat semua fungsi terukur $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq \infty. \quad (2)$$

Seperti halnya ruang Lebesgue, ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ untuk $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ juga merupakan ruang Banach (Ostrovsky & Sirota, 2007). Namun pada kasus $p < 1$, di mana $p \in (\alpha, \beta)$, norma (2) tidak memenuhi sifat ketaksamaan segitiga pada definisi norma sehingga ruang ini bukan Banach melainkan contoh dari ruang kuasi-Banach (Nekvinda & Peša, 2024). Karena hal ini, kemudian dikembangkan ruang grand-kuasi Lebesgue di mana merupakan perluasan dari ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$.

Kajian mengenai ruang ini diperkenalkan oleh Formica dkk. (2021) di mana mengganti batas p pada $G\psi_{\alpha, \beta}$, yaitu $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ dengan $0 < a < b \leq 1$ pada $p \in (a, b)$ dengan menggunakan kuasi-norma. Misalkan $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(Q, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{a, b}(p)$ dengan $p \in (a, b)$ untuk $0 < a < b \leq 1$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka (a, b) sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (a, b)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand-kuasi Lebesgue $G\psi_{a, b}$ memuat semua fungsi terukur $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 0 < a < b \leq 1.$$

Walaupun konsep ruang grand-kuasi Lebesgue telah diperkenalkan, penjelasan rinci mengenai sifat kelengkapan ruang ini masih terbatas. Dengan demikian, pada penelitian ini penulis akan membuktikan rinci sifat kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang di atas, maka pada penelitian ini akan dibahas bagaimana pembuktian sifat kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan paparan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai bahan untuk mengembangkan bahasan tentang ruang grand-kuasi Lebesgue yang lengkap.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah hanya menjelaskan kelengkapan dari ruang grand-kuasi Lebesgue dengan membuktikan teorema yang terkait.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Lebesgue

Didefinisikan $L^p(E)$ untuk $1 \leq p < \infty$ adalah koleksi fungsi-fungsi terukur f pada himpunan terukur Lebesgue E sedemikian sehingga

$$\int_E |f|^p < \infty$$

Ruang Lebesgue merupakan pasangan $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$, di mana $\|\cdot\|_p$ adalah norma yang didefinisikan untuk setiap $f \in L^p(E)$ sebagai

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

2. Ruang Grand Lebesgue

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{\alpha, \beta}(p)$ dengan $p \in (\alpha, \beta)$ untuk $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (\alpha, \beta)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq \infty.$$

3. Ruang Grand-Kuasi Lebesgue

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{a, b}(p)$ dengan $p \in (a, b)$, untuk $0 < a < b \leq 1$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (a, b)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand-kuasi Lebesgue $G\psi_{a, b}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 0 < a < b \leq 1.$$

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini, akan dikaji mengenai teori-teori pendukung yang terkait penelitian ini sebagai acuan dalam melakukan penelitian.

2.1.1 Ruang Ukuran

Sebelum membahas tentang ruang grand-kuasi Lebesgue, akan dibahas tentang ruang ukuran, karena ruang grand-kuasi Lebesgue dibangun atas dasar ruang ukuran.

Definisi 2.1 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Diberikan sebuah himpunan X , koleksi $\mathcal{B}$ yang berisi himpunan-himpunan bagian dari X disebut sebagai σ -aljabar pada X apabila memenuhi

1. Himpunan kosong, yaitu $\emptyset$ ada di $\mathcal{B}$.
2. Untuk setiap himpunan $E \in \mathcal{B}$, komplemennya $E^c := X \setminus E$ juga merupakan anggota $\mathcal{B}$.
3. Untuk setiap koleksi terhitung $\{E_1, E_2, \dots\}$ di mana setiap E_n untuk $n = 1, 2, \dots$, gabungan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ juga merupakan anggota $\mathcal{B}$.

Contoh 2.2

Misalkan $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Ambil $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, yaitu himpunan kuasa dari $\mathbb{N}$ yang memuat semua himpunan bagian dari $\mathbb{N}$.

1. Himpunan kosong $\emptyset \in \mathcal{B}$, karena $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$.
2. Ambil sebarang $E \in \mathcal{B}$. Pilih

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\},$$

maka komplemennya

$$\begin{aligned} E^c &= \mathbb{N} \setminus \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, \dots\}. \end{aligned}$$

Karena $\{1, 3, 5, 7, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$, maka $E^c \in \mathcal{B}$.

3. Pilih $E_n = \{n + 1, n + 2, \dots\}$ dengan $n = 1, 2, \dots$. Perhatikan bahwa

$$E_1 = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$E_2 = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$E_3 = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$$

dan seterusnya sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \\ &= \{2, 3, 4, 5, \dots\} \cup \{3, 4, 5, 6, \dots\} \cup \{4, 5, 6, 7, \dots\} \cup \dots \\ &= \{2, 3, 4, 5, \dots\}. \end{aligned}$$

Karena $\{2, 3, 4, 5, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$, maka $\{2, 3, 4, 5, \dots\} \in \mathcal{B}$.

Berdasarkan Definisi 2.1, terlihat $\mathcal{B}$ merupakan σ -aljabar.

Definisi 2.3 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Didefinisikan bilangan real diperluas adalah $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sedemikian sehingga setiap himpunan bilangan real memiliki supremum dan infimum yang merupakan anggota dari bilangan real diperluas.

Contoh 2.4

Ambil $A = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Nilai $\sup A$ tidak terdefinisi di $\mathbb{R}$. Namun, berdasarkan Definisi 2.3, $\sup A$ terdefinisi di $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yaitu

$$\sup A = +\infty.$$

Kemudian ambil $B = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Nilai $\inf B$ tidak terdefinisi di $\mathbb{R}$. Namun, berdasarkan Definisi 2.3, $\inf A$ terdefinisi di $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yaitu

$$\inf B = -\infty.$$

Definisi 2.5 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Sebuah ruang terukur didefinisikan sebagai pasangan $(X, \mathcal{B})$, dengan X adalah sebuah himpunan dan $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar pada X . Sebuah himpunan $E \subseteq X$ dikatakan terukur apabila $E \in \mathcal{B}$.

Contoh 2.6

Ambil $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan definisikan $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$.

Perhatikan bahwa

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$
2. $\{1, 2\}^c = \{3, 4\} \in \mathcal{B}$, dan $\{3, 4\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{B}$, dan $\emptyset^c = X \in \mathcal{B}$.
3. $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = X \in \mathcal{B}$.

Terlihat $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar pada X , sehingga berdasarkan Definisi 2.5, $(X, \mathcal{B})$ merupakan ruang terukur dan himpunan $\emptyset$, $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, X adalah himpunan terukur.

Definisi 2.7 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Diberikan sebuah ruang terukur $(X, \mathcal{B})$. Suatu ukuran μ adalah fungsi tak negatif dan bernilai real diperluas, $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ yang memenuhi aksioma berikut.

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Untuk setiap koleksi terhitung $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ yang saling disjoint, berlaku

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Triplet $(X, \mathcal{B}, \mu)$, di mana $(X, \mathcal{B})$ adalah ruang terukur dan μ adalah ukuran yang terdefinisi pada $\mathcal{B}$ disebut sebagai ruang ukuran.

Contoh 2.8

Misalkan $(X, \mathcal{B})$ adalah ruang terukur dengan $X = [1, 5]$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, [1, 2), [2, 5], [1, 5]\}$. Didefinisikan fungsi $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ dengan $\mu(\emptyset) = 0$ dan $\mu(I)$ adalah panjang interval I . Buktikan bahwa fungsi $(X, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran.

Bukti.

Diketahui $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu([1, 2)) = 1$, $\mu([2, 5]) = 3$, dan $\mu([1, 5]) = 4$. Jelas terlihat bahwa μ memenuhi aksioma 1 pada Definisi 2.7.

Misalkan $E_1 = \emptyset$, $E_2 = [1, 2)$, $E_3 = [2, 5]$, dan $E_4 = [1, 5]$. Pasangan himpunan yang saling lepas dalam $\mathcal{B}$ adalah E_1 dengan E_2, E_3, E_4 dan E_2 dengan E_3 . Perhatikan bahwa,

1. Untuk A_1 dengan E_2, E_3, E_4

$$\begin{aligned}\mu(\emptyset \cup E_1) &= \mu(E_1) \\ &= 0 + \mu(E_1) \\ &= \mu(\emptyset) + \mu(E_1)\end{aligned}$$

Berlaku pula untuk E_2, E_3, E_4 .

2. Untuk E_2 dengan E_3

$$\begin{aligned}\mu(E_2 \cup E_3) &= \mu(E_4) \\ &= 4\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\mu(E_2) + \mu(E_3) &= 1 + 3 \\ &= 4\end{aligned}$$

Terlihat $\mu(E_2 \cup E_3) = \mu(E_2) + \mu(E_3)$.

Dengan demikian, aksioma 2 pada Definisi 2.7 terpenuhi untuk semua kemungkinan barisan himpunan saling lepas dalam $\mathcal{B}$. Sehingga terbukti bahwa $(X, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran.

2.1.2 Ruang Lebesgue

Pada subbab ini akan dibahas ruang Lebesgue L^p . Sebelum memberikan definisi ruang Lebesgue, terlebih dahulu diperkenalkan beberapa konsep yang menjadi dasar terbentuknya ruang Lebesgue, yaitu ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur, fungsi sederhana, dan integral Lebesgue.

Definisi 2.9 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan $A \subset \mathbb{R}$. Ukuran luar Lebesgue dari A dinotasikan dengan $m^*(A)$ didefinisikan sebagai

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ interval buka} \right\},$$

di mana $\ell(I_k)$ menyatakan panjang interval I_k .

Contoh 2.10

Ambil $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ yang merupakan himpunan bilangan rasional antara 0 dan 1 dan terlihat bahwa $A \subset \mathbb{R}$. Kemudian tulis A sebagai

$$A = \{r_k \mid r_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1], k = 1, 2, \dots\}.$$

Untuk setiap bilangan rasional r_k , definisikan

$$I_k = \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right),$$

untuk sebarang $\varepsilon > 0$. Terlihat bahwa untuk setiap k , r_k berada pada interval I_k , sehingga $r_k \in I_k$. Hal ini berarti

$$\{r_1\} \subset I_1; \quad r_2 \subset I_2; \quad r_3 \subset I_3; \dots,$$

sedemikian sehingga

$$\{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \{r_3\} \cup \dots \subseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$$

$$\{r_1, r_2, r_3, \dots\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \ell(I_k) &= \left(r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) - \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2^k}, \end{aligned}$$

maka nilai deret

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \varepsilon \cdot 1 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \right\} \\ &= \inf \{\varepsilon\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maka ukuran luar dari $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ adalah nol.

Definisi 2.11 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu himpunan $E \subset \mathbb{R}$ dikatakan terukur Lebesgue, apabila untuk setiap himpunan $A \subset \mathbb{R}$ berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Contoh 2.12

Ambil $E = [2,5]$ dan $A = [1,6]$. Akan ditunjukkan $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Perhatikan bahwa

1. Nilai $m^*(A)$

$$m^*(A) = m^*([1,6]) = 5.$$

2. Nilai $m^*(A \cap E)$

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E) &= m^*([1,6] \cap [2,5]) \\ &= m^*([2,5]) \\ &= 3. \end{aligned}$$

3. Nilai $m^*(A \cap E^c)$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap E^c &= [1,6] \cap ([2,5])^c \\ &= [1,6] \cap ((-\infty, 2) \cup (5, +\infty)) \\ &= [1,2) \cup (5,6], \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E^c) &= m^*([1,2) \cup (5,6]) \\ &= m^*([1,2)) + m^*((5,6]) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa

$$\begin{aligned}
 m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) &= 3 + 2 \\
 &= 5 \\
 &= m^*(A).
 \end{aligned}$$

Definisi 2.13 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu fungsi $f: E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ dikatakan terukur Lebesgue, apabila E terukur Lebesgue dan memenuhi salah satu pernyataan ekuivalen berikut.

1. Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in E | f(x) > c\}$ terukur Lebesgue.
2. Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in E | f(x) \geq c\}$ terukur Lebesgue.
3. Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in E | f(x) < c\}$ terukur Lebesgue.
4. Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in E | f(x) \leq c\}$ terukur Lebesgue.
5. Untuk setiap $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, himpunan $\{x \in E | f(x) = c\}$ terukur Lebesgue.

Contoh 2.14

Misalkan $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $E = [-4, 4]$ dan

$$f(x) = x^2 - 4.$$

Karena E adalah interval, maka E terukur (Royden & Fitzpatrick, 2010).

Kemudian ambil $c = 5$, sedemikian sehingga

$$x^2 - 4 < 5$$

$$x^2 < 9$$

$$|x| < 3.$$

Karena $\{x \in [-4, 4] | |x| < 3\} = (-3, 3)$ adalah himpunan terukur, maka fungsi f terukur Lebesgue.

Definisi 2.15 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan A adalah sebarang himpunan, maka fungsi karakteristik dari A dinotasikan dengan χ_A didefinisikan sebagai

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Dengan demikian χ_A dapat disebut sebagai fungsi terukur ketika A adalah himpunan terukur. Selanjutnya, bentuk kombinasi linear dari fungsi-fungsi karakteristik, yaitu fungsi sederhana akan berperan penting dalam pembahasan integral Lebesgue.

Contoh 2.16

Ambil $A = [2,5]$, fungsi karakteristik dari A adalah

$$\chi_{[2,5]} = \begin{cases} 1, & 2 \leq x \leq 5 \\ 0, & x < 2 \text{ atau } x > 5 \end{cases}$$

Karena A berupa interval tutup, maka A terukur. Kemudian berdasarkan Definisi 2.15, $\chi_{[2,5]}$ merupakan fungsi terukur.

Definisi 2.17 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu fungsi $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ untuk suatu himpunan terukur berhingga E , disebut sebagai fungsi sederhana apabila φ terukur dan hanya mengambil nilai bilangan berhingga. Jika φ mengambil nilai berhingga $c_1, \dots, c_n$, maka

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k},$$

di mana χ_{E_k} adalah fungsi karakteristik dari E_k dengan $E_k = \{x \in E \mid \varphi(x) = c_k\}$.

Penulisan φ sebagai kombinasi linier dari fungsi karakteristik ini disebut sebagai *canonical representation* dari fungsi sederhana φ .

Contoh 2.18

Ambil E berhingga, yaitu $E = [0,4] \subset \mathbb{R}$. Misalkan $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = -1$.

Kemudian definisikan $E_k = \{x \in E | \varphi(x) = c_k\}$

$$E_1 = [0,1], \quad E_2 = (1,3], \quad E_3 = (3,4],$$

sehingga

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \in E_1 \\ 5, & x \in E_2 \\ -1, & x \in E_3 \end{cases}$$

Fungsi φ dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linier dari fungsi-fungsi karakteristik

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \chi_{E_1} + c_2 \chi_{E_2} + c_3 \chi_{E_3} \\ &= 2\chi_{[0,1]} + 5\chi_{(1,3]} + (-1)\chi_{(3,4]}. \end{aligned}$$

Karena E_1, E_2, E_3 terukur dan φ berupa fungsi konstan, maka φ terukur.

Kemudian berdasarkan Definisi 2.17, fungsi φ merupakan fungsi sederhana.

Definisi 2.19 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Untuk suatu fungsi sederhana φ yang terdefinisi pada himpunan terukur berhingga E , didefinisikan integral φ atas E sebagai

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^n c_k \cdot m(E_k)$$

Di mana c_k adalah nilai berhingga yang diambil fungsi sederhana φ pada himpunan E_k dan $m(E_k)$ adalah ukuran Lebesgue dari himpunan E_k dengan $E_k = \{x \in E | \varphi(x) = c_k\}$.

Contoh 2.20

Ambil $E = [0,6]$. Misalkan $c_1 = 2, c_2 = 4, c_3 = -1$.

Definisikan $E_k = \{x \in E | \varphi(x) = c_k\}$ dengan

$$E_1 = [0,2], \quad E_2 = (2,5], \quad E_3 = (5,6],$$

sehingga

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \in E_1 \\ 4, & x \in E_2 \\ -1, & x \in E_3 \end{cases}$$

Kemudian tulis φ sebagai kombinasi linier berdasarkan Definisi 2.17.

$$\varphi = 2\chi_{[0,2]} + 4\chi_{(2,5]} + (-1)\chi_{(5,6]}.$$

Hitung $\int_E \varphi$ berdasarkan Definisi 2.19.

$$\begin{aligned} \int_{[0,6]} \varphi &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot m(E_k) \\ &= 2 \cdot m([0,2]) + 4 \cdot m((2,5]) + (-1)m((5,6]) \\ &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Pada Definisi 2.19 telah didefinisikan integral atas E dari fungsi sederhana φ sebagai kombinasi linear. Pada Definisi 2.21 dan 2.22 akan didefinisikan nilai integral atas E dari sebarang fungsi terukur f yang didekati oleh nilai integral atas E dari fungsi-fungsi sederhana φ .

Definisi 2.21 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas dengan E adalah himpunan terukur berhingga.

Didefinisikan integral Lebesgue atas dan bawah dari f atas E sebagai

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \mid \varphi \text{ fungsi sederhana dan } \varphi \leq f \text{ pada } E, \right\}$$

dan

$$\inf \left\{ \int_E \varphi \mid \varphi \text{ fungsi sederhana dan } f \leq \varphi \text{ pada } E. \right\}$$

Karena f terbatas, maka nilai integral Lebesgue atas dan bawahnya berhingga dan nilai integral Lebesgue atas selalu setidaknya sama dengan integral Lebesgue bawah.

Definisi 2.22 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu fungsi terbatas f dengan domain himpunan terukur berhingga E dikatakan terintegralkan Lebesgue atas E , apabila integral Lebesgue atas dan bawahnya sama. Umumnya nilai ini disebut sebagai integral Lebesgue f atas E atau $\int_E f$.

Definisi 2.23 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu ruang linier $\mathcal{F}$ adalah koleksi fungsi-fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dengan E merupakan himpunan terukur berhingga. Dua fungsi $f, g \in \mathcal{F}$ dikatakan ekuivalen ($f \cong g$) apabila $f(x) = g(x)$ untuk hampir semua $x \in E$. Hubungan ini merupakan relasi ekuivalensi, sehingga $\mathcal{F}$ terbagi menjadi kelas-kelas ekuivansi yang dinotasikan dengan $\mathcal{F}/\cong$. Berikut akan didefinisikan $\{L^p(E)\}_{1 \leq p \leq \infty}$ yang merupakan subruang dari $\mathcal{F}/\cong$.

Definisi 2.24 (Khanfer, 2023; Royden & Fitzpatrick, 2010)

Ruang Lebesgue $L^p(E)$ dengan $1 \leq p < \infty$ adalah koleksi fungsi terukur f pada himpunan terukur E sedemikian sehingga

$$\int_E |f|^p < \infty.$$

Untuk setiap $f \in L^p(E)$ di mana $1 \leq p < \infty$, berlaku norma

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan Definisi 2.23, ruang Lebesgue L^p merupakan ruang linier yang dilengkapi dengan norma $\|f\|_p$. Sehingga ruang Lebesgue L^p merupakan salah satu contoh ruang bernorma linier (Royden & Fitzpatrick, 2010).

Contoh 2.25

Ambil $E = [0,1] \cup [2,4]$, μ adalah ukuran Lebesgue pada E , dan $p = \frac{3}{2}$.

