

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MAX-MCUSUM) PADA
PENGENDALIAN KUALITAS AIR UMPAN BOILER
(Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)**

SKRIPSI

**OLEH
ZULAIHA
NIM. 220601110073**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM* (MAX-MCUSUM) PADA
PENGENDALIAN KUALITAS AIR UMPAN BOILER
(Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Zulaiha
NIM. 220601110073**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM (MAX-MCUSUM)* PADA
PENGENDALIAN KUALITAS AIR UMPAN BOILER
(Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)**

SKRIPSI

**Oleh
Zulaiha
NIM. 220601110073**

Telah Disetujui untuk Diuji

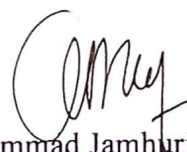
Malang, 4 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Dosen Pembimbing II



Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM*
MULTIVARIATE CUMULATIVE SUM (MAX-MCUSUM) PADA
PENGENDALIAN KUALITAS AIR UMPAN BOILER
(Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)**

SKRIPSI

**Oleh
Zulaiha
NIM. 220601110073**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 12 Juni 2026

Ketua Penguji : Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si.

.....

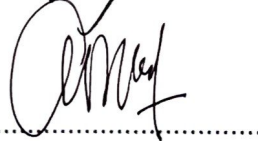

Anggota Penguji 1 : Abdul Aziz, M.Si.

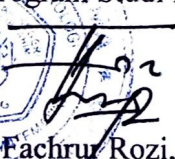
.....


Anggota Penguji 2 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

.....


Anggota Penguji 3 : Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si

.....


Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Zulaiha
NIM : 220601110073
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penerapan Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM) pada Pengendalian Kualitas Air Umpan Boiler (Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka dihalaman terakhir, apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang 12 Juni 2026



Zulaiha
NIM.220601110073

MOTO

“Dan cukuplah Allah sebagai saksi”

(Q. S. al-Fath: 28)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap rasa syukur kepada Allah swt.

skripsi ini penulis persembahkan terutama untuk penulis sendiri karena telah berhasil mengalahkan keraguan, kegundahan serta kata menyerah yang ratusan kali terucap. Penulis juga mempersembahkan untuk orang tua, saudara, orang terdekat penulis dan teman-teman karena selalu memberikan doa, dukungan, nasihat untuk kesuksesan penulis dan memberikan bantuan dan semangat selama proses penyusunan skripsi ini hingga selesai.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT., yang telah memberikan rahmat dan pertolongan-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat kelulusan pendidikan di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan selama proses penyusunan skripsi ini, secara khusus kepada:

1. Prof. Ilfi Nur Diana, M.Si, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Sekaligus, Dosen Pembimbing I, yang telah memberikan pengetahuan dan motivasi, serta nasihat yang tiada henti kepada penulis.
4. Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II, atas dukungan dan nasihat berharga kepada penulis.
5. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Penguji yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku Anggota Penguji I yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis,
7. Samsu Hidayat, selaku Pembimbing Lapangan yang telah banyak memberikan bantuan serta arahan kepada penulis selama melakukan bimbingan di PT PG Rajawali I.
8. PT PG Rajawali I Kabupaten Malang, karena telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk melakukan penelitian.
9. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mencurahkan ilmu dan dedikasi mereka untuk kemajuan kami.

10. Seluruh mahasiswa angkatan 2022 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah bersama dalam perjalanan ini, berbagi tantangan dan kebahagiaan, serta membangun kenangan yang tak terlupakan.

Semoga segala bantuan dan dukungan yang telah diberikan mendapatkan balasan yang setimpal dari Allah SWT. Dengan ridho Allah SWT., penulis berharap dapat memberikan manfaat bagi diri penulis dan para pembaca.

Amin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 12 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	7
1.3 Tujuan Penelitian	8
1.4 Manfaat Penelitian	8
1.5 Batasan Masalah	9
BAB II KAJIAN TEORI	11
2.1 Teori Pendukung.....	11
2.1.1 Pengendalian Kualitas Secara Statistika	11
2.1.2 Data Multivariat	13
2.1.3 Uji Distribusi Normal Multivariat	14
2.1.4 Uji Korelasi Antar Karakteristik Kualitas.....	16
2.1.5 Grafik Pengendali <i>Cumulative Sum</i> (CUSUM)	17
2.1.6 Grafik Pengendali <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i> (Max-MCUSUM)	19
2.1.6.1 Statistik <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i> (Max- MCUSUM) Untuk Vektor Rata-rata	20
2.1.6.2 Statistik <i>Maximum Multivariate Cumulative Sum</i> (Max- MCUSUM) Untuk Matriks Kovariansi.....	22
2.1.6.3 Pembentukan Grafik Pengendali Max-MCUSUM.....	24
2.1.7 Kapabilitas Proses	27
2.2 Kualitas Air Umpan Boiler.....	28
2.3 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits.....	30
2.4 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	31
BAB III METODE PENELITIAN	34
3.1 Jenis Penelitian	34
3.2 Data dan Sumber Data	34
3.3 Teknik Pengumpulan Data	35
3.4 Instrumen Penelitian	35

3.5 Tahapan Analisis Data.....	35
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	42
4.1 Statistika Deskriptif	42
4.2 Uji Normalitas Multivariat	44
4.3 Uji Korelasi Antar Karakteristik Kualitas	47
4.4 Grafik Pengendali Max-MCUSUM Fase I.....	49
4.5 Grafik Pengendali Max-MCUSUM Fase II.....	66
4.6 Kapabilitas Proses.....	74
4.7 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits	78
BAB V PENUTUP	80
5.1 Kesimpulan.....	80
5.2 Saran	81
DAFTAR PUSTAKA	83
LAMPIRAN.....	86
RIWAYAT HIDUP	100

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Struktur Data Multivariat	14
Tabel 2.2	Batas Standar Operasional Air Umpan Boiler	28
Tabel 3.1	Karakteristik Kualitas Penelitian Air Umpan Boiler	34
Tabel 4.1	Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Air Umpan Boiler	42
Tabel 4.2	Pengambilan Keputusan Perbandingan Nilai <i>Chi-Square</i> dan Nilai d_i^2	46
Tabel 4.3	Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas pada Fase I	50
Tabel 4.4	Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase I	59
Tabel 4.5	Hasil Estimasi <i>Bootstrap</i> Menggunakan <i>Python</i>	60
Tabel 4.6	Statistik Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan	62
Tabel 4.7	Estimasi <i>Bootstrap</i> pada Fase I Perbaikan	62
Tabel 4.8	Statistik Max-MCUSUM pada Fase I setelah Perbaikan Kedua ...	63
Tabel 4.9	Estimasi <i>Bootstrap</i> pada Data Fase I Perbaikan	64
Tabel 4.10	Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase II	71
Tabel 4.11	Hasil Perhitungan Nilai C_p dan C_{pk}	75

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh Grafik Pengendali Kualitas Statistik	12
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian	41
Gambar 4.1 Grafik $\bar{X}$ pada Setiap Karakteristik Kualitas pada Fase I.....	52
Gambar 4.2 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Data Fase I	61
Gambar 4.3 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan	63
Gambar 4.4 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan Kedua	64
Gambar 4.5 Grafik $\bar{X}$ pada Setiap Karakteristik Kualitas pada Fase II.....	67
Gambar 4.6 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Data Fase II	72

DAFTAR SIMBOL

$\mathbf{X}_i$	: Vektor pengamatan ke- i
p	: Banyaknya karakteristik kualitas
n	: Jumlah total pengamatan
m	: Penanda waktu untuk nilai minimum kumulatif log-likelihood ratio
$\bar{\mathbf{X}}$	: Vektor rata-rata sampel
$\mathbf{S}$	: Matriks kovariansi sampel berukuran $(p \times p)$
d_i^2	: Jarak kuadrat Mahalanobis untuk observasi ke- i
F_G	: Distribusi saat proses terkendali (<i>good state</i>)
F_B	: Distribusi saat proses tidak terkendali (<i>bad state</i>)
$f_G(\mathbf{X}_i)$	: Fungsi densitas distribusi baik
$f_B(\mathbf{X}_i)$	: Fungsi densitas distribusi buruk
$\boldsymbol{\mu}_G$	: Vektor rata-rata saat proses terkendali
$\boldsymbol{\mu}_B$	: Vektor rata-rata saat proses tidak terkendali
$\boldsymbol{\Sigma}$	: Matriks kovariansi proses
δ	: Besar pergeseran rata-rata proses
b	: Faktor perubahan skala variansi ($b > 0$)
Z_i	: Skor proyeksi univariat untuk pendeteksian pergeseran mean
D	: Non-centrality karakteristik kualitas(besar pergeseran mean)
$\mathbf{a}^t$	: Vektor arah untuk memproyeksi data ke ruang $\mathbf{X}_i$ dan k
k	: <i>Reference value</i> (nilai acuan)
C_i	: Statistik pendeteksi untuk vektor mean
h	: Batas kendali atas CUSUM
Y_i	: Statistik transformasi untuk pendeteksian variabilitas
v	: Variabel acuan untuk CUSUM variansi
S_i	: Statistik pendeteksi untuk matriks variansi
M_i	: Statistik Max-MCUSUM
C^+	: Pergeseran pada vektor rata-rata
V^+	: Pergeseran pada matriks kovariansi
B^{++}	: Pergeseran gabungan vektor rata-rata dan matriks kovariansi
W	: Statistik <i>Chi-Square</i> untuk transformasi matriks kovariansi
ν	: Derajat kebebasan
$\Phi(z)$	: Fungsi distribusi kumulatif normal standar
$H(W; \nu)$	: Fungsi distribusi kumulatif <i>Chi-Square</i>
B	: Jumlah replikasi <i>bootstrap</i>
N'	: Ukuran sampel <i>bootstrap</i>

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Air Umpan Boiler.....	86
Lampiran 2. Pengambilan Keputusan Perbandingan Nilai <i>Chi-Square</i> dan Nilai d_i^2	87
Lampiran 3. Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase I.....	88
Lampiran 4. Hasil Estimasi <i>Bootstrap</i> Menggunakan <i>Python</i>	89
Lampiran 5. Statistik Max-MCUSUM pada Data Fase I Perbaikan.....	90
Lampiran 6. Hasil Estimasi <i>Bootstrap</i> pada Data Fase I Perbaikan	91
Lampiran 7. Statistik Max-MCUSUM pada Data Fase I Perbaikan Kedua	92
Lampiran 8. Hasil Estimasi <i>Bootstrap</i> pada Data Fase I Perbaikan Kedua	93
Lampiran 9. Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase II	94
Lampiran 10. <i>Syntax Python</i>	95

ABSTRAK

Zulaiha, Zulaiha. 2026. **Penerapan Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM) pada Pengendalian Kualitas Air Umpan Boiler (Studi Kasus: PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang)**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. Pembimbing (II) Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata Kunci: Air Umpan Boiler, Kapabilitas Proses, Karakteristik Kualitas, Max-MCUSUM, Pengendalian Kualitas

Kualitas air umpan boiler merupakan salah satu faktor penting dalam menjaga efisiensi dan kestabilan operasional boiler. Kualitas air yang tidak sesuai standar dapat menyebabkan terbentuknya kerak, korosi, dan penurunan efisiensi perpindahan panas. Karakteristik kualitas air umpan boiler seperti pH, *Total Dissolved Solids* (TDS), dan *Turbidity* saling berkorelasi sehingga diperlukan pengendalian kualitas secara statistik. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan grafik pengendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM) dalam memantau kestabilan proses kualitas air umpan boiler di PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang serta menganalisis kapabilitas prosesnya. Data yang digunakan merupakan data sekunder kualitas air umpan boiler sebanyak 62 pengamatan. Tahapan analisis dimulai dengan uji normalitas multivariat dan uji korelasi antar karakteristik kualitas. Selanjutnya dilakukan pembentukan grafik pengendali Max-MCUSUM pada Fase I dan Fase II dengan penentuan batas kendali atas dilakukan menggunakan metode *bootstrap*. Adapun analisis kapabilitas proses multivariat dilakukan menggunakan indeks kapabilitas MC_p dan MC_{pk} . Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada Fase I dilakukan *exclude* data sebanyak 2 kali hingga seluruh pengamatan berada dalam batas kendali sehingga proses dinyatakan terkendali secara statistik. Pada Fase II terdapat pengamatan ke-53 hingga ke-60 yang berada di luar batas kendali atas sehingga mengindikasikan adanya pergeseran proses. Hasil tersebut menunjukkan bahwa grafik pengendali Max-MCUSUM mampu mendeteksi pergeseran yang diakibatkan oleh parameter vektor rata rata pada proses multivariat. Analisis kapabilitas proses menghasilkan nilai $MC_p = 1,7640$ dan $MC_{pk} = 1,2691$, sehingga proses dinyatakan *capable* karena kedua indeks lebih dari 1. Nilai MC_{pk} yang lebih kecil dan MC_p menunjukkan bahwa rata-rata proses belum sepenuhnya berada pada pusat spesifikasi.

ABSTRACT

Zulaiha, Zulaiha. 2026. **Application of the Maximum Multivariate Cumulative Sum (Max-MCUSUM) Control Chart in Boiler Feed Water Quality Control (Case Study: PT Pabrik Gula Rajawali I, Malang Regency)**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keywords: Boiler Feed Water, Process Capability, Quality Characteristics, Max-MCUSUM, Quality Control

The quality of boiler feed water is a crucial factor in maintaining the efficiency and operational stability of a boiler system. Water quality that does not meet the required standards may lead to scale formation, corrosion, and a decrease in heat transfer efficiency. The characteristics of boiler feed water quality, such as pH, Total Dissolved Solids (TDS), and turbidity, are interrelated, thus requiring statistical quality control. This study aims to apply the Maximum Multivariate Cumulative Sum (Max-MCUSUM) control chart to monitor the stability of the boiler feed water quality process at PT Pabrik Gula Rajawali I, Malang Regency, and to analyze its process capability. The data used in this study are secondary data consisting of 62 observations of boiler feed water quality. The analysis begins with multivariate normality testing and correlation testing among quality characteristics. Subsequently, the Max-MCUSUM control chart is constructed for Phase I and Phase II, with the upper control limit determined using the bootstrap method. Multivariate process capability analysis is conducted using the MC_p and MC_{pk} capability indices. The results show that in Phase I, data exclusion was performed twice until all observations fell within the control limits, indicating that the process was statistically in control. In Phase II, observations from the 55nd to the 62th were found to be beyond the upper control limit, indicating a process shift. These findings demonstrate that the Max-MCUSUM control chart is capable of detecting shifts caused by changes in the mean vector parameters in a multivariate process. The process capability analysis yields $MC_p = 1,7640$ and $MC_{pk} = 1,2691$, indicating that the process is capable since both indices are greater than 1. The lower value of MC_{pk} compared to MC_p suggests that the process mean has not been fully centered within the specification limits.

مستخلص البحث

زليخة، زليخة. ٢٠٢٦. تنفيذ مخطط المراقبة للمجموع التراكمي متعدد المتغيرات الأقصى

(Max-MCUSUM) في ضبط جودة مياه تغذية الغلايات. دراسة حالة: شركة مصنع سكر راجاوالي الأولى بمحافظة مالانغ. بحث جامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ. المشرف: (١) الدكتور فخر الرازي، الماجستير في العلوم، (٢) الدكتور محمد جمهوري، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: مراقبة الجودة، Max-MCUSUM، خصائص الجودة، قابلية العملية، مياه تغذية الغلايات.

تُعد مراقبة جودة مياه تغذية الغلايات من الجهود المهمة للحفاظ على كفاءة واستقرار تشغيل الغلايات. ومع ذلك، لا تتوافق جودة المياه دائمًا مع المعايير المطلوبة، مما قد يؤدي إلى تكوّن الترسبات وحدوث التآكل وانخفاض كفاءة انتقال الحرارة. ونظرًا إلى أن خصائص جودة المياه، مثل الأس الهيدروجيني (pH)، وإجمالي المواد الصلبة الذائبة (TDS)، والعكارة، مترابطة فيما بينها، فإن تطبيق أساليب المراقبة الإحصائية للجودة يُعد أمرًا ضروريًا. هدفت هذه الدراسة إلى تطبيق مخطط المراقبة للمجموع التراكمي متعدد المتغيرات الأقصى (Max-MCUSUM) لمتابعة استقرار عملية جودة مياه تغذية الغلايات في شركة مصنع سكر راجاوالي الأولى بمحافظة مالانغ، بالإضافة إلى تحليل قابلية العملية. وقد استُخدمت بيانات ثانوية مكونة من ٦٢ ملاحظة لخصائص جودة مياه التغذية. بدأت عملية التحليل باختبار الطبيعية متعددة المتغيرات واختبار الارتباط بين خصائص الجودة. بعد ذلك، تم إنشاء مخطط المراقبة (Max-MCUSUM) في المرحلة الأولى والمرحلة الثانية، حيث جرى تحديد حد المراقبة الأعلى باستخدام أسلوب Bootstrap. كما تم تحليل قابلية العملية متعددة المتغيرات باستخدام مؤشري القابلية MC_p و MC_{pk} أظهرت النتائج أنه في المرحلة الأولى تم استبعاد البيانات مرتين حتى أصبحت جميع الملاحظات ضمن حدود المراقبة، مما يدل على أن العملية تحت السيطرة إحصائيًا. أما في المرحلة الثانية، فقد ظهرت الملاحظات من ٥٥ إلى ٦٢ خارج حد المراقبة الأعلى، مما يشير إلى حدوث انحراف في العملية. وتدل هذه النتائج على أن مخطط Max-MCUSUM قادر على اكتشاف التغيرات الناتجة عن انحراف متجه المتوسط في العمليات متعددة المتغيرات. كما أظهر تحليل قابلية العملية أن قيمة $MC_p = 1,7640$ ، في حين بلغت قيمة $MC_{pk} = 1,2691$ ، مما يدل على أن العملية قادرة لأن كلا المؤشرين أكبر من ١. ومع ذلك، فإن كون قيمة MC_{pk} أقل من قيمة MC_p يشير إلى أن متوسط العملية لم يتركز بصورة كاملة ضمن حدود المواصفات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kualitas secara umum berhubungan dengan sejauh mana suatu proses mampu menjalankan fungsinya sesuai kebutuhan operasional (Montgomery, 2013). Kualitas juga memainkan peran penting dalam membentuk preferensi konsumen terhadap barang atau jasa tertentu. Pengendalian kualitas penting dalam memastikan produk atau proses untuk memenuhi standar tertentu dalam mendukung efisiensi serta mengurangi variabilitas, mencegah cacat, dan meningkatkan keandalan operasional di berbagai industri.

Pengendalian kualitas secara statistik merupakan metode yang digunakan untuk menilai apakah suatu proses berada dalam kondisi terkendali atau tidak. Menurut Zacharias (2022), kegiatan pengendalian kualitas ini dilakukan melalui pendekatan terstruktur, seperti inspeksi, pengujian, penerapan teknik statistik, serta tindakan korektif yang berbasis data. Sehingga suatu proses yang dilakukan dapat terus dijaga kualitasnya sesuai standar yang ditetapkan. Menurut Montgomery (2013), salah satu alat yang banyak digunakan adalah grafik pengendali yang mampu memberikan gambaran mengenai kemampuan proses, karakteristik kualitas yang terlibat, serta kestabilan proses dari waktu ke waktu. Dalam penerapan grafik pengendali, dapat dibedakan menjadi dua kelompok, yakni grafik univariat dan grafik multivariat. Grafik univariat diterapkan pada proses yang melibatkan hanya satu karakteristik kualitas, sedangkan grafik multivariat diterapkan pada proses yang melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas secara bersamaan.

Pada konteks grafik univariat, salah satu grafik pengendali yang paling awal dan banyak digunakan adalah grafik pengendali Shewhart. Grafik ini diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart pada tahun 1920-an dan menjadi dasar pengembangan konsep pengendalian kualitas secara statistik. Grafik Shewhart digunakan untuk memantau kestabilan proses dengan membandingkan nilai pengamatan terhadap batas kendali yang ditetapkan berdasarkan variasi alami proses. Metode ini efektif dalam mendeteksi pergeseran besar pada proses dan memberikan gambaran umum mengenai kestabilan sistem. Namun, grafik Shewhart memiliki keterbatasan dalam mendeteksi pergeseran kecil (*small shifts*) pada rata-rata proses karena hanya mempertimbangkan satu titik data pada setiap pengamatan (Montgomery, 2013). Keterbatasan ini kemudian mendorong pengembangan metode yang lebih sensitif terhadap perubahan kecil dalam proses produksi, seperti grafik *Cumulative Sum* (CUSUM) (Grant & Leavenworth, 1996). Grafik pengendali CUSUM dikembangkan untuk mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata proses (Montgomery, 2013). Prinsip kerja pada CUSUM adalah dengan mengakumulasi selisih antara nilai pengamatan dan nilai target (rata-rata), sehingga pola pergeseran kecil sekalipun dapat teridentifikasi secara jelas. Hal ini menjadikan CUSUM sangat efektif ketika perubahan yang terjadi sulit ditangkap oleh grafik pengendali tradisional (Montgomery, 2013).