Definisikan koleksi fungsi *step* sebagai

$$S = \{f_{a,b}(x) = a\chi_{[0,1]}(x) + b\chi_{[2,4]}(x) | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Hal ini berarti untuk setiap $f_{a,b} \in S$,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a, & x \in [0,1] \\ b, & x \in [2,4] \end{cases}.$$

Karena $[0,1]$ dan $[2,4]$ terukur, maka S merupakan koleksi fungsi terukur.

Perhatikan bahwa untuk $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left(\int_E |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\int_{[0,1]} |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu + \int_{[2,4]} |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\int_{[0,1]} |a|^{\frac{3}{2}} d\mu + \int_{[2,4]} |b|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(|a|^{\frac{3}{2}} \cdot \mu([0,1]) + |b|^{\frac{3}{2}} \cdot \mu([2,4]) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(|a|^{\frac{3}{2}} + 2|b|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Karena $a, b \in \mathbb{R}$, maka $\|f_{a,b}\|_{\frac{3}{2}} < \infty$ sehingga $f_{a,b}(x) \in L^{\frac{3}{2}}(E)$. Jadi koleksi

fungsi *step* $S \subset L^{\frac{3}{2}}(E)$. Sebagai contoh untuk $a = -2$ dan $b = -3$, maka

$$\|f_{a,b}(x)\|_{\frac{3}{2}} = \left(\int_E |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{[0,1]} |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu + \int_{[2,4]} |f_{a,b}(x)|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(\int_{[0,1]} |-2|^{\frac{3}{2}} d\mu + \int_{[2,4]} |-3|^{\frac{3}{2}} d\mu \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(|-2|^{\frac{3}{2}} \cdot \mu([0,1]) + |-3|^{\frac{3}{2}} \cdot \mu([2,4]) \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(|-2|^{\frac{3}{2}} + 2|-3|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(2^{\frac{3}{2}} + 2(3)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= (\sqrt{8} + 2\sqrt{27})^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

2.1.3 Ruang Lebesgue L^p Lengkap

Definisi 2.26 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu barisan (f_n) pada ruang linier X yang dilengkapi norma $\|\cdot\|$ dikatakan konvergen ke f di X , apabila memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Dapat juga ditulis sebagai

$$(f_n) \rightarrow f \text{ di } X \text{ atau } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ di } X.$$

Contoh 2.27

Misalkan $X = C[0,1]$ adalah ruang fungsi kontinu pada $[0,1]$ dengan norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Definisikan (f_n) adalah barisan fungsi

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x, n = 1, 2, \dots$$

dan $f(x) = 1$. Terlihat bahwa $f_n \in C([0,1]), \forall n$ karena f_n merupakan fungsi kontinu dan $f(x) = 1 \in C([0,1])$, karena fungsi konstan kontinu. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \\ &= 1^x \\ &= 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Untuk setiap n , fungsi f_n merupakan fungsi naik terhadap x karena basisnya $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$ sehingga supremum dari $f_n(x)$ tercapai saat $x = 1$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \left(x + \frac{1}{n}\right)^x - 1 \right| \\ &= \left(x + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Kemudian diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, maka berdasarkan Definisi 2.26 barisan fungsi (f_n) konvergen ke $f \in C([0,1])$.

Teorema 2.28 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Sebarang barisan (f_n) dan fungsi f di $L^p(E)$ dengan $1 \leq p < \infty$, $(f_n) \rightarrow f$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = 0.$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.24, untuk $f \in L^p(E)$ norma yang berlaku pada $L^p(E)$ adalah

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

($\Rightarrow$) Asumsikan $(f_n) \rightarrow f$, di mana berdasarkan Definisi 2.26 dan norma yang berlaku di L^p , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p = 0^p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = 0$$

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = 0$.

($\Leftarrow$) Asumsikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = 0$. Karena integral bernilai non-negatif maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p = 0$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^p \right]^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

Jadi $(f_n) \rightarrow f$. Karena dua arah telah terbukti, maka Teorema 2.28 terbukti benar.

Contoh 2.29

Ambil $E = [0,1]$ dan $p = 2$. Definisikan barisan fungsi $f_n(x) = x^n$ dan $f(x) = 0$ untuk $x \in [0,1]$. Perhatikan bahwa untuk $x \in [0,1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = f(x).$$

Kemudian

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x^n - 0|^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f|^2 = 0$, maka berdasarkan Teorema 2.28 $(f_n) \rightarrow f \in L^2([0,1])$.

Definisi 2.30 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Suatu barisan (f_n) pada ruang linier X yang dilengkapi norma $\|\cdot\|$ dikatakan Cauchy di X , apabila memenuhi untuk suatu $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon, \forall m, n \geq N.$$

Suatu ruang bernorma linier X dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu fungsi di X . Suatu ruang norma linier yang lengkap disebut sebagai ruang Banach.

Contoh 2.31

Ambil $X = C[0,1]$ adalah ruang fungsi kontinu pada $[0,1]$ dengan norma $\|f\| =$

$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Definisikan barisan fungsi

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Karena f_n kontinu untuk setiap n , maka $f_n \in C([0,1])$. Untuk $n, m \geq N \in \mathbb{N}$,

asumsikan $n \geq m$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - \frac{x^m}{m} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(\left| \frac{x^n}{n} \right| + \left| \frac{x^m}{m} \right| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} \right| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^m}{m} \right| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} + \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^m}{m}. \end{aligned}$$

Karena $x \in [0,1]$, maka $x^n \leq 1$ dan $x^m \leq 1$, sehingga supremum tercapai saat

$x = 1$. Sehingga untuk $n \geq m \geq N$

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &\leq \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{n} + \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^m}{m} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m} \leq \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Pilih $N > \frac{2}{\varepsilon}$, sehingga $\|f_n - f_m\| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$. Berdasarkan Definisi 2.30, (f_n) adalah

barisan Cauchy di $C([0,1])$.

Proposisi 2.32 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan X adalah suatu ruang bernorma linier. Maka setiap barisan konvergen di X adalah Cauchy. Lebih lanjut, suatu barisan Cauchy di X konvergen apabila memiliki subbarisan yang konvergen.

Bukti.

Misalkan $(f_n) \rightarrow f$ dan $(f_m) \rightarrow f$ di X , maka sesuai Definisi 2.26 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ dan $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0$. Pilih $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, sedemikian sehingga

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Berdasarkan pada ketaksamaan segitiga norma, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \|(f_n - f) + (f - f_m)\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa (f_n) Cauchy.

Misalkan (f_n) Cauchy dan memiliki subbarisan (f_{n_k}) yang konvergen ke f di X , maka sesuai Definisi 2.26 dan 2.30 untuk $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan pilih k sedemikian sehingga untuk $n, m, n_k > N \in \mathbb{N}$

$$\|f_m - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Berdasarkan pada ketaksamaan segitiga norma, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \|(f_n - f_{n_k}) + (f_{n_k} - f)\| \\ &\leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| \end{aligned}$$

Karena (f_{n_k}) adalah subbarisan Cauchy dari (f_n) , maka

$$\|f_n - f\| = \|(f_n - f_{n_k}) + (f_{n_k} - f)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $(f_n) \rightarrow f$.

Contoh 2.33

Ambil $X = C[0,1]$ adalah ruang fungsi kontinu pada $[0,1]$ dengan norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Definisikan barisan fungsi

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

dan $f(x) = 0$.

Karena f_n kontinu untuk setiap n , maka $f_n \in C([0,1])$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\sin(nx)}{n} - 0 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,1]} \frac{|\sin(nx)|}{n}.
\end{aligned}$$

Karena $|\sin(nx)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \frac{|\sin(nx)|}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.26, $(f_n) \rightarrow f \in C([0,1])$. Kemudian karena $(f_n) \rightarrow f$,

maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ berlaku

$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Untuk $m, n \geq N$ perhatikan bahwa

$$\|f_n - f_m\| = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \\
&= \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa konvergennya (f_n) menjamin (f_n) Cauchy.

Definisi 2.34 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan X adalah suatu ruang linier yang dilengkapi norma $\|\cdot\|$. Suatu barisan (f_n) di X dikatakan *rapidly* Cauchy, apabila terdapat deret konvergen dari bilangan-bilangan positif $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_k^2 \text{ untuk setiap } k.$$

Contoh 2.35

Ambil $X = \mathbb{R}^2$ dengan $\forall x \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)$ dan norma

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Definisikan barisan $(f_k) \in \mathbb{R}^2$ sebagai

$$f_k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f_{k+1} - f_k &= \left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right) \\
&= \left(\frac{1-2}{2^{k+1}}, \frac{1-2}{2^{k+1}} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{2^{k+1}}, -\frac{1}{2^{k+1}} \right),
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\|f_{k+1} - f_k\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{(2^{k+1})^2} + \frac{1}{(2^{k+1})^2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{(2^{k+1})^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{k/2}}$, sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k/2}}\right) < \infty.$$

Kemudian

$$\varepsilon_k^2 = \left(\frac{1}{2^{k/2}}\right)^2 = \frac{1}{2^k}.$$

Karena

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2^{k+1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \\
&\leq \frac{1}{2^k},
\end{aligned}$$

maka

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_k^2.$$

Berdasarkan Definisi 2.34 (f_k) *rapidly* Cauchy.

Proposisi 2.36 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan X adalah suatu ruang bernorma linier. Maka setiap barisan *rapidly* Cauchy di X adalah Cauchy. Lebih lanjut, setiap barisan Cauchy memiliki subbarisan *rapidly* Cauchy.

Bukti.

Misalkan (f_n) adalah barisan *rapidly* Cauchy di X , maka sesuai dengan Definisi 2.34 ada deret konvergen dari bilangan-bilangan positif $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_k^2 \text{ untuk setiap } k.$$

Berdasarkan pada ketaksamaan segitiga norma dan Definisi 2.34, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_{n+k} - f_n\| &= \|(f_{n+k} - f_{n+k-1}) + (f_{n+k-1} - f_{n+k-2}) + \cdots + (f_{n+1} - f_n)\| \\ &\leq \|f_{n+k} - f_{n+k-1}\| + \|f_{n+k-1} - f_{n+k-2}\| + \cdots + \|f_{n+1} - f_n\| \\ &\leq \varepsilon_{n+k-1}^2 + \varepsilon_{n+k-2}^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \\ &= \sum_{j=n}^{n+k-1} \varepsilon_j^2 \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \varepsilon_j^2. \end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ konvergen, maka deret $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^2$ juga konvergen. Sehingga (f_n) Cauchy. Kemudian akan ditunjukkan (f_n) memiliki subbarisan (f_{n_k}) yang *rapidly* Cauchy dengan induksi matematika. Akan dibuktikan dapat dipilih barisan indeks (n_k) naik untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Untuk $k = 1$, dapat dipilih $n_1 = 1$, sedemikian sehingga

$$\|f_2 - f_1\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Asumsikan telah terpilih n_k . Karena (f_n) Cauchy, untuk $\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ada N_k sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N_k$ berlaku

$$\|f_n - f_m\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Pilih $n_{k+1} > \max\{n_k, N_k\}$, sehingga diperoleh

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Pilih $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$. Perhatikan bahwa $\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = \varepsilon_k^2$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ merupakan deret geometri dengan rasio $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, sehingga deret

ini konvergen. Karena ada deret $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ konvergen, sehingga

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k = \varepsilon_k^2,$$

Maka (f_{n_k}) merupakan barisan *rapidly* Cauchy.

Contoh 2.37

Ambil $X = C([0,1])$ dengan norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Definisikan barisan fungsi

$$f_k(x) = \frac{x}{2^k}.$$

Karena f_k kontinu, maka $f_k \in C([0,1])$. Perhatikan bahwa

$$f_{k+1} - f_k = \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{x}{2^k} = -\frac{x}{2^{k+1}},$$

sehingga

$$\begin{aligned}\|f_{k+1} - f_k\| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| -\frac{x}{2^{k+1}} \right| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{k/2}}$, sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k/2}} \right) < \infty.$$

Kemudian

$$\varepsilon_k^2 = \left(\frac{1}{2^{k/2}} \right)^2 = \frac{1}{2^k}.$$

Karena $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}$, maka

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \varepsilon_k^2.$$

Berdasarkan Definisi 2.34, (f_k) *rapidly* Cauchy. Kemudian perhatikan bahwa

untuk $n, k \geq N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|f_{n+k} - f_n\| &= \|(f_{n+k} - f_{n+k-1}) + (f_{n+k-1} - f_{n+k-2}) + \cdots + (f_{n+1} - f_n)\| \\ &\leq \|f_{n+k} - f_{n+k-1}\| + \|f_{n+k-1} - f_{n+k-2}\| + \cdots + \|f_{n+1} - f_n\| \\ &\leq \varepsilon_{n+k-1}^2 + \varepsilon_{n+k-2}^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \\ &= \sum_{j=n}^{n+k-1} \varepsilon_j^2 \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \varepsilon_j^2.\end{aligned}$$

Karena deret $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ konvergen, maka deret $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^2$ juga konvergen. Sehingga (f_k) Cauchy.

Definisi 2.38 (Rudin, 1976)

Misalkan (f_n) adalah suatu barisan fungsi yang terdefinisi pada E . Barisan (f_n) dikatakan konvergen titik demi titik (*pointwise*) apabila untuk setiap $x \in E$ yang tetap, $(f_n) \rightarrow f$ atau dapat ditulis dengan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f \quad \text{untuk setiap } x \in E.$$

Definisi 2.39 (Rudin, 1987)

Misalkan (X, B, μ) adalah ruang ukuran dan $E \in B$. Suatu sifat P yang mungkin dimiliki atau tidak oleh suatu titik $x \in E$ dikatakan berlaku hampir di mana-mana (*almost everywhere*) pada E apabila terdapat himpunan $N \in B$ dengan $N \subset E$ dan $\mu(N) = 0$, sedemikian sehingga sifat P berlaku pada setiap titik di $E \setminus N$.

Konsep ini bergantung pada ukuran μ . Jika (f_n) adalah barisan fungsi terukur pada X , maka (f_n) dikatakan konvergen hampir di mana-mana ke suatu fungsi f apabila sifat P , yaitu " (f_n) konvergen ke f ", berlaku hampir di mana-mana pada X .

Sifat 2.40 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan E adalah himpunan terukur dan $1 \leq p < \infty$. Maka setiap barisan *rapidly* Cauchy di $L^p(E)$ akan konvergen dalam norma $L^p(E)$ dan konvergen *pointwise almost everywhere* pada E ke suatu fungsi di $L^p(E)$.

Teorema 2.41 (Riesz-Fischer) (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan E adalah himpunan terukur dan $1 \leq p \leq \infty$, maka $L^p(E)$ adalah ruang Banach. Jika $(f_n) \rightarrow f$ pada $L^p(E)$, maka terdapat subbarisan (f_{n_k}) dari (f_n) yang konvergen *pointwise almost everywhere* ke f pada E .

Bukti.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $L^p(E)$. Berdasarkan proposisi 2.28, (f_n) memiliki subbarisan *rapidly* Cauchy. Misalkan subbarisan *rapidly* Cauchy tersebut adalah (f_{n_k}) . Maka dari Sifat 2.41, barisan (f_{n_k}) konvergen dalam norma $L^p(E)$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0.$$

Selanjutnya barisan (f_{n_k}) adalah barisan Cauchy berdasarkan proposisi 2.28.

Karena setiap barisan Cauchy konvergen ke f , maka $L^p(E)$ adalah ruang bernorma yang lengkap dan dapat disebut sebagai ruang Banach.

Diketahui $(f_n) \rightarrow f$ pada $L^p(E)$. Berdasarkan proposisi 2.25, barisan (f_n) adalah Cauchy, akibatnya barisan (f_n) memiliki subbarisan *rapidly* Cauchy seperti yang dinyatakan pada proposisi 2.28. Sehingga menurut Sifat 2.41, barisan (f_n) konvergen *pointwise almost everywhere* pada E ke suatu f di $L^p(E)$.

Contoh 2.42

Ambil $E = [0,1]$ dan definisikan barisan fungsi

$$f_n = \frac{x^2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ambil $p = 3$, akan ditunjukkan $f_n \in L^3([0,1])$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_E |f_n|^p &= \int_0^1 \left| \frac{x^2}{n} \right|^3 dx \\ &= \frac{1}{n^3} \int_0^1 x^6 dx \\ &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{7n^3} < \infty,$$

sehingga $f_n \in L^3([0,1])$.

Kemudian perhatikan bahwa untuk $n, m \geq N \in \mathbb{N}$ asumsikan $n \geq m$

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_3 &= \left(\int_0^1 \left| \frac{x^2}{n} - \frac{x^2}{m} \right|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\int_0^1 x^6 \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^3 \int_0^1 x^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \left(\int_0^1 x^6 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \left(\frac{1}{7} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \frac{1}{7^{1/3}}. \end{aligned}$$

Karena $n \geq m$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$, sehingga

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_3 &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \frac{1}{7^{1/3}} \\ &= \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \frac{1}{7^{1/3}} \\ &\leq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{7^{1/3}} \\ &\leq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{7^{1/3}} \\ &= \frac{1}{N 7^{1/3}}. \end{aligned}$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N > 1/(\varepsilon 7^{1/3})$, maka $\forall n, m \geq N$ berlaku

$$\|f_n - f_m\|_3 \leq \frac{1}{N 7^{1/3}} < \varepsilon$$

yang berdasarkan Definisi 2.30 (f_n) Cauchy di $L^3([0,1])$. Kemudian perhatikan bahwa untuk $f(x) = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \left| \frac{x^2}{n} - 0 \right|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n 7^{1/3}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.26 (f_n) konvergen ke $f(x) = 0$. Lalu akan ditunjukkan $f(x) = 0 \in L^3([0,1])$.

$$\left(\int_0^1 |0|^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} = 0 < \infty.$$

Karena $f(x) = 0 \in L^3([0,1])$, maka $L^3([0,1])$ lengkap yang sesuai dengan Teorema 2.41 yang menyatakan $L^p(E)$ lengkap untuk $p \geq 1$ dan E terukur.

Ruang Lebesgue $L^p(E)$ untuk $p \geq 1$ dan E terukur merupakan contoh dari ruang bernorma yang lengkap sehingga dapat disebut sebagai ruang Banach. Berikut akan diberikan contoh ruang bernorma yang lengkap lainnya.

Contoh 2.43

Ambil $X = C([0,1])$ dengan norma

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Definisikan barisan fungsi

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Karena f_n kontinu, maka $f_n \in C([0,1])$. Perhatikan bahwa untuk $m, n \geq N \in \mathbb{N}$ asumsikan $n \geq m$

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-mx}}{m} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(\left| \frac{e^{-nx}}{n} \right| + \left| \frac{e^{-mx}}{m} \right| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-nx}}{n} \right| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-mx}}{m} \right|.\end{aligned}$$

Karena f_n turun terhadap x , maka supremum tercapai saat $x = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-nx}}{n} \right| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-mx}}{m} \right| \\ &= \frac{e^0}{n} + \frac{e^0}{m} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{2}{m} \\ &\leq \frac{2}{N}\end{aligned}$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N > \frac{2}{\varepsilon}$, maka untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Sehingga berdasarkan Definisi 2.30 (f_n) Cauchy di $C([0,1])$. Kemudian perhatikan bahwa untuk $f(x) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{e^{-nx}}{n} - 0 \right| \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} \frac{e^{-nx}}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terlihat (f_n) konvergen ke $f(x) = 0$. Lalu karena $f(x) = 0$ kontinu, maka $f(x) = 0 \in C([0,1])$ sehingga $C([0,1])$ merupakan contoh dari ruang bernorma yang lengkap.

Sifat kelengkapan pada L^p tidak berlaku untuk $0 < p < 1$. Penyebabnya adalah ketika $0 < p < 1$ norma pada Definisi 2.24 tidak memenuhi sifat ketaksamaan segitiga pada definisi norma. Pada kasus ini Aoki (1942) memperkenalkan konsep kuasi-norma di mana konsep ini melemahkan sifat ketaksamaan segitiga pada norma.

2.1.4 Ruang Kuasi-Norma

Definisi 2.44 (Formica dkk., 2021; Hardtke, 2012)

Misalkan X adalah suatu ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ dikatakan kuasi-norma apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$.
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\exists C \in [0, \infty)$, sedemikian sehingga $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|), \forall x, y \in X$.

Ruang vektor X yang dilengkapi dengan kuasi-norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$ atau pasangan $(X, \|\cdot\|_X)$ disebut sebagai ruang kuasi-norma di mana C disebut sebagai konstanta *quasi-triangle*. Jika konstanta $C = 1$, maka $\|\cdot\|$ adalah norma dan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Salah satu contoh penting dari ruang kuasi-norma

adalah ruang norma- p . Pada ruang ini ketaksamaan segitiga diganti dengan ketaksamaan segitiga berpangkat- p (p -power triangle inequality).

Contoh 2.45 (Ruang Norma- p) (Hardtke, 2012)

Jika $p \in (0,1]$, maka suatu fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ dengan X sebagai ruang vektor, disebut norma- p apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$.
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p, \forall x, y \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut sebagai ruang norma- p . Jelas bahwa setiap norma- p merupakan kuasi-norma dengan $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Berikut akan dibahas tentang ruang kuasi-norma yang lengkap (ruang kuasi-Banach).

Contoh 2.46

Ambil $X = \mathbb{R}^4$ dan definisikan fungsi $\|\cdot\|: \mathbb{R}^4 \rightarrow [0, \infty)$ dengan $\forall x \in \mathbb{R}^4$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ambil $p = \frac{1}{4}$, $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x = (1, 16, 81, 256)$ dan $y = (1, 1, 1, 1)$. Akan ditunjukkan fungsi $\|\cdot\|$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$ adalah kuasi norma.

1. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(1^{\frac{1}{4}} + 16^{\frac{1}{4}} + 81^{\frac{1}{4}} + 256^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4)^4 \\ &= 10^4 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Jelas terlihat $\|x\| = 0$ hanya jika $|x_1|^{\frac{1}{4}} + |x_2|^{\frac{1}{4}} + |x_3|^{\frac{1}{4}} + |x_4|^{\frac{1}{4}} = 0$ yang terjadihanya jika $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
3. Ambil $\alpha = 2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \|ax\| &= \left(|2x_1|^{\frac{1}{4}} + |2x_2|^{\frac{1}{4}} + |2x_3|^{\frac{1}{4}} + |2x_4|^{\frac{1}{4}} \right)^4 \\
 &= \left(|2|^{\frac{1}{4}} |x_1|^{\frac{1}{4}} + |2|^{\frac{1}{4}} |x_2|^{\frac{1}{4}} + |2|^{\frac{1}{4}} |x_3|^{\frac{1}{4}} + |2|^{\frac{1}{4}} |x_4|^{\frac{1}{4}} \right)^4 \\
 &= \left[|2|^{\frac{1}{4}} \left(|x_1|^{\frac{1}{4}} + |x_2|^{\frac{1}{4}} + |x_3|^{\frac{1}{4}} + |x_4|^{\frac{1}{4}} \right) \right]^4 \\
 &= |2| \|x\| \\
 &= |\alpha| \|x\|.
 \end{aligned}$$

4. $C = 2^{\frac{1}{p}-1} = 8$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 x + y &= (1 + 1, 16 + 1, 81 + 1, 256 + 1) \\
 &= (2, 17, 82, 257),
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 \|x + y\| &= \left(2^{\frac{1}{4}} + 17^{\frac{1}{4}} + 82^{\frac{1}{4}} + 257^{\frac{1}{4}} \right)^4 \\
 &\approx (1,189 + 2,031 + 3,009 + 4,004)^4 \\
 &\approx (10,233)^4 \\
 &\approx 10.952.
 \end{aligned}$$

Kemudian

$$\begin{aligned}
 \|x\| + \|y\| &= 10^4 + \left(1^{\frac{1}{4}} + 1^{\frac{1}{4}} + 1^{\frac{1}{4}} + 1^{\frac{1}{4}} \right)^4 \\
 &= 10.000 + 4^4 \\
 &= 10.256.
 \end{aligned}$$

Didapatkan

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &\approx 10.952 \\
&\leq 8(10.256) \\
&= C(\|x\| + \|y\|).
\end{aligned}$$

Lalu dengan $p = \frac{1}{4}$,

$$\|x + y\|^{\frac{1}{4}} \approx 10.952^{\frac{1}{4}} \approx 10,233$$

dan

$$\|x\|^{\frac{1}{4}} + \|y\|^{\frac{1}{4}} = (10^4)^{\frac{1}{4}} + (4^4)^{\frac{1}{4}} = 14.$$

Terlihat bahwa

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^{\frac{1}{4}} &\approx 10,233 \\
&\leq 14 \\
&= \|x\|^{\frac{1}{4}} + \|y\|^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

2.1.5 Ruang Kuasi-Norma Lengkap

Definisi 2.47 (Nekvinda & Peša, 2024)

Suatu ruang kuasi-norma X yang dilengkapi dengan kuasi-norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$, atau bisa ditulis dengan $(X, \|\cdot\|_X)$ disebut lengkap jika dan hanya jika berlaku untuk setiap barisan Cauchy (x_n) dengan kuasi-norma $\|\cdot\|$ di X , terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $x_n \rightarrow x$ dalam kuasi-norma $\|\cdot\|$. Selanjutnya ruang kuasi norma $(X, \|\cdot\|_X)$ disebut sebagai ruang kuasi-Banach.

2.1.6 Fungsi Monotonik

Pada Teorema 4.9 akan muncul dua kelas fungsi yang memiliki sifat kemonotonan turunan. Kedua kelas fungsi ini berperan dalam menyatakan sifat fungsi $v(p)$ dan $\psi(p)$ yang menjadi bagian dari definisi pada objek utama kajian ini. Oleh karena itu perlu diberikan definisi kedua kelas fungsi tersebut.

Definisi 2.48 (Widder, 1946)

Misalkan fungsi $\Lambda: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terdiferensialkan tak hingga pada interval (a, b) . Fungsi Λ dikatakan mutlak monoton (*absolutely monotonic*) pada interval $a < x < b$ apabila semua turunan $\Lambda(x)$ bernilai non-negatif, yaitu

$$\Lambda^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

dengan $\Lambda^{(k)}(x)$ adalah turunan ke- k dari $\Lambda(x)$.

Contoh 2.49

Ambil $\Lambda: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\Lambda(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\Lambda^{(1)}(x) = (-1)(-1)(1-x)^{-2} = 1 \cdot (1-x)^{-2}$$

$$\Lambda^{(2)}(x) = (-2)(1)(-1)(1-x)^{-3} = 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{-3}$$

$$\Lambda^{(3)}(x) = (-3)(2)(1)(-1)(1-x)^{-4} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1-x)^{-4}$$

sehingga terlihat pola untuk $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(k)}(x) &= k! (1-x)^{-(k+1)} \\ &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

Karena $k! > 0$ dan $(1-x) > 0$ untuk $x \in (0, 1)$, maka

$$\Lambda^{(k)}(x) > 0, \forall k$$

sehingga $\Lambda(x)$ mutlak monoton pada interval $(0, 1)$.

Definisi 2.50 (Widder, 1946)

Misalkan fungsi $\Lambda: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terdiferensialkan tak hingga pada interval (a, b) . Fungsi Λ dikatakan monoton sempurna (*completely monotonic*) pada interval $a < x < b$ apabila memenuhi

$$(-1)^k \Lambda^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

dengan $\Lambda^{(k)}(x)$ adalah turunan ke- k dari $\Lambda(x)$. Fungsi monoton sempurna memiliki hubungan dengan fungsi mutlak monoton di mana fungsi Λ dikatakan monoton sempurna pada interval (a, b) jika dan hanya jika $\Lambda(-x)$ mutlak monoton pada interval $(-b, -a)$.

Contoh 2.51

Ambil $\Lambda: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\Lambda(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln(x+1) - \ln x. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa

1. Untuk $k = 1$,

$$\Lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)},$$

sehingga

$$(-1)^1 \Lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{x(x+1)} > 0.$$

2. Untuk $k = 2$,

$$\Lambda^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

sehingga

$$(-1)^2 \Lambda^{(2)}(x) = \Lambda^{(2)}(x) > 0.$$

3. Untuk $k = 3$,

$$\Lambda^{(3)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

sehingga

$$(-1)^3 \Lambda^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3} > 0.$$

Dan seterusnya untuk $k \geq 1$ berlaku

$$(-1)^k \Lambda^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{x^k} - \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} > 0,$$

sehingga $\Lambda(x)$ monoton sempurna pada interval $(0, \infty)$.

Teorema 2.52 (Teorema Bernstein) (Schilling dkk., 2010)

Misalkan $\Lambda: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi monoton sempurna, maka ada ukuran tunggal μ pada $[0, \infty)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x > 0$,

$$\Lambda(x) = \int_{[0, \infty)} \exp(-xt) \mu(dt).$$

Sebaliknya, jika $\Lambda(x) < \infty$ untuk setiap $x > 0$, maka fungsi $x \mapsto$

$\int_{[0, \infty)} \exp(-xt) \mu(dt)$ adalah fungsi monoton sempurna.

Contoh 2.53

Ambil $\Lambda: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\Lambda(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

1. Untuk $k = 1$,

$$\Lambda^{(1)}(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

sehingga

$$(-1)^1 \Lambda^{(1)}(x) = (1+x)^{-2} > 0.$$

2. Untuk $k = 2$,

$$\Lambda^{(2)}(x) = (-1)(-2)(1)(1+x)^{-3} = 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-3}$$

sehingga

$$(-1)^2 \Lambda^{(2)}(x) = \Lambda^{(2)}(x) > 0.$$

3. Untuk $k = 3$,

$$\Lambda^{(3)}(x) = (-3)(2)(1)(1+x)^{-4}$$

sehingga

$$(-1)^3 \Lambda^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-4} > 0.$$

Dan seterusnya untuk $k \geq 1$ berlaku

$$\begin{aligned} (-1)^k \Lambda^{(k)}(x) &= (-1)^k ((-1)^k k! (1+x)^{-(k+1)}) \\ &= (-1)^{2k} k! (1+x)^{-(k+1)} \\ &= k! (1+x)^{-(k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Terlihat $\Lambda(x)$ merupakan fungsi monoton sempurna. Berdasarkan Teorema 2.52, maka ada ukuran μ tunggal sedemikian sehingga

$$\Lambda(x) = \frac{1}{x+1} = \int_0^\infty e^{-xt} \mu(dt).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xt} e^{-t} dt &= \int_0^\infty e^{-(1+x)t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-(1+x)t}}{-(1+x)t} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Pilih $\mu = e^{-t}$, sedemikian sehingga $\Lambda(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \mu(dt)$.

2.1.7 Monoton Konvergen

Teorema 2.54 (Teorema monoton konvergen) (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan $(X, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran dan (f_n) adalah barisan naik dari fungsi-fungsi terukur yang bernilai non-negatif pada X . Definisikan

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in X,$$

sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Lemma 2.55 (Royden & Fitzpatrick, 2010)

Misalkan $(X, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran dan (f_n) adalah barisan naik dari fungsi-fungsi terukur yang bernilai non-negatif pada X . Jika barisan dari integral $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)$ terbatas, maka (f_n) konvergen *pointwise* ke $f \in X$ di mana f berhingga *almost everywhere* dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu < \infty.$$

Contoh 2.56

Ambil $(X, \mathcal{B}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}, m)$ di mana m adalah ukuran Lebesgue dan $d\mu = dx$. Definisikan barisan fungsi

$$f_n = 1 - \frac{x}{n+1}, \quad x \in [0,1].$$

Terlihat $f_n \geq 0, \forall x \in [0,1]$. Karena

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= \left(1 - \frac{x}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) \\ &= x \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

maka (f_n) merupakan barisan naik dan bernilai non-negatif. Misalkan $f(x)$ adalah nilai limit dari f_n , maka perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}x\right) \\ &= 1 - 0 \cdot x \\ &= 1, \end{aligned}$$

sehingga $f(x) = 1, \forall x = [0,1]$. Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2(n+1)} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 1 dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

sedemikian sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \\ &= \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

yang sesuai dengan Teorema 2.54.

Lalu barisan

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \frac{1}{2n+2}$$

terbatas karena

$$1 - \frac{1}{2n+2} \leq 1 < \infty$$

sehingga (f_n) konvergen *pointwise* ke $f(x) = 1$ yang berhingga hampir di mana-mana dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 1 < \infty.$$

2.2 Kesempurnaan Ciptaan Allah dalam Al-Qur'an

Secara khusus, Surah Al-Mulk ayat 3-4 menjadi landasan filosofis dan spiritual dalam penelitian ini. Ayat-ayat ini menegaskan kekuasaan Allah SWT dalam menciptakan langit secara berlapis-lapis dengan kesempurnaan yang mutlak, terbebas dari segala bentuk *futhur*. As-Suddi, sebagaimana dikutip oleh Katsir (2004), menafsirkan *futhur* ini sebagai "kerusakan". Imam Ibnu Katsir dalam tafsirnya menjelaskan bahwa ayat ini adalah seruan untuk menggunakan akal dalam memikirkan ciptaan Allah yang mengagumkan, sebagai bukti keesaan, kebijaksanaan, dan kekuasaan-Nya (Katsir, 2014). Sementara itu, Shihab (2012) dalam tafsir *Al-Misbah* menafsirkan kata *thibaqan* (berlapis-lapis) tidak sekedar merujuk pada langit secara fisik, melainkan juga pada hukum-hukum, sistem, dan fenomena alam yang teratur. Keteraturan ini berjalan sesuai dengan *sunnatullah* yang telah ditetapkan Allah.

Penegasan dalam firman-Nya, "*Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?*" merupakan tantangan yang menegaskan

kesempurnaan ciptaan Allah. Dalam tafsirnya, Ibnu Katsir menjelaskan bahwa ayat ini adalah seruan untuk melakukan observasi berulang kali terhadap ciptaan Allah, yang justru akan membuktikan bahwa tidak ada sedikit pun kekurangan atau cacat di dalamnya (Katsir, 2004). Hasil dari pengamatan mendalam itu akan selalu berujung pada pengakuan bahwa tidak ditemukan cacat, sehingga penglihatan pun kembali "dalam keadaan *hasīr*", yang berarti payah dan sia-sia karena tidak mampu menemukan kelemahan apa pun pada ciptaan-Nya (Shihab, 2012). Dengan demikian, penelitian ini merupakan sebuah *ikhtiar* untuk melihat tanda-tanda kebesaran Allah melalui prinsip konsistensi dan kelengkapan, yang merupakan cerminan dari *sunnatullah* dalam alam pikiran.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang apa saja yang akan dibuktikan mengenai topik sifat kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue dengan menggunakan teori pendukung yang dijelaskan pada subbab sebelumnya.

Teorema 2.3.1 (Aoki-Rolewicz) (Wu & Li, 2008)

Misalkan X adalah ruang kuasi-Banach, maka terdapat $p \in (0,1]$ dan kuasi norma baru $|||\cdot|||$ yang ekuivalen dengan kuasi norma $\|\cdot\|$ dan memenuhi ketaksamaan segitiga berpangkat- p (*p-power triangle inequality*)

$$|||x + y|||^p \leq |||x|||^p + |||y|||^p, \quad \forall x, y \in X.$$

Definisi 2.3.2 (Formica dkk., 2021)

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{\alpha, \beta}(p)$ dengan $p \in (\alpha, \beta)$, di mana $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (\alpha, \beta)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq \infty.$$

Teorema 2.3.3 (Ostrovsky & Sirota, 2007)

Ruang $G\psi_{\alpha, \beta}$ dengan norma $\|\cdot\|_{G\psi_{\alpha, \beta}}$ adalah ruang Banach.

Definisi 2.3.4 (Formica dkk., 2021)

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{a,b}(p)$ dengan $p \in (a, b)$, di mana $0 < a < b \leq 1$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval buka sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (a, b)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand Lebesgue $G\psi_{a,b}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a, b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 0 < a < b \leq 1.$$

Proposisi 2.3.5 (Formica dkk., 2021)

Ruang Grand Lebesgue $G\psi = G\psi_{a,b}$, $0 < a < b \leq 1$, dibangun di ruang terukur $(E, \mathcal{B}, \mu)$ dengan ukuran non-trivial μ , adalah ruang kuasi norma dengan konstanta kuasi-segitiga

$$C = C[\psi_{a,b}] = 2^{\frac{1}{a}-1};$$

Misal $f, g \in G\psi$, maka

$$\|f + g\|_{G\psi} \leq 2^{\frac{1}{a}-1} (\|f\|_{G\psi} + \|g\|_{G\psi}).$$

Teorema 2.3.6 (Formica dkk., 2021)

Suatu ruang kuasi norma $X = (X, \|\cdot\|)$ dengan konstanta *quasi-triangle* $C \geq 1$ dikatakan lengkap (ruang kuasi-Banach) jika dan hanya jika, untuk setiap deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty,$$

Maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$ (konvergen di X) dan memenuhi ketaksamaan

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|.$$

Teorema 2.3.7 (Formica dkk., 2021)

Misal $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran dengan ukuran non-trivial μ . Ruang Grand kuasi Lebesgue $G\psi_{a,b}$, $0 < a < b \leq 1$, yang dibangun di $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah lengkap dengan berdasarkan pada jarak kuasi $\rho(x, y) := \|x - y\|_{G\psi_{a,b}}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur yang merupakan pengkajian data dari hasil penelitian sebelumnya dan berbagai referensi relevan dengan penelitian untuk mendapatkan dasar teori dari masalah yang di akan teliti. Objek dari penelitian ini adalah ruang grand-kuasi Lebesgue yang akan dibuktikan sifat kelengkapannya (Formica dkk, 2021).

3.2 Pra Penelitian

Penulis menggunakan rujukan utama dari jurnal internasional oleh Formica dkk (2021) dengan objek penelitiannya adalah ruang grand-kuasi Lebesgue. Sebelum membuktikan kelengkapan pada ruang grand-kuasi Lebesgue, penulis mencari berbagai referensi yang terkait dengan topik bahasan pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Ruang grand-kuasi Lebesgue merupakan generalisasi dari ruang Lebesgue dengan pendekatan kuasi-norma. Salah satu sifat penting yang perlu dibuktikan dari ruang ini adalah sifat kelengkapan. Oleh karena itu, untuk membuktikan sifat-sifat tersebut, penulis melakukan beberapa tahapan penelitian, antara lain:

1. Mengidentifikasi ruang grand-kuasi Lebesgue sebagai objek penelitian.
2. Mengumpulkan dan menganalisis teori pendukung yang berhubungan dengan penelitian.
3. Membuktikan ruang grand-kuasi Lebesgue adalah ruang kuasi-norma.
4. Membuktikan ruang grand-kuasi Lebesgue bersifat lengkap.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Teorema Aoki-Rolewicz

Teorema Aoki-Rolewicz sangat penting dalam penelitian ini, karena dengan teorema ini, norma $\|\cdot\|_p$ pada L^p untuk $0 < p < 1$ merupakan kuasi-norma dan memenuhi ketaksamaan segitiga berpangkat- p (*p-power triangle inequality*). Sebelum membuktikan teorema ini, akan dibahas terlebih dahulu tentang sifat ekuivalen pada norma dan ruang kuasi-Banach.