Meskipun demikian, pendekatan univariat seperti CUSUM hanya mampu digunakan ketika proses yang dipantau melibatkan satu karakteristik kualitas. Dalam praktik industri, sering kali terdapat lebih dari satu karakteristik kualitas yang saling berkaitan dan perlu dianalisis secara simultan. Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, dikembangkan grafik *Multivariate Cumulative Sum*

(MCUSUM). Grafik ini dirancang untuk memantau pergeseran rata-rata maupun variansi pada proses yang melibatkan beberapa karakteristik kualitas sekaligus. Namun, MCUSUM memiliki keterbatasan karena sensitivitasnya menurun apabila pergeseran hanya terjadi pada sebagian karakteristik kualitas atau arah pergeseran tidak diketahui dengan pasti. Untuk mengatasi kelemahan tersebut, Cheng & Thaga (2005) mengembangkan grafik *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM). Metode ini memanfaatkan nilai maksimum dari statistik MCUSUM pada setiap karakteristik kualitas, sehingga lebih efektif dalam mendeteksi pergeseran kecil (*small shifts*) pada rata-rata maupun variansi proses multivariat secara lebih cepat, bahkan ketika perubahan hanya terjadi pada sebagian karakteristik kualitas. Oleh karena itu, Max-MCUSUM dapat dipandang sebagai penyempurnaan dari MCUSUM tradisional dalam pengendalian kualitas multivariat.

Keunggulan utama dari metode Max-MCUSUM adalah sensitivitasnya yang tinggi dalam mendeteksi pergeseran kecil pada proses multivariat, baik pada rata-rata maupun variansi proses secara simultan. Metode ini sangat efektif karena mampu mempertimbangkan korelasi antar karakteristik kualitas, sehingga cocok untuk memantau karakteristik kualitas yang saling berkaitan dalam proses produksi (Aprilianti dkk., 2021). Meskipun demikian, implementasi Max-MCUSUM memerlukan pemahaman statistik yang mendalam serta perangkat lunak khusus untuk pengolahan data dan simulasi batas kendali. Kompleksitas perhitungan akan meningkat seiring bertambahnya jumlah karakteristik kualitas yang dipantau, sehingga diperlukan optimasi dalam penerapan untuk menghindari sinyal palsu yang berlebihan (Cheng & Thaga, 2005).

Dalam upaya menerapkan metode Max-MCUSUM secara nyata, penelitian ini diarahkan pada kualitas air umpan boiler yang digunakan pada mesin boiler di Pabrik Gula Rajawali I. Kualitas air umpan boiler merupakan faktor penting yang menentukan kinerja, efisiensi, serta umur peralatan boiler. Air dengan kualitas buruk dapat menimbulkan masalah seperti kerak, korosi serta penurunan efisiensi panas. Pan & Xu (2022) menekankan bahwa pengendalian karakteristik kualitas air perlu diperhatikan sejak tahap pengolahan karena kandungan zat terlarut dan kontaminan sangat memengaruhi stabilitas operasi boiler.

Dalam pengelolaan air umpan boiler, kualitas air harus diatur agar sesuai dengan standar kualitas yang telah ditetapkan. Apabila kualitas air umpan boiler tidak memenuhi standar, dampak yang muncul dapat berupa terbentuknya kerak pada pipa, korosi, penurunan efisiensi perpindahan panas, bahkan kerusakan peralatan secara permanen (Kuntolaksono dkk., 2022). Kondisi ini pada akhirnya bukan hanya menimbulkan kerugian teknis dan ekonomi, tetapi juga menurunkan keandalan sistem produksi secara keseluruhan (Maulizar dkk., 2022). Oleh karena itu, diperlukan pendekatan pengendalian kualitas yang sistematis dan akurat untuk memastikan air umpan boiler tetap dalam kondisi optimal.

Menjaga kualitas air umpan boiler tidak semata berkaitan dengan aspek teknis dan efisiensi energi, tetapi juga memiliki dimensi moral dan spiritual. Sebagaimana produk pangan dituntut untuk memenuhi standar keamanan dan kualitas agar tidak merugikan konsumen, begitu pula air umpan boiler harus dipelihara kualitasnya demi menjamin keselamatan, kelancaran operasi, dan keberlanjutan proses produksi.

Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur'an Surah Al-Muthaffifin ayat 1–3:

وَيْلٌ لِّلْمُطَفِّفِينَ ﴿١﴾ الَّذِينَ إِذَا اكْتَالُوا عَلَى النَّاسِ يَسْتَوْفُونَ ﴿٢﴾ وَإِذَا كَالُوهُمْ أَوْ وَزَنُوهُمْ يُخْسِرُونَ ﴿٣﴾

Artinya

“Celakalah bagi orang-orang yang curang (1),(Mereka adalah) orang-orang yang apabila menerima takaran dari orang lain mereka minta dipenuhi (2),(Sebaliknya) apabila mereka menakar atau menimbang untuk orang lain, mereka mengurangi (3).” (Kementerian Agama RI, 2022).

Ayat ini merupakan peringatan dari Allah SWT. agar manusia tidak melakukan kecurangan dalam takaran, timbangan, maupun kualitas produk yang dihasilkan. Allah SWT. menekankan pentingnya kejujuran, keadilan, dan tanggung jawab dalam memberikan hak orang lain, baik dalam jumlah maupun kualitas. Frasa *“apabila mereka menakar atau menimbang untuk orang lain, mereka mengurangi”* mengisyaratkan larangan tegas terhadap setiap bentuk praktik curang, kelalaian, atau pengabaian standar kualitas yang berpotensi merugikan orang lain. Pesan ini tidak hanya terbatas pada aktivitas perdagangan tradisional, tetapi juga berlaku luas pada berbagai bidang industri, termasuk pengelolaan air umpan boiler. Menghasilkan air umpan dengan kualitas yang tidak sesuai standar sama artinya dengan mengurangi hak pengguna karena berisiko menimbulkan kerusakan peralatan, penurunan efisiensi, bahkan kerugian ekonomi. Dengan demikian, ayat ini menegaskan bahwa menjaga kualitas dan memenuhi standar bukan hanya kewajiban teknis, tetapi juga bagian dari etika dan tanggung jawab moral yang harus dipatuhi untuk menjaga kepercayaan, keberlanjutan, serta keseimbangan dalam kehidupan sosial dan industri (Aliyanda dkk., 2024).

Di Indonesia, penerapan Max-MCUSUM telah dilakukan pada industri pangan seperti produk kacang garing. Metode Max-MCUSUM ini terbukti efektif dalam mengidentifikasi karakteristik kualitas yang paling dominan mempengaruhi

kualitas produk (Aprilianti dkk., 2021). Terdapat penelitian lain yang lebih berfokus pada pengendalian kualitas air dari aspek kimiawi dengan pendekatan statistik dengan menggunakan grafik pengendali multivariat, khususnya Max-MCUSUM, mampu memberikan informasi yang lebih tepat mengenai stabilitas dan kapabilitas proses produksi air (Oktaviana & Wibawati, 2023). Penelitian terbaru menerapkan Max-MCUSUM berbasis VAR untuk pengendalian kualitas gula kristal putih, menghasilkan performa lebih baik dibandingkan grafik pengendali tradisional seperti MEWMA dan Hotelling's T^2 dalam mengatasi data autokorelasi (Khusna dkk., 2021). Selain itu, penelitian lain mengembangkan grafik pengendali Max-MCUSUM dengan pendekatan *bootstrap* untuk menentukan batas kendali, karena distribusi statistik Max-MCUSUM tidak diketahui secara pasti. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pendekatan *bootstrap* mampu menghasilkan batas kendali yang lebih fleksibel serta efektif dalam mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata maupun variabilitas proses multivariat (Khusna dkk., 2018).

Studi pendahuluan telah dilakukan penulis dalam Praktik Kerja Lapangan (PKL) semester ganjil 2025/2026 pada konteks yang sama di PT Pabrik Gula Rajawali I, menggunakan metode MCUSUM dengan karakteristik kualitas pH, TDS, dan *Turbidity* dari 82 pengamatan harian, menunjukkan bahwa MCUSUM mampu mendeteksi pergeseran rata-rata proses multivariat secara kumulatif. Namun, hasil analisis mengindikasikan keterbatasan sensitivitas MCUSUM terhadap pergeseran kecil atau parsial pada karakteristik kualitas tertentu, seperti fluktuasi TDS akibat kontaminasi bahan baku gula, dengan statistik deteksi sering kali lambat mencapai batas kendali dan menyebabkan alarm palsu rendah tapi deteksi terlambat.

Oleh karena itu, penelitian ini menerapkan Max-MCUSUM sebagai penyempurnaan untuk memantau kualitas air umpan boiler secara lebih optimal. Hal ini selaras dengan hasil penelitian Cheng & Thaga (2005) yang menunjukkan bahwa Max-MCUSUM lebih efektif dalam mendeteksi pergeseran proses. Selain itu, pada penelitian ini akan menggunakan pendekatan Max-MCUSUM dengan metode *bootstrap* untuk menentukan batas kendali atas h agar mendapatkan batas kendali atas yang lebih fleksibel serta data yang digunakan pada penelitian ini bersifat independen dan tidak mempertimbangkan pengaruh waktu secara langsung seperti pada data deret waktu (*time series*). Dengan demikian, setiap pengamatan dianggap saling bebas dan tidak bergantung pada urutan waktu pengambilan data, sehingga penerapan metode Max-MCUSUM lebih terarah pada pemantauan kestabilan proses multivariat tanpa mempertimbangkan autokorelasi antar periode.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM dalam memantau karakteristik kualitas air umpan boiler di PT Pabrik Gula Rajawali I, Kabupaten Malang.
2. Bagaimana hasil analisis kapabilitas proses kualitas air umpan boiler setelah penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM di PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk menganalisis hasil penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM dalam memantau karakteristik kualitas air umpan boiler di PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang.
2. Untuk menganalisis hasil kapabilitas proses kualitas air umpan boiler setelah penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM di PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian maka dapat diambil beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

Sebagai tambahan pengetahuan dan wawasan penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM dalam pengendalian kualitas air umpan boiler.

2. Bagi Program Studi

Penelitian ini diharapkan dapat menambah literatur sebagai studi kasus di bidang statistika khususnya pengendalian kualitas.

3. Bagi PT Pabrik Gula Rajawali I

Penerapan Max-MCUSUM memungkinkan deteksi dini penyimpangan karakteristik kualitas air umpan boiler, sehingga mencegah kerusakan peralatan, meningkatkan efisiensi boiler, dan mengurangi biaya perawatan.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini dibatasi hal-hal sebagai berikut:

1. Karakteristik kualitas yang digunakan adalah tiga karakteristik kualitas utama, yaitu pH, *Total Dissolved Solids* (TDS), dan *Turbidity*. Pemilihan ketiga karakteristik ini didasarkan pada hasil wawancara dengan pihak perusahaan, di mana dari lima karakteristik awal (pH, TDS, *Turbidity*, *Degree of Hardness* (DH), dan Silica), dua karakteristik kualitas terakhir tidak disertakan, yaitu DH dan Silica karena dianggap telah terwakili oleh karakteristik kualitas TDS. Dengan demikian, penggunaan tiga karakteristik tersebut dinilai sudah cukup untuk menggambarkan kondisi kualitas air secara menyeluruh.
2. Pengambilan data sampel yang digunakan pada penelitian ini hanya dilakukan 1 kali dalam 24 jam, sehingga data bersifat saling bebas karena setiap pengamatan merepresentasikan kondisi proses pada hari yang berbeda tanpa saling memengaruhi
3. Pengendalian kualitas air umpan boiler hanya dilakukan pada mesin boiler Yoshimine yang beroperasi di Pabrik Krebet Baru I, didasarkan pada kapasitas produksinya yang lebih besar dibandingkan unit Pabrik Krebet Baru II, sehingga membutuhkan sistem boiler dengan skala dan beban kerja yang lebih tinggi. Adapun pemilihan mesin boiler Yoshimine karena mesin ini merupakan unit yang paling dominan dan beroperasi hampir di seluruh tahapan proses produksi, sehingga dinilai paling representatif untuk menggambarkan kondisi aktual pengendalian kualitas air umpan boiler di lingkungan pabrik.

4. Penelitian ini menggunakan asumsi tidak terdapat autokorelasi antar waktu pengamatan karena jika terdapat autokorelasi, kenaikan atau penurunan statistik bisa berasal dari pola ketergantungan waktu, bukan dari perubahan proses yang sebenarnya.
5. Analisis kapabilitas proses pada penelitian ini, menggunakan analisis kapabilitas secara multivariat

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Pengendalian Kualitas Secara Statistika

Pengendalian kualitas menurut Assauri (1998) merupakan suatu kegiatan pengawasan yang bertujuan menjaga kualitas produk agar tetap sesuai dengan standar atau spesifikasi yang telah ditentukan dalam proses produksi. Dalam konteks yang lebih teknis, Pengendalian kualitas secara statistik berfungsi sebagai alat analisis yang membantu perusahaan mengurangi tingkat cacat, menekan biaya produksi, serta meningkatkan konsistensi kualitas produk (Montgomery, 2013). Melalui penerapan metode statistik, perusahaan dapat memantau stabilitas proses produksi secara berkelanjutan.

Salah satu bentuk penerapan pengendalian kualitas secara statistik adalah grafik pengendali. Grafik pengendali dapat digunakan untuk mendeteksi adanya penyimpangan atau variasi dalam proses produksi dari waktu ke waktu. Grafik ini memberikan gambaran visual tentang apakah suatu proses berada dalam kondisi terkendali (*in control*) atau telah menyimpang dari batas kendali (*out of control*). Dengan demikian, perusahaan dapat mengambil tindakan korektif lebih cepat untuk mencegah timbulnya produk cacat dan menjaga efisiensi produksi. Contoh grafik pengendali kualitas secara statistik ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Contoh Grafik Pengendali Kualitas Statistik
Sumber: Montgomery, (2013).

Gambar 2.1 menunjukkan grafik pengendali statistik dasar yang memantau karakteristik kualitas sampel terhadap waktu. Titik-titik data berfluktuasi di sekitar garis tengah (*Center Line*) dan berada di dalam batas kendali atas UCL serta batas kendali bawah LCL, menandakan bahwa proses masih terkendali secara statistik tanpa indikasi variasi khusus.

Dalam penerapan grafik pengendali secara statistik, proses analisis umumnya dibagi menjadi dua fase, yaitu Fase I dan Fase II (Montgomery, 2013). Fase I merupakan tahap awal yang digunakan untuk mengestimasi karakteristik kualitas proses, seperti vektor rata-rata dan matriks kovariansi berdasarkan data historis. Pada tahap ini dilakukan identifikasi dan pembersihan terhadap data yang menunjukkan alarm palsu agar karakteristik kualitas yang diperoleh benar-benar merepresentasikan proses dalam kondisi terkendali. Setelah mengestimasi karakteristik kualitas, tahap berikutnya yaitu Fase II difokuskan pada pengendalian berkelanjutan terhadap data baru untuk mendeteksi adanya pergeseran rata-rata.

Sejalan dengan pembagian fase tersebut, diperlukan alat pengendali yang sesuai dengan jenis data yang digunakan. Salah satu grafik univariat untuk data

individual adalah Grafik $\bar{X}$ digunakan untuk memantau kestabilan proses pada data individual, yaitu ketika setiap pengamatan terdiri dari satu nilai. Menurut Montgomery (2013), grafik ini digunakan ketika data tidak dapat dikelompokkan ke dalam subgrup dan berfungsi untuk mendeteksi penyimpangan pada rata-rata proses dari waktu ke waktu. Pada grafik $\bar{X}$, setiap titik merepresentasikan satu pengamatan. Garis tengah menunjukkan rata-rata data, sedangkan batas kendali digunakan untuk menilai apakah proses berada dalam kondisi terkendali secara statistik.

Batas kendali pada Grafik $\bar{X}$ dirumuskan sebagai berikut:

$$UCL = \bar{\bar{X}}_j + 3\sigma \quad (2.1)$$

$$CL = \bar{\bar{X}}_j \quad (2.2)$$

$$LCL = \bar{\bar{X}}_j - 3\sigma \quad (2.3)$$

dengan

$\bar{\bar{X}}_j$: Rata-rata untuk seluruh pengamatan, $j = 1, 2, \dots, p$.

σ : Simpangan baku dengan $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{\bar{X}})^2}{n-1}}$

2.1.2 Data Multivariat

Menurut Haryatmi dan Guritno (2008), data multivariat adalah jenis data yang diperoleh dari pengukuran lebih dari satu karakteristik kualitas pada setiap unit atau individu dalam sampel. Analisis terhadap data semacam ini dilakukan menggunakan metode statistika multivariat, yaitu pendekatan yang menganalisis sekumpulan karakteristik kualitas yang saling berkorelasi secara bersamaan

dengan mempertimbangkan hubungan antarkarakteristik kualitas tersebut sebagai satu kesatuan sistem. Struktur data multivariat ditunjukkan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Struktur Data Multivariat

Pengamatan	Karakteristik Kualitas (Variabel)					
	1	2	...	j	...	p
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,p}$
...	...	...	...	...	...	...
i	$X_{i,1}$	$X_{i,2}$	...	$X_{i,j}$	...	$X_{i,p}$
...	...	...	...	...	...	...
n	$X_{n,1}$	$X_{n,2}$	...	$X_{n,j}$	...	$X_{n,p}$

$X_{i,j}$ merupakan pengamatan ke- i pada karakteristik kualitas ke- j , dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, p$.

2.1.3 Uji Distribusi Normal Multivariat

Distribusi normal adalah salah satu bentuk distribusi probabilitas yang memiliki peran penting dan paling sering digunakan dalam berbagai analisis statistik. Konsep ini tidak hanya diterapkan pada satu karakteristik kualitas saja (univariat), tetapi juga dikembangkan untuk kasus yang melibatkan beberapa karakteristik kualitas sekaligus, yang disebut dengan distribusi normal multivariat. Pengujian normalitas multivariat dilakukan untuk memastikan bahwa seluruh karakteristik kualitas dalam suatu dataset memiliki pola sebaran yang menyerupai distribusi normal secara simultan (Hair dkk., 2019).

Misalkan diberikan vektor pengamatan $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,p})^t$ yang terdiri atas p karakteristik kualitas dan $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^t$. Distribusi normal multivariat menggambarkan generalisasi dari distribusi normal univariat ke dalam dimensi yang lebih tinggi. Fungsi densitas peluang dari distribusi ini dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})}}$$

dengan

$|\boldsymbol{\Sigma}|$: Determinan matriks kovariansi dari distribusi normal p -variat

$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$: Invers dari $\boldsymbol{\Sigma}$

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor rata-rata dari distribusi normal p -variat

Hipotesis:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Salah satu metode yang umum digunakan untuk menguji normalitas multivariat adalah dengan menghitung jarak kuadrat Mahalanobis (*Mahalanobis squared distance*). Metode ini lebih unggul dibandingkan jarak Euclidean biasa karena dapat mengatasi perbedaan skala antar karakteristik kualitas dan juga memperhitungkan korelasi antar karakteristik kualitas dalam matriks kovariansi. Dengan demikian, jarak kuadrat Mahalanobis memberikan ukuran yang lebih akurat mengenai seberapa jauh suatu pengamatan menyimpang dari pusat data (Johnson & Wichern, 2007).

Statistik uji, jarak kuadrat Mahalanobis dari pengamatan ke- i (Johnson & Wichern, 2007):

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.4)$$

dengan

$\mathbf{X}_i$: Vektor pengamatan ke- i untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$\bar{\mathbf{X}}$: Vektor rata-rata, yaitu $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_{i,1}, \bar{X}_{i,2}, \dots, \bar{X}_{i,p})$

dengan

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^n X_{ij}}{n}, \quad j, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.5)$$

$\mathbf{S}^{-1}$: Invers matriks kovariansi $\mathbf{S}$ berukuran $p \times p$, yang setiap elemennya

didapat dari persamaan

$$S_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k), \quad j, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.6)$$

Kriteria Uji:

H_0 ditolak jika lebih dari 50% nilai d_i^2 yang kurang dari $\chi_{\alpha, \nu}^2$.

2.1.4 Uji Korelasi Antar Karakteristik Kualitas

Uji korelasi dilakukan untuk menilai adanya hubungan atau keterkaitan antara karakteristik kualitas-karakteristik kualitas yang diamati. Dalam penerapan grafik pengendali multivariat, penting untuk memastikan bahwa antar karakteristik kualitas memang memiliki hubungan korelatif, karena asumsi ini menjadi dasar validitas analisis. Adapun hipotesis serta statistik uji yang digunakan dalam pengujian korelasi dijelaskan sebagai berikut (Morrison, 2005):

Hipotesis:

$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I}$ (tidak terdapat korelasi antar karakteristik kualitas)

$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (terdapat korelasi antar karakteristik kualitas)

Statistik uji (Morrison, 2005):

$$\chi_{hitung}^2 = - \left(n - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln |\mathbf{R}| \quad (2.7)$$

dengan

n : Banyaknya pengamatan

p : Banyaknya karakteristik kualitas

R : Matriks korelasi dari masing-masing karakteristik kualitas

|R| : Determinan matriks korelasi **R**

Kriteria uji:

H_0 ditolak jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha, \nu}$ dengan ν adalah derajat kebebasan, $\nu = \frac{1}{2}p(p -$

1) dan $\alpha = 0,0027$ adalah tingkat signifikansi (Johnson dan Wichern, 2007).