Definisi 4.1 (Kreyszig, 1978)

Suatu norma $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X dikatakan ekuivalen dengan norma $\|\cdot\|_0$ apabila terdapat bilangan positif a dan b sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0.$$

Ruang kuasi-Banach adalah ruang kuasi-norma yang lengkap. Sifat kelengkapan pada suatu ruang fungsi berarti setiap barisan Cauchy di ruang tersebut konvergen ke suatu elemen di ruang yang sama. Berikut adalah teorema yang menyatakan bahwa ruang kuasi-norma dapat dikatakan lengkap dengan memenuhi suatu syarat.

Teorema 4.2 (Formica dkk., 2021)

Suatu ruang kuasi-norma $X = (X, \|\cdot\|)$ dengan konstanta *quasi-triangle* $C \geq 1$ dikatakan lengkap (ruang kuasi-Banach) jika dan hanya jika, untuk setiap deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty,$$

Maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$ dan memenuhi ketaksamaan

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|.$$

Bukti.

Perhatikan bahwa ada suatu ruang kuasi-norma $X = (X, \|\cdot\|)$, untuk bilangan asli

$n > m$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| &= \left\| x_m + \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \\ &\leq C \left(\|x_m\| + \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \right) \\ &\leq C \left(\|x_m\| + C \left(\|x_{m+1}\| + \left\| \sum_{k=m+2}^n x_k \right\| \right) \right) \\ &= C \|x_m\| + C^2 \|x_{m+1}\| + C^2 \left(\left\| \sum_{k=m+2}^n x_k \right\| \right) \\ &\leq C \|x_m\| + C^2 \|x_{m+1}\| + C^2 \left(C \left(\|x_{m+2}\| + \left\| \sum_{k=m+3}^n x_k \right\| \right) \right) \\ &= C \|x_m\| + C^2 \|x_{m+1}\| + C^3 \|x_{m+2}\| + C^3 \left\| \sum_{k=m+3}^n x_k \right\|. \end{aligned}$$

Karena setiap menerapkan ketaksamaan kuasi-segitiga pangkat dari C bertambah

satu, maka didapatkan untuk bilangan asli $n > m$

$$\left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^n C^{k-m+1} \|x_k\|. \quad (3)$$

($\Rightarrow$) Asumsikan ruang kuasi-norma $X = (X, \|\cdot\|)$ lengkap, akan ditunjukkan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty,$$

ada di X dan memenuhi ketaksamaan

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|.$$

Misalkan $S = \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty$. Definisikan jumlah parsial dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k,$$

Akan ditunjukkan bahwa (S_n) adalah barisan Cauchy. Perhatikan bahwa untuk $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|S_{n+m} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n+m} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} C^{k-n} \|x_k\|. \end{aligned}$$

Karena $k - n \leq k$, maka $C^{k-n} \leq C^k$ sehingga

$$\begin{aligned} \|S_{n+m} - S_n\| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} C^{k-n} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} C^k \|x_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} C^k \|x_k\| - \sum_{k=1}^n C^k \|x_k\|. \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=1}^{n+m} C^k \|x_k\|$ dan $\sum_{k=1}^n C^k \|x_k\|$ adalah jumlah parsial dari S dan deret $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|$ konvergen ke S , maka jumlah parsialnya juga akan konvergen ke S sehingga saat $n, m \rightarrow \infty$

$$\|S_{n+m} - S_n\| \rightarrow S - S = 0.$$

Jadi (S_n) adalah barisan Cauchy.

Berdasarkan asumsi $X = (X, \|\cdot\|)$ lengkap dan telah ditunjukkan (S_n) adalah barisan Cauchy, sehingga barisan (S_n) konvergen di X . Karena (S_n) konvergen, maka ada $x \in X$ sedemikian sehingga $S_n \rightarrow x$ yang berarti

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \in X.$$

Kemudian dari (3) didapatkan

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| &= \|S_n\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n C^k \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|. \end{aligned}$$

Karena $S_n \rightarrow x$, maka dengan menggunakan ketaksamaan kuasi-segitiga diperoleh

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x - S_n) + S_n\| \\ &\leq C(\|x - S_n\| + \|S_n\|). \end{aligned}$$

Ambil limit supremum untuk $n \rightarrow \infty$. Karena $\|x - S_n\| \rightarrow 0$, maka

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|x - S_n\| + \|S_n\|) \\ &= C[\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|] \\ &= 0 + C \limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|.$$

Terbukti bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \in X$$

dan

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|.$$

($\Leftarrow$) Asumsikan setiap deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\| < \infty,$$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ada di X dan memenuhi ketaksamaan

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|,$$

akan ditunjukkan X lengkap.

Ambil sebarang barisan Cauchy $(x_n) \in X$, maka berdasarkan Definisi 2.30, untuk suatu $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Untuk setiap $k = 1, 2, \dots$ ambil $\varepsilon = (2C)^{-k}$, maka ada $n_k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq n_k$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{(2C)^k}.$$

Dengan memilih $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ secara induktif, untuk $n = n_{k+1}$ dan $m = n_k$ diperoleh

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{(2C)^k}.$$

Kemudian, definisikan

$$y_1 = x_{n_1}, \quad y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, k \geq 2.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|y_k\| &= C \|y_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} C^k \|y_k\| \\ &= C \|x_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} C^k \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \\ &< C \|x_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} C^k \frac{1}{(2C)^k} \\ &= C \|x_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= C \|x_{n_1}\| + \frac{1}{2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

sehingga syarat $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|y_k\| < \infty$ terpenuhi. Maka berdasarkan asumsi, deret

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

konvergen ke suatu $y \in X$. Perhatikan jumlah parsial berikut.

$$\begin{aligned} x_{n_1} + \sum_{k=1}^{N-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &= x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_N} - x_{n_{N-1}}) \\ &= x_{n_N}. \end{aligned}$$

Jadi $x_{n_N} \rightarrow y \in X$, sehingga subbarisan (x_{n_k}) konvergen ke $y \in X$.

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|y - x_n\| &= \|y - x_{n_k} + x_{n_k} - x_n\| \\ &\leq C(\|y - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\|) \end{aligned}$$

$$= C(\|x_{n_k} - y\| + \|x_n - x_{n_k}\|).$$

Karena (x_{n_k}) konvergen dan (x_n) Cauchy, maka $\|y - x_n\| = \|x_n - y\| \rightarrow 0$ yang berarti (x_n) konvergen ke $y \in X$. Terbukti bahwa X lengkap. ■

Berikut akan diberikan contoh ruang barisan yang merupakan ruang kuasi-norma lengkap.

Lemma 4.3

Misalkan $X = \ell^p$ dengan $p = \frac{1}{2}$, yaitu

$$\ell^{\frac{1}{2}} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \left| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} < \infty \right. \right\},$$

dan $\|\cdot\|: \ell^{\frac{1}{2}} \rightarrow [0, \infty)$ adalah fungsi dengan untuk setiap $x \in \ell^{\frac{1}{2}}$,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa fungsi $\|\cdot\|$ adalah kuasi-norma dan $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ adalah ruang kuasi-norma dengan memenuhi Definisi 2.44.

1. Karena $\|\cdot\|: \ell^{\frac{1}{2}} \rightarrow [0, \infty)$ bernilai non-negatif, maka jelas bahwa $\|x\| \geq 0, \forall x \in \ell^{\frac{1}{2}}$.
2. $(\Rightarrow)$ Asumsikan $\|x\| = 0$, perhatikan bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} + \dots = 0.$$

Karena $|x_i| \geq 0$, maka $x_i = 0, \forall i$ sehingga $x = (x_1, x_2, \dots) = 0$.

($\Leftarrow$) Asumsikan $x = 0$ yang berarti $\forall i, x_i = 0$. Perhatikan bahwa

$$x_1 + x_2 + \cdots = 0$$

$$|x_1| + |x_2| + \cdots = 0$$

$$|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} + \cdots = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 0$$

$$\|x\| = 0.$$

3. Untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, $ax = (ax_1, ax_2, \dots)$, didapatkan

$$\begin{aligned} \|ax\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |ax_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a|^{\frac{1}{2}} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \left(|a|^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= |a| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= |a| \|x\|. \end{aligned}$$

4. Untuk $A, B \geq 0$ dan $0 < p < 1$, berlaku $(A + B)^p \leq A^p + B^p \leq 2^{1-p}(A + B)^p$. Perhatikan bahwa

$$\|x + y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(|x_1 + y_1|^{\frac{1}{2}} + \dots \right)^2 \\
&\leq \left(|x_1|^{\frac{1}{2}} + |y_1|^{\frac{1}{2}} + \dots \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Untuk $a, b \geq 0$ dan $p \in (0, 1]$, berlaku $(a + b)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} \right)$ sehingga

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq 2 \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \\
&= 2(\|x\| + \|y\|).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi Definisi 2.44, sehingga $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ adalah ruang kuasi-norma dengan $C = 2$. Kemudian akan ditunjukkan $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ adalah ruang kuasi-norma yang lengkap (kuasi-Banach) dengan memenuhi Teorema 4.2 di mana $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ lengkap jika dan hanya jika untuk setiap deret $\sum_{i=1}^{\infty} x_k$ yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| < \infty$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_k \in \ell^{\frac{1}{2}} \text{ dan } \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_k \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|.$$

($\Rightarrow$) Asumsikan $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ lengkap. Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ adalah sebarang deret yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| < \infty$. Akan ditunjukkan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^{\frac{1}{2}}$ dan

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|.$$

Misalkan $P = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|$. Definisikan jumlah parsial

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Akan ditunjukkan (S_n) adalah barisan Cauchy. Untuk $n, m \in \mathbb{N}$ perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|S_{n+m} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n+m} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right\|. \end{aligned}$$

Karena untuk bilangan asli $n > m$ apabila diterapkan ketaksamaan kuasi segitiga didapatkan

$$\left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^n C^{k-m+1} \|x_k\|,$$

maka perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|S_{n+m} - S_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^{k-n} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^k \|x_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{n+m} 2^k \|x_k\| - \sum_{k=1}^n 2^k \|x_k\|. \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=1}^{n+m} 2^k \|x_k\|$ dan $\sum_{k=1}^n 2^k \|x_k\|$ adalah jumlah parsial dari P dan deret $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|$ konvergen ke P , maka jumlah parsialnya juga konvergen ke P sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_{n+m} - S_n\| &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n+m} 2^k \|x_k\| - \sum_{k=1}^n 2^k \|x_k\| \right) \\
&= P - P \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi (S_n) adalah barisan Cauchy. Karena berdasarkan asumsi $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ adalah

lengkap, maka ada $S \in \ell^{\frac{1}{2}}$ sedemikian sehingga $(S_n) \rightarrow S$, yang berarti

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S \in \ell^{\frac{1}{2}}.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \|(S - S_n) + S_n\| \\
&\leq 2(\|S - S_n\| + \|S_n\|) \\
&= 2(\|S_n - S\| + \|S_n\|)
\end{aligned}$$

dengan mengambil limit $n \rightarrow \infty$, didapatkan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} [2(\|S_n - S\| + \|S_n\|)] &= 2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| \right) \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n 2^k \|x_k\|,$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\|S\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \\
&\leq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2^k \|x_k\|
\end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|.$$

($\Leftarrow$) Asumsikan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^{\frac{1}{2}}$ dan $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|$. Akan ditunjukkan $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ lengkap.

Ambil sebarang barisan Cauchy $(y_n) \in X$, maka berdasarkan Definisi 2.30, untuk suatu $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$. Untuk setiap $k = 1, 2, \dots$ ambil $\varepsilon = 2^{-2k}$, maka ada $n_k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq n_k$ berlaku

$$\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Dengan memilih $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ secara induktif, untuk $n = n_{k+1}$ dan $m = n_k$ diperoleh

$$\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Kemudian, definisikan

$$x_1 = y_{n_1}, \quad x_k = y_{n_k} - y_{n_{k-1}}, k \geq 2.$$

Sehingga jumlah parsialnya menjadi

$$\sum_{k=1}^n x_k = y_{n_1} + (y_{n_2} - y_{n_1}) + \dots + (y_{n_n} - y_{n_{n-1}}) = y_{n_n}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| &= 2\|y_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| \\ &< 2\|y_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{2(k-1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\|y_{n_1}\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k-2}} \\
&= 2\|y_{n_1}\| + 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 2\|y_{n_1}\| + 4 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 2\|y_{n_1}\| + 2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Karena $y_{n_1} \in \ell^{\frac{1}{2}}$, maka $\|y_{n_1}\| < \infty$.

Berdasarkan asumsi, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Misalkan $y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, maka dengan mengambil limit $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = y.$$

Jadi $y_{n_n} \rightarrow y \in \ell^{\frac{1}{2}}$, sehingga subbarisan (y_{n_k}) konvergen ke $y \in \ell^{\frac{1}{2}}$.

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\|y - y_n\| &= \|y - y_{n_k} + y_{n_k} - y_n\| \\
&\leq 2(\|y - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y_n\|) \\
&= 2(\|y_{n_k} - y\| + \|y_n - y_{n_k}\|).
\end{aligned}$$

Karena (y_{n_k}) konvergen dan (y_n) Cauchy, maka $\|y - y_n\| = \|y_n - y\| \rightarrow 0$ yang berarti (y_n) konvergen ke $y \in X$ sehingga terlihat bahwa $(\ell^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|)$ lengkap.

Contoh 4.4

Ambil sebarang $(x_k) \in \ell^{\frac{1}{2}}$ dengan

$$x_k = \left(\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{4k}}, \frac{1}{2^{6k}}, \frac{1}{2^{8k}}, \dots \right)$$

untuk $k = 1, 2, \dots$. Hal ini berarti barisan (x_k) memiliki semua suku yang bernilai tak nol dan untuk suku ke- i dari tiap x_k adalah

$$(x_k)_i = \frac{1}{2^{2ik}}.$$

Perhatikan bahwa berdasarkan Lemma 4.3,

$$\begin{aligned} \|x_k\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(x_k)_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{2ik}} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2ik}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ik}} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \right)^i \right)^2 \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2^k}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2^k - 1} \right)^2. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| < \infty$, dengan $\|x_k\| = \left(\frac{1}{2^k - 1} \right)^2$ didapatkan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2^k - 1} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)^2}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$2^k - 1 \geq \frac{1}{2} \cdot 2^k$$

$$(2^k - 1)^2 \geq \left(\frac{2^k}{2}\right)^2$$

sehingga

$$\frac{1}{(2^k - 1)^2} \leq \frac{1}{\frac{2^{2k}}{4}}$$

$$\frac{1}{(2^k - 1)^2} \leq 4 \frac{1}{2^{2k}}$$

$$\frac{2^k}{(2^k - 1)^2} \leq 4 \frac{2^k}{2^{2k}}$$

$$\frac{2^k}{(2^k - 1)^2} \leq 4 \frac{1}{2^k}.$$

Dari $\frac{2^k}{(2^k - 1)^2} \leq 4 \frac{1}{2^k}$, didapatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k - 1)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 4 \frac{1}{2^k}$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= 4 < \infty.$$

Kemudian akan ditunjukkan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^2$. Ingat bahwa suku ke- i dari tiap x_k

adalah $(x_k)_i = \frac{1}{2^{2ik}}$, maka jumlah masing x_k

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right)_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2ik}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2i}} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2^{2i}}}{1 - \frac{1}{2^{2i}}} \\
&= \frac{1}{2^{2i} - 1}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \left(\frac{1}{2^2 - 1}, \frac{1}{2^4 - 1}, \frac{1}{2^6 - 1}, \dots \right).$$

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{2i} - 1} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2i} - 1}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2^{2i} - 1 &\geq \frac{1}{2} \cdot 2^{2i} \\
\sqrt{2^{2i} - 1} &\geq \sqrt{\frac{2^{2i}}{2}} \\
\sqrt{2^{2i} - 1} &\geq \frac{2^i}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2^{2i} - 1}} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2^i} \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2i} - 1}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2^i} \\
&= \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} < \infty.$$

Karena $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| < \infty$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^2$. Kemudian akan ditunjukkan

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|. \text{ Perhatikan bahwa}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sqrt{2}$$

dan

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\| \leq 2 \cdot 4$$

$$= 8.$$

Karena $\sqrt{2} \leq 8$, maka $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|x_k\|$.

Teorema 4.5 (Wu & Li, 2008)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang kuasi-Banach, maka terdapat $p \in (0,1]$ dan kuasi norma baru $|||\cdot|||$ yang ekuivalen dengan kuasi norma $\|\cdot\|$ dan memenuhi ketaksamaan segitiga berpangkat- p (p -power triangle inequality)

$$|||x + y|||^p \leq |||x|||^p + |||y|||^p, \quad \forall x, y \in X.$$

Bukti.

Diketahui $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang kuasi-Banach, maka berdasarkan Definisi 2.44 untuk setiap $x, y \in X$ ada $C \in \mathbb{R}$ dengan $C \geq 1$ sedemikian sehingga

$$\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|).$$

Definisikan konstanta k sebagai

$$k = \inf\{C \geq 1 : \|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|), \forall x, y \in X\}.$$

Pilih p yang memenuhi

$$2 = (2k)^p$$

$$2^{\frac{1}{p}} = 2k$$

$$\frac{1}{p} = {}^2\log 2k$$

$$p = \frac{1}{{}^2\log 2k}$$

$$p = \frac{1}{{}^2\log 2 + {}^2\log k}$$

Karena $k \geq 1$, maka $0 < p \leq 1$.

Kemudian, definisikan kuasi norma baru $|||\cdot|||: X \rightarrow [0, \infty)$ sebagai

$$|||x||| = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Kemudian akan dibuktikan $|||\cdot|||$ adalah kuasi norma dan ekuivalen dengan $\|\cdot\|$ serta memenuhi ketaksamaan segitiga berpangkat- p (*p-power triangle inequality*).

Pertama akan dibuktikan $|||\cdot|||$ adalah kuasi norma dengan memenuhi Definisi 2.44.

1. Diketahui $|||\cdot|||: X \rightarrow [0, \infty)$ bernilai non-negatif, sehingga jelas bahwa $|||x||| \geq 0, \forall x \in X$.
2. $(\Rightarrow)$ Asumsikan $|||x||| = 0$, akan ditunjukkan $x = \sum_{i=1}^n x_i = 0$. Perhatikan bahwa

$$|||x||| = 0$$

$$\inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} = 0$$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < |||x||| + \varepsilon$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 0 + \varepsilon.$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sekecil mungkin, sehingga

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p = 0$$

$$\|x_i\|^p = 0$$

$$\|x_i\| = 0.$$

Karena $\|\cdot\|$ adalah kuasi norma, maka

$$x_i = 0, \text{ untuk } i = 1, \dots, n.$$

Perhatikan bahwa,

$$x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$x = 0.$$

($\Leftarrow$) Asumsikan $x = \sum_{i=1}^n x_i = 0$, akan ditunjukkan $\|x\| = 0$. Perhatikan bahwa

$$x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} = 0$$

$$|||x||| = 0.$$

3. Untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, $ax = \sum_{i=1}^n (ax_i) = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |||ax||| &= \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|ax_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} \\ &= \inf \left\{ \left(|a|^p \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} \\ &= \inf \left\{ |a| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} \\ &= |a| \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} \\ &= |a| |||x|||. \end{aligned}$$

4. Perhatikan bahwa,

$$|||x||| = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

sehingga untuk suatu $x, y \in X$ dengan $x = \sum_{i=1}^n x_i$ dan $y = \sum_{i=1}^n y_i$,

$$|||x + y||| = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \middle| m, n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i, y = \sum_{j=1}^m y_j \right\}.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $x, y \in X$ dengan $x = \sum_{i=1}^n x_i$ dan $y = \sum_{j=1}^m y_j$

sedemikian sehingga

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \|x\| + \varepsilon \text{ dan } \left(\sum_{j=1}^m \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \|y\| + \varepsilon.$$

Karena untuk $A, B \geq 0$ dan $0 < p < 1$ berlaku $(A + B)^p \leq A^p + B^p \leq 2^{1-p}(A + B)^p$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= (\|x_1 + y_1\|^p + \cdots + \|x_n + y_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\|x_1\|^p + \|y_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p + \|y_1\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p + \sum_{j=1}^m \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Karena untuk $a, b \geq 0$ dan $0 < p \leq 1$ berlaku $(a + b)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}\right)$,

maka perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p + \sum_{j=1}^m \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^m \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &< 2^{\frac{1}{p}-1} [\|x\| + \varepsilon + \|y\| + \varepsilon] \\ &= 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\| + \|y\|) + 2^{\frac{1}{p}} \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\| + \|y\|)$$

$$\inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid m, n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i, y = \sum_{j=1}^m y_j \right\} \\ < 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\| + \|y\|).$$

Sehingga terbukti bahwa $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, dengan $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Terbukti bahwa $\|\cdot\|$ adalah kuasi-norma. Kemudian perhatikan bahwa

$$\|x + y\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p + \sum_{j=1}^m \|y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|x + y\|^p \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p + \sum_{j=1}^m \|y_j\|^p \\ < (\|x\| + \varepsilon)^p + (\|y\| + \varepsilon)^p$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka didapatkan

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa kuasi-norma baru $\|\cdot\|$ ekuivalen dengan kuasi-norma $\|\cdot\|$.

Ambil sebarang $x \in X$. Pilih $x = \sum_{i=1}^1 x_i$ sedemikian sehingga

$$\|x\| = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^1 \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\} \\ = \inf \left\{ (\|x\|^p)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ \leq \|x\|.$$

Pilih bilangan positif $b = 1$, sehingga $\|x\| < b\|x\|$.

Selanjutnya karena $x = \sum_{i=1}^n x_i$, maka untuk setiap $x \in X$

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|.$$

Pada kuasi norma $\|\cdot\|$ berlaku ketaksamaan segitiga $\forall x, y \in X$

$$\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|).$$

Dengan menggunakan induksi matematika, ketaksamaan segitika pada kuasi norma dapat digeneralisasi menjadi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq C^{n-1}(\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq C^{n-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Perhatikan bahwa

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq C^{n-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^p \leq \left(C^{n-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^p.$$

Karena $(A + B)^p \leq A^p + B^p$ untuk $p \in (0,1]$ dan $A, B \geq 0$, maka

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^p \leq (C^{n-1})^p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq C^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\| \leq C^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C^{n-1} \cdot \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}$$

$$= C^{n-1} \|x\|.$$

Pilih bilangan positif $a = C^{1-n}$, sehingga $a\|x\| \leq |||x|||$.

Karena untuk bilangan positif $a = C^{1-n}$ dan $b = 1$ berlaku $a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\|$, maka berdasarkan Definisi 4.1 terbukti bahwa kuasi norma baru $|||\cdot|||$ ekuivalen dengan kuasi norma $\|\cdot\|$. ■

Berikut akan diberikan contoh kuasi-norma baru yang ekuivalen dengan kuasi-norma pada Lemma 4.3.

Lemma 4.6

Definisikan fungsi baru pada ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}}$, yaitu $|||\cdot|||: \ell^{\frac{1}{2}} \rightarrow [0, \infty)$ dengan

$$|||x||| = \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

untuk setiap $x \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Akan ditunjukkan fungsi $|||\cdot|||$ adalah kuasi-norma baru di $\ell^{\frac{1}{2}}$ dengan memenuhi Definisi 2.44.

1. Diketahui $|||\cdot|||: \ell^{\frac{1}{2}} \rightarrow [0, \infty)$ bernilai non-negatif, sehingga jelas bahwa

$$|||x||| \geq 0, \forall x \in \ell^{\frac{1}{2}}.$$

2. $(\Rightarrow)$ Asumsikan $|||x||| = 0$. Perhatikan bahwa

$$|||x||| = 0$$

$$\left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 0$$

$$\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Karena $|x_i| \geq 0$, maka $\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} \geq 0$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}}$ sehingga didapatkan

$$\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} + \dots = 0.$$

Karena $|x_i| \geq 0$, maka $x_i = 0, \forall i$ sehingga $x = (x_1, x_2, \dots) = 0$.

($\Leftarrow$) Asumsikan $x = (x_1, x_2, \dots) = 0$, yang berarti $x_i = 0, \forall i$. Perhatikan bahwa

$$|x_i| = 0$$

$$|x_i|^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0,$$

kemudian

$$|x_1| + |x_2| + \dots = 0$$

$$|x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2|^{\frac{1}{2}} + \dots = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0,$$

sehingga

$$\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 0$$

$$|||x||| = 0.$$

3. Untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, $ax = (ax_1, ax_2, \dots)$ didapatkan

$$\begin{aligned}
|||ax||| &= \left(\sup_i |ax_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |ax_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left(\sup_i |a|^{\frac{1}{2}} |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |a|^{\frac{1}{2}} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left(|a|^{\frac{1}{2}} \sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + |a|^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left[|a|^{\frac{1}{2}} \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \\
&= |a| \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= |a| |||x|||.
\end{aligned}$$

4. Ingat untuk $A, B \geq 0$ dan $0 < p < 1$ berlaku $(A + B)^p \leq A^p + B^p$.

Perhatikan bahwa untuk $x, y \in \ell^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
|||x + y||| &= \left(\sup_i |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \left(\sup_i \left(|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \\
&\leq \left(\left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\sup_i |y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Ingat untuk $a, b \geq 0$ dan $p \in (0, 1]$ berlaku $(a + b)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} \right)$

sehingga

$$|||x + y||| \leq \left(\left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\sup_i |y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left[\left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\sup_i |y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \\
&= 2(\|x\| + \|y\|).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa fungsi $\|\cdot\|$ adalah kuasi-norma di $\ell^{\frac{1}{2}}$ dengan konstanta kuasi segitiga $C = 2$. Kemudian lihat bahwa $\|\cdot\|$ juga memenuhi ketaksamaan segitiga berpangkat- p .

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^{\frac{1}{2}} &= \sup_i |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_i \left(|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\sup_i |y_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \|x\|^{\frac{1}{2}} + \|y\|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan kuasi norma $\|\cdot\|$ ekuivalen dengan $\|\cdot\|$ pada Lemma 4.3.

perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \leq \sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}},$$

lalu karena

$$\begin{aligned}
|x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\
\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\
\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq \sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 &\leq \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ \|x\| &\leq |||x|| \leq 4\|x\|.\end{aligned}$$

terlihat bahwa kuasi norma $|||\cdot||$ ekuivalen dengan $\|\cdot\|$.

Contoh 4.7

Pilih $X = \ell^{\frac{1}{2}}$, berdasarkan Lemma 4.3 berlaku untuk setiap $x \in \ell^{\frac{1}{2}}$ berlaku norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

Ambil sebarang $x \in \ell^{\frac{1}{2}}$, di mana untuk $i = 1, 2, \dots$

$$x = \left(\frac{1}{i^4} \right) = \left(1, \frac{1}{16}, \frac{1}{81}, \frac{1}{256}, \dots \right).$$

Terlihat bahwa setiap x_i tidak nol. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i^4} \right|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i^2} \right| \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.\end{aligned}$$

Menggunakan deret Fourier untuk fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[-\pi, \pi]$, yaitu

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cos(ix)}{i^2}.$$

Dengan mengambil $x = \pi$, didapatkan

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cos(i\pi)}{i^2} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^i}{i^2} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2i}}{i^2} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \\
4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} &= \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \\
4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} < \infty.
\end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} &= \sup_i \left\{ |1|^{\frac{1}{2}}, \left| \frac{1}{16} \right|^{\frac{1}{2}}, \left| \frac{1}{81} \right|^{\frac{1}{2}}, \left| \frac{1}{256} \right|^{\frac{1}{2}}, \dots \right\} \\
&= \sup_i \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\} \\
&= \sup_i \frac{1}{i^2}.
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{i^2} \leq 1$, maka batas atas dari himpunan $\frac{1}{i^2}$, $n \in \mathbb{N}$ adalah

1. Kemudian karena tidak ada batas atas yang lebih kecil dari 1, maka

$$\begin{aligned}
\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} &= \sup_i \frac{1}{i^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Lalu

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 \\
&= \frac{\pi^4}{36}.
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
|||x||| &= \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right)^2 \\
&= \left(\frac{6 + \pi^2}{6} \right)^2.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa karena $1 \leq \frac{\pi^2}{6}$, maka

$$\begin{aligned}\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\ \sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 &\leq \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2.\end{aligned}$$

Lalu, karena

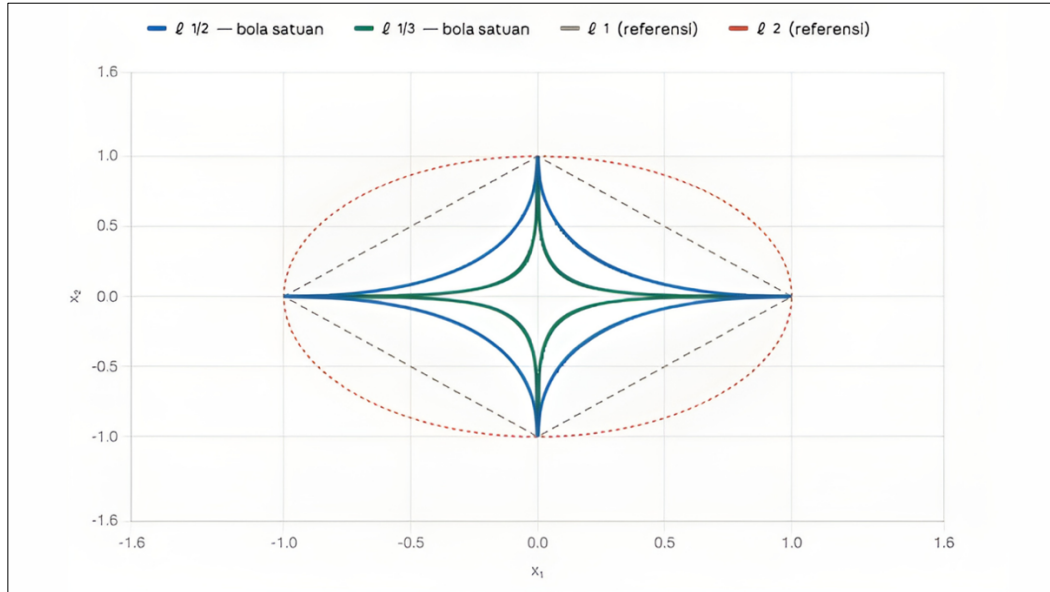
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} &\leq \sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 &\leq \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2,\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 &\leq \left(\sup_i |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left(2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ \frac{\pi^4}{36} &\leq \left(\frac{6 + \pi^2}{6} \right)^2 \leq 4 \cdot \frac{\pi^4}{36} \\ \pi^4 &\leq (6 + \pi^2)^2 \leq 4\pi^4\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\pi^4 \leq (6 + \pi^2)^2 \leq 4\pi^4$ sehingga $\|x\| \leq |||x||| \leq 4\|x\|$.

Misalkan ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}}$ dan $\ell^{\frac{1}{3}}$ adalah ruang kuasi-norma lengkap, berikut akan diberikan visualisasinya di $\mathbb{R}^2$ berupa bola satuan $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |||x||| \leq 1\}$. Pada Gambar 4.1, terlihat untuk $p < 1$ bola satuan berbentuk cekung ke dalam dan semakin kecil nilai p semakin tajam lekukan cekungnya.

Gambar 4.1 Visualisasi bola satuan di $\mathbb{R}^2$

4.2 Ruang Grand Lebesgue

Ruang grand Lebesgue merupakan salah satu contoh dari pengembangan ruang Lebesgue. Pada ruang ini, p dilihat dari suatu interval buka (α, β) di mana $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Berikut akan dibahas definisi dari ruang grand Lebesgue.

Definisi 4.8 (Ostrovsky & Sirota, 2007)

Misalkan $1 \leq \alpha < p < \beta \leq \infty$ dan $L_p = L(p) = L(p; E, \mu) = \{f, \|f\|_p < \infty\}$ dengan $E \subseteq \mathbb{R}$. Didefinisikan $\psi(p)$ adalah fungsi kontinu positif pada interval (α, β) , sedemikian sehingga ada $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ di mana

$$\psi(p) = \|f\|_p, p \in (\alpha, \beta).$$

Himpunan semua fungsi $\psi(p)$ dinotasikan sebagai $\Psi(\alpha, \beta) = \{\psi(\cdot)\}$.

Contoh 4.9

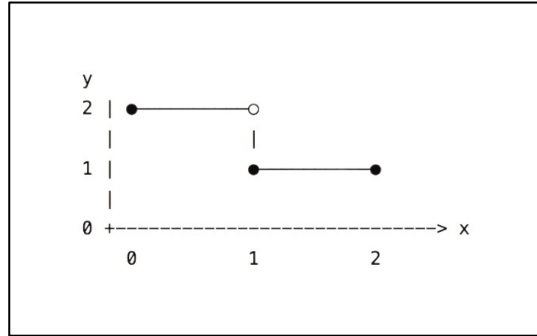
Ambil $E = [0, 2]$, $(\alpha, \beta) = (1, 3)$. Definisikan fungsi *step* $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Untuk setiap $p \in (1, 3)$,

$$\psi(p) = \|f\|_p = \left(\int_0^2 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Gambar 4.2 adalah visualisasi dari fungsi *step* $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$.



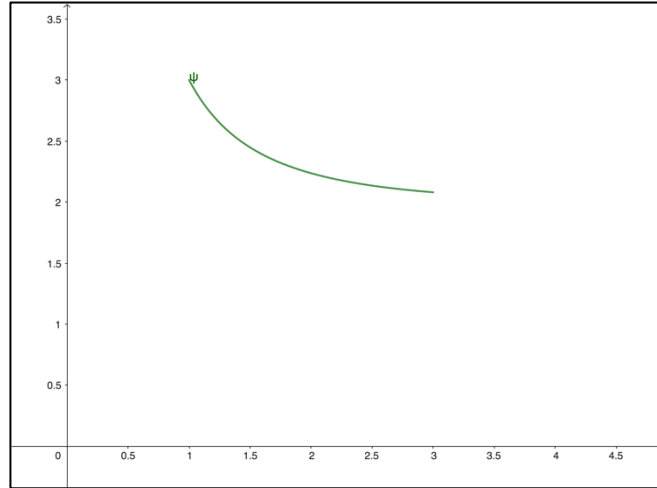
Gambar 4.2 Fungsi *step* $f(x)$

Berdasarkan Definisi 4.8, perhatikan bahwa untuk $p \in (1,3)$

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \|f\|_p \\ &= \left(\int_0^2 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 |2|^p dx + \int_1^2 |1|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 2^p dx + \int_1^2 1^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2^p + 1)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Fungsi $\psi(p)$ kontinu dan bernilai positif pada interval $(1,3)$. Berikut adalah

visualisasi fungsi $\psi(p) = \|f(x)\|_p = (2^p + 1)^{\frac{1}{p}}$ dengan $p \in (1,3)$.

Gambar 4.3 Fungsi $\psi(p)$ **Teorema 4.10** (Ostrovsky & Sirota, 2007)

Misalkan $L_p = L(p) = L(p; E, \mu) = \{f, \|f\|_p < \infty\}$ dengan $E \subseteq \mathbb{R}$ adalah ruang Lebesgue. Misalkan μ bersifat difus yang berarti untuk setiap A pada σ -aljabar di E dengan $0 < \mu(A) < \infty$ terdapat himpunan bagian $B \subset A$ dengan $\mu(B) = \mu(A)/2$. Fungsi $v(p), p \in (\alpha, \beta)$ termuat pada himpunan $\Psi(\alpha, \beta)$ jika dan hanya jika terdapat dua fungsi $\Lambda_1(p), \Lambda_2(p)$, sedemikian sehingga $v^p(p) = \Lambda_1(p) + \Lambda_2(p)$, di mana $\Lambda_1(p)$ mutlak monoton pada interval (α, β) dan $\Lambda_2(p)$ monoton sempurna pada interval (α, β) atau dapat ditulis dengan $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$\forall p \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \Lambda_1^{(k)}(p) \geq 0, (-1)^k \Lambda_2^{(k)} \geq 0,$$

dengan $\Lambda_1^{(k)}$ dan $\Lambda_2^{(k)}$ adalah turunan ke- k dari Λ_1 dan Λ_2 .

Bukti.

($\Rightarrow$) Asumsikan $v(p) \in \Psi(\alpha, \beta)$, maka berdasarkan Definisi 4.8 ada $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ di mana

$$\begin{aligned} v(p) &= \|f\|_p \\ &= \left(\int_E |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 v^p(p) &= \int_E |f(x)|^p \mu(dx) \\
 &= \int_E \exp(p \log|f(x)|) \mu(dx) \\
 &= \int_{\{x \in E \mid |f(x)| \geq 1\}} \exp(p \log|f(x)|) \mu(dx) \\
 &\quad + \int_{\{x \in E \mid |f(x)| < 1\}} \exp(p \log|f(x)|) \mu(dx)
 \end{aligned}$$

Dengan memisalkan

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1(p) &= \int_{\{x \in E \mid |f(x)| \geq 1\}} \exp(p \log|f(x)|) \mu(dx), \Lambda_1^{(k)}(p) \geq 0; \\
 \Lambda_2(p) &= \int_{\{x \in E \mid |f(x)| < 1\}} \exp(p \log|f(x)|) \mu(dx), (-1)^k \Lambda_2^{(k)} \geq 0,
 \end{aligned}$$

terbukti bahwa $v^p(p) = \Lambda_1(p) + \Lambda_2(p)$.