Matriks korelasi dijabarkan sebagai berikut (Walpole dkk., 2012):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,p} \\ r_{2,1} & 1 & \cdots & r_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p,1} & r_{p,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

dengan

$$r_{j,k} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i,j} - \bar{X}_j)(X_{i,k} - \bar{X}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{i,j} - \bar{X}_j)^2 \sum_{i=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_k)^2}}$$

$r_{j,k}$: Nilai korelasi antara karakteristik kualitas ke- j dan karakteristik

kualitas ke- k dengan $j, k = 1, 2, \dots, p$

$X_{i,j}$: Nilai pengamatan ke- i karakteristik kualitas ke- j , $i = 1, 2, \dots, n$ dan

$j = 1, 2, \dots, p$

$\bar{X}_j$: Rata-rata karakteristik kualitas ke- j dengan $j = 1, 2, \dots, p$

2.1.5 Grafik Pengendali *Cumulative Sum* (CUSUM)

Pada prosedur CUSUM oleh Page tahun 1954, diasumsikan bahwa terdapat rangkaian pengamatan $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang awalnya mengikuti distribusi baik (*Good state*) proses terkendali) dengan fungsi distribusi F_G . Setelah titik waktu tertentu, distribusi tersebut berubah menjadi distribusi buruk (proses tidak terkendali) F_B , dan perubahan ini terjadi pada titik yang tidak diketahui

sebelumnya. Baik F_G maupun F_B dianggap telah diketahui, namun posisi perubahan tidak diketahui. Tujuan dari penggunaan grafik CUSUM adalah mengidentifikasi apakah perubahan itu benar-benar terjadi serta menentukan kapan pergeseran tersebut muncul (Healy, 1987).

Konsep dasar CUSUM pertama kali dirumuskan oleh Page (1954), yaitu dengan mengakumulasi log-likelihood ratio antara distribusi tidak terkendali dan distribusi terkendali. CUSUM memberikan sinyal ketika bukti perubahan cukup kuat, yang dinyatakan melalui kondisi berikut (Healy, 1987):

$$S_n = \sum_{i=1}^n \log \frac{f_B(X_i)}{f_G(X_i)} - \min_{m \leq n} \left(\sum_{i=1}^m \log \frac{f_B(X_i)}{f_G(X_i)} \right) > h \quad (2.9)$$

dengan f_B dan f_G masing-masing merupakan fungsi densitas untuk proses tidak terkendali dan terkendali. Nilai h adalah batas kendali atas yang biasanya dipilih berdasarkan kriteria *Average Run Length* (ARL), dan tidak bergantung pada banyaknya pengamatan ke- n serta m adalah penanda waktu yang menelusuri seluruh titik sebelum pengamatan ke- n untuk memperoleh nilai minimum kumulatif *log-likelihood ratio*.

Untuk mempermudah implementasi, Healy (1987) menunjukkan bahwa statistik pada persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk rekursif yang lebih praktis sebagai berikut:

$$S_i = \max \left(0; S_{i-1} + \log \frac{f_B(X_i)}{f_G(X_i)} \right)$$

dengan nilai awal grafik pengendali CUSUM ditetapkan sebagai S_0 dengan $S_0 = 0$. Pada setiap periode, statistik S_i dibandingkan dengan batas keputusan tetap h . Jika $S_i > h$, maka terdeteksi adanya pergeseran proses, yang mengindikasikan

penyimpangan sebesar δ dari proses terkendali. Setelah pergeseran terdeteksi dan tindakan perbaikan dilakukan untuk mengembalikan proses ke kondisi terkendali, statistik CUSUM di reset ke nilai awal S_0 .

2.1.6 Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM)

Menurut Cheng & Thaga (2005) pada grafik pengendali Max-MCUSUM diasumsikan bahwa X_i berasal dari distribusi normal multivariat, dengan rata-rata μ_G ketika proses terkendali, dan rata-rata $\mu_B = \mu_G + \delta$ ketika proses tidak terkendali, dengan matriks kovariansi Σ yang diketahui. Jika setiap X_i merupakan peubah acak normal p -variat, maka dapat membentuk vektor karakteristik kualitas berukuran $p \times 1$ beserta matriks kovariansi berukuran $p \times p$.

Kemudian Cheng dan Thaga mengembangkan metode Maximum Multivariate Cumulative Sum (Max-MCUSUM) dengan memisahkan statistik pengendali menjadi dua komponen utama, yaitu Max-MCUSUM untuk vektor rata-rata dan Max-MCUSUM untuk matriks kovariansi. Statistik C^+ digunakan untuk mendeteksi pergeseran pada vektor rata-rata, sedangkan statistik V^+ berfungsi untuk mengidentifikasi perubahan pada matriks kovariansi. Selanjutnya, statistik B^{++} didefinisikan sebagai ukuran maksimum yang menggabungkan informasi dari C^+ dan V^+ , sehingga mampu mendeteksi pergeseran yang terjadi secara simultan baik pada vektor rata-rata maupun matriks kovariansi.

2.1.6.1 Statistik *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM)

Untuk Vektor Rata-rata

Menurut Cheng & Thaga (2005), misalkan fungsi $f_B(\mathbf{X}_i)$ dan fungsi $f_G(\mathbf{X}_i)$ diasumsikan berdistribusi normal p -variat dengan masing-masing $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_B$ dan $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_G$ serta memiliki matriks kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$ yang sama, maka grafik pengendali CUSUM dikembangkan melalui persamaan rasio likelihood, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_B(\mathbf{X}_i)}{f_G(\mathbf{X}_i)} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)\right)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)\right)} \\
 &= \frac{\exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)\right)}{\exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)\right)} \\
 &= \exp\{-0,5[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B) - (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)]\} \\
 \log \frac{f_B(\mathbf{X}_i)}{f_G(\mathbf{X}_i)} &= -0,5[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B) - (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G)] \\
 &= -0,5[\mathbf{X}_i^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i - 2\boldsymbol{\mu}_B^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\mu}_B^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_B - \mathbf{X}_i^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i - \\
 &\quad + 2\boldsymbol{\mu}_G^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_G] \\
 &= 0,5[2(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_B^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_B + \boldsymbol{\mu}_G^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}_G] \\
 &= (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i - 0,5(\boldsymbol{\mu}_B + \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)
 \end{aligned}$$

dengan

$\mathbf{X}_i$: Vektor pengamatan ke- i

$\boldsymbol{\mu}_G$: Vektor rata-rata saat kondisi terkendali (*in control*)

$\boldsymbol{\mu}_B$: Vektor rata-rata saat kondisi tidak terkendali (*out of control*)

$|\Sigma|$: Determinan dari Σ

Σ^{-1} : Invers dari Σ

Diketahui statistik CUSUM untuk proses multivariat sebagai berikut,

$$C_i = \max(0; C_{i-1} + \mathbf{a}^t \mathbf{X}_i - k) > h, i = 1, 2, \dots, n$$

dengan nilai awal dengan $C_0 = 0$, dan

$$\mathbf{a}^t = \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.10)$$

$$k = 0,5 \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.11)$$

dengan $\mathbf{a}^t$ adalah vektor arah (*row vector*) untuk memproyeksi $\mathbf{X}_i$ dan k adalah *reference value*.

Sehingga, peubah acak $\mathbf{a}^t \mathbf{X}_i$ memiliki distribusi normal univariat.

$$Z_i = \mathbf{a}^t (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_G) \quad (2.12)$$

dengan Z_i adalah skor univariat untuk CUSUM rata-rata, saat proses terkendali, dengan $Z_i \sim N(0, 1)$ dan saat proses tidak terkendali nilai rata-rata bergeser sebesar D sehingga $Z_i \sim N(D, 1)$.

$$D = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)} \quad (2.13)$$

Grafik pengendali CUSUM untuk mendeteksi pergeseran pada vektor rata-rata proses normal multivariat dapat ditulis sebagai berikut.

$$C_i = \max(0; C_{i-1} + Z_i - 0,5D) > h$$

dengan h adalah batas atas yang telah ditetapkan.

2.1.6.2 Statistik *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM)

Untuk Matriks Kovariansi

Seperti halnya rata-rata proses, variabilitas proses yang umumnya dirangkum dalam bentuk matriks kovariansi pada kasus multivariat juga memiliki peranan penting dalam menilai apakah suatu proses berada dalam kondisi terkendali atau tidak. Beberapa skema pengendalian CUSUM telah dikembangkan untuk mendeteksi perubahan pada variabilitas proses multivariat, di antaranya yang diperkenalkan oleh Healy (1987) serta Chan & Zhang (2001). Skema-skema tersebut menggunakan grafik pengendali yang hanya menampilkan perubahan pada matriks kovariansi proses, dengan asumsi bahwa vektor rata-rata proses tetap konstan sepanjang produksi.

Dengan menggunakan pendekatan uji rasio likelihood dan mengasumsikan adanya dua kondisi produksi, yaitu kondisi baik (*good state*) dan kondisi buruk (*bad state*). Pada kondisi baik, data berdistribusi normal p-variat dengan rata-rata μ dan matriks kovariansi Σ . Jika terjadi pergeseran variabilitas proses, maka rata-rata tetap μ , tetapi matriks kovariansi berubah menjadi $b\Sigma$ dengan $b > 0$. Asumsi ini menyatakan bahwa ketika terjadi pergeseran, seluruh variansi komponen meningkat secara proporsional, sementara korelasi antar-karakteristik kualitas tetap sama. Pergeseran semacam ini dapat muncul ketika terdapat faktor dalam proses manufaktur yang memengaruhi semua karakteristik kualitas secara bersamaan.

Rasio likelihood yang diberikan adalah sebagai berikut (Cheng & Thaga, 2005):

$$\begin{aligned}
\frac{f_B'(\mathbf{X}_i)}{f_G'(\mathbf{X}_i)} &= \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |b\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t (b\boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)} \\
&= \frac{(b|\boldsymbol{\Sigma}|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t (b\boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)} \\
&= \frac{(b|\boldsymbol{\Sigma}|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \frac{1}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})\right)} \\
&= b^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \left(\frac{1}{b} - 1\right)\right\} \\
\log \frac{f_B'(\mathbf{X}_i)}{f_G'(\mathbf{X}_i)} &= \log b^{-\frac{1}{2}} - 0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \left(\frac{1}{b} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2} \log b + 0,5(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) \left(1 - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}$$

dengan

b : Faktor skala pada matriks kovariansi

Grafik pengendali CUSUM untuk mendeteksi pergeseran pada variabilitas dari suatu proses yang normal multivariat dapat ditulis sebagai berikut,

$$S_i = \max\left(0; S_{i-1} + (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) - v\right) > h$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$. nilai awal $S_0 = 0$, dan

$$v = \log(b) \left(\frac{b}{b-1}\right)$$

Menurut Muirhead (1982), dinyatakan bahwa $(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})$ mengikuti distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas v . Berdasarkan konsep

tersebut, grafik pengendali CUSUM multivariat dikembangkan untuk memantau vektor rata-rata serta matriks kovariansi secara simultan. Untuk keperluan tersebut, dilakukan transformasi data sebagai berikut:

$$Y_i = \Phi^{-1}\{H[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}) : \nu]\} \quad (2.14)$$

dengan $\Phi(z) = P(Z \leq z)$. merupakan fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak Z yang berdistribusi normal standar, yaitu $Z \sim N(0, 1)$. Adapun fungsi Φ^{-1} adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif normal standar dan fungsi distribusi kumulatif $H(W : \nu) = P(W \leq W | \nu)$ untuk $W \sim \chi_\nu^2$ distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas ν . Selain itu, fungsi Z_i dan Y_i bersifat independen satu sama lain. Ketika rata-rata proses dan variabilitas proses berada dalam kondisi terkendali, maka nilai karakteristik kualitas $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $b = 1$. Dalam keadaan ini, keduanya mengikuti distribusi normal standar univariat, dan distribusi tersebut tidak dipengaruhi oleh ukuran sampel (Cheng & Thaga, 2005).

2.1.6.3 Pembentukan Grafik Pengendali Max-MCUSUM

Pergeseran pada suatu proses yang menyebabkan grafik pengendali berada dalam kondisi tidak terkendali dapat disebabkan oleh perubahan pada rata-rata proses maupun pada varian proses. Berdasarkan uraian sebelumnya, karena Z_i dan Y_i memiliki distribusi yang sama maka dapat dibangun sebuah grafik pengendali CUSUM yang mampu memantau secara simultan perubahan pada kedua aspek tersebut, baik pergeseran rata-rata maupun variabilitas proses dalam satu grafik yang terpadu. Statistik CUSUM yang dikembangkan

berdasarkan asumsi independensi dan distribusi normal dari variable Z_i dan Y_i , dirumuskan sebagai berikut (Cheng & Thaga, 2005).

$$C_i^+ = \max(0; Z_i - 0,5D + C_{i-1}^+) \quad (2.15)$$

$$C_i^- = \max(0; -0,5D + C_{i-1}^-) \quad (2.16)$$

untuk memonitor rata-rata proses, dan

$$S_i^+ = \max(0; Y_i - k + S_{i-1}^+) \quad (2.17)$$

$$S_i^- = \max(0; -Y_i - k + S_{i-1}^-) \quad (2.18)$$

Untuk memantau variabilitas proses, ditetapkan nilai awal $C_0 = 0$ dan $S_0 = 0$. Dalam prosedur pengendalian kualitas multivariat, fokus pengamatan bukan pada arah pergeseran, melainkan pada besarnya pergeseran yang terjadi. Oleh karena itu, statistik CUSUM sebelumnya ditransformasi menjadi bentuk berikut:

$$C_i = \max(C_i^+; C_i^-) \quad (2.19)$$

$$S_i = \max(S_i^+; S_i^-) \quad (2.20)$$

Karena Z_i dan Y_i memiliki distribusi yang sama, statistik untuk grafik pengendali multivariat dapat dikembangkan dengan menjadi sebagai berikut (Cheng & Thaga, 2005):

$$M_i = \max(C_i; S_i) \quad (2.21)$$

Nilai M_i akan digunakan sebagai titik plot pada grafik pengendali. Mengingat bahwa $M_i \geq 0$ maka hanya digunakan batas kendali atas atau *upper control limit* (h) (Raissi, 2009). Jika $M_i > h$, maka kondisi tersebut menunjukkan bahwa proses tidak lagi berada dalam kondisi terkendali.

Menurut Khusna dkk., (2018) distribusi statistik Max-MCUSUM tidak diketahui secara analitik dan penentuan batas kendali atas tidak dapat dilakukan menggunakan pendekatan distribusi teoritis. Oleh karena itu, digunakan pendekatan *bootstrap* untuk memperkirakan batas kendali atas secara empiris berdasarkan data yang berada dalam kondisi terkendali. Metode *bootstrap* merupakan teknik resampling yang dilakukan dengan mengambil sampel ulang dari data asli secara acak dengan pengembalian (*sampling with replacement*) sehingga dapat membentuk banyak sampel baru yang memiliki karakteristik serupa dengan data awal.

Diasumsikan data berada dalam kondisi terkendali. Dari data tersebut dihitung karakteristik kualitas proses seperti vektor rata-rata μ_0 dan matriks kovariansi Σ . Selanjutnya dilakukan proses *resampling* sebanyak B kali pada setiap replikasi, kemudian mengulang proses tersebut sebanyak N' kali. Melalui prosedur ini diperoleh distribusi empiris dari statistik Max-MCUSUM yang lebih stabil dan tidak bergantung pada asumsi distribusi tertentu.

Berdasarkan kumpulan nilai statistik hasil *bootstrap* tersebut, batas kendali atas ditentukan menggunakan kuantil *bootstrap* pada tingkat signifikansi α . Secara matematis, batas kendali atas dapat dinyatakan sebagai (Khusna dkk., 2018):

$$h = \frac{1}{N'} \sum_{l=1}^{N'} M_{[(1-\alpha)B]}^l \quad (2.22)$$

dengan

h : Batas kendali atas

$M_{[(1-\alpha)B]}^l$: Nilai kuantil ke $-(1 - \alpha)$ pada replikasi ke- l , $l = 1, 2, \dots, N'$

2.1.7 Kapabilitas Proses

Analisis kapabilitas proses merupakan analisis yang dilakukan untuk mengukur kemampuan proses pada suatu produk dalam memenuhi spesifikasi yang ditentukan (Montgomery, 2013). Indeks dapat dihitung menggunakan persamaan sebagai berikut (Raissi, 2009).

$$MC_p = \sum_{j=1}^p w_j C_p(X_j) \quad (2.23)$$

$$MC_{pk} = \sum_{j=1}^p w_j C_{pk}(X_j) \quad (2.24)$$

dengan w_j merupakan pembobot berdasarkan kepentingan dengan $\sum_{j=1}^p w_j = 1$, serta p adalah banyak karakteristik kualitas dalam pengamatan. MC_p dan MC_{pk} berturut-turut merupakan bentuk multivariat dari C_p dan C_{pk} yang dapat dihitung menggunakan persamaan

$$C_p(X_j) = \frac{USL_j - LSL_j}{6\sigma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.25)$$

$$C_{pk}(X_j) = \min\left(\frac{USL_j - \bar{X}_j}{3\sigma_j}, \frac{LSL_j - \bar{X}_j}{3\sigma_j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.26)$$

dengan

USL_j : Upper Specification Limit ke- j

LSL_j : Lower Specification Limit ke- j

$\bar{X}_j$: Rata-rata untuk karakteristik kualitas ke- j

σ_j : Standar deviasi untuk karakteristik kualitas ke- j

2.2 Kualitas Air Umpan Boiler

Air umpan boiler merupakan air yang digunakan untuk mengisi ketel uap (boiler), baik berasal dari air baku yang telah melalui proses treatment maupun dari kondensat yang dikembalikan ke sistem. Kualitas air umpan sangat penting karena akan menentukan efisiensi perpindahan panas, umur boiler, serta keselamatan operasional sistem. Air yang tidak memenuhi standar kualitas dapat menimbulkan berbagai masalah serius seperti pembentukan kerak (*scaling*), korosi, dan kontaminasi biologis.

Pengawasan kualitas air umpan boiler dilakukan melalui pengujian terhadap beberapa karakteristik kualitas utama. Karakteristik kualitas yang dipilih dalam penelitian ini mencakup pH, *Total Dissolved Solids* (TDS) dan *Turbidity*. Masing-masing karakteristik kualitas memiliki ketentuan atau batas standar operasional yang diacu berdasarkan panduan teknis pengolahan air boiler *International Association for the Properties of Water and Steam* (IAPWS) yang digunakan pada perusahaan PT Pabrik Gula Rajawali I. Batas standar operasional air umpan boiler disajikan pada Tabel 2.2 berikut:

Tabel 2.2 Batas Standar Operasional Air Umpan Boiler		
Karakteristik Kualitas	Satuan	Batas Standar
pH	–	8,5 – 9,5
<i>Total Dissolved Solids</i> (TDS)	ppm	< 100 ppm
<i>Turbidity</i>	NTU	< 1 NTU

1. pH

pH adalah karakteristik kualitas yang mengukur tingkat keasaman atau kebasaan air. Nilai pH yang terlalu rendah (asam) dapat mempercepat laju korosi pada pipa, drum, dan permukaan logam lainnya. Sebaliknya, nilai pH

yang terlalu tinggi (basa) dapat memicu pengendapan mineral seperti kalsium karbonat dan magnesium hidroksida yang membentuk kerak (*scale*) pada permukaan perpindahan panas. Oleh karena itu, menjaga pH dalam rentang optimal yaitu antara 8,5 hingga 9,5.

2. *Total Dissolved Solids* (TDS) (ppm)

Total Dissolved Solids (TDS) merupakan ukuran konsentrasi zat padat terlarut dalam air, seperti ion mineral, garam, dan logam, yang dinyatakan dalam satuan ppm (*parts per million*). Satuan ppm menunjukkan jumlah bagian zat terlarut dalam satu juta bagian air, sehingga memberikan gambaran tingkat konsentrasi zat terlarut secara relatif dalam suatu larutan. Dengan demikian, tingginya nilai TDS meningkatkan risiko pembentukan kerak pada permukaan perpindahan panas di dalam boiler. Kerak ini bersifat isolatif, sehingga menghambat perpindahan panas, meningkatkan konsumsi bahan bakar, dan menimbulkan titik panas (*hot spot*) yang dapat memicu kegagalan pipa. Untuk mencegah masalah ini, pengendalian TDS dilakukan melalui proses *blowdown*, yaitu pembuangan sebagian air dari boiler yang mengandung konsentrasi padatan tinggi, kemudian diganti dengan air segar yang telah diolah.

3. *Turbidity* (NTU)

Turbidity adalah tingkat kekeruhan air yang disebabkan oleh partikel tersuspensi, seperti lumpur, pasir, atau zat organik, yang dinyatakan dalam satuan NTU (*Nephelometric Turbidity Unit*). Nilai NTU menunjukkan tingkat hamburan cahaya oleh partikel dalam air dimana semakin tinggi nilainya, semakin keruh air tersebut. Partikel ini dapat menumpuk di permukaan pemanas dan mengganggu efisiensi perpindahan panas. Selain itu, partikel

tersuspensi dapat menjadi titik awal pembentukan kerak jika mengandung mineral tertentu. *Turbidity* yang tinggi sering menunjukkan bahwa sistem pengolahan awal (pretreatment) atau filtrasi belum optimal, sehingga memerlukan perbaikan proses penyaringan atau koagulasi-flokulasi.