($\Leftarrow$) Asumsikan $v^p(p) = \Lambda_1(p) + \Lambda_2(p)$, $\Lambda_1^{(k)}(p) \geq 0$, $(-1)^k \Lambda_2^{(k)} \geq 0$. Mengikuti

Teorema 2.37,

$$\Lambda_1(p) = \int_E \exp(pt) \mu_1(dt),$$

$$\Lambda_2(p) = \int_E \exp(pt) \mu_2(dt),$$

di mana μ_1, μ_2 adalah ukuran Borel pada himpunan E sedemikian sehingga

$\mu_1\{(-\infty, 0)\} = 0$, $\mu_2\{(0, \infty)\} = 0$, dan $\forall p \in (\alpha, \beta)$,

$$\Lambda_1(p) < \infty, \Lambda_2(p) < \infty.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
v^p(p) &= \int_{-\infty}^0 \exp(pt) \mu_1(dt) + \int_0^{\infty} \exp(pt) \mu_2(dt) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(pt) (\mu_1(dt) + \mu_2(dt)).
\end{aligned}$$

Karena ukuran μ bersifat difus, maka ada (ukuran) fungsi $\eta: E \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$v^p(p) = \int_E \exp(p\eta(x)) \mu(dx).$$

Misalkan $f(x) = \exp(\eta(x))$, maka $\eta(x) = \log f(x)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
v^p(p) &= \int_E \exp(p\eta(x)) \mu(dx) \\
&= \int_E \exp(p \log f(x)) \mu(dx) \\
&= \int_E f^p(x) \mu(dx).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $v(p) = \|f\|_p$, sehingga terbukti $v(p) \in \Psi(\alpha, \beta)$. ■

Definisi 4.11 (Ostrovsky & Sirota, 2007)

Didefinisikan perluasan dari himpunan $\Psi(\alpha, \beta)$ sebagai berikut.

$$EX\Psi(\alpha, \beta) = \left\{ v(p) \left| \exists \psi(p) \in \Psi(\alpha, \beta): 0 < \inf_{p \in (\alpha, \beta)} \frac{\psi(p)}{v(p)} \leq \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \frac{\psi(p)}{v(p)} < \infty \right. \right\},$$

$$U\Psi(\alpha, \beta) = \{\psi(p) | \forall p \in (\alpha, \beta), \psi(p) > 0\},$$

fungsi $p \rightarrow \psi(p)$, $p \in (\alpha, \beta)$ kontinu sedemikian sehingga limit $\psi(\alpha + 0), \psi(b - 0) \in (0, \infty]$. Pada kasus $\beta = \infty$, $\psi(b - 0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \psi(p) \in (0, \infty]$.

Definisi 4.12 (Formica dkk., 2021)

Misalkan $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar di $E \subseteq \mathbb{R}$. Kemudian misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan

$\psi(p) \in U\Psi(\alpha, \beta)$ dengan $p \in (\alpha, \beta)$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval (α, β) dengan $1 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (\alpha, \beta)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq \infty.$$

Salah satu contoh dari ruang grand Lebesgue adalah $L^{(\beta), \theta}$ sebagaimana remark berikut.

Remark 4.13 (Formica dkk., 2021)

Didefinisikan fungsi $\psi(p) = (\beta - p)^{-\theta/p}$ untuk $p \in (1, \beta)$ dengan $1 < \beta < \infty$ dan $\theta \geq 0$.

Substitusikan $p = \beta - \varepsilon$ dengan $\varepsilon \in (0, \beta - 1)$, sehingga $p \in (1, \beta)$ dapat ditulis menjadi $1 < \beta - \varepsilon < \beta$. Sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} \psi(p) &= (\beta - p)^{-\frac{\theta}{p}} \\ &= (\beta - (\beta - \varepsilon))^{-\frac{\theta}{\beta - \varepsilon}} \\ &= \varepsilon^{-\frac{\theta}{\beta - \varepsilon}}, \end{aligned}$$

Dan norma $G\psi_{1, \beta}$ untuk sebarang fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ adalah

$$\begin{aligned} \|f\|_{G\psi_{1, \beta}} &= \sup_{p \in (1, \beta)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \\ &= \sup_{1 < \beta - \varepsilon < \beta} \left\{ \frac{\|f\|_{\beta - \varepsilon}}{\varepsilon^{-\frac{\theta}{\beta - \varepsilon}}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \sup_{1 < \beta - \varepsilon < \beta} \left\{ \varepsilon^{\frac{\theta}{\beta - \varepsilon}} \|f\|_{\beta - \varepsilon} \right\}$$

Inilah yang diperkenalkan oleh Greco dkk. (1997) dan normanya dinotasikan dengan $\|f\|_{L^{\beta}, \theta}$ ($\beta > 1, \theta \geq 0$). Ruang $L^{\beta), \theta}$ untuk $\theta = 1$ dikenal sebagai Iwaniec & Sbordone (1992) *space* $L^{\beta)}$. Salah satu teorema pada penelitian Ostrovsky & Sirota (2007) menyatakan bahwa ruang grand Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ merupakan ruang Banach.

Teorema 4.14 (Ostrovsky & Sirota, 2007)

Ruang $G\psi_{\alpha, \beta}$ dengan norma $\|\cdot\|_{G\psi_{\alpha, \beta}}$ adalah ruang Banach.

Bukti.

Misalkan $p(i)$ adalah bilangan rasional pada interval (α, β) . Dapat dilihat bahwa barisan $(p(i))$ dengan $i = 1, 2, \dots$ adalah barisan yang padat dan terhitung terhitung pada interval (α, β) . Berdasarkan Definisi 2.24 dan 4.12,

$$\|f_n - f_m\|_{p(i)} = \left(\int_E |f_n - f_m|^{p(i)} \right)^{\frac{1}{p(i)}}$$

dan

$$\|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p(i) \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f_n - f_m\|_{p(i)}}{\psi(p(i))} \right\}.$$

Ambil sebarang barisan Cauchy $(f_n) \in G\psi_{\alpha, \beta}$, berdasarkan Definisi 2.30

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = 0,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa barisan Cauchy (f_n) konvergen ke suatu $f \in G\psi_{\alpha, \beta}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha,\beta}} &= \sup_{p(i) \in (\alpha,\beta)} \left\{ \frac{\|f_n - f_m\|_{p(i)}}{\psi(p(i))} \right\} \\ &\geq \frac{\|f_n - f_m\|_{p(i)}}{\psi(p(i))},\end{aligned}$$

sehingga $\forall i = 1, 2, \dots$

$$\|f_n - f_m\|_{p(i)} \leq \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha,\beta}} \psi(p(i)).$$

Karena (f_n) Cauchy di $G\psi_{\alpha,\beta}$, maka berdasarkan Definisi 2.30 untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|f_n - f_m\|_{p(i)} \leq \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha,\beta}} \psi(p(i)) < \varepsilon.$$

Jadi dapat dilihat bahwa (f_n) juga merupakan barisan Cauchy di $L_{p(i)}$.

Berdasarkan Teorema 2.41 $L_{p(i)}$ lengkap, maka untuk setiap i ada $\tilde{f}_i \in L_{p(i)}$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \tilde{f}_i\|_{p(i)} = 0$$

Dengan kata lain barisan (f_n) konvergen ke $\tilde{f}_i \in L_{p(i)}$.

Karena $f_n \rightarrow \tilde{f}_1$ di $L_{p(1)}$, maka terdapat subbarisan (f_{n_k}) sedemikian sehingga $f_{n_k} \rightarrow \tilde{f}_1$ μ -hampir di mana-mana. Kemudian telah diketahui bahwa untuk setiap i , $f_n \rightarrow \tilde{f}_i$ di $L_{p(i)}$, maka ada subbarisan yang sama (f_{n_k}) sedemikian sehingga $f_{n_k} \rightarrow \tilde{f}_i$ μ -hampir di mana-mana. Karena limit μ -hampir dimana-mana bersifat tunggal, yaitu

$$\mu\{x | \exists i: \tilde{f}_i(x) \neq \tilde{f}_1(x)\} = 0,$$

maka $\tilde{f}_i(x) = \tilde{f}_1(x)$ untuk μ -hampir dimana-mana. Selanjutnya akan ditulis $f := \tilde{f}_i$, sehingga $\forall i = 1, 2, \dots$

$$\|f_n - f\|_{p(i)} \leq \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha,\beta}} \right) \psi(p(i)).$$

Ambil sebarang $p \in (\alpha, \beta)$. Karena barisan $(p(i))$ padat di (α, β) , maka terdapat subbarisan $(p(i_k))$ sedemikian sehingga $p(i_k) \rightarrow p$. Kemudian, karena pemetaan $p \mapsto \|f_n - f\|_{p(i)}$ kontinu di p dan ψ kontinu di (α, β) , maka dengan mengambil limit $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{p(i_k)} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) \psi(p(i_k)) \right] \\ &= \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) \psi(p), \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\|f_n - f\|_p \leq \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) \psi(p).$$

Perhatikan bahwa $\forall p \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p &\leq \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) \psi(p) \\ \frac{\|f_n - f\|_p}{\psi(p)} &\leq \sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\|f_n - f\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} = \sup_{p \in (\alpha, \beta)} \left\{ \frac{\|f_n - f\|_p}{\psi(p)} \right\} \leq \sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}}.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{\alpha, \beta}} \right) = 0$, maka terbukti bahwa ruang grand

Lebesgue $G\psi_{\alpha, \beta}$ lengkap. ■

Contoh 4.15

Ambil $E = [0, 1]$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Ambil $\psi(p) = (2^p + 1)^{\frac{1}{p}}$ pada Contoh 4.9 dengan $p \in (1, 2)$. Berdasarkan Definisi 4.12, ruang grand Lebesgue $G\psi_{1, 2}$ terdiri dari semua fungsi terukur $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\|f\|_{G\psi_{1,2}} = \sup_{1 < p < 2} \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} < \infty.$$

Definisikan barisan fungsi (f_n) pada $[0,1]$ dengan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}.$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $f_n(x)$ kontinu di $[0,1]$ sehingga merupakan fungsi terukur. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n\|_p &= \left(\int_0^1 \left| x^{\frac{1}{n}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 x^{\frac{p}{n}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{p}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{n}{n+p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan juga

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 1^{\frac{1}{p}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dan untuk $x \in (0,1]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Misalkan $f(x) = 1$, untuk $x \in (0,1]$ dan untuk $x = 0$, f didefinisikan sebarang.

Karena barisan $(f_n(x))$ konvergen *pointwise* ke $f(x)$ dan $\|f_n\|_p$ juga konvergen ke

$f(x)$, maka berdasarkan Definisi 2.30 dan 2.32, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $n, m \geq N \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_p = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{1,2}} &= \sup_{1 < p < 2} \|f_n - f_m\|_p \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{G\psi_{1,2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{1 < p < 2} \|f_n - f_m\|_p \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sehingga (f_n) merupakan barisan Cauchy di $G\psi_{1,2}$. Karena $(f_n(x))$ konvergen *pointwise* ke $f(x)$, maka akan ditunjukkan $f(x) \in G\psi_{1,2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f\|_{G\psi_{1,2}} &= \sup_{1 < p < 2} \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \\ &= \sup_{1 < p < 2} \frac{\left(\int_0^1 |1|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \sup_{1 < p < 2} \left(\frac{1}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{1 < p < 2} \frac{1}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan bahwa, untuk $1 < p < 2$

$$2 < 2^p < 4$$

$$3 < 2^p + 1 < 5$$

$$\frac{1}{3^{\frac{1}{p}}} < (2^p + 1)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{5^{\frac{1}{p}}}$$

$$\frac{1}{5^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}.$$

Lalu karena untuk $1 < p < 2$, $\frac{1}{5^{1/p}} > 0$, maka

$$0 < \frac{1}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}}.$$

Kemudian perhatikan bahwa, untuk $1 < p < 2$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p} < 1,$$

maka

$$3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{p}} < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Karena $\frac{1}{\sqrt{3}} < \infty$, maka

$$0 < \frac{1}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \infty,$$

sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{1,2}} = \sup_{1 < p < 2} \frac{1}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} < \infty.$$

Terlihat barisan Cauchy (f_n) konvergen ke $f \in G\psi_{1,2}$, dalam pembuktian lebih jauh, dapat ditunjukkan ruang grand Lebesgue $G\psi_{1,2}$ lengkap.

Berdasarkan Teorema 4.15, ruang grand Lebesgue merupakan ruang Banach. Selanjutnya akan dikaji sifat lain pada ruang ini, yaitu ketaksamaan Hölder. Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu fondasi penting dalam analisis fungsional. Pada ruang grand Lebesgue, ketaksamaan ini perlu disesuaikan karena

normanya didefinisikan sebagai supremum terhadap p . Berikut adalah teorema dan pembuktian lengkapnya.

Teorema 4.16

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran. Misalkan $p \in (\alpha_1, \beta_1)$ dengan $1 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \infty$ dan $q \in (\alpha_2, \beta_2)$ dengan $1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \infty$. Misalkan $\psi(p)$ dan $\varphi(q)$ adalah fungsi kontinu yang bernilai positif pada domain masing-masing. Ambil $r \in (c, d)$ dengan $1 \leq c < d \leq \infty$ dan definisikan fungsi

$$\theta(r) = \sup \left\{ \psi(p)\varphi(q) \mid p \in (\alpha_1, \beta_1), q \in (\alpha_2, \beta_2), \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\},$$

sedemikian sehingga $\forall r \in (c, d), \theta(r) < \infty$. Jika $f \in G\psi_{\alpha_1, \beta_1}$ dan $g \in G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}$, maka

$$fg \in G\theta_{c,d}$$

dan

$$\|fg\|_{G\theta_{c,d}} \leq \|f\|_{G\psi_{\alpha_1, \beta_1}} \|g\|_{G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}}.$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 4.12, untuk $fg \in G\theta_{c,d}$

$$\begin{aligned} \|fg\|_{G\theta_{c,d}} &= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \right\} \\ &= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\left(\int_E |fg|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\theta(r)} \right\} \\ &= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\left(\int_E |f|^r |g|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\theta(r)} \right\}. \end{aligned}$$

Diketahui bahwa

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Definisikan

$$a = \frac{p}{r}, \quad b = \frac{q}{r}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} \\ &= \frac{r}{p} + \frac{r}{q} \\ &= r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &= r \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

sehingga a dan b adalah eksponen konjugat. Berdasarkan ketaksamaan Hölder pada ruang Lebesgue (Muscat, 2024) didapatkan

$$\begin{aligned} \int_E |f|^r |g|^r &\leq \left(\int_E |f|^r |^a \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_E |g|^r |^b \right)^{\frac{1}{b}} \\ \int_E |f|^r |g|^r &\leq \left(\int_E (|f|^r)^a \right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_E (|g|^r)^b \right)^{\frac{1}{b}} \\ &= \left(\int_E (|f|^r)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E (|g|^r)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{r}{q}} \\ &= \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}}. \end{aligned}$$

Karena $|f|^r |g|^r = |fg|^r$, maka

$$\begin{aligned}
\int_E |fg|^r &\leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \\
\left(\int_E |fg|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left[\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \right]^{\frac{1}{r}} \left[\left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q,
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)}.$$

Karena

$$\begin{aligned}
\theta(r) &= \sup \left\{ \psi(p)\varphi(q) \mid \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\} \\
&\geq \psi(p)\varphi(q),
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta(r)} &\leq \frac{1}{\psi(p)\varphi(q)} \\
\frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)} &\leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)}.
\end{aligned}$$

Kemudian, karena

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)},$$

maka

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)} = \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \cdot \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sup_{p \in (\alpha_1, \beta_1)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \geq \frac{\|f\|_p}{\psi(p)}$$

dan

$$\sup_{q \in (\alpha_2, \beta_2)} \left\{ \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \right\} \geq \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} &\leq \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \cdot \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \\ &\leq \sup_{p \in (\alpha_1, \beta_1)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \cdot \sup_{q \in (\alpha_2, \beta_2)} \left\{ \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \right\} \\ &= \|f\|_{G\psi_{\alpha_1, \beta_1}} \|g\|_{G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}}. \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \|f\|_{G\psi_{\alpha_1, \beta_1}} \|g\|_{G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}}$$

berlaku untuk setiap $r \in (c, d)$, maka drngan mengambil supremum terhadap r didapatkan

$$\begin{aligned} \sup_{r \in (c, d)} \left\{ \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \right\} &\leq \|f\|_{G\psi_{\alpha_1, \beta_1}} \|g\|_{G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}} \\ \|fg\|_{G\theta_{c, d}} &\leq \|f\|_{G\psi_{\alpha_1, \beta_1}} \|g\|_{G\varphi_{\alpha_2, \beta_2}}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa Teorema 4.16 terbukti. ■

4.3 Ruang Grand-Kuasi Lebesgue

Norma pada ruang grand Lebesgue tidak berlaku untuk $p < 1$. Karena hal ini kemudian diperkenalkan ruang grand-kuasi Lebesgue, di mana ruang ini adalah ruang grand Lebesgue dengan $p \in (a, b)$ dengan $0 < a < b \leq 1$. Berikut akan dibahas definisi dari ruang grand-kuasi Lebesgue.

Definisi 4.17 (Formica dkk., 2021)

Misalkan $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar di $E \subseteq \mathbb{R}$. Kemudian misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran di mana μ adalah ukuran yang terdefinisi pada ruang terukur $(E, \mathcal{B})$ dan $\psi(p) = \psi_{a,b}(p)$ dengan $p \in (a, b)$ merupakan suatu fungsi kontinu positif yang bernilai real di interval (a, b) di mana $0 < a < b \leq 1$ sedemikian sehingga

$$\inf_{p \in (a,b)} \psi(p) > 0.$$

Ruang grand Lebesgue $G\psi_{a,b}$ memuat semua fungsi terukur $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 0 < a < b \leq 1.$$

Proposisi 4.18 (Formica dkk., 2021)

Ruang Grand Lebesgue $G\psi = G\psi_{a,b}$, $0 < a < b \leq 1$, yang dibangun di ruang terukur $(E, \mathcal{B}, \mu)$ dengan ukuran non-trivial μ , adalah ruang kuasi norma dengan konstanta kuasi-segitiga

$$C = C[\psi_{a,b}] = 2^{\frac{1}{a}-1};$$

Misal $f, g \in G\psi$, maka

$$\|f + g\|_{G\psi_{a,b}} \leq 2^{\frac{1}{a}-1} (\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}}).$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 4.17 norma pada ruang grand-kuasi Lebesgue didefinisikan sebagai berikut.

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} < \infty, \quad 0 < a < b \leq 1$$

untuk setiap $f \in G\psi_{a,b}$. Kemudian akan dibuktikan norma $\|\cdot\|_{G\psi_{a,b}}$ merupakan kuasi norma dengan memenuhi Definisi 2.44.

1. Berdasarkan Definisi 4.16 $\psi(p) > 0$ dengan $0 < a < b \leq 1$. Kemudian dari Definisi 2.18 $\|f\|_p \geq 0$ sehingga

$$\frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \geq 0$$

$$\sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \geq 0$$

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} \geq 0$$

untuk setiap $f \in G\psi_{a,b}$.

2. $(\Rightarrow)$ Asumsikan $\|f\|_{G\psi_{a,b}} = 0$, akan ditunjukkan bahwa $f = 0$. Perhatikan bahwa

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = 0$$

$$\sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} = 0$$

$$\left(\sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \right) \psi(p) = 0$$

$$\|f\|_p = 0.$$

Karena $\|\cdot\|_p$ adalah norma di L^p , maka jelas bahwa $f = 0$.