2.3 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Dalam ajaran Islam, kejujuran, keadilan, dan tanggung jawab merupakan prinsip utama yang harus diterapkan dalam setiap kegiatan produksi. Kelalaian dalam menjaga kualitas, seperti pada pengendalian kualitas air umpan boiler, dapat menimbulkan kerugian bagi proses maupun hasil produksi. Misalnya, pengambilan sampel yang tidak sesuai prosedur atau pengawasan yang kurang teliti dapat menyebabkan kualitas air tidak memenuhi standar. Tindakan semacam ini bertentangan dengan nilai-nilai Islam yang menekankan amanah dan kehati-hatian dalam bekerja.

Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur'an yang artinya:

"Celakalah bagi orang-orang yang curang, yaitu orang-orang yang apabila menerima takaran dari orang lain mereka minta dipenuhi, dan apabila mereka menakar atau menimbang untuk orang lain, mereka mengurangi." (QS. Al-Muthaffifin: 1–3)

Ayat ini menegaskan bahwa menjaga ketepatan takaran dan timbangan merupakan kewajiban, yang dalam konteks modern dapat dimaknai sebagai kewajiban memenuhi standar kualitas dan spesifikasi teknis. Dalam pengelolaan air umpan boiler, mengabaikan karakteristik kualitas artinya dengan melakukan kecurangan yang berpotensi merugikan banyak pihak, baik secara teknis maupun sosial.

Selain itu, Rasulullah SAW bersabda (Damanik dkk., 2024) yang artinya:

“Sesungguhnya kejujuran membawa kepada kebaikan, dan kebaikan membawa ke surga. Seseorang akan senantiasa berkata jujur hingga ia dicatat di sisi Allah sebagai orang yang sangat jujur (ṣiddīq). Dan sesungguhnya kedustaan membawa kepada kejahatan, dan kejahatan membawa ke neraka. Seseorang akan terus berdusta hingga ia dicatat di sisi Allah sebagai pendusta.” (HR. Al-Bukhari No. 6094 dan Muslim No. 2607)

Hadis ini menegaskan bahwa kejujuran merupakan fondasi utama dalam setiap tindakan manusia, termasuk dalam pekerjaan profesional. Dalam konteks pengendalian kualitas, kejujuran berarti melaporkan hasil pengujian sesuai dengan fakta tanpa manipulasi data, menyampaikan kondisi produk secara objektif, serta mematuhi standar kualitas yang berlaku. Penerapan nilai kejujuran ini tidak hanya mencerminkan integritas pribadi seorang pekerja, tetapi juga menjadi bentuk tanggung jawab moral terhadap perusahaan, konsumen, dan masyarakat secara luas. Dengan demikian, topik penelitian ini memiliki korelasi kuat dengan prinsip Islam, yaitu keadilan, transparansi, kejujuran dan tanggung jawab sosial dalam proses produksi. Penerapan metode statistik seperti Max-MCUSUM bukan hanya langkah ilmiah, tetapi juga wujud nyata dari pelaksanaan nilai-nilai Islam dalam industri.

2.4 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Penelitian ini berfokus pada pengendalian kualitas air umpan boiler dengan menggunakan pendekatan statistik modern, yaitu grafik pengendali *Maximum Multivariate Cumulative Sum* (Max-MCUSUM). Kajian teoritis pada bagian ini menjadi landasan untuk memahami mengapa pendekatan ini dipilih dan bagaimana konsep-konsep utama yang mendasarinya akan digunakan dalam penelitian.

1. Teori pengendalian proses statistik (*Statistical Process Control* / SPC)

Statistical Process Control adalah teknik yang digunakan untuk memantau, mengendalikan, dan meningkatkan kualitas proses produksi secara

berkesinambungan. SPC bertujuan untuk membedakan antara variasi yang alami (*common cause variation*) dan variasi yang tidak normal (*assignable cause variation*). Melalui pengendalian statistik, perusahaan dapat menjaga agar proses produksi tetap stabil dan hasilnya dapat diprediksi. Salah satu alat utama dalam SPC adalah grafik pengendali, yang digunakan untuk memantau karakteristik kualitas dari waktu ke waktu. Dalam penelitian ini, SPC menjadi kerangka umum di mana grafik Max-MCUSUM diterapkan.

2. Teori multivariat dalam pengendalian kualitas

Dalam banyak proses industri, kualitas tidak hanya ditentukan oleh satu karakteristik kualitas, tetapi oleh beberapa karakteristik yang saling berkorelasi. Oleh karena itu, penggunaan metode multivariat lebih tepat dibandingkan metode univariat. Grafik pengendali multivariat, seperti T^2 -Hotelling dan MCUSUM, dikembangkan untuk menangani data yang memiliki lebih dari satu karakteristik kualitas yang saling memengaruhi. Dalam kasus ini, grafik Max-MCUSUM menjadi pendekatan ideal karena mampu mendeteksi perubahan kecil (*small shifts*) dalam vektor rata-rata dan matriks kovariansi secara lebih sensitif dibanding grafik multivariat konvensional.

3. Grafik Max-MCUSUM

Grafik Max-MCUSUM merupakan pengembangan dari grafik MCUSUM yang menggunakan prinsip maksimum untuk meningkatkan kepekaan dalam mendeteksi perubahan proses. Dalam pendekatan ini, statistik pengendali M_i dihitung berdasarkan nilai maksimum dari statistik CUSUM pada setiap karakteristik kualitas multivariat.

Karakteristik penting dari grafik ini:

- a. Mampu mendeteksi perubahan kecil dalam karakteristik kualitas proses lebih cepat.
- b. Efektif dalam memantau proses yang memiliki korelasi antar karakteristik kualitas .
- c. Sangat cocok untuk lingkungan produksi karena dapat mendeteksi lebih awal terhadap ketidaksesuaian sangat krusial.

Dalam penelitian ini, Max-MCUSUM akan digunakan untuk mengevaluasi kestabilan proses berdasarkan data kualitas air umpan boiler, dan dibandingkan dengan batas kendali yang telah ditentukan.

4. Teori kapabilitas proses (*Process Capability Analysis*)

Setelah proses dinyatakan dalam kondisi statistik terkendali, dilakukan analisis kapabilitas untuk mengukur sejauh mana proses mampu menghasilkan produk yang memenuhi spesifikasi pelanggan. Indeks seperti C_p dan C_{pk} digunakan untuk mengukur kemampuan proses (*process capability*).

Kapabilitas proses sangat penting karena grafik pengendali hanya menginformasikan apakah proses stabil, bukan apakah hasil produk sudah sesuai dengan spesifikasi. Dengan analisis kapabilitas, akan diketahui apakah perbaikan lebih lanjut diperlukan.

5. Arah pembahasan yang akan dituju

Dari seluruh kajian teori di atas, penelitian ini akan diarahkan pada:

- a. Penerapan grafik Max-MCUSUM untuk memantau kestabilan mesin.
- b. Evaluasi sensitivitas metode ini dalam mendeteksi perubahan kecil dalam karakteristik kualitas.
- c. Analisis kapabilitas untuk mengetahui performa setelah proses stabil.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif, yang bertujuan untuk menganalisis data numerik secara statistik guna mengevaluasi penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM dalam pengendalian kualitas produk. Pendekatan ini memungkinkan identifikasi adanya pergeseran kecil dalam proses produksi berdasarkan data multivariat. Penelitian ini juga memanfaatkan studi literatur dari jurnal ilmiah, buku, dan publikasi lain yang relevan untuk memperkuat landasan teori serta mendukung interpretasi hasil analisis.

3.2 Data dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari laporan proses produksi PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang. Data tersebut mencakup tiga karakteristik kualitas pengukuran kualitas air umpan boiler, disajikan pada Tabel 3.1:

Tabel 3.1 Variabel Penelitian Air Umpan Boiler		
Variabel	Keterangan	Satuan
X_1	pH	–
X_2	TDS	ppm
X_3	<i>Turbidity</i>	NTU

Sumber: Susanti, R., & Wahyudi, A. (2020).

Data diambil dari hasil pengukuran harian terbaru dengan total 62 hari pengamatan, terhitung dari tanggal 20 Juli 2025 hingga 19 September 2025 yang telah disetujui bersama pihak perusahaan.

3.3 Teknik Pengumpulan Data

Data diperoleh melalui metode dokumentasi, yakni dengan menelaah laporan pengendalian kualitas harian yang dikeluarkan oleh bagian *Quality Control* perusahaan. Melalui pendekatan ini, seluruh informasi yang dibutuhkan dapat dihimpun secara sistematis karena laporan tersebut memuat catatan karakteristik kualitas proses, rekaman inspeksi rutin, serta hasil evaluasi kualitas yang dilakukan setiap hari. Dengan demikian, data yang terkumpul memiliki tingkat keandalan yang baik dan mencerminkan kondisi operasional secara aktual.

3.4 Instrumen Penelitian

Instrumen utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah perangkat lunak statistik *Python*, yang berfungsi untuk mengolah data, melakukan perhitungan matematis, serta membangun grafik pengendali Max-MCUSUM. Melalui perangkat lunak ini, data multivariat dapat dianalisis secara lebih efisien sehingga memudahkan peneliti dalam mengidentifikasi pola atau perubahan kecil yang terjadi pada proses produksi.

3.5 Tahapan Analisis Data

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan sistematis untuk memastikan bahwa proses pengendalian kualitas air umpan boiler dapat dianalisis secara akurat dengan pendekatan statistik multivariat. Tahapan tersebut dijelaskan sebagai berikut:

1. Persiapan dan deskripsi data

Tahap awal dimulai dengan menyiapkan serta memahami data kualitas air umpan boiler yang digunakan dalam analisis. Deskripsi data yang dilakukan, meliputi nilai minimum, maksimum standar deviasi dan rata-rata untuk memberikan gambaran awal mengenai kondisi aktual kualitas air sebelum memasuki tahap analisis lebih lanjut.

2. Uji normalitas multivariat

Asumsi ini penting karena penerapan metode MCUSUM didasarkan pada sifat distribusi normal dari data multivariat dengan menggunakan metode jarak kuadrat mahalanobis sebagaimana tercantum pada persamaan (2.4) hingga (2.6). Jika hasil uji menunjukkan bahwa data berdistribusi normal, maka analisis dapat dilanjutkan. Namun, apabila data tidak memenuhi asumsi normalitas, dapat dilakukan transformasi data untuk memperbaiki distribusi.

3. Uji korelasi antar karakteristik kualitas

Langkah selanjutnya adalah menguji antar karakteristik kualitas yang diamati memiliki korelasi. Uji korelasi ini dilakukan untuk memastikan kelayakan penggunaan metode analisis multivariat, sebab penerapan grafik MCUSUM mengharuskan adanya hubungan antar karakteristik kualitas. Pengujian dilakukan dengan uji korelasi Bartlett. Statistik uji yang digunakan mengacu pada persamaan (2.7), sedangkan matriks korelasi disusun mengikuti definisi pada persamaan (2.8). Apabila hasil uji menunjukkan bahwa antar karakteristik kualitas terdapat korelasi yang signifikan, maka pendekatan multivariat dapat diterapkan.

4. Pembuatan grafik pengendali Max-MCUSUM Fase I, fase ini dilakukan untuk menentukan parameter karakteristik kualitas dan memastikan proses terkendali

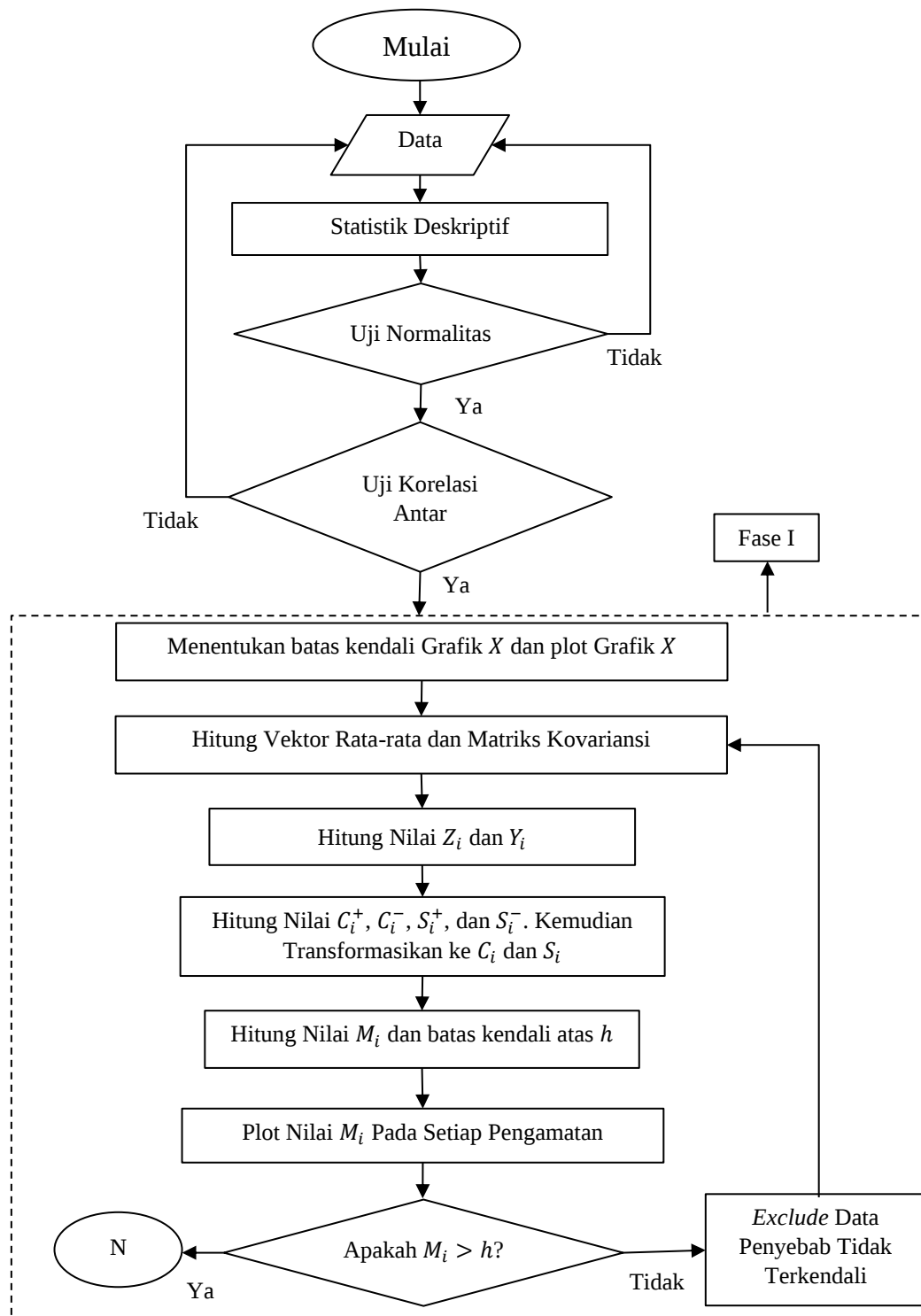
secara statistik sebelum monitoring lebih lanjut. Data Fase I menggunakan sampel awal, yaitu data dari tanggal 20 Juli 2025 hingga 31 Agustus 2025. Sebelum tahapan analisis dilakukan plot grafik X yang batas kendalinya dihitung berdasarkan persamaan (2.1) hingga (2.3), setelah itu dilakukan analisis Max-MCUSUM pada Fase I. Langkah-langkahnya sebagai berikut:

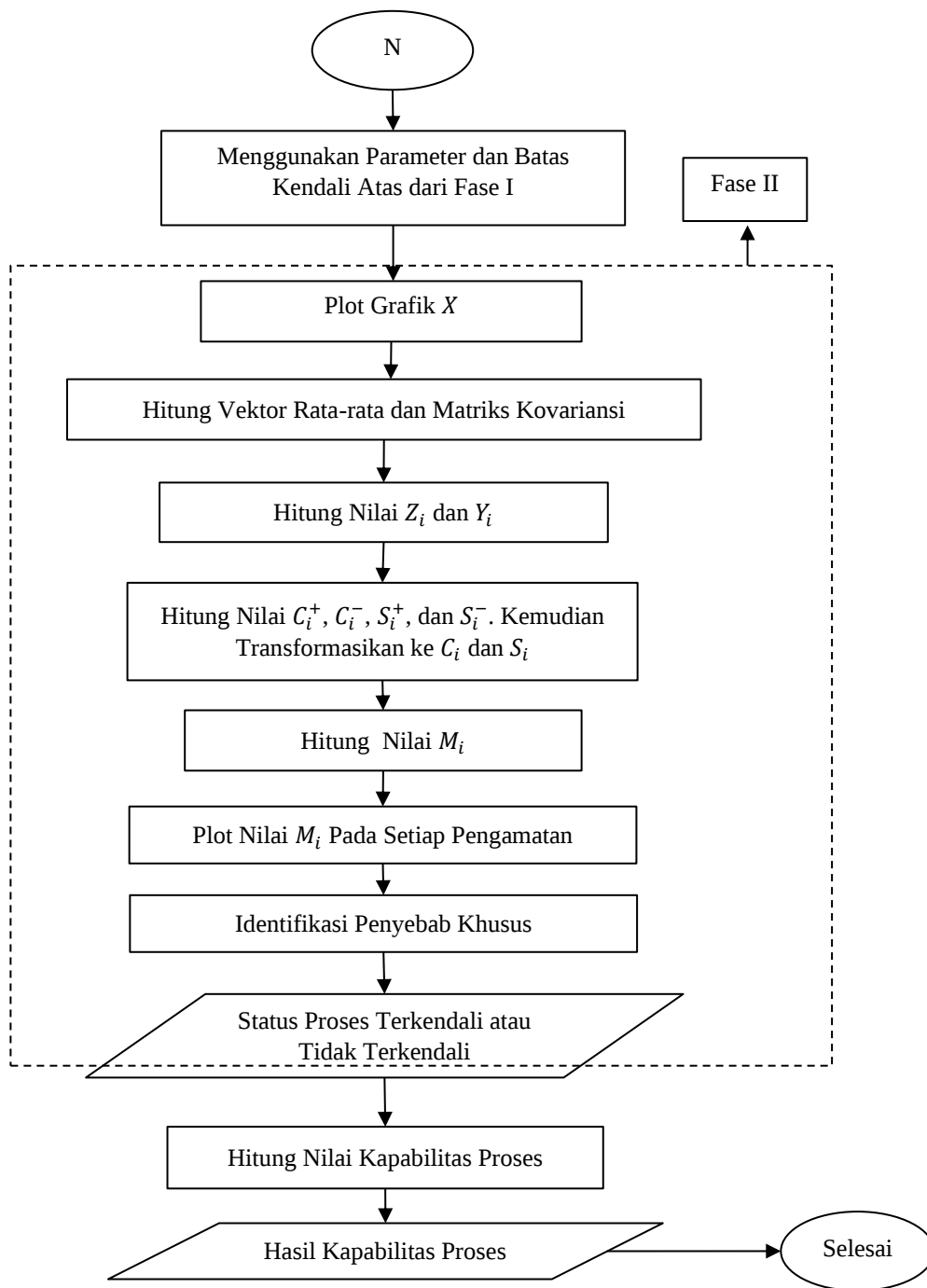
- a. Menentukan parameter: vektor rata-rata target μ_G dan μ_B , serta matriks kovariansi Σ .
- b. Untuk setiap pengamatan, hitung Z_i untuk pergeseran rata-rata pada persamaan (2.12) dan Y_i untuk pergeseran variabilitas pada persamaan (2.11).
- c. Untuk mendeteksi perubahan pada vektor rata-rata dan matriks kovariansi, hitung nilai k pada persamaan (2.11), serta jumlah kumulatif C_i^+ , C_i^- , S_i^+ , dan S_i^- pada persamaan (2.15) hingga (2.18), kemudian transformasikan ke C_i dan S_i pada persamaan (2.19) dan (2.20).
- d. Hitung nilai M_i pada persamaan (2.21)
- e. Hitung batas kendali atas h , yang ditentukan melalui pendekatan *bootstrap* pada persamaan (2.22) kemudian bandingkan nilai M_i dengan nilai h
- f. Plotkan nilai M_i terhadap pengamatan: jika $M_i \leq h$, plot sebagai titik biasa.
- g. Jika $M_i > h$, identifikasi jenis pergeseran C_+ untuk pergeseran rata-rata, V_+ untuk variabilitas, atau B_{++} untuk keduanya dan *exclude* pengamatan yang tidak terkendali. Kemudian, dilakukan perbaikan dan reset statistik CUSUM ke nilai awal. Proses ini diulang hingga semua titik $M_i \leq h$ yang menandakan proses terkendali secara statistik pada Fase I.

5. Pembuatan grafik pengendali Max-MCUSUM pada Fase II, fase ini dilakukan untuk memantau kestabilan proses menggunakan batas kendali atas (h) dari Fase I. Data Fase II menggunakan data dari tanggal 1 September 2025 hingga 19 September 2025. Sebelum tahapan analisis dilakukan plot grafik X yang batas kendalinya dihitung berdasarkan persamaan (2.1) hingga (2.3), setelah itu dilakukan analisis Max-MCUSUM pada Fase I. Langkah-langkahnya sebagai berikut:
 - a. Menggunakan parameter dan batas atas kendali h yang sudah ditentukan dari Fase I.
 - b. Untuk setiap pengamatan hitung kembali Z_i untuk pergeseran rata-rata pada persamaan (2.12) dan Y_i untuk pergeseran variabilitas pada persamaan (2.14).
 - c. Untuk mendeteksi perubahan pada vektor rata-rata dan matriks kovariansi, hitung nilai k pada persamaan (2.11), serta jumlah kumulatif C_i^+ , C_i^- , S_i^+ , dan S_i^- pada persamaan (2.15) hingga (2.18), kemudian transformasikan ke C_i dan S_i pada persamaan (2.19) hingga (2.20).
 - d. Hitung nilai M_i pada persamaan (2.21) dan bandingkan dengan batas kendali atas h .
 - e. Plotkan nilai M_i pada setiap pengamatan.
 - f. Jika $M_i > h$, identifikasi jenis pergeseran C_+ untuk pergeseran rata-rata, V_+ untuk variabilitas, atau B_{++} untuk keduanya dan penyebab terjadinya data tidak terkendali.
6. Analisis kapabilitas proses. Apabila grafik pengendali menunjukkan bahwa proses berada dalam kondisi terkendali, maka dilakukan analisis kapabilitas

proses untuk menilai sejauh mana sistem mampu memenuhi spesifikasi kualitas yang telah ditentukan. Indeks kapabilitas dihitung berdasarkan persamaan (2.23) dan (2.24). Nilai indeks C_p pada persamaan (2.25) digunakan untuk menilai kemampuan proses secara umum, sedangkan nilai C_{pk} pada persamaan (2.23) memberikan gambaran tentang kesesuaian proses dengan batas spesifikasi. Analisis ini memberikan informasi kualitas air umpan boiler konsisten sesuai standar atau perlu dilakukan perbaikan.

Langkah-langkah tahapan analisis data disajikan pada Gambar 3.1.





Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Statistika Deskriptif

Statistika deskriptif digunakan sebagai gambaran umum dari karakteristik air umpan boiler yang mencakup tiga karakteristik kualitas. Berikut adalah hasil analisa deskriptif karakteristik kualitas air umpan boiler yang disajikan pada Tabel 4.1:

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Air Umpan Boiler

Karakteristik Kualitas	N	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimal	Maksimal
pH	62	8,8158	0,1073	8,60	9
TDS (ppm)	62	44,47	6,0100	36,36	65,60
Turbidity (NTU)	62	0,8819	0,2857	0,30	1,81

Berdasarkan Tabel 4.1, menunjukkan hasil statistik deskriptif terhadap 62 pengamatan, pH air menunjukkan nilai rata-rata sebesar 8,8158 dengan standar deviasi 0,1073. Nilai minimal yang diperoleh adalah 8,60 dan nilai maksimal 9,0, sehingga seluruh data berada dalam rentang standar kualitas air yaitu $\text{pH} > 8,5$ hingga 9,5. Hal ini mengindikasikan bahwa kondisi air cenderung bersifat basa ringan dan memiliki tingkat kestabilan yang tinggi. Standar deviasi yang relatif kecil juga memperkuat bahwa variasi antar pengamatan tidak signifikan, sehingga dapat disimpulkan bahwa karakteristik kualitas pH berada dalam kondisi yang terkendali dan konsisten selama periode pengamatan.

Pada karakteristik kualitas *Total Dissolved Solids* (TDS), diperoleh nilai rata-rata sebesar 44,47 ppm dengan standar deviasi 6,0100 ppm. Nilai minimal tercatat sebesar 36,36 ppm, sedangkan nilai maksimal mencapai 65,60 ppm. Seluruh nilai

tersebut masih berada jauh di bawah batas standar yang ditetapkan, yaitu kurang dari 100 ppm, yang menunjukkan bahwa kandungan zat terlarut dalam air relatif rendah dan masih memenuhi kriteria kualitas air yang baik. Namun demikian, jika dibandingkan dengan karakteristik kualitas pH, nilai standar deviasi pada TDS tergolong lebih besar, yang mengindikasikan adanya variasi yang cukup nyata antar pengamatan. Rentang data yang cukup lebar ini dapat mencerminkan adanya fluktuasi kondisi lingkungan atau proses yang memengaruhi kandungan zat terlarut dalam air.

Sementara itu, untuk karakteristik kualitas *turbidity*, diperoleh nilai rata-rata sebesar 0,8819 NTU dengan standar deviasi 0,2857 NTU. Nilai minimal yang tercatat adalah 0,30 NTU dan nilai maksimal sebesar 1,81 NTU. Secara umum, nilai rata-rata kekeruhan masih berada di bawah batas standar yang ditetapkan yaitu <1 NTU, sehingga dapat dikatakan bahwa kualitas air dari segi kejernihan masih tergolong baik. Akan tetapi, keberadaan nilai maksimal yang melebihi batas standar menunjukkan bahwa pada beberapa waktu tertentu terjadi peningkatan kekeruhan yang cukup signifikan. Hal ini mengindikasikan adanya ketidakstabilan pada karakteristik kualitas *turbidity*, yang kemungkinan disebabkan oleh gangguan proses, perubahan kondisi operasional, atau faktor eksternal lainnya.

Secara keseluruhan, ketiga karakteristik kualitas menunjukkan bahwa kualitas air umumnya masih berada dalam batas standar yang ditetapkan. Karakteristik kualitas pH merupakan yang paling stabil dan konsisten, sedangkan TDS dan *turbidity* menunjukkan tingkat variasi yang lebih tinggi. Oleh karena itu, meskipun kualitas air umpan boiler secara umum tergolong baik, diperlukan perhatian lebih

terhadap pengendalian karakteristik kualitas TDS dan *turbidity* guna menjaga kestabilan kualitas air secara menyeluruh.

4.2 Uji Normalitas Multivariat

Uji normalitas multivariat dilakukan sebagai tahapan awal analisis untuk memastikan bahwa data memenuhi asumsi distribusi normal multivariat. Pengujian ini penting karena metode pengendalian kualitas multivariat, termasuk peta kendali Max-MCUSUM, mensyaratkan data berdistribusi normal multivariat agar estimasi karakteristik kualitas dan interpretasi hasil menjadi valid. Uji normalitas dilakukan menggunakan pendekatan jarak kuadrat Mahalanobis hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat.

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik uji:

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})$$

Untuk menghitung nilai d_i^2 , terdapat beberapa langkah. Langkah pertama, menghitung nilai rata-rata ($\bar{\mathbf{X}}$) yang masing-masing karakteristik kualitas, diperoleh:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{62} X_{i1}}{62} \\ &= \frac{X_{1,1} + X_{2,1} + \dots + X_{62,1}}{62} = \frac{(8,7) + (8,7) + \dots + (8,85)}{62} = 8,8219 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{62} X_{i,2}}{62} \\ &= \frac{X_{1,2} + X_{2,2} + \dots + X_{62,2}}{62} = \frac{(47,02) + (43,15) + \dots + (36,44)}{62} = 44,4687 \end{aligned}$$

$$\bar{X}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{62} X_{i,3}}{62}$$

$$= \frac{X_{1,3} + X_{2,3} + \dots + X_{82,3}}{62} = \frac{(0,71) + (0,72) + \dots + (0,73)}{62} = 0,8816$$

Sehingga diperoleh vektor rata-rata:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 8,8219 \\ 44,4687 \\ 0,8816 \end{pmatrix}$$

Nilai rata-rata tersebut menggambarkan kondisi umum karakteristik kualitas air umpan boiler selama periode pengamatan. Rata-rata pH menunjukkan tingkat keasaman air yang cenderung stabil pada kondisi basa ringan, sedangkan rata-rata TDS dan *Turbidity* menunjukkan kandungan zat terlarut dan tingkat kekeruhan air yang masih berada pada rentang operasional proses pengolahan air boiler. Kemudian, dihitung matriks kovariansi yang masing-masing elemennya dapat dihitung berdasarkan persamaan (2.3)

$$S_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,1} - \bar{X}_1)^2}{62 - 1} = 0,0115$$

$$S_{2,2} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,2} - \bar{X}_2)^2}{62 - 1} = 36,1157$$

$$S_{3,3} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,3} - \bar{X}_3)^2}{62 - 1} = 0,0816$$

$$S_{3,1} = S_{1,3} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,1} - \bar{X}_1)(X_{i,3} - \bar{X}_3)}{62 - 1} = -0,00782$$

$$S_{1,2} = S_{2,1} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,1} - \bar{X}_1)(X_{i,2} - \bar{X}_2)}{62 - 1} = -0,3792$$

$$S_{2,3} = S_{3,2} = \frac{\sum_{i=1}^{62} (X_{i,2} - \bar{X}_2)(X_{i,3} - \bar{X}_3)}{62 - 1} = 0,8166$$

Sehingga diperoleh matriks kovariansi berikut:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,0115 & -0,3792 & -0,0078 \\ -0,3792 & 36,1157 & 0,8166 \\ -0,0078 & 0,8166 & 0,0816 \end{bmatrix}$$

Kemudian, dilakukan invers terhadap matriks kovariansi, diperoleh:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 132,8051 & 1,4302 & -1,5865 \\ 1,4302 & 0,0512 & -0,3750 \\ -1,5865 & -0,3750 & 15,8503 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai d_i^2 berdasarkan persamaan (2.1) dengan nilai invers matriks kovariansi. Berikut adalah contoh perhitungan nilai d_i^2 pada pengamatan ke-1:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})^t \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}}) \\ &= [(8,7 \quad 47,02 \quad 0,71) - (8,8219 \quad 44,4687 \quad 0,8816)] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 132,8051 & 1,4302 & -1,5865 \\ 1,4302 & 0,0512 & -0,3750 \\ -1,5865 & -0,3750 & 15,8503 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8,7 - 8,8219 \\ 47,02 - 44,4687 \\ 0,71 - 0,8816 \end{bmatrix} \\ &= 2,0035 \end{aligned}$$

Langkah yang sama dilakukan untuk menghitung $d_1^2, d_2^2, \dots, d_{62}^2$.

Setelah diperoleh nilai d_i^2 , selanjutnya akan ditentukan nilai *Chi-Square* dengan $\alpha = 0,0027$ dan derajat kebebasan $\frac{1}{2}(3)(3-1) = 3$. Berdasarkan tabel *Ch-square* nilai $\chi_{0,0027;3}^2 = 14,1563$. Kemudian nilai tersebut dibandingkan dengan nilai d_i^2 , pengambilan keputusan dengan perbandingan nilai *Chi-Square* dan nilai d_i^2 dijabarkan pada Tabel 4.2 dan dapat dilihat secara keseluruhan di Lampiran 2.

Tabel 4.2 Pengambilan Keputusan Perbandingan Nilai *Chi-Square* dan Nilai d_i^2

No	d_i^2	Nilai <i>Chi-Square</i>	Keterangan
1	2,0035	14,1563	Normal
2	2,5030	14,1563	Normal
3	1,9460	14,1563	Normal
4	6,4854	14,1563	Normal
5	19,8512	14,1563	Outlier
⋮	⋮	⋮	⋮
62	2,1369	14,1563	Normal

Berdasarkan Tabel 4.2, dihitung banyak d_i^2 yang kurang dari 14,1563 sebanyak 61 data (98,3870%), sedangkan nilai d_i^2 yang lebih dari 14,1563 sebanyak 1 data (0,0161%). Hal ini menunjukkan bahwa terdapat lebih dari 50% nilai d_i^2 yang kurang dari nilai $\chi_{0,0027;3}^2$. Sehingga dapat diambil keputusan menerima H_0 , artinya data berdistribusi normal multivariat.

4.3 Uji Korelasi Antar Karakteristik Kualitas

Setelah dilakukan uji normalitas multivariat, langkah selanjutnya yaitu melakukan uji korelasi untuk mengetahui hubungan antar karakteristik kualitas. Analisis korelasi menjadi penting dalam metode Max-MCUSUM karena hubungan antar karakteristik kualitas dapat memberikan gambaran mengenai keterkaitan karakteristik kualitas air umpan boiler. Selain itu, informasi ini juga diperlukan sebagai dasar dalam analisis multivariat lanjutan, karena adanya korelasi menunjukkan bahwa karakteristik-karakteristik kualitas tersebut tidak berdiri sendiri, melainkan saling berinteraksi satu sama lain.

Pengujian korelasi yang digunakan dalam penelitian ini didasarkan pada matriks korelasi, dengan tujuan untuk menguji apakah matriks korelasi populasi sama dengan matriks identitas. Matriks identitas mengindikasikan bahwa tidak terdapat hubungan antar karakteristik kualitas, sehingga setiap karakteristik kualitas bersifat independen. Hipotesis dan statistik uji dari pengujian korelasi yang digunakan sebagai berikut:

$H_0: \mathbf{R} = \mathbf{I}$ (tidak terdapat korelasi antar karakteristik kualitas)

$H_1: \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (terdapat korelasi antar karakteristik kualitas).

Statistik uji:

$$\chi_{hitung}^2 = -\left\{n - 1 - \frac{2p + 5}{6}\right\} \ln|\mathbf{R}|$$

Untuk mengetahui nilai χ_{hitung}^2 , terdapat beberapa langkah sebagai berikut:

Langkah pertama, menghitung matriks korelasi $\mathbf{R}$, berdasarkan persamaan (2.5), diperoleh:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5879 & -0,2549 \\ -0,5879 & 1 & 0,4756 \\ -0,2549 & 0,4756 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks $\mathbf{R}$ tersebut, secara lebih rinci menunjukkan bahwa pada elemen $r_{1,2}, r_{2,1} = -0,5879$ atau hubungan karakteristik kualitas pH dan TDS memiliki korelasi negatif sebesar $-0,5879$, elemen $r_{1,3}, r_{3,1} = -0,2549$ atau hubungan karakteristik kualitas pH dan *turbidity* juga memiliki hubungan korelasi negatif sebesar $-0,2549$, dan elemen $r_{2,3}, r_{3,2}$ atau hubungan karakteristik kualitas TDS dan *Turbidity* memiliki korelasi positif sebesar $0,4756$. Dalam hal ini menunjukkan bahwa peningkatan TDS (zat terlarut) maupun *Turbidity* (kekeruhan) pada air umpan boiler cenderung menurunkan nilai pH air umpan boiler. Sementara itu, TDS dan *Turbidity* yang memiliki korelasi positif, mengindikasikan bahwa peningkatan TDS (zat terlarut) pada air umpan boiler berkontribusi terhadap peningkatan *Turbidity* (kekeruhan) pada air umpan boiler.

Kemudian, menghitung determinan matriks korelasi $|\mathbf{R}|$ dan $\ln|\mathbf{R}|$, diperoleh:

$$|\mathbf{R}| = 0,5058$$

$$\ln|\mathbf{R}| = \ln(0,5058)$$

$$= -0,6816$$

Selanjutnya, menghitung nilai χ^2_{hitung} , berdasarkan persamaan (2.4), diperoleh:

$$\begin{aligned}\chi^2_{hitung} &= -\left(n - 1 - \frac{2p + 5}{6}\right) \ln|\mathbf{R}| \\ &= -\left(62 - 1 - \frac{2(3) + 5}{6}\right) - 0,6816 \\ &= 40,3267\end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai χ^2_{hitung} , selanjutnya akan ditentukan nilai *Chi-Square* yang akan digunakan untuk pengujian signifikansi dengan $\alpha = 0,0027$ dan derajat kebebasan $\frac{1}{2}(3)(3 - 1) = 3$. Berdasarkan tabel *Chi-Square* nilai $\chi^2_{0,0027;3} = 14,1563$. Sehingga, dapat diketahui bahwa $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{0,0027;3}$ yang artinya diambil keputusan tolak H_0 yaitu terdapat korelasi antar karakteristik kualitas.

4.4 Grafik Pengendali Max-MCUSUM Fase I

Setelah diketahui bahwa uji korelasi antar karakteristik kualitas serta uji normalitas multivariat telah terpenuhi, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pengendalian terhadap data karakteristik kualitas air umpan boiler pada Fase I, yaitu data historis pada periode 20 Juli 2025 hingga 31 Agustus 2025. Pengendalian ini dilakukan dengan menggunakan grafik pengendali Max-MCUSUM, yang bertujuan untuk mendeteksi adanya pergeseran kecil pada rata-rata proses secara lebih sensitif dibandingkan metode konvensional.

Fase I merupakan tahap awal dalam pengendalian proses statistik yang digunakan untuk mengevaluasi apakah proses berada dalam kondisi terkendali secara statistik. Data historis yang digunakan pada fase ini berperan sebagai dasar

dalam menentukan parameter-parameter proses yang akan digunakan pada tahap pengendalian selanjutnya.

Berikut disajikan statistika deskriptif karakteristik kualitas air umpan boiler pada Fase I yang ditunjukkan pada Tabel 4.3. Statistika deskriptif ini memberikan gambaran awal mengenai pusat dan penyebaran data, yang selanjutnya digunakan sebagai dasar dalam penentuan parameter-parameter pada analisis multivariat pada Fase I.

Tabel 4.3 Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas pada Fase I

Karakteristik Kualitas	N	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimal	Maksimal
pH	43	8,7707	0,0938	8,60	8,93
TDS (ppm)	43	46,6449	5,7510	37,150	65,60
<i>Turbidity</i> (NTU)	43	0,9502	0,2762	0,63	1,81

Berdasarkan Tabel 4.3, diketahui bahwa karakteristik kualitas pH memiliki rata-rata sebesar 8,7707 dengan standar deviasi sebesar 0,0938, yang menunjukkan bahwa variasi data pH relatif kecil dan pengamatan cenderung berada di sekitar nilai rata-ratanya. Karakteristik kualitas TDS memiliki rata-rata sebesar 46,6449 ppm dengan standar deviasi sebesar 5,7510, sehingga menunjukkan variasi data yang lebih besar dibandingkan karakteristik kualitas lainnya. Sementara itu, karakteristik kualitas *Turbidity* memiliki rata-rata sebesar 0,9502 NTU dengan standar deviasi sebesar 0,2762, yang menunjukkan bahwa data *Turbidity* masih memiliki penyebaran yang relatif terkendali. Secara umum, ketiga karakteristik kualitas memiliki nilai rata-rata yang masih berada dalam rentang standar kualitas air umpan boiler.

Selanjutnya dilakukan analisa grafik univariat menggunakan Grafik $\bar{X}$ dari data historis di setiap karakteristik kualitas pada Fase I yang batas kendalinya dihitung berdasarkan persamaan (2.1) hingga (2.3), diperoleh:

untuk karakteristik kualitas pH,

$$UCL = \bar{X}_1 + 3\sigma = 8,7707 + 3(0,0943) = 9,0703$$

$$CL = \bar{X}_1 = 8,7707$$

$$LCL = \bar{X}_1 - 3\sigma = 8,7707 - 3(0,0943) = 8,5045$$

untuk karakteristik kualitas TDS,

$$UCL = \bar{X}_2 + 3\sigma = 46,6449 + 3(5,7513) = 63,8989$$

$$CL = \bar{X}_2 = 46,6449$$

$$LCL = \bar{X}_2 - 3\sigma = 8,7707 - 3(5,713) = 29,3909$$

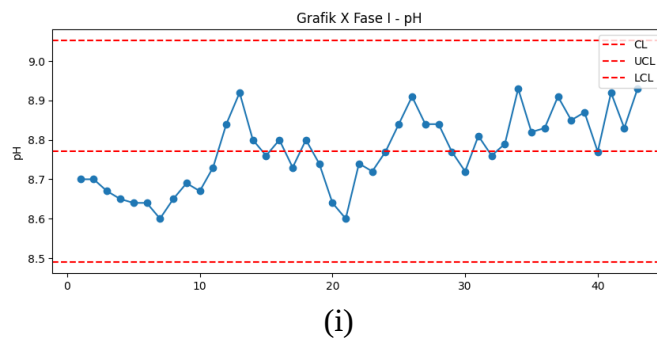
untuk karakteristik kualitas *Turbidity*

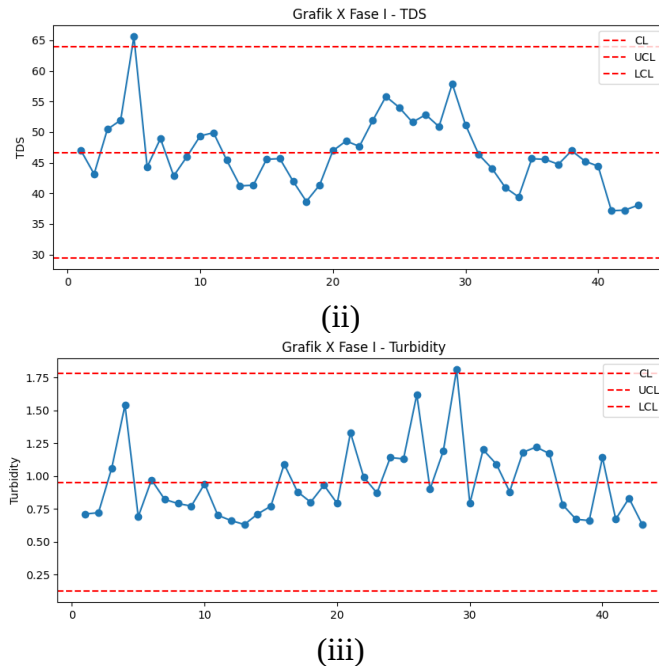
$$UCL = \bar{X}_3 + 3\sigma = 0,9502 + 3(0,2762) = 1,7789$$

$$CL = \bar{X}_3 = 0,9502$$

$$LCL = \bar{X}_3 - 3\sigma = 0,9502 - 3(0,2762) = 0,1215$$

Berdasarkan hasil perhitungan batas kendali untuk Grafik $\bar{X}$, berikut disajikan plot Grafik $\bar{X}$ pada Gambar 4.1.