- $(\Leftarrow)$ Asumsikan $f = 0$, akan ditunjukkan $\|f\|_{G\psi_{a,b}} = 0$. perhatikan bahwa

$$f = 0$$

$$\|f\|_p = 0$$

$$\frac{\|f\|_p}{\psi(p)} = 0$$

$$\sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} = 0.$$

Terlihat bahwa $\|f\|_{G\psi_{a,b}} = 0$.

3. Untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, perhatikan bahwa

$$\|af\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|af\|_p}{\psi(p)} \right\}$$

Karena $\|\cdot\|_p$ adalah norma di L^p , maka

$$\begin{aligned} \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|af\|_p}{\psi(p)} \right\} &= \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{|a|\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \\ &= \sup_{p \in (a,b)} \left\{ |a| \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \\ &= \sup_{p \in (a,b)} |a| \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \\ &= |a| \sup_{p \in (a,b)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \\ &= |a| \|f\|_{G\psi_{a,b}}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk suatu $a \in \mathbb{R}$, $\|af\|_{G\psi_{a,b}} = |a| \|f\|_{G\psi_{a,b}}$.

4. Perhatikan bahwa

$$\|f + g\|_p = \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f + g\|_p^p = \int_E |f(x) + g(x)|^p \mu(dx).$$

Karena untuk $A, B \geq 0$ dan $0 < p < 1$ berlaku

$$(A + B)^p \leq A^p + B^p \leq 2^{1-p}(A + B)^p,$$

maka

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_E |f(x) + g(x)|^p \mu(dx) \\ &\leq \int_E |f(x)|^p \mu(dx) + \int_E |g(x)|^p \mu(dx) \\ &= \|f\|_p^p + \|g\|_p^p. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \leq 2^{1-p}(\|f\|_p + \|g\|_p)^p,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq 2^{1-p}(\|f\|_p + \|g\|_p)^p \\ \|f + g\|_p &\leq [2^{1-p}(\|f\|_p + \|g\|_p)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Karena $f, g \in G\psi_{a,b}$ maka $\|f\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$ dan $\|g\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$. Sehingga

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{G\psi_{a,b}} \cdot \psi(p), \quad \|g\|_p \leq \|g\|_{G\psi_{a,b}} \cdot \psi(p)$$

untuk $p \in (a, b)$. Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{G\psi_{a,b}} \cdot \psi(p) + \|g\|_{G\psi_{a,b}} \cdot \psi(p)) \\ &= 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}})\psi(p). \end{aligned}$$

Didapatkan

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}})\psi(p)$$

$$\frac{\|f + g\|_p}{\psi(p)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}}).$$

Lalu ambil supremum terhadap $p \in (a, b)$,

$$\|f + g\|_{G\psi_{a,b}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}}),$$

dengan $p > a > 0$, maka $2^{\frac{1}{p}-1} \leq 2^{\frac{1}{a}-1}$ sedemikian sehingga

$$\|f + g\|_{G\psi_{a,b}} \leq 2^{\frac{1}{a}-1} (\|f\|_{G\psi_{a,b}} + \|g\|_{G\psi_{a,b}}).$$

Terbukti bahwa ruang Grand Lebesgue $G\psi = G\psi_{a,b}$, $0 < a < b \leq 1$, yang dibangun di ruang terukur $(E, \mathcal{B}, \mu)$ dengan ukuran non-trivial μ , adalah ruang kuasi norma dengan konstanta kuasi-segitiga $C = C[\psi_{a,b}] = 2^{\frac{1}{a}-1}$. ■

Contoh 4.19

Ambil $E = (0,1)$, $p \in (a, b)$ dengan $a = \frac{1}{2}$ dan $b = 1$ dan $\psi(p) = 1$. Sedemikian untuk setiap $f \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$ berlaku

$$\|f\|_{G\psi_{a,b}} = \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \|f\|_p.$$

Definisikan fungsi $f, g \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$ dengan

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

untuk $x \in E$. Akan ditunjukkan $\|\cdot\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}}$ merupakan kuasi-norma dengan konstanta

kuasi segitiga $C = 2^{\frac{1}{a}-1} = 2$.

1. Perhatikan bahwa

$$\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} = \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \|f(x)\|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\int_0^1 \left| x^{\frac{1}{2}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\int_0^1 x^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa fungsi $\left(\frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{p}}$ menurun di $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, sehingga supremum tercapai saat $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2}, 1}} &= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{\frac{1/2}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{1/2}} \\
&= \left(\frac{4}{5} \right)^2 \\
&= \frac{16}{25} \geq 0.
\end{aligned}$$

2. Jelas terlihat bahwa $\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2}, 1}} = 0$ saat $f(x) = 0$ dan sebaliknya $f(x) = 0$, saat $\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2}, 1}} = 0$.

3. Ambil $\alpha = 3 \in \mathbb{R}$ didapatkan

$$\|3f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2}, 1}} = \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \|3f(x)\|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} |3| \|f(x)\|_p \\
&= |3| \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \|f(x)\|_p \\
&= |3| \|3f(x)\|_{G\psi_{a,b}}.
\end{aligned}$$

4. $C = 2^{\frac{1}{a}-1} = 2$. Perhatikan bahwa

$$\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} = \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

dan

$$\|g(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} = \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{1}{\frac{p}{3} + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Karena supremum tercapai saat $p = \frac{1}{2}$, maka

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &= \left(\frac{1}{\frac{1/2}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{1/2}} \\
&= \left(\frac{4}{5} \right)^2 \\
&= \frac{16}{25}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|g(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &= \left(\frac{1}{\frac{1/2}{3} + 1} \right)^{\frac{1}{1/2}} \\
&= \left(\frac{6}{7} \right)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{36}{49}.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \\ \|f(x) + g(x)\|_p &= \left(\int_0^1 \left| x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|f(x) + g(x)\|_p^p &= \int_0^1 \left| x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \right|^p dx \\ &\leq \int_0^1 \left| x^{\frac{1}{2}} \right|^p dx + \int_0^1 \left| x^{\frac{1}{3}} \right|^p dx \\ &= \frac{1}{\frac{p}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{p}{3} + 1}, \end{aligned}$$

Sehingga dengan mengambil supremum terhadap p didapatkan

$$\begin{aligned} \|f(x) + g(x)\|_p &\leq \left(\frac{1}{\frac{p}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{p}{3} + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|f(x) + g(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &\leq \left(\frac{1}{\frac{1/2}{2} + 1} + \frac{1}{\frac{1/2}{3} + 1} \right)^{\frac{1}{1/2}} \\ &= \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{7} \right)^2 \\ &= \left(\frac{58}{35} \right)^2 \\ &= \frac{3364}{1225}. \end{aligned}$$

Kemudian dengan $C = 2$, didapatkan

$$2 \left(\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} + \|g(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} \right) = 2 \left(\frac{16}{25} + \frac{36}{49} \right)$$

$$= \frac{3368}{1225}.$$

Karena $\|f(x) + g(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} \leq \frac{3364}{1225} \leq \frac{3368}{1225}$, maka ketaksamaan segitiga pada

kuasi-norma terpenuhi dengan $C = 2$.

Sehingga terlihat $\|\cdot\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}}$ adalah kuasi-norma dan $G\psi_{\frac{1}{2},1}$ adalah ruang kuasi-norma

dengan $C = 2^{\frac{1}{a}-1} = 2$.

Teorema 4.20 (Formica dkk., 2021)

Misalkan $\mathcal{B}$ adalah σ -aljabar di $E \subseteq \mathbb{R}$. Kemudian misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran dengan ukuran non-trivial μ . Ruang grand-kuasi Lebesgue $G\psi_{a,b}$, $0 < a < b \leq 1$, yang dibangun di $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah lengkap dengan berdasarkan pada jarak kuasi $\rho(x, y) := \|x - y\|_{G\psi_{a,b}}$.

Bukti.

Sebelum membuktikan ruang grand-kuasi Lebesgue lengkap, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $L^p(E)$ untuk $0 < p < 1$ lengkap menggunakan Teorema 4.2.

Misalkan $\|\cdot\|_p$ pada $L^p(E)$ adalah kuasi-norma dengan konstanta kuasi segitiga $C = 1$. Untuk $0 < p < 1$ berdasarkan Teorema 4.5, untuk $x, y, w \in L^p(E)$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \|x - y\|_p^p \\ &= \|(x - w) + (w - y)\|_p^p \\ &\leq \|x - w\|_p^p + \|w - y\|_p^p \\ &= \int_E |x - w|^p + \int_E |w - y|^p \\ &= \rho(x, w) + \rho(w, y). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 4.2, ruang kuasi-norma L^p lengkap jika dan hanya jika untuk setiap deret dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p^p < \infty,$$

Maka $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in L^p$ dan memenuhi

$$\|x\|_p^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p^p.$$

Ambil sebarang barisan $(x_k) \in L^p(E)$ dengan

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |x_k(z)|^p d\mu < \infty.$$

Akan ditunjukkan bahwa $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in L^p$ dan $\|x\|_p^p \leq S$.

Definisikan $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^n |x_k(z)|^p, \quad F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)|^p.$$

Jelas bahwa $F_n(z) \geq 0$ dan F_n monoton naik. Karena $F_n(z)$ adalah deret parsial dari $F(z)$, maka $F_n(z) \rightarrow F(z)$ saat $n \rightarrow \infty$. Berdasarkan Teorema 2.54 diperoleh

$$\int_E F(z) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(z) d\mu.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_E F_n(z) d\mu &= \int_E \sum_{k=1}^n |x_k(z)|^p d\mu \\ &= \sum_{k=1}^n \int_E |x_k(z)|^p d\mu \\ &= \sum_{k=1}^n \|x_k\|_p^p. \end{aligned}$$

Kemudian dengan mengambil limit $n \rightarrow \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_E F(z) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(z) d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\|_p^p \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_p^p \\
 &= S < \infty.
 \end{aligned}$$

Karena $\int_E F(z) d\mu < \infty$, maka $F(z) < \infty$ hampir dimana-mana, yang artinya

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)|^p < \infty$$

z - hampir dimana-mana.

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)|^p < \infty$ z - hampir dimana-mana, maka untuk $|x_k(z)| \leq 1$ dan

$0 < p < 1$ berlaku

$$\begin{aligned}
 |x_k(z)| &\leq |x_k(z)|^p \\
 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)|^p \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k(z)| < \infty$ z - hampir dimana-mana, maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(z)$ konvergen

mutlak ke suatu $x(z)$ di $L^p(E)$. Kemudian karena untuk $A, B \geq 0$ dan $0 < p < 1$

berlaku $(A + B)^p \leq A^p + B^p$, maka

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k(z) \right|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k(z)|^p = F_n(z).$$

Ambil limit untuk $n \rightarrow \infty$. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(z)$ konvergen mutlak ke suatu $x(z) \in L_p(E)$, maka deret parsialnya

$$\sum_{k=1}^n x_k(z) \rightarrow x(z)$$

z - hampir dimana-mana, sehingga

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k(z) \right|^p \rightarrow |x(z)|^p.$$

Lalu telah diketahui untuk $n \rightarrow \infty$, $F_n(z) \rightarrow F(z)$, sehingga perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n x_k(z) \right|^p &\leq F_n(z) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n x_k(z) \right|^p &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) \\ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k(z) \right|^p &\leq F(z) \\ |x(z)|^p &\leq F(z) \\ \int_E |x(z)|^p d\mu &\leq \int_E F(z) d\mu \\ \|x\|_p^p &\leq S < \infty. \end{aligned}$$

Karena $x \in L^p$ dan $\|x\|_p^p \leq S$, maka terbukti bahwa $L^p, 0 < p < 1$ lengkap.

Berdasarkan Proposisi 4.19, $G\psi_{a,b}$ adalah ruang kuasi-norma dengan konstanta kuasi segitiga $C = 2^{\frac{1}{a}-1} > 1$. Akan ditunjukkan $G\psi_{a,b}$ lengkap dengan menggunakan Teorema 4.2.

Ruang grand-kuasi Lebesgue lengkap jika dan hanya jika untuk setiap deret dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} < \infty,$$

maka $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in G\psi_{a,b}$ dan

$$\|x\|_{G\psi_{a,b}} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}}.$$

Ambil sebarang barisan $(x_k) \in G\psi_{a,b}$ dengan

$$\Theta := \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} = \sum_{k=1}^{\infty} C^k \sup_{p \in (a,b)} \frac{\|x_k\|_p}{\psi(p)} < \infty.$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\|x_k\|_p}{\psi(p)} \leq \sup_{p \in (a,b)} \frac{\|x_k\|_p}{\psi(p)} = \|x_k\|_{G\psi_{a,b}},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\|x_k\|_p}{\psi(p)} &\leq \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} \\ \|x_k\|_p &\leq \psi(p) \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p &\leq \psi(p) \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_{G\psi_{a,b}} \\ &= \psi(p) \Theta < \infty. \end{aligned}$$

Diketahui sebelumnya bahwa L^p lengkap. Karena $\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p < \infty$, maka berdasarkan Teorema 4.2 $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in L^p, \forall p \in (a, b)$ dan memenuhi

$$\|x\|_p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p.$$

Perhatikan bahwa

$$\|x\|_p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|x_k\|_p$$

$$\|x\|_p \leq C \psi(p) \Theta$$

$$\frac{\|x\|_p}{\psi(p)} \leq C\Theta.$$

Dengan mengambil supremum atas $p \in (a, b)$, diperoleh

$$\|x\|_{G\psi_{a,b}} \leq C\Theta < \infty.$$

Karena $\|x\|_{G\psi_{a,b}} < \infty$, maka $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in G\psi_{a,b}$. Karena $x \in G\psi_{a,b}$ dan

$\|x_k\|_{G\psi_{a,b}} \leq C\Theta$, maka terbukti bahwa $G\psi_{a,b}$ lengkap. ■

Contoh 4.21

Ambil $E = [0,2] \cup [3,5]$, $\mathcal{B}$ σ -aljabar di E , dan μ ukuran Lebesgue pada E . Lalu

ambil $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $\psi(p) = (2^p + 1)^{\frac{1}{p}}$. Definisikan barisan fungsi (f_k)

untuk $k = 1, 2, \dots$

$$f_k(x) = \frac{1}{4^k} \chi_{[0,2]}(x) + \frac{1}{4^k} \chi_{[3,5]}(x).$$

Pertama akan ditunjukkan $f_k \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|f_k(x)\|_p &= \left(\int_E |f_k(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{[0,2]} \left| \frac{1}{4^k} \right|^p d\mu + \int_{[3,5]} \left| \frac{1}{4^k} \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\left| \frac{1}{4^k} \right|^p \mu([0,2]) + \left| \frac{1}{4^k} \right|^p \mu([3,5]) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{2}{4^{kp}} + \frac{2}{4^{kp}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{4^{\frac{1}{p}}}{4^k}, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
 \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{\|f_k(x)\|_p}{\psi(p)} \right\} &= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{\frac{4^{\frac{1}{p}}}{4^k}}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right\} \\
 &= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{1}{4^k} \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
 &= \frac{1}{4^k} \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Fungsi $\left(\frac{2}{2^p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ turun di $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, sehingga supremum tercapai saat $p = \frac{1}{2}$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}
 \|f_k\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &= \frac{1}{4^k} \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
 &= \frac{1}{4^k} \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 < \infty.
 \end{aligned}$$

Karena $\|f_k\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} < \infty$, maka $f_k \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$. Kemudian akan ditunjukkan

$\sum_{k=1}^{\infty} C^k \|f_k\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} < \infty$. Berdasarkan Proposisi 4.17, $C = 2^{\frac{1}{a}-1} = 2$. Perhatikan

bahwa

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} C^k \|f_k\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{4^k} \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} \\
 &= \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 < \infty.$$

Misalkan $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ akan ditunjukkan $f(x) \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^k} \chi_{[0,2]}(x) + \frac{1}{4^k} \chi_{[3,5]}(x) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \chi_{[0,2]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \chi_{[3,5]}(x) \\ &= \frac{1}{3} \chi_{[0,2]}(x) + \frac{1}{3} \chi_{[3,5]}(x). \end{aligned}$$

Kemudian untuk $p \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_p &= \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{[0,2]} |f(x)|^p d\mu + \int_{[3,5]} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{[0,2]} \left| \frac{1}{3} \right|^p d\mu + \int_{[3,5]} \left| \frac{1}{3} \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\left| \frac{1}{3} \right|^p \mu([0,2]) + \left| \frac{1}{3} \right|^p \mu([3,5]) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{2}{3^p} + \frac{2}{3^p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{4^{\frac{1}{p}}}{3}, \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{\|f(x)\|_p}{\psi(p)} \right\} &= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{\frac{4^{\frac{1}{p}}}{3}}{(2^p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right\} \\
&= \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.
\end{aligned}$$

Fungsi $\left(\frac{2}{2^p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$ turun di $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, sehingga supremum tercapai saat $p = \frac{1}{2}$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} &= \frac{1}{3} \sup_{p \in (\frac{1}{2}, 1)} \left\{ \left(\frac{4}{2^p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$. Terakhir dengan $C = 2$ akan

ditunjukkan $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|f_k(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{3} \leq 2$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{4}{\sqrt{2} + 1} \right)^2$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|f_k(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}}$$

Terlihat bahwa $f(x) \in G\psi_{\frac{1}{2},1}$ dan memenuhi $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|f_k(x)\|_{G\psi_{\frac{1}{2},1}}$, dalam pembuktian lebih jauh dapat ditunjukkan ruang grand-kuasi Lebesgue $G\psi_{\frac{1}{2},1}$ lengkap.

Berdasarkan Teorema 4.20, ruang grand-kuasi Lebesgue merupakan ruang kuasi-norma yang lengkap. Selanjutnya akan dikaji sifat lain pada ruang ini, yaitu ketaksamaan Hölder. Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu fondasi penting dalam analisis fungsional. Pada ruang grand-kuasi Lebesgue, ketaksamaan ini perlu disesuaikan karena kuasi-normanya didefinisikan sebagai supremum terhadap p dengan $0 < p < 1$. Berikut adalah teorema dan pembuktian lengkapnya.