Gambar 4.1 Grafik *X* pada Setiap Karakteristik Kualitas pada Fase I

Berdasarkan Gambar 4.1 Grafik *X* Fase I pada karakteristik pH (i), menunjukkan bahwa sebagian besar titik berada di dalam batas kendali UCL dan LCL. Ini berarti variasi antar pengamatan masih stabil dan terkendali. Secara umum proses masih dapat dianggap terkendali secara statistik karena tidak terdapat titik yang melewati batas kendali. Pada Grafik *X* Fase I untuk karakteristik TDS (ii), menunjukkan bahwa terdapat satu titik yang melebihi batas kendali atas UCL, yang mengindikasikan adanya variasi khusus pada proses. Selain itu, fluktuasi terlihat cukup bervariasi, sehingga proses belum sepenuhnya terkendali dan perlu dilakukan evaluasi terhadap penyebab lonjakan variasi tersebut agar kualitas proses lebih terkendali. Sedangkan untuk Grafik *X* pada Fase I untuk karakteristik kualitas *Turbidity* (iii) menunjukkan bahwa terdapat satu titik pengamatan yang berada di atas batas kendali atas UCL, sehingga proses belum sepenuhnya terkendali dan perlu dilakukan evaluasi terhadap penyebab lonjakan variasi tersebut.

Selanjutnya, berdasarkan Tabel 4.3, dapat diperoleh informasi terkait parameter μ_G yang tidak diketahui dengan diestimasi menggunakan nilai vektor rata-rata sampel yaitu $\bar{X}$. Estimasi ini dilakukan dengan asumsi bahwa data historis pada Fase I berasal dari proses kondisi terkendali, sehingga nilai vektor rata-rata sampel dapat merepresentasikan vektor rata-rata proses saat kondisi terkendali μ_G yang sebenarnya. Dengan demikian, nilai μ_G untuk masing-masing karakteristik kualitas, yaitu pH, TDS, dan *Turbidity*, diambil dari nilai rata-rata yang diperoleh pada Tabel 4.3, diperoleh:

$$\mu_G = \begin{bmatrix} 8,7707 \\ 46,6449 \\ 0,9502 \end{bmatrix}$$

Misalkan dipilih pergeseran kecil $\delta = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_B &= \mu_G + \delta \\ &= \begin{bmatrix} 8,7701 + 0,1 \\ 46,6449 + 0,1 \\ 0,9502 + 0,1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8,8707 \\ 46,7449 \\ 1,0502 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian, karena matriks kovariansi proses yang digunakan dalam analisis ini juga tidak diketahui secara langsung, sehingga dilakukan estimasi menggunakan matriks kovariansi sampel S yang diperoleh dari data Fase I. Dengan asumsi bahwa proses berada dalam kondisi terkendali, matriks S dianggap sebagai penduga yang baik bagi matriks kovariansi sebenarnya, sehingga $S = \hat{\Sigma}$. Berdasarkan persamaan (2.3) diperoleh:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0,0088 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 33,0780 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh:

$$\hat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix}$$

Setelah diketahui karakteristik kualitas dan parameter-parameter yang diperlukan, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai statistik pada Fase I, yang terdiri dari dua statistik, yaitu Z_i dan Y_i , yang masing-masing merepresentasikan aspek yang berbeda dalam pengendalian multivariat.

Perhitungan Z_i dilakukan untuk memantau pergeseran vektor rata-rata dari proses. Statistik ini digunakan dalam grafik pengendali Max-MCUSUM untuk mendeteksi perubahan kecil pada nilai rata-rata multivariat. Sehingga mampu menggambarkan penyimpangan pengamatan terhadap kondisi proses yang diharapkan.

Berdasarkan persamaan (2.9) untuk $i = 1$ diperoleh:

$$Z_1 = \mathbf{a}^t(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_G) \quad (4.1)$$

Untuk nilai Z_1 pada Fase I dihitung nilai $\mathbf{a}^t$ terlebih dahulu berdasarkan persamaan (2.7):

$$\mathbf{a}^t = \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\Sigma}^{-1}}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[0,1 \quad 0,1 \quad 0,1] \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix}}{\left([0,1 \quad 0,1 \quad 0,1] \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{[12,8624 \quad 0,06197 \quad 0,9904]}{\sqrt{1,3915}} \\
&= \frac{[12,8624 \quad 0,06197 \quad 0,9904]}{1,1796} = [10,9040 \quad 0,0525 \quad 0,8396]
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (4.1) diperoleh nilai Z_1 :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= [10,9040 \quad 0,0525 \quad 0,8396] \left(\begin{bmatrix} 8,7 \\ 47,02 \\ 0,71 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7707 \\ 46,6449 \\ 0,9502 \end{bmatrix} \right) \\
&= [10,9040 \quad 0,0525 \quad 0,8396] \begin{bmatrix} -0,0707 \\ 0,3751 \\ -0,2402 \end{bmatrix} = -0,9529
\end{aligned}$$

dilakukan hal yang sama untuk $Z_2, Z_3, \dots, Z_{43}$.

Sementara itu, perhitungan Y_i digunakan untuk memantau perubahan pada matriks kovariansi, yang berkaitan dengan variabilitas dan hubungan antar karakteristik kualitas. Statistik ini bertujuan untuk mendeteksi adanya perubahan dalam pola penyebaran data, baik dalam bentuk peningkatan variansi maupun perubahan struktur korelasi antar karakteristik kualitas.

Berdasarkan persamaan (2.11) untuk $i = 1$ diperoleh:

$$Y_1 = \Phi^{-1}\{H[(X_1 - \mu)^t \hat{\Sigma}^{-1}(X_1 - \mu)|p]\} \quad (4.2)$$

Untuk nilai Y_1 pada Fase I, misalkan $W_1 = (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_G)$ merupakan jarak kuadrat Mahalanobis pengamatan pertama terhadap vektor rata-rata proses kondisi terkendali, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_G) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 8,7 \\ 47,02 \\ 0,71 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7707 \\ 46,6449 \\ 0,9502 \end{bmatrix} \right)^t \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 8,7 \\ 47,02 \\ 0,71 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7707 \\ 46,6449 \\ 0,9502 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} -0,0707 & 0,3751 & -0,2402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0707 \\ 0,3751 \\ -0,2402 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0,0707 & 0,3751 & -0,2402 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7,8181 \\ 0,0264 \\ -3,4489 \end{bmatrix} = 1,3911
 \end{aligned}$$

karena data $\mathbf{X}_i$ berdistribusi normal multivariat dalam proses terkendali, maka

$$W_1 \sim \chi_p^2$$

dengan $p = 3$, sehingga diperoleh:

$$H(W_1) = P(\chi_p^2 \leq 1,3911) = 0,2924$$

Nilai probabilitas tersebut kemudian ditransformasikan ke distribusi normal standar menggunakan fungsi invers distribusi normal untuk memperoleh statistik Y_1 , sehingga berdasarkan persamaan (4.2), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \Phi^{-1} \left(H(W_1) \right) \\
 &= \Phi^{-1}(0,2924) = -0,5463
 \end{aligned}$$

dilakukan hal yang sama untuk $Y_2, Y_3, \dots, Y_{43}$.

Setelah mengetahui nilai Z_1 dan Y_1 , langkah selanjutnya adalah mencari nilai k dan D . Parameter k digunakan sebagai nilai referensi dalam mendeteksi pergeseran proses, sedangkan nilai D menunjukkan besarnya jarak pergeseran multivariat yang diharapkan dapat dideteksi oleh grafik pengendali Max-MCUSUM.

Untuk nilai k berdasarkan persamaan (2.8), diperoleh

$$\begin{aligned}
 k &= 0,5 \frac{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)}{[(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 0,5 \frac{[0,1 \quad 0,1 \quad 0,1] \begin{bmatrix} 132,9433 & 0,8851 & -5,2040 \\ 0,8851 & 0,0410 & -0,3064 \\ -5,2040 & -0,3064 & 15,4142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}}{\left([0,1 \quad 0,1 \quad 0,1] \begin{bmatrix} 21,8081 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 0,0410 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 0,5 \frac{[12,8624 \quad 0,06197 \quad 0,9904] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1,3915}} = 0,5 \frac{1,3915}{1,1796} = 0,5898
 \end{aligned}$$

dan nilai D berdasarkan persamaan (2.10), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)^t \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_B - \boldsymbol{\mu}_G)} \\
 &= \sqrt{[0,1 \quad 0,1 \quad 0,1] \begin{bmatrix} 21,8081 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 0,0410 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}} = 1,1796
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya menghitung statistik Max-MCUSUM untuk vektor rata-rata yaitu, C_1^+ dan C_1^- . Statistik ini digunakan untuk mendeteksi adanya pergeseran rata-rata proses baik ke arah peningkatan maupun penurunan kualitas proses.

Berdasarkan persamaan (2.12) dan (2.13) diperoleh:

$$C_1^+ = \max(0; Z_1 - 0,5D + C_{1-1}^+), \quad C_1^- = \max(0; -Z_1 - 0,5D + C_{1-1}^-)$$

dengan $C_0 = 0$ maka diperoleh:

$$C_1^+ = \max(0; -0,9529 - 0,5(1,1796) + 0)$$

$$= \max(0; -1,5427) = 0$$

$$C_1^- = \max(0; -(-0,9529) - 0,5(1,1796) + 0)$$

$$= \max(0; 0,3631) = 0,3631$$

Sehingga C_1 berdasarkan persamaan (2.16), diperoleh:

$$C_1 = \max(C_1^+; C_1^-)$$

$$= \max(0; 0,3631) = 0,3631$$

Setelah memperoleh nilai C_1 statistik Max-MCUSUM untuk matriks kovariansi yaitu, S_1^+ dan S_1^- untuk memantau perubahan matriks kovariansi proses. Statistik ini digunakan untuk mendeteksi perubahan variabilitas proses dan perubahan hubungan antar karakteristik kualitas pada air umpan boiler.

Berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15) diperoleh:

$$S_1^+ = \max(0; Y_1 - k + S_{1-1}^+), \quad S_1^- = \max(0; -Y_1 - k + S_{1-1}^-)$$

dengan $S_0 = 0$, maka diperoleh:

$$S_1^+ = \max(0; -0,5463 - 0,5898 + 0)$$

$$= \max(0; -1,1361) = 0$$

$$S_1^- = \max(0; -(-0,5463) - 0,5898 + 0)$$

$$= \max(0; -0,0435) = 0$$

Sehingga S_1 berdasarkan persamaan (2.17), diperoleh:

$$\begin{aligned} S_1 &= \max(S_1^+; S_1^-) \\ &= \max(0; 0) = 0 \end{aligned}$$

Maka berdasarkan persamaan (2.18), diperoleh:

$$\begin{aligned} M_1 &= \max(C_1; S_1) \\ &= \max(0,3631; 0) = 0,3631 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai M_1 , dilakukan hal yang sama untuk seluruh data yaitu $M_2, M_3, \dots, M_{43}$ yang disajikan pada Tabel 4.4 dan disajikan secara keseluruhan pada Lampiran 3.

Tabel 4.4 Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase I

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
1	-0,9529	-0,5463	0,3631	0	0,3631
2	-1,1478	-0,3169	0,9211	0	0,9211
3	-0,8059	-0,6045	1,1372	0,0147	1,1372
4	-0,5422	1,2540	1,0896	0,6642	1,0896
5	-0,6478	3,0980	1,1476	3,1724	3,1724
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
43	1,1061	0,7689	3,6082	0,1791	3,6082

Kemudian, langkah selanjutnya adalah menentukan batas kendali atas h , yang dinotasikan dengan h menggunakan metode estimasi *bootstrap*, berdasarkan persamaan (2.22). Pendekatan *bootstrap* digunakan karena distribusi statistik M_i tidak diketahui secara pasti, sehingga diperlukan metode non-parametrik untuk mendekati distribusinya melalui proses resampling. Secara umum, nilai h dihitung menggunakan rata-rata dari statistik maksimum hasil *bootstrap* pada tingkat signifikansi tertentu, yang dirumuskan pada persamaan (2.19):

$$h = \frac{1}{N'} \sum_{l=1}^{N'} M_{[(1-\alpha)B]}^l$$

dengan $\alpha = 0,0027$, $N' = 200$ dan $B = 1000$, maka

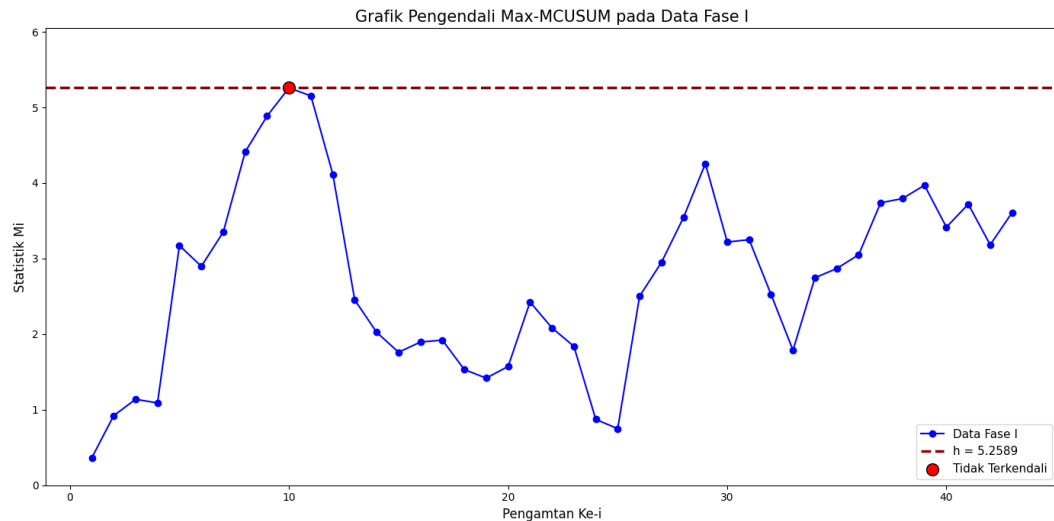
$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{200} \sum_{l=1}^{43} M_{[(1-0,0027)1000]}^l \\ &= \frac{1}{200} \sum_{l=1}^{43} M_{[(0,9973)1000]}^l \end{aligned}$$

Proses estimasi ini dilakukan menggunakan bantuan bahasa pemrograman *Python*, dengan data historis pada Fase I dilakukan *resampling* secara berulang sebanyak $B = 1000$ kali dengan ukuran sampel $N' = 200$. Pada setiap replikasi *bootstrap*, dihitung nilai statistik M_i , kemudian diambil nilai kuantil ke-997. Selanjutnya, seluruh nilai tersebut dirata-ratakan untuk memperoleh estimasi batas kendali atas h . Berikut disajikan hasil estimasi bootstrap pada Tabel 4.5 dan disajikan secara keseluruhan pada Lampiran 4.

Tabel 4.5 Hasil Estimasi *Bootstrap* Menggunakan *Python*

<i>Resampling</i>	<i>Bootstrap</i>
1	3,7377
2	3,9704
⋮	⋮
997	5,2589
998	5,2589
999	5,2589
1000	5,2589

Berdasarkan Tabel 4.5, hasil pengurutan data *bootstrap*, kuantil ke-997, yaitu 5,2589. Kemudian, setelah batas kendali atas telah ditemukan $h = 5,2589$, dibentuk grafik pengendalian kualitas dari nilai M_i dan batas kendali atas h , berikut adalah grafik yang dari Fase I.



Gambar 4.2 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Data Fase I

Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat bahwa sebagian besar nilai statistik pengamatan M_i berada di bawah batas kendali atas $h = 5,2589$ yang ditunjukkan oleh garis merah putus-putus. Namun, terdapat satu titik pengamatan yang melewati batas kendali tersebut, yaitu pada statistik M_{10} atau pengamatan ke-10, yang ditandai sebagai titik tidak terkendali. Sehingga dapat disimpulkan bahwa proses pada Fase I berada pada kondisi tidak terkendali.

Dalam analisis Grafik pengendali Fase I, pengamatan yang berada diluar batas kendali atas umumnya dilakukan *exclude* pada pengamatan yang teridentifikasi keluar dari batas kendali atas tidak digunakan dalam analisis selanjutnya hingga diperoleh data yang benar-benar berada dalam kondisi terkendali dan dilakukan perhitungan ulang semua parameter dan batas kendali atas setelah *exclude* data dilakukan.

Berdasarkan hasil tersebut, dilakukan perbaikan pertama dengan *exclude* pengamatan ke-10, sehingga pada pengolahan data statistik M_i pada dat Fase I perbaikan terdiri dari 42 pengamatan. Berikut hasil perhitungan statistik M_i dan

estimasi batas kendali atas yang masing-masing disajikan pada Tabel 4.6 dan Tabel 4.7 Serta dilampirkan secara keseluruhan pada Lampiran 5 dan Lampiran 6.

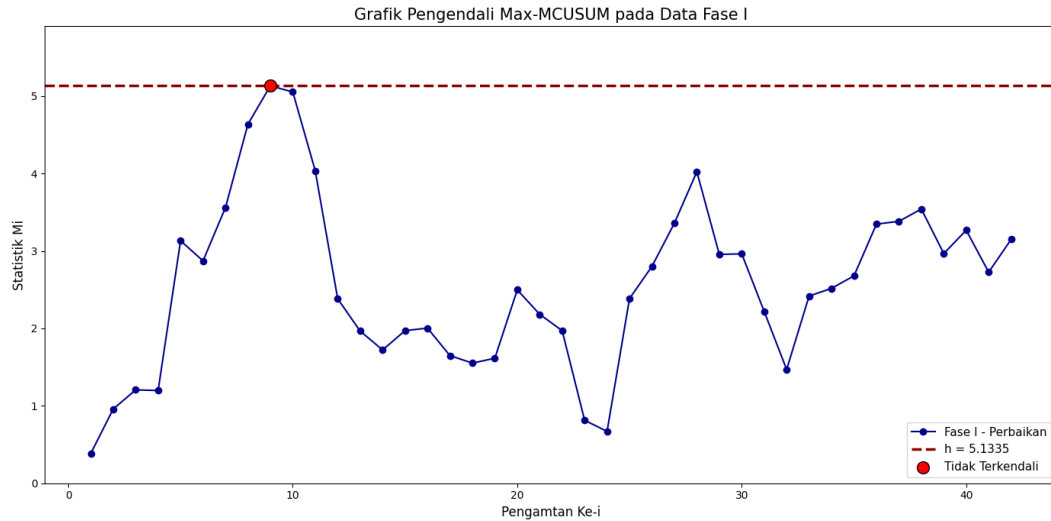
Tabel 4.6 Statistik Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
1	-0,9749	-0,5260	0,3854	0	0,3854
2	-1,1627	-0,3101	0,9586	0	0,9586
3	-0,8373	-0,5647	1,2065	0	1,2065
4	-0,5804	1,24	1,1974	0,6505	1,1974
5	-0,7040	3,0716	1,3120	3,1327	3,1327
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
42	1,1061	0,7342	3,1495	0,1447	3,1495

Tabel 4.7 Estimasi *Bootstrap* pada Fase I Perbaikan

<i>Resampling</i>	<i>Bootstrap</i>
1	3,6123
2	3,8486
$\vdots$	$\vdots$
997	5,1335
998	5,1335
999	5,1335
1000	5,1335

Berdasarkan Tabel 4.7, hasil pengurutan data *bootstrap*, kuantil ke-997, yaitu 5,1335. Kemudian, setelah batas kendali atas telah ditemukan $h = 5,1335$. Berdasarkan hasil perhitungan statistik M_i dan batas kendali atas diperoleh hasil grafik pengendali pada data Fase I setelah perbaikan pertama yang disajikan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan

Berdasarkan Gambar 4.3, grafik pengendali Max-MCUSUM pada Fase I setelah perbaikan dengan batas kendali atas $h = 5,1335$, masih terdapat statistik M_i yang terdeteksi tidak terkendali yaitu, M_9 atau pengamatan ke-9. Hal ini menunjukkan bahwa grafik tersebut masih berada dalam kondisi tidak terkendali. Sehingga dilakukan perbaikan berikutnya dengan *exclude* pengamatan yang teridentifikasi keluar dari batas kendali atas tersebut. Berdasarkan hasil tersebut, dilakukan perbaikan pertama dengan *exclude* pengamatan ke-10, berikut hasil perhitungan statistik M_i dan estimasi batas kendali atas masing-masing disajikan pada Tabel 4.8 dan Tabel 4.9 Serta dilampirkan secara keseluruhan pada Lampiran 7 dan Lampiran 8.

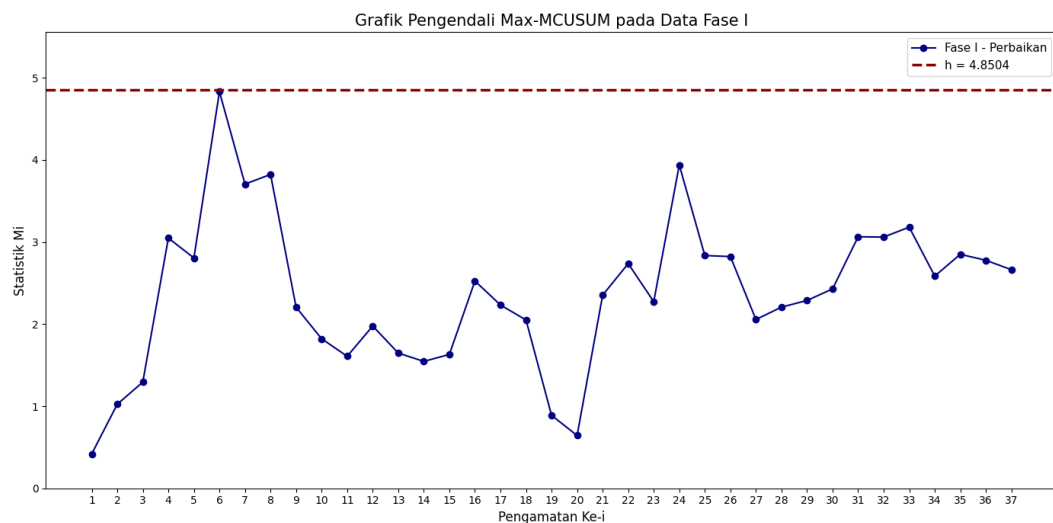
Tabel 4.8 Statistik Max-MCUSUM pada Fase I setelah Perbaikan Kedua

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
1	-1,0099	-0,4801	0,4188	0	0,4188
2	-1,1964	-0,2666	1,0242	0	1,0242
3	-0,8606	-0,5546	1,2938	0	1,2938
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
41	0,9757	0,6942	2,6624	0,1031	2,6624

Tabel 4.9 Estimasi Bootstrap pada Data Fase I Perbaikan

Resampling	Bootstrap
1	3,3292
2	3,5655
$\vdots$	$\vdots$
997	4,8504
998	4,8504
999	4,8504
1000	4,8504

Berdasarkan Tabel 4.9, hasil pengurutan data *bootstrap*, kuantil ke-997, yaitu 4,8504. Kemudian, setelah batas kendali atas telah ditemukan $h = 4,8504$. Berikut hasil grafik pengendali pada data Fase I setelah perbaikan berikutnya yang disajikan pada Gambar 4.4 dan hasil perhitungan statistik M_i dilampirkan secara keseluruhan pada Lampiran 10.



Gambar 4.4 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Fase I Perbaikan Kedua

Berdasarkan Gambar 4.4, terlihat bahwa seluruh nilai statistik pengamatan M_i berada di bawah batas kendali atas $h = 4,8504$ yang ditunjukkan oleh garis merah putus-putus. Terdapat satu pun titik pengamatan yang hampir melewati atau menyentuh batas kendali tersebut yaitu pada statistik $M_8 = 4,8304$, namun hal

statistik tersebut masih dikatakan berada dibawah batas kendali atas, sehingga tidak terdeteksi adanya pengamatan yang berada dalam kondisi tidak terkendali. Selain itu, pola pergerakan data menunjukkan fluktuasi yang masih berada dalam batas wajar. Meskipun terdapat beberapa kenaikan dan penurunan nilai statistik, perubahan tersebut tidak membentuk pola tertentu yang mengindikasikan adanya pergeseran sistematis atau ketidakstabilan proses, seperti tren meningkat atau menurun secara terus-menerus maupun pengelompokan titik di sekitar batas kendali.

Pada Gambar 4.1, berdasarkan Grafik $\bar{X}$ terlihat adanya fluktuasi variasi antar pengamatan yang cukup besar serta terdapat titik yang melewati batas kendali atas (UCL). Kondisi tersebut menunjukkan bahwa proses pada awal pengamatan belum sepenuhnya stabil dan masih dipengaruhi oleh *special cause variation*. Adanya lonjakan variasi pada Grafik $\bar{X}$ menjadi indikasi awal bahwa terdapat penyimpangan dalam proses yang perlu dianalisis lebih lanjut. Hasil tersebut kemudian diperkuat oleh grafik Max-MCUSUM yang menunjukkan adanya titik pengamatan *out of control* pada iterasi pertama dan kedua. Grafik Max-MCUSUM mampu mendeteksi perubahan kecil pada rata-rata proses secara lebih sensitif dibandingkan Grafik $\bar{X}$ sehingga penyimpangan yang sebelumnya terlihat sebagai lonjakan variasi pada Grafik $\bar{X}$ dapat diidentifikasi lebih jelas melalui statistik M_i yang melewati batas kendali atas (UCL). Dengan demikian, Grafik $\bar{X}$ berfungsi sebagai pendukung awal dalam melihat adanya ketidakstabilan proses, sedangkan grafik Max-MCUSUM memberikan analisis yang lebih mendalam terhadap penyimpangan tersebut. Pada perbaikan kedua grafik Max-MCUSUM, seluruh titik pengamatan telah berada di bawah batas kendali atas sehingga proses dinyatakan terkendali secara statistik. Kondisi ini sejalan dengan pola variasi Grafik $\bar{X}$ yang

setelah evaluasi tidak lagi menunjukkan penyimpangan ekstrem. Oleh karena itu, kombinasi interpretasi antara Grafik X dan grafik Max-MCUSUM menunjukkan bahwa proses pada Fase I awalnya mengalami ketidakstabilan, namun setelah dilakukan evaluasi dan pengendalian terhadap titik penyimpangan, proses berhasil mencapai kondisi terkendali.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa proses pada Fase I telah berada dalam kondisi terkendali secara statistik. Oleh karena itu, data pada Fase I ini dapat digunakan sebagai dasar dalam penentuan parameter proses, yaitu estimasi vektor rata-rata, matriks kovariansi dan batas kendali atas, yang selanjutnya akan digunakan sebagai parameter acuan dalam pengendalian proses pada Fase II.

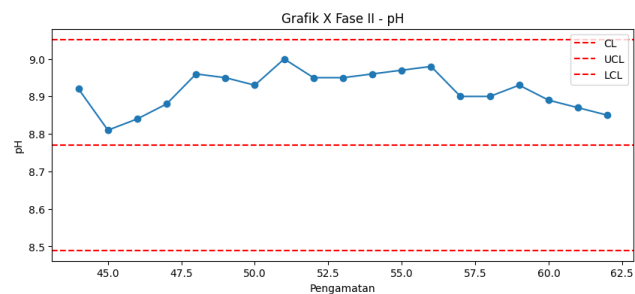
4.5 Grafik Pengendali Max-MCUSUM Fase II

Setelah karakteristik kualitas proses pada Fase I dinyatakan berada dalam kondisi terkendali, tahap selanjutnya adalah penerapan diagram kendali Max-MCUSUM pada Fase II, yaitu periode 01 September 2025 hingga 19 September 2025. Pada fase ini, parameter proses seperti vektor rata-rata μ_G, μ_B dan matriks kovariansi $\hat{\Sigma}$, serta batas kendali Grafik X dan batas kendali atas h yang telah diestimasi pada Fase I diunakan sebagai acuan untuk mengevaluasi data pengamatan baru.

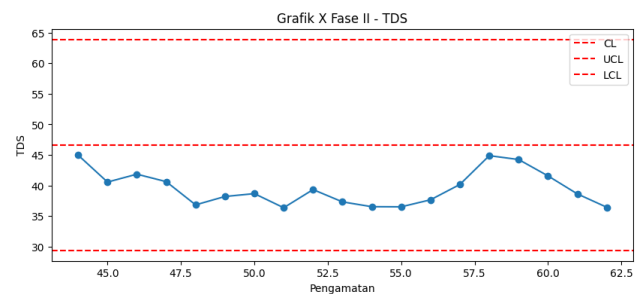
Fase II berfungsi sebagai tahap monitoring, di mana setiap pengamatan baru dihitung nilai statistiknya dan dibandingkan dengan batas kendali h . Jika nilai statistik masih berada di bawah batas kendali, maka proses dianggap tetap terkendali. Sebaliknya, jika terdapat nilai yang melebihi h maka hal tersebut mengindikasikan adanya pergeseran proses sehingga diperlukan tindakan

investigasi lebih lanjut. Dengan demikian, Fase II berperan penting dalam mendeteksi secara dini perubahan pada proses, sehingga pengendalian kualitas dapat dilakukan secara cepat dan tepat.

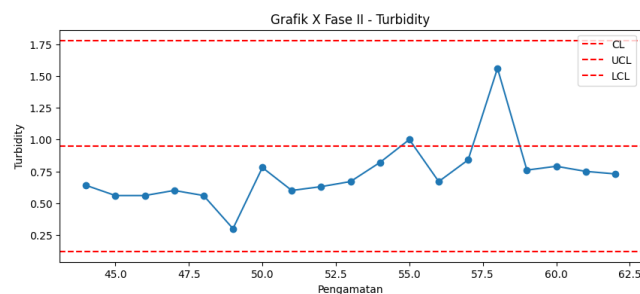
Selanjutnya dilakukan analisa grafik univariat menggunakan Grafik $\bar{X}$ pada setiap karakteristik kualitas data Fase II yang batas kendalinya menggunakan batas kendali yang sudah didapatkan dari Fase I. Berdasarkan hasil perhitungan batas kendali untuk Grafik $\bar{X}$, berikut disajikan plot Grafik $\bar{X}$ pada Gambar 4.5.



(i)



(ii)



(iii)

Gambar 4.5 Grafik $\bar{X}$ pada Setiap Karakteristik Kualitas pada Fase II

Berdasarkan Gambar 4.5, Berdasarkan Grafik $\bar{X}$ pada Fase II untuk karakteristik kualitas pH (i), terlihat bahwa tidak terdapat pengamatan yang berada diatas batas kendali atas UCL serta pola fluktuasi yang bervariasi, sehingga proses sepenuhnya terkendali dan perlu dilakukan evaluasi terhadap titik pengamatan tersebut. Pada Grafik $\bar{X}$ Fase II untuk karakteristik kualitas TDS (ii), seluruh titik pengamatan juga berada dalam batas kendali yang telah ditentukan. Meskipun terlihat adanya variasi yang relatif lebih besar dibandingkan dengan karakteristik kualitas pH, tidak ditemukan adanya lonjakan ekstrem maupun pola tertentu yang mengindikasikan ketidakstabilan proses. Dengan demikian, proses TDS masih berada dalam kondisi terkendali secara statistik dan variasi yang terjadi merupakan variasi alami. Pada Grafik $\bar{X}$ Fase II untuk karakteristik kualitas *Turbidity* (iii), tidak terdapat pengamatan yang melewati batas kendali atas. Sehingga, karakteristik kualitas *Turbidity* dinyatakan terkendali secara statistik.

Setelah memahami kondisi awal pada Fase II, selanjutnya dilakukan analisis terhadap data pada Fase II dengan menggunakan parameter-parameter yang diperoleh dari Fase I yang sudah berada pada kondisi terkendali sebagai berikut:

$$\mu_G = \begin{bmatrix} 8,7751 \\ 46,5939 \\ 0,9549 \end{bmatrix}, \mu_B = \begin{bmatrix} 8,8751 \\ 47,5939 \\ 1,0549 \end{bmatrix}, \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 121,8081 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 0,0410 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^t = [1,9990 \quad 0,0400 \quad 0,6140], k = 0,5910, D = 1,1821 \text{ dan } h = 4,8504.$$

Dihitung nilai statistik Max-MCUSUM untuk vektor rata-rata berdasarkan persamaan (2.9) untuk $i = 42$ dan nilai statistik Max-MCUSUM untuk matriks kovariansi berdasarkan persamaan (2.11) untuk $i = 42$ pada Fase II, yang diperoleh:

$$\begin{aligned}
Z_{42} &= \mathbf{a}^t (\mathbf{X}_{42} - \boldsymbol{\mu}_G) \\
&= [1,9990 \quad 0,0400 \quad 0,6140] \left(\begin{bmatrix} 8,92 \\ 44,97 \\ 0,64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7751 \\ 46,5939 \\ 0,9549 \end{bmatrix} \right) \\
&= [1,9990 \quad 0,0400 \quad 0,6140] \begin{bmatrix} 0,14495 \\ -1,6239 \\ -0,3149 \end{bmatrix} = 0,0314
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk statistik Y_{42} :

$$Y_{42} = \Phi^{-1}\{H[(\mathbf{X}_{42} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_{42} - \boldsymbol{\mu}) : p]\} \quad (4.3)$$

dengan

$$\begin{aligned}
W_{42} &= (\mathbf{X}_{42} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_{42} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 8,92 \\ 44,97 \\ 0,64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7751 \\ 46,5939 \\ 0,9549 \end{bmatrix} \right)^t \begin{bmatrix} 121,8081 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 0,0410 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 8,92 \\ 44,97 \\ 0,64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7751 \\ 46,5939 \\ 0,9549 \end{bmatrix} \right) \\
&= [0,1449 \quad -1,6239 \quad 0,3149] \begin{bmatrix} 121,8081 & -0,1971 & -0,0009 \\ -0,1971 & 0,0410 & 0,5909 \\ -0,0009 & 0,5909 & 0,0763 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1449 \\ -1,6239 \\ -0,3149 \end{bmatrix} \\
&= [0,1449 \quad -1,6239 \quad 0,3149] \begin{bmatrix} 17,9703 \\ -0,2811 \\ -0,9837 \end{bmatrix} = 3,3701
\end{aligned}$$

sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned}
H(W_{42}) &= P(W_{42} \leq 3,370) \\
&= 0,3390
\end{aligned}$$

Transformasi nilai W_{42} ke persamaan (4.3), diperoleh:

$$\begin{aligned}
Y_{42} &= \Phi^{-1}\left(H\left(W_{42}\right)\right) \\
&= \Phi^{-1}(0,3390) = -0,4125
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya statistik Max-MCUSUM untuk vektor rata-rata yaitu, C_{42}^+ dan C_{42}^- berdasarkan persamaan (2.12) dan (2.13) diperoleh:

$$\begin{aligned}
C_{42}^+ &= \max\left(0; Z_{42} - 0,5D + C_{42-1}^+\right) \\
&= \max(0; 0,0314 - 0,5(1,1821) + 0,8911) \\
&= \max(0; 0,6338) = 0,338 \\
C_{42}^- &= \max\left(0; -Z_{42} - 0,5D + C_{42-1}^-\right) \\
&= \max(0; -(0,0314) - 0,5(1,1821) + 0) \\
&= \max(0; -0,5597) = 0
\end{aligned}$$

sehingga C_{42} berdasarkan persamaan (2.16), diperoleh:

$$\begin{aligned}
C_{42} &= \max\left(C_{42}^+; C_{42}^-\right) \\
&= \max(0,6338; 0) = 0,6338
\end{aligned}$$

Nilai C_{42} menunjukkan bahwa pada pengamatan ke-42 terdapat akumulasi penyimpangan rata-rata proses ke arah positif.

Selanjutnya statistik Max-MCUSUM untuk matriks kovariansi yaitu, S_{42}^+ dan S_{42}^- berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.15), diperoleh:

$$\begin{aligned}
S_{42}^+ &= \max\left(0; Y_{4424} - k + S_{42-1}^+\right) \\
&= \max(0; -0,4125 - 0,5910 + 1,144) \\
&= \max(0; 0,1409) = 0,1409 \\
S_{42}^- &= \max\left(0; -Y_{42} - k + S_{42-1}^-\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max(0; -(-0,4125) - 0,5910 + 0) \\
&= \max(0; -0,1785) = 0
\end{aligned}$$

sehingga S_{42} berdasarkan persamaan (2.17), diperoleh:

$$\begin{aligned}
S_{42} &= \max(S_{44}^+; S_{44}^-) \\
&= \max(0,1409; 0) = 0,1409
\end{aligned}$$

Nilai S_{42} menunjukkan adanya perubahan variabilitas proses, meskipun nilainya masih lebih kecil dibandingkan statistik pemantauan rata-rata proses.

Maka berdasarkan persamaan (2.18), diperoleh:

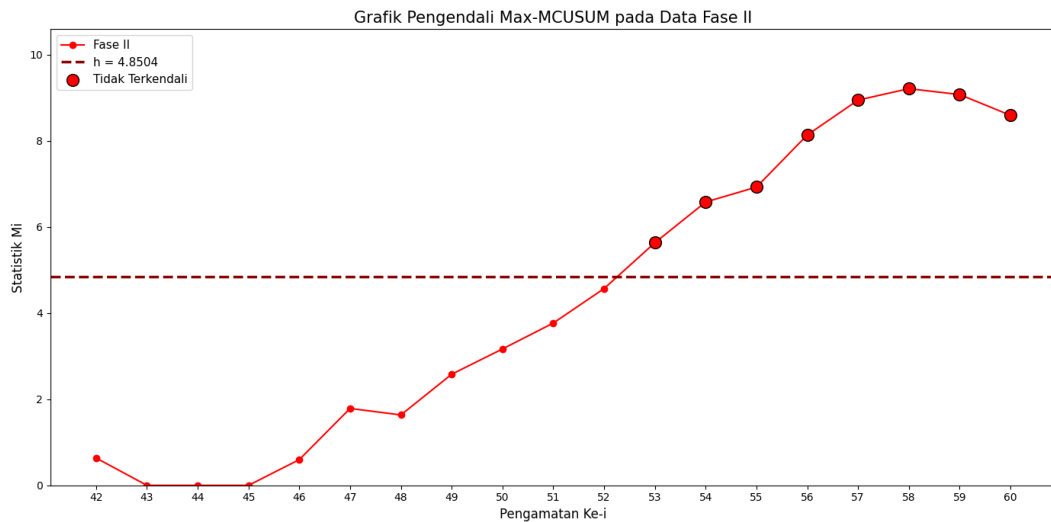
$$\begin{aligned}
M_{42} &= \max(C_{4424}; S_{42}) \\
&= \max(0,6338; 0,1409) = 0,6338
\end{aligned}$$

Statistik M_{42} menunjukkan nilai pemantauan gabungan yang mempertimbangkan perubahan rata-rata proses dan variabilitas proses secara simultan. Setelah diperoleh nilai M_{42} , dilakukan hal yang sama untuk seluruh data yaitu sampai $M_{43}, M_{44}, \dots, M_{60}$ yang telah disajikan pada Tabel 4.10 dan disajikan secara keseluruhan pada Lampiran 9.

Tabel 4.10 Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase II

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
42	1,2795	0,7307	0,6897	0,1409	0,6338
43	-0,2187	-0,007	0	0	0
44	0,1761	0,0504	0	0	0
45	0,5818	0,2367	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
60	0,1094	0,2957	8,5911	2,8946	8,5911

Dengan menggunakan batas kendali atas h yang telah diestimasi menggunakan *bootstrap* pada Fase I, maka diperoleh grafik Max-MCUSUM pada data Fase II sebagai berikut:



Gambar 4.6 Grafik Pengendali Max-MCUSUM pada Data Fase II

Pada Gambar 4.6, nilai statistik M_i menunjukkan peningkatan secara konsisten sejak pengamatan ke-52. Setelah itu, sejak pengamatan ke-53 terus berada di atas batas kendali atas h hingga akhir periode pengamatan. Hal ini mengindikasikan bahwa proses telah mengalami pergeseran (*shift*) yang signifikan pada karakteristik kualitas rata-rata atau variansi multivariat mulai tanggal 11 September 2025. Pergeseran tersebut terus meningkat dan tetap berada di atas batas kendali atas h hingga tanggal 19 September 2025. Berdasarkan analisis lebih lanjut, pergeseran ini lebih dominan disebabkan oleh pergeseran vektor rata-rata C^+ , sedangkan pergeseran matriks variansi V^+ relatif tidak menunjukkan peningkatan yang signifikan. \

Berdasarkan Gambar 4.4 dan Gambar 4.6, Grafik X pada Fase II, diketahui bahwa seluruh nilai selisih antar pengamatan untuk karakteristik pH, TDS, dan

Turbidity berada di dalam batas kendali yang telah ditentukan. Tidak terdapat titik yang melewati batas kendali atas (UCL) maupun batas kendali bawah (LCL), serta tidak ditemukan pola khusus seperti tren atau lonjakan ekstrem. Namun, hasil yang berbeda ditunjukkan oleh grafik pengendali Max-MCUSUM pada Fase II. Terlihat bahwa statistik M_i mengalami peningkatan secara bertahap hingga akhirnya melewati batas kendali atas sebesar $h = 4,8504$. Nilai statistik M_i yang berada diatas batas kendali atas mengindikasikan adanya kondisi tidak terkendali, yang menunjukkan bahwa terdapat pergeseran kecil (*shift*) pada rata-rata proses yang terakumulasi seiring waktu. Pola kenaikan yang konsisten ini merupakan ciri khas dari deteksi oleh metode CUSUM yang sensitif terhadap perubahan kecil yang tidak terdeteksi oleh grafik sederhana.

Perbedaan hasil antara Grafik $\bar{X}$ dan Max-MCUSUM menunjukkan bahwa meskipun secara individu variasi antar pengamatan masih tampak stabil, secara multivariat terdapat indikasi perubahan sistematis pada proses. Grafik $\bar{X}$ hanya mampu mendeteksi variasi besar secara langsung, sedangkan Max-MCUSUM lebih sensitif dalam mendeteksi perubahan kecil yang terjadi secara bertahap. Oleh karena itu, Max-MCUSUM memberikan informasi yang lebih mendalam terkait kestabilan proses secara keseluruhan.