Teorema 4.22

Misalkan $(E, \mathcal{B}, \mu)$ adalah ruang ukuran. Misalkan $p \in (a_1, b_1)$ dengan $0 < a_1 < b_1 \leq 1$ dan $q \in (a_2, b_2)$ dengan $0 < a_2 < b_2 \leq 1$. Misalkan $\psi(p)$ dan $\varphi(q)$ adalah fungsi kontinu yang bernilai positif pada domain masing-masing. Ambil $r \in (c, d)$ dengan $0 < c < d \leq 1$ dan definisikan fungsi

$$\theta(r) = \sup \left\{ \psi(p)\varphi(q) \mid p \in (a_1, b_1), q \in (a_2, b_2), \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\},$$

sedemikian sehingga $\forall r \in (c, d), \theta(r) < \infty$. Jika $f \in G\psi_{a_1, b_1}$ dan $g \in G\varphi_{a_2, b_2}$, maka

$$fg \in G\theta_{c,d}$$

dan

$$\|fg\|_{G\theta_{c,d}} \leq \|f\|_{G\psi_{a_1, b_1}} \|g\|_{G\varphi_{a_2, b_2}}.$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 4.17, untuk $f \in G\psi_{a_1, b_1}$ dan $g \in G\varphi_{a_2, b_2}$

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{G\theta_{c,d}} &= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \right\} \\
&= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\left(\int_E |fg|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\theta(r)} \right\} \\
&= \sup_{r \in (c,d)} \left\{ \frac{\left(\int_E |f|^r |g|^r \right)^{\frac{1}{r}}}{\theta(r)} \right\}.
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa untuk $p \in (a_1, b_1), q \in (a_2, b_2)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Karena $0 < r < p < 1$ dan $0 < r < q < 1$, maka

$$\frac{p}{r} > 1, \quad \frac{q}{r} > 1.$$

Definisikan

$$A = \frac{p}{r}, \quad B = \frac{q}{r}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} + \frac{1}{B} &= \frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} \\
&= \frac{r}{p} + \frac{r}{q} \\
&= r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\
&= r \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

sehingga a dan b adalah eksponen konjugat. Dengan menerapkan ketaksamaan Hölder pada ruang Lebesgue (Muscat, 2024) terhadap fungsi $u = |f|^r$ dan $|g|^r$, didapatkan

$$\int_E |uv| \leq \left(\int_E |u|^A \right)^{\frac{1}{A}} \left(\int_E |v|^B \right)^{\frac{1}{B}}.$$

Dengan mensubstitusikan $u = |f|^r$ dan $|g|^r$, didapatkan

$$\begin{aligned} \int_E ||f|^r |g|^r| &\leq \left(\int_E ||f|^r|^A \right)^{\frac{1}{A}} \left(\int_E ||g|^r|^B \right)^{\frac{1}{B}} \\ \int_E |f|^r |g|^r &\leq \left(\int_E (|f|^r)^A \right)^{\frac{1}{A}} \left(\int_E (|g|^r)^B \right)^{\frac{1}{B}} \\ &= \left(\int_E (|f|^r)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E (|g|^r)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{r}{q}} \\ &= \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}}. \end{aligned}$$

Karena $|f|^r |g|^r = |fg|^r$, maka

$$\begin{aligned} \int_E |fg|^r &\leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \\ \left(\int_E |fg|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left[\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= \left[\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \right]^{\frac{1}{r}} \left[\left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{r}{q}} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$= \|f\|_p \|g\|_q,$$

sehingga didapatkan

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Kemudian perhatikan bahwa

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)}.$$

Karena

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \sup \left\{ \psi(p)\varphi(q) \mid \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\} \\ &\geq \psi(p)\varphi(q), \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta(r)} &\leq \frac{1}{\psi(p)\varphi(q)} \\ \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)} &\leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)}. \end{aligned}$$

Kemudian, karena

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)},$$

maka

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\psi(p)\varphi(q)} = \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \cdot \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sup_{p \in (a_1, b_1)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \geq \frac{\|f\|_p}{\psi(p)}$$

dan

$$\sup_{q \in (a_2, b_2)} \left\{ \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \right\} \geq \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} &\leq \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \cdot \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \\ &\leq \sup_{p \in (a_1, b_1)} \left\{ \frac{\|f\|_p}{\psi(p)} \right\} \cdot \sup_{q \in (a_2, b_2)} \left\{ \frac{\|g\|_q}{\varphi(q)} \right\} \\ &= \|f\|_{G\psi_{a_1, b_1}} \|g\|_{G\varphi_{a_2, b_2}}. \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \leq \|f\|_{G\psi_{a_1, b_1}} \|g\|_{G\varphi_{a_2, b_2}}$$

berlaku untuk setiap $r \in (c, d)$, maka dengan mengambil supremum terhadap r didapatkan

$$\begin{aligned} \sup_{r \in (c, d)} \left\{ \frac{\|fg\|_r}{\theta(r)} \right\} &\leq \|f\|_{G\psi_{a_1, b_1}} \|g\|_{G\varphi_{a_2, b_2}} \\ \|fg\|_{G\theta_{c, d}} &\leq \|f\|_{G\psi_{a_1, b_1}} \|g\|_{G\varphi_{a_2, b_2}}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa Teorema 4.22 terbukti. ■

4.4 Integrasi Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue

Berdasarkan Surah Al-Mulk: 3-4

Alam semesta dan sistem matematika menyimpan misteri tentang makna dari “kesempurnaan”. Allah SWT telah berfirman bahwa tidak akan ditemukan *tafawut* (ketidakseimbangan) pada ciptaan-Nya sekalipun manusia mengulangi pandangannya untuk mencari celah ataupun kerusakannya (*futhur*), sebagaimana yang tertulis pada Q.S. Al-Mulk: 3-4 (Kemenag, 2022).

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوُّتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ ۚ هَلْ تَرَىٰ
مِن فُتُورٍ ۚ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

Artinya: "(Yaitu) Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat suatu celah? Kemudian pandanglah sekali lagi, niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan cacat dan ia (penglihatanmu) dalam keadaan payah." (QS. Al-Mulk: 3-4).

Pada Q.S. Al-Mulk: 3-4, Allah SWT menegaskan bahwa ciptaan-Nya bersifat “sempurna”, namun pemahaman manusia tentang “kesempurnaan” tersebut dapat diperoleh melalui proses pengamatan dan penalaran berulang kali. Dalam ranah matematika, kelengkapan (*completeness*) merupakan suatu properti atau sifat yang menjamin keutuhan suatu ruang fungsi. Penelitian mengenai ruang grand-kuasi Lebesgue telah dibuktikan memiliki sifat kelengkapan seperti pada Teorema 4.10, di mana hal ini membuka hubungan antara matematika dan Al-Qur'an. Pada subbab ini akan dijelaskan tentang bagaimana sifat kelengkapan dalam matematika menjadi analogi untuk memahami “kesempurnaan” yang tersirat pada Q.S. Al-Mulk: 3-4.

Langit adalah salah satu contoh ciptaan Allah SWT yang sempurna. Kata (سَمَوَاتٍ) adalah bentuk jamak dari kata (سَمَاء) yang berarti segala sesuatu yang diatas kita (Chalik, 2018). Kemudian pada firman-Nya “(Yaitu) Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis” di mana maksud dari “berlapis-lapis”, yaitu *tibaqan* disini dimaknai tingkat demi tingkat (Katsir, 2004). Penjelasan mengenai lapisan/tingkatan ini ditunjukkan oleh Hadits berikut.

“Telah menceritakan kepada kami [Abdurrazzaq] telah memberitakan kepada kami [Yahya bin Al 'Ala'] dari [pamannya, Syu'aib bin Khalid] telah menceritakan kepadaku [Simak bin Harb] dari [Abdullah bin 'Amirah] dari [Abbas bin Abdul Muththalib] berkata: Kami bermajlis bersama Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam di Al Bathha', tiba-tiba sekumpulan awan melintas, maka Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bertanya: "Tahukah kalian apakah itu?" Kami menjawab: "Itu adalah kumpulan awan." Beliau berkata: "Dan mega." kami mengikuti: "Dan mega." Lalu beliau bersabda: "Dan mendung." Maka kamipun diam. Beliau bertanya lagi: "Apakah kalian tahu berapa jarak antara langit dan

bumi?" Kami menjawab: "Allah dan RasulNya lebih mengetahui." Beliau berkata: "Jaraknya adalah sejauh perjalanan lima ratus tahun. Jarak antara langit yang satu dengan langit berikutnya adalah sejauh perjalanan lima ratus tahun juga. Tebal langit adalah sejauh perjalanan lima ratus tahun. Di atas langit ke tujuh ada lautan yang jarak antara dasar dengan permukaannya adalah sebagaimana jarak bumi dan langit. Lalu di atasnya lagi ada delapan penyangga yang jarak antara ujung dengan pangkalnya seperti jarak antara langit dan bumi. Di atasnya lagi ada Arsy yang jarak antara dasar dan permukaannya adalah seperti jarak antara langit dan bumi. Allah Tabaraka Wa Ta'ala berada di atasnya. Tidak ada satu amalan pun yang dilakukan oleh keturunan Adam yang tersembunyi dari-Nya." Abdullah berkata: telah menceritakan kepada kami [Muhammad bin Ash Shabbah Al Bazzar] dan [Muhammad bin Bakkar] berkata: telah menceritakan kepada kami [Al Walid bin Abu Tsaur] dari [Simak bin Harb] dari [Abdullah bin 'Amirah] dari [Al Ahnaf bin Qais] dari [Al Abbas bin Abdul Muththalib] dari Nabi shallallahu 'alaihi wa sallam." H.R. Ahmad.

Keterangan dari hadits ini menunjukkan bahwa ada jarak antar lapisan/tingkatann langit. Pada potongan Q.S. Al-Mulk: 5 yang artinya “*Sesungguhnya Kami telah menghiasi langit yang dekat dengan bintang-bintang*”, kata (الدُّنْيَا) dalam bahasa arab berarti yang paling dekat di mana yang dimaksud adalah langit yang terlihat dari bumi (Chalik, 2018). Apabila seluruh bintang-bintang yang jauh itu adalah hiasan untuk langit paling rendah, maka sepertinya “tujuh lapisan/tingkatan langit” tidak dapat dipahami oleh daya akal manusia.

Pada Q.S. Al-Mulk: 3 kalimat “*Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang*” Allah SWT menegaskan bahwa ciptaan-Nya sangatlah seimbang, tidak ada pertentangan, benturan, ketidakcocokan, kekurangan, dan kerusakan (Katsir, 2004). Keluasan ukuran, keberagaman isi, kerumitan hukum, dan keseimbangan sistem telah memicu pengakuan bahwa semua ciptaan-Nya dirancang dengan seksama (Chalik, 2018). Hal ini menunjukkan bahwa kesempurnaan ciptaan Allah SWT tidak hanya terbatas pada alam semesta saja, tetapi juga tercermin dalam keteraturan sistem-sistem abstrak yang dapat dipahami oleh akal manusia, termasuk dalam ranah matematika.

Dalam konteks ini, sifat kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue menjadi salah satu representasi dari “kesempurnaan” tersebut.

Kemudian pada Q.S. Al-Mulk: 3 kalimat “*Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat suatu celah?*”, Ibnu Abbas, Mujahid, al-Dhahhak, al-Tsauri, dan lainnya menafsirkannya dengan *syuquq* (retak-retak pada langit), al-Suddi menafsirkannya dengan kata *khuruq* (lubang-lubang), sedangkan Ibn Abbas dalam suatu riwayat menyebutkan makna *futhur* adalah celah-celah yang menganga. Allah SWT menegaskan bahwa apabila manusia meneliti setiap jengkal langit dan segala ciptaan-Nya tidak akan ditemukan segala bentuk kerusakan, celah, cacat, lubang dan sebagainya. Demikian pula Ruang Grand-Kuasi Lebesgue yang telah terbukti lengkap menunjukkan bahwa ruang ini tidak memiliki “celah” pada strukturnya, seperti pada Teorema 4.10 di mana setiap deret yang konvergen/berhingga pasti memiliki suatu limit yang berada di dalam ruang tersebut. Sifat kelengkapan ini merupakan bagian dari *sunnatullah* yang dapat dibuktikan kebenarannya melalui penalaran ilmiah.

Kemudian pada Q.S. Al-Mulk: 4 kalimat “*Kemudian pandanglah sekali lagi, niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan cacat dan ia (penglihatanmu) dalam keadaan payah*” Katsir (2004) menafsirkan kata *karratain* adalah dua kali. Ulama’ memahami kata *karratain* (dua kali), yakni sekali untuk melihat keindahannya dan kali kedua untuk melihat keserasian dan konsistensi peredarannya (Shihab, 2012). Kata (حَسَاتَا) diambil dari kata (حَسَا) yang awal mulanya kata ini digunakan untuk mendiamkan gonggongan anjing. Apabila kata iniditujukan kepada manusia, maka ini mengandung makna penghinaan seperti pada Q.S. Al-Mu’minun: 108 (Shihab, 2012).

قَالَ اخْسِئُوا فِيهَا وَلَا تُكَلِّمُونِ

Artinya: “*Tinggallah dengan hina di dalamnya, dan janganlah kamu berbicara dengan Aku.*” (Kemenag, 2022).

Ibn Abbas mengatakan (وَهُوَ حَسِيرٌ) “Yakni sedang dia dalam keadaan tidak berdaya”, sedangkan Mujahid, Qatadah, dan As-Suddi mengatakan “*Al-hasir* berart orang yang berada dalam kelelahan”. Maksud dari Q.S. Al-Mulk: 4 adalah jika manusia melihat secara berulang sebanyak mungkin, niscaya pandangannya akan kembali, yakni tidak menemukan cacat atau kerusakan dan dalam keadaan tidak berdaya.

Ayat ini mengandung dua hal penting, yaitu adanya perintah untuk melakukan pengamatan secara berulang dan teliti dan adanya jaminan bahwa ciptaan Allah SWT benar-benar sempurna dan bebas dari cacat. Topik penelitian ini juga memiliki keterkaitan dengan dua hal penting tersebut. Penulis melakukan proses “pengulangan pandangan”, yakni dalam proses pembuktian Teorema 4.20 dan pembuktian berhasil dengan pernyataan bahwa Ruang Grand-Kuasi Lebesgue bersifat lengkap. Sifat lengkap pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue berarti tidak ditemukannya “celah” dalam strukturnya, yaitu setiap deret yang konvergen/berhingga pasti memiliki suatu limit yang berada di dalam ruang tersebut.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian Proposisi 4.18, Ruang Grand-Kuasi Lebesgue adalah ruang kuasi norma dengan konstanta kuasi segitiga $C = 2^{\frac{1}{a}-1}$. Kemudian pada pembuktian Teorema 4.20, Ruang Grand-Kuasi Lebesgue merupakan ruang kuasi-norma yang lengkap (kuasi-Banach).

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, topik penelitian tentang Ruang Grand-Kuasi Lebesgue ini masih banyak yang belum dibahas, sehingga topik ini dapat dikembangkan lagi dengan sifat-sifat lain seperti keterbatasan operator linier, dualitas, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Aoki, T. (1942). Locally Bounded Linear Topological Spaces. *Proceedings of the Imperial Academy*, 18, 588–594.
- Chalik, A. (2018, Agustus 31). Ngaji Bareng Surah Al-Mulk Ayat 3-5: Kesempurnaan Tuhan. <https://hidayatullah.or.id/ngaji-bareng-surah-al-mulk-ayat-3-5-kesempurnaan-tuhan/>.
- Fiorenza, A., Formica, M. R., & Gogatishvili, A. (2018). On grand and small Lebesgue and Sobolev spaces and some applications to PDE's. *Differential Equations & Applications*, (1), 21–46. <https://doi.org/10.7153/dea-2018-10-03>
- Foralewski, P., Hudzik, H., & Kolwicz, P. (2024). Quasinormed spaces generated by a quasimodular. *Journal of Inequalities and Applications*, 2024(1). <https://doi.org/10.1186/s13660-024-03162-w>
- Formica, M. R., Ostrovsky, E., & Sirota, L. (2021). Grand quasi Lebesgue spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 504(1). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125369>
- Greco, L., Iwaniec, T., & Sbordon, C. (1997). Inverting the p-Harmonic Operator*,**. *Manuscripta Mathematica*, 92, 249–254.
- Hardtke, J.-D. (2012). *A remark on condensation of singularities*. <http://arxiv.org/abs/1204.2106>
- Iwaniec, T., & Sbordon, C. (1992). On the Integrability of the Jacobian under Minimal Hypotheses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 119(2), 129–143.
- Katsir, I. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir* (Jilid 8). Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Katsir, I. (2014). *Tafsir Al-Qur'an Al- 'Azhim* (Jilid 8). Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Kemenag. (2022). *Qur'an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/67?from=1&to=30>.
- Khanfer, A. (2023). Measure Theory and Integration. Dalam *Measure Theory and Integration*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2882-8>
- Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley.
- Muscat, J. (2024). *Functional Analysis* (Second Edition). Springer. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-031-27537-1>

- Nekvinda, A., & Peša, D. (2024). On the Properties of Quasi-Banach Function Spaces. *Journal of Geometric Analysis*, 34(8). <https://doi.org/10.1007/s12220-024-01673-y>
- Ostrovsky, E., & Sirota, L. (2007). Moment Banach spaces: Theory and applications. *HAIT Journal of Science and Engineering C*, 4(2), 233–262.
- Royden, H., & Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis (4th Edition)*.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3ed ed.). Mc.Graw-Hill.
- Rudin, W. (1987). *REAL AND COMPLEX ANALYSIS* (3ed ed.). Mc.Graw-Hill.
- Schilling, R. L., Song, R., & Vondraček, Z. (2010). *Bernstein Function*. de Gruyter.
- Shihab, M. Q. (2012). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an* (Vol. 14). Lentera Hati.
- Widder, D. V. (1946). *The Laplace Transform*. Princeton University Press.
- Wu, C., & Li, Y. (2008). *ON THE TRIANGLE INEQUALITY IN QUASI-BANACH SPACES* (Vol. 9, Nomor 2).

RIWAYAT HIDUP



Fatmatuz Zahro lahir di Negara, pada tanggal 24 April 2004. Penulis merupakan putri dari pasangan Bapak Hasan Zailani Al-Kaff dan Ibu Halimah Bafaqih. Penulis berasal dari Desa Patas, Kecamatan Gerokgak, Kabupaten Buleleng, Provinsi Bali. Penulis menyelesaikan pendidikan di SDN 2 Loloan Barat pada tahun 2016, MTsN 4 Jembrana pada tahun 2019, dan MAN Buleleng pada tahun 2022. Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan saat ini sedang menyelesaikan studi sarjana. Sejak jenjang MTs hingga perguruan tinggi, penulis merupakan penerima beasiswa Kartu Indonesia Pintar (KIP). Selama menempuh pendidikan, penulis aktif mengikuti berbagai kegiatan akademik. Penulis tergabung dalam Mathematics English Club (MEC) sejak tahun 2023 serta menjadi panitia Pengenalan Budaya Akademik dan Kemahasiswaan (PBAK) Fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2025. Penulis juga pernah menjadi Asisten Laboratorium pada Praktikum Mata Kuliah Pemodelan Matematika tahun 2025 dan melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Perhubungan Kota Blitar. Dalam bidang prestasi dan penelitian, penulis meraih Juara III Olimpiade Sains dan Teknologi Nasional (OSTN) bidang Matematika tahun 2024 kategori kelompok. Selain itu, penulis terlibat dalam kegiatan Riset Kompetitif Mahasiswa (RKM) yang menghasilkan penelitian berjudul “Analisis Iklim Beberapa Kota di Pulau Jawa Menggunakan Pendekatan Dimensi Fraktal”, yang dipresentasikan pada International Conference on Green Technology (ICGT) dan dipublikasikan pada Jurnal Cauchy.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fatmatuz Zahro
NIM : 220601110007
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan pada Ruang Grand-Kuasi Lebesgue
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	29 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	6 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	8 Oktober 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	8 Oktober 2025	ACC Bab I, II, dan III	5.
6.	16 Oktober 2025	ACC Seminar Proposal	6.
7.	27 Oktober 2025	Seminar Proposal	7.
8.	24 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	12 Desember 2025	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	10 Februari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	9 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	31 Maret 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	9 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	22 April 2026	ACC Bab IV dan V	14.
15.	28 April 2026	ACC Seminar Hasil	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	5 Mei 2026	Seminar Hasil	16. <i>A</i>
17.	18 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	17. <i>A</i>
18.	22 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	18. <i>A</i>
19.	25 Mei 2026	ACC Sidang Skripsi	19. <i>A</i>
20.	10 Juni 2026	ACC Keseluruhan	20. <i>A</i>

Malang, 10 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fashur Rozi, M.Si.

19800527 200801 1 012