Dengan demikian, berdasarkan analisis Grafik Max-MCUSUM pada Fase II berada dalam kondisi tidak terkendali. Berdasarkan wawancara yang dilakukan pada pihak PT Pabrik Gula Rajawali I, kondisi tidak terkendali ini diduga berkaitan dengan terjadinya pemberhentian proses giling pada tanggal tersebut yang disebabkan oleh kerusakan mesin giling yang berpengaruh dalam perubahan kondisi operasional mesin boiler. Gangguan tersebut berpotensi mempengaruhi

keterkendalian proses, khususnya pada karakteristik kualitas air umpan boiler, sehingga menyebabkan perubahan signifikan pada karakteristik multivariat yang diamati. Namun demikian, meskipun Grafik Max-MCUSUM mampu mendeteksi adanya kondisi tidak terkendali akibat pergeseran rata-rata proses secara multivariat, metode ini tidak dapat secara langsung mengidentifikasi karakteristik kualitas mana yang paling dominan menyebabkan sinyal tidak terkendali tersebut. Oleh karena itu, kejadian kerusakan mesin giling tersebut menjadi faktor yang diduga kuat sebagai penyebab utama kondisi tidak terkendali dan perlu dilakukan evaluasi prosedur operasional untuk mencegah terulangnya kejadian serupa.

4.6 Kapabilitas Proses

Analisis kapabilitas adalah analisis yang digunakan untuk melihat kemampuan perusahaan dalam memenuhi batas spesifikasi yang sudah ditentukan perusahaan tersebut, atau dalam kata lain untuk mengetahui kebaikan dari kinerja proses secara keseluruhan. Pada analisis kapabilitas ini akan dilakukan pada parameter yang diperoleh di Fase I yaitu data pada tanggal 20 Juli 2025 hingga 31 Agustus 2025. Analisis kapabilitas proses dikatakan *capable* apabila hasil pengukuran kualitas secara keseluruhan telah berada dalam batas spesifikasi yang telah ditentukan perusahaan, dengan nilai kapabilitas > 1 .

Langkah pertama yaitu menghitung nilai kapabilitas secara univariat yaitu, C_p dan C_{pk} pada setiap karakteristik kualitas. Indeks kapabilitas proses C_p digunakan untuk mengukur kemampuan potensial proses dalam memenuhi batas spesifikasi yang telah ditetapkan, dengan asumsi bahwa proses berada dalam kondisi terpusat. Sementara itu, C_{pk} digunakan untuk mengukur kemampuan aktual proses dengan

mempertimbangkan posisi rata-rata proses terhadap batas spesifikasi. Dalam perhitungan ini, nilai simpangan baku populasi σ tidak diketahui secara langsung, sehingga diestimasi menggunakan simpangan baku sampel yang diperoleh dari data Fase I, yang kemudian dinotasikan sebagai $\hat{\sigma}$. Berdasarkan batas spesifikasi yang ada pada Tabel 2.2 dan standar deviasi pada Tabel 4. 3 dapat dihitung nilai C_p dan C_{pk} menggunakan Persamaan (2.22) dan (2.23) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 C_p(X_1) &= \frac{USL_1 - LSL_1}{6\hat{\sigma}_1} \\
 &= \frac{9,5 - 8,5}{6(0,0938)} = 1,7768 \\
 C_{pk}(X_1) &= \min\left(\frac{USL - \bar{X}_1}{3\hat{\sigma}_1}, \frac{\bar{X}_1 - LSL}{3\hat{\sigma}_1}\right) \\
 &= \min\left(\frac{9,5 - 8,7707}{3(0,0938)}, \frac{8,7707 - 8,5}{3(0,0938)}\right) = 0,9620
 \end{aligned}$$

Lakukan perhitungan yang sama untuk X_2 dan X_3 . Sehingga diperoleh hasil perhitungan pada Tabel 4.11 berikut:

Tabel 4.11 Hasil Perhitungan Nilai C_p dan C_{pk}

Karakteristik Kualitas	C_p	C_{pk}
pH	1,7768	0,9620
TDS (ppm)	2,8986	3,0923
Turbidity (NTU)	0,6034	0,0601

Berdasarkan Tabel 4.11, secara umum nilai C_p dan C_{pk} yang lebih besar dari 1 menunjukkan bahwa proses memiliki kapabilitas yang baik, sedangkan nilai yang kurang dari 1 mengindikasikan bahwa proses belum mampu memenuhi spesifikasi secara konsisten. Perbedaan antara nilai C_p dan C_{pk} juga memberikan informasi mengenai adanya pergeseran rata-rata proses dari pusat spesifikasi.

Meskipun demikian, analisis kapabilitas secara univariat seperti C_p dan C_{pk} memiliki keterbatasan, terutama ketika karakteristik kualitas yang diamati lebih dari satu dan saling berkorelasi. Dalam kondisi ini, evaluasi terhadap masing-masing karakteristik kualitas secara terpisah belum mampu menggambarkan kinerja proses secara keseluruhan, karena kemungkinan adanya interaksi atau hubungan antar karakteristik kualitas yang dapat memengaruhi hasil akhir produk. Pada pengendalian kualitas di industri, kualitas suatu produk atau proses tidak hanya ditentukan oleh satu karakteristik saja, sehingga selanjutnya dilakukan analisis kapabilitas proses secara multivariat melalui perhitungan indeks MC_p dan MC_{pk} .

Langkah kedua untuk mengembangkan kapabilitas secara univariat C_p dan C_{pk} ke kapabilitas secara multivariat MC_p dan MC_{pk} diperlukan pembobot w_i . Melalui wawancara yang dilakukan kepada Asisten Pengawas Pabrik terkait air umpan boiler, diketahui pembobotan karakteristik kualitas terpenting dalam air umpan boiler adalah pH, sehingga pembobotan pH lebih tinggi yaitu $w_{pH} = 0,50$, sedangkan pembobotan TDS dan *Turbidity* sama yaitu $w_{TDS} = 0,25$ dan $w_{Turbidity} = 0,25$.

Langkah ketiga adalah menghitung MC_p dan MC_{pk} berdasarkan persamaan (2.20) dan (2.21)

$$\begin{aligned} MC_p &= w_{pH}C_p(pH) + w_{TDS}C_p(TDS) + w_{Turbidity}C_p(Turbidity) \\ &= 0,50(1,7768) + 0,25(2,8986) + 0,25(0,6034) = 1,7640 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC_{pk} &= w_{pH}C_{pk}(pH) + w_{TDS}C_{pk}(TDS) + w_{Turbidity}C_{pk}(Turbidity) \\ &= 0,50(0,9620) + 0,25(3,0923) + 0,25(0,0601) = 1,2691 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan pada langkah ketiga, diperoleh nilai $MC_p = 1,7640$ dan $MC_{pk} = 1,2691$. Nilai MC_p dan $MC_{pk} > 1$ menunjukkan bahwa secara keseluruhan variasi proses masih berada dalam batas spesifikasi yang ditetapkan, sehingga proses dapat dikatakan *capable*. Hal ini mengindikasikan bahwa penyebaran data dari ketiga parameter kualitas, yaitu pH, TDS, dan *Turbidity*, relatif masih terkendali dalam batas toleransi.

Namun demikian, nilai MC_{pk} yang lebih kecil dibandingkan MC_p menunjukkan adanya pergeseran rata-rata proses terhadap batas spesifikasi. Meskipun nilai $MC_{pk} > 1$ mengindikasikan bahwa proses masih tergolong *capable*, selisih yang cukup besar antara MC_p dan MC_{pk} menandakan bahwa proses belum sepenuhnya berada di tengah spesifikasi dan masih terdapat potensi ketidaksesuaian.

Jika ditinjau berdasarkan kontribusi masing-masing parameter, nilai kapabilitas yang rendah pada parameter *Turbidity* menjadi faktor utama yang menurunkan nilai MC_{pk} . Hal ini menunjukkan bahwa parameter *Turbidity* memiliki variasi yang relatif besar dan rata-rata prosesnya berada sangat dekat dengan batas spesifikasi, sehingga berisiko tinggi menghasilkan produk yang tidak memenuhi standar.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa meskipun proses secara keseluruhan sudah tergolong *capable*, perlu dilakukan perbaikan terutama pada parameter *Turbidity* agar proses menjadi lebih stabil dan terpusat dalam batas spesifikasi. Upaya perbaikan ini penting untuk meningkatkan kualitas proses secara keseluruhan dan meminimalkan kemungkinan terjadinya cacat.

4.7 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, diketahui bahwa proses pengendalian kualitas air umpan boiler secara umum telah berada pada kondisi yang cukup *capable*. Hal ini menunjukkan bahwa variasi proses relatif terkendali dan secara keseluruhan masih mampu memenuhi batas spesifikasi yang ditetapkan. Namun demikian, proses belum sepenuhnya berada pada kondisi yang optimal karena posisi rata-rata masih belum stabil di tengah batas spesifikasi. Kondisi ini mengindikasikan bahwa masih terdapat potensi ketidaksesuaian, terutama yang dipengaruhi oleh parameter *Turbidity* yang memiliki tingkat kapabilitas paling rendah dibandingkan parameter lainnya.

Temuan tersebut dapat dikaitkan dengan prinsip dalam Islam yang menekankan pentingnya menjaga kualitas dan memenuhi standar yang telah ditetapkan. Dalam QS. Al-Muthaffifin ayat 1–3 dijelaskan larangan untuk mengurangi takaran dan timbangan, yang dalam konteks industri modern dapat dimaknai sebagai larangan untuk menghasilkan produk atau proses yang tidak sesuai dengan standar kualitas. Selain itu, dalam hadis Rasulullah SAW juga bersabda yang artinya:

“Sesungguhnya Allah mencintai seseorang yang apabila bekerja, ia menyempurnakan pekerjaannya” (HR. Thabrani, dalam Al-Albani, 1999).

Hadis ini menegaskan pentingnya bekerja secara profesional dan menjaga kualitas hasil pekerjaan.

Selain itu, kondisi proses pada Fase II yang menunjukkan adanya ketidakterkendalian mengindikasikan bahwa sistem produksi belum sepenuhnya stabil dan memerlukan perhatian lebih lanjut. Ketika ditemukan adanya penyimpangan dalam proses, maka diperlukan upaya perbaikan sebagai bentuk

tanggung jawab terhadap kualitas yang dihasilkan. Dengan demikian, hasil analisis ini menunjukkan bahwa pengendalian kualitas tidak hanya berkaitan dengan aspek teknis, tetapi juga memiliki keterkaitan dengan nilai-nilai etika dan tanggung jawab, sehingga penerapan metode statistik dapat menjadi salah satu upaya untuk menjaga kualitas secara objektif, konsisten, dan sesuai dengan prinsip kejujuran serta profesionalisme dalam Islam.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil penerapan grafik pengendali Max-MCUSUM pada pengendalian kualitas air umpan boiler di PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang menunjukkan bahwa metode ini mampu digunakan secara efektif untuk memantau kestabilan proses multivariat yang melibatkan beberapa karakteristik kualitas, yaitu pH, TDS, dan *Turbidity*. Pada Fase I, terdapat pengamatan yang keluar dari batas kendali atas, namun setelah dilakukan *exclude* dan perbaikan sebanyak dua kali, nilai statistik M_i berada di bawah batas kendali atas sehingga proses dinyatakan berada dalam kondisi terkendali secara statistik. Namun, pada Fase II, terdapat nilai statistik yang melewati batas kendali atas yaitu pada pengamatan ke-53 hingga pengamatan ke-60, yang mengindikasikan adanya pergeseran proses (*shift*). Hal ini menunjukkan bahwa metode Max-MCUSUM sensitif dalam mendeteksi perubahan kecil pada proses sehingga dapat memberikan peringatan dini terhadap kondisi tidak terkendali.
2. Hasil analisis kapabilitas proses berdasarkan perhitungan indeks kapabilitas multivariat diperoleh nilai $MC_p = 1,7640$ dan $MC_{pk} = 1,2691$ yang menunjukkan bahwa proses secara keseluruhan sudah *capable* karena kedua nilai lebih dari 1. Namun, nilai MC_{pk} yang lebih kecil dari MC_p

mengindikasikan bahwa adanya pergeseran rata-rata proses pada batas spesifikasi. Hal ini dipengaruhi oleh parameter *Turbidity* yang memiliki kapabilitas rendah, sehingga diperlukan perbaikan untuk meningkatkan kestabilan dan kualitas proses secara keseluruhan.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, beberapa saran yang dapat diberikan adalah sebagai berikut:

1. Disarankan agar perusahaan PT Pabrik Gula Rajawali I Kabupaten Malang meningkatkan pengendalian proses secara lebih konsisten, terutama pada karakteristik kualitas *Turbidity*. Pemantauan kualitas perlu dilakukan secara berkelanjutan menggunakan metode statistik agar penyimpangan dapat dideteksi lebih dini. Selain itu, perlu dilakukan evaluasi terhadap faktor-faktor penyebab ketidakterkendalian proses, sehingga perbaikan yang dilakukan dapat lebih tepat sasaran. Dengan demikian, diharapkan proses dapat menjadi lebih terkendali dan mampu memenuhi spesifikasi yang telah ditetapkan secara konsisten.
2. Metode Max-MCUSUM yang digunakan dalam penelitian ini terbukti mampu mendeteksi adanya pergeseran proses secara multivariat, baik yang berkaitan dengan rata-rata maupun variansi. Namun demikian, metode ini belum dapat mengidentifikasi secara spesifik karakteristik kualitas mana yang menjadi penyebab utama kondisi tidak terkendali. Oleh karena itu, disarankan pada penelitian selanjutnya untuk mengombinasikan metode Max-MCUSUM dengan teknik analisis lain yang mampu menguraikan kontribusi masing-

masing variabel, sehingga sumber pergeseran proses dapat diidentifikasi secara lebih jelas.

DAFTAR PUSTAKA

- Aprilianti, S. R., Widiharhi, T., & Sudarno, S. (2021). Penerapan diagram kendali Maximum Multivariate Cumulative Sum (Max-MCUSUM) pada pengendalian kualitas produk kacang (Studi kasus: Produk kacang garing di PT XY). *Jurnal Gaussian*, 10(4), 607–618. <https://doi.org/10.14710/j.gauss.v10i4.30139>
- Al-Albani, M. N. (1999). *Silsilah al-Ahadits ash-Shahihah*. Riyadh: Maktabah al-Ma'arif.
- Aliyanda, R., Mayasha, I., Fadila, R., Jaris, A., Fajri, R. L., & Siregar, P. A. (2024). *Pengaruh Etika Bisnis Islam dan Kualitas Produk Terhadap Kepuasan Konsumen pada Usaha Lontong Pak Muslim*. *Ekonomi Keuangan Syariah dan Akuntansi Pajak*, 1(4), 76–87. <https://doi.org/10.61132/eksap.v1i4.559>
- Assauri, S. (1998). *Manajemen Produksi dan Operasi*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.
- Chan, L. K. and Zhang, J. (2001). Cumulative sum control charts for the covariance matrix. *Statistica Sinica*, 11(3), 767–790.
- Cheng, S. W., & Thaga, K. (2005). “Multivariate Max-CUSUM Chart”. *Quality Technology & Quantitative Management*, 2(2), 221 – 235. <https://doi.org/10.1080/16843703.2005.11673095>
- Damanik, M. Z., Putri, D. M., & Warda, M. A. (2024). Dalil jujur dalam perkataan dan perbuatan. *AT-TARBIYAH: Jurnal Penelitian dan Pendidikan Agama Islam*, 2(1), 554–564.
- Grant, E. L., & Leavenworth, R. S. (1996). *Statistical Quality Control* (7th ed.). McGraw Hill, New York.
- Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2019). *Multivariate data analysis* (8th ed.). Cengage Learning
- Haryatmi, S. & Guritno, S. (2008). *Metode Statistika Multivariat*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Healy, J. D. (1987). A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*, 29(4), 409–412. <https://doi.org/10.2307/1269451>
- International Association for the Properties of Water and Steam. (2015). *Technical guidance document: Feedwater and boiler water chemistry in fossil and combined cycle plants*. IAPWS.
- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis Sixth Edition*. Pearson Edition, Inc.

- Kementerian Agama RI. (2022). *Quran Kemenag*.
- Khusna, H., Mashuri, M., & Wibawati, W. (2021). Vector autoregressive-based maximum MCUSUM controlchart for monitoring the quality of white crystal sugar. *Journal of Physics: Conference Series*, 2123(1), 5 – 8. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2123/1/012034>
- Khusna, H., Mashuri, M., Ahsan, M., Suhartono, S., & Prastyo, D. D. (2018). Bootstrap-based maximum multivariate CUSUM control chart. *Quality Technology & Quantitative Management*, 16(3), 6–15 <https://doi.org/10.1080/16843703.2018.1535765>
- Kuntolaksono, S., Wicaksono, I., Emilia, F., & Enjarlis, E. (2022). Evaluation of total hardness and qualitative analysis of boiler water at the food jam industry, Tangerang, Indonesia. *Journal of Bioresources and Environmental Sciences*, 1(3), 90–94. <https://doi.org/10.14710/jbes.2022.15826>
- Maulizar A., Masykur M., & Supardi J. (2022). Analisis pH, TDS, total hardness, alkalinity, dan silica pada boiler feed water di PT Socfindo Perkebunan Kelapa Sawit di Seunagan. *Jurnal Mekanova Mekanikal Inovasi dan teknologi*, 8(1), 19–25. <http://dx.doi.org/10.35308/jmkn.v8i1.5630>
- Montgomery, D. C. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control* (7th ed.). NJ: John Wiley & Sons.
- Morrison, D. F. (2005). *Multivariate statistical methods* (5th ed.). Duxbury Press.
- Muirhead, R. (1982). *Aspect of Multivariate Statistical Theory*. New York: John Wiley and Sons Inc.
- Oktaviana, I. W., & Wibawati. (2023). Pengendalian kualitas proses produksi air di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya menggunakan diagram kontrol Max-MCUSUM. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 12(5), 2337–3520
- Pan, H. M., & Xu, X. M. (2022). Research on factors affecting boiler feedwater quality and its improvement. *Open Journal of Applied Sciences*, 12(6), 883–891. <https://doi.org/10.4236/ojapps.2022.126062>
- Raissi, S. (2009). “Multivariate Process Capability Indices on The Presence of Priority for Quality Characteristics”. *Journal of Industrial Engineering International*, 5(9), 27–36
- Susanti, R., & Wahyudi, A. (2020). Evaluasi kualitas air umpan boiler pada industri tahu. *International Journal of Engineering and Information System (IJEIS)*, 4(1), 1–7. <https://doi.org/10.33005/ijeise.v5i1.123>

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., dan Ye, K. (2012). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists Ninth Edition*. Pearson Education, Inc. United State of Americ.

Zacharias, M. V. V. (2022). The importance of quality control for the success of a company. *Asian Journal of Logistics Management*, 1(2), 99–106
<https://doi.org/10.14710/ajlm.2022.16787>

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Air Umpan Boiler

<i>i</i>	Air Pengisi Ketel				<i>i</i>	Air Pengisi Ketel			
	Tanggal	pH	TDS	Turbidity		Tanggal	pH	TDS	Turbidity
1	7/20/2025	8,70	47,02	0,71	37	8/25/2025	8,91	44,74	0,78
2	7/21/2025	8,70	43,15	0,72	38	8/26/2025	8,85	46,96	0,67
3	7/22/2025	8,67	50,45	1,06	39	8/27/2025	8,87	45,26	0,66
4	7/23/2025	8,65	51,95	1,54	40	8/28/2025	8,77	44,42	1,14
5	7/24/2025	8,64	65,60	0,69	41	8/29/2025	8,92	37,15	0,67
6	7/25/2025	8,64	44,30	0,97	42	8/30/2025	8,83	37,25	0,83
7	7/26/2025	8,60	48,94	0,82	43	8/31/2025	8,93	38,04	0,63
8	7/27/2025	8,65	42,84	0,79	44	9/1/2025	8,92	44,97	0,64
9	7/28/2025	8,69	46,00	0,77	45	9/2/2025	8,81	40,56	0,56
10	7/29/2025	8,67	49,38	0,94	46	9/3/2025	8,84	41,85	0,56
11	7/30/2025	8,73	49,90	0,70	47	9/4/2025	8,88	40,63	0,60
12	7/31/2025	8,84	45,40	0,66	48	9/5/2025	8,96	36,83	0,56
13	8/1/2025	8,92	41,21	0,63	49	9/6/2025	8,95	38,20	0,30
14	8/2/2025	8,80	41,32	0,71	50	9/7/2025	8,93	38,67	0,78
15	8/3/2025	8,76	45,55	0,77	51	9/8/2025	9,00	36,36	0,60
16	8/4/2025	8,80	45,67	1,09	52	9/9/2025	8,95	39,33	0,63
17	8/5/2025	8,73	41,98	0,88	53	9/10/2025	8,95	37,32	0,67
18	8/6/2025	8,80	38,67	0,80	54	9/11/2025	8,96	36,53	0,82
19	8/7/2025	8,74	41,35	0,93	55	9/12/2025	8,97	36,51	1,00
20	8/8/2025	8,64	46,95	0,79	56	9/13/2025	8,98	37,66	0,67
21	8/9/2025	8,60	48,55	1,33	57	9/14/2025	8,90	40,17	0,84
22	8/10/2025	8,74	47,66	0,99	58	9/15/2025	8,90	44,88	1,56
23	8/11/2025	8,72	51,87	0,87	59	9/16/2025	8,93	44,25	0,76
24	8/12/2025	8,77	55,82	1,14	60	9/17/2025	8,89	41,57	0,79
25	8/13/2025	8,84	54,03	1,13	61	9/18/2025	8,87	38,62	0,75
26	8/14/2025	8,91	51,61	1,62	62	9/19/2025	8,85	36,44	0,73
27	8/15/2025	8,84	52,85	0,90					
28	8/16/2025	8,84	50,89	1,19					
29	8/17/2025	8,77	57,89	1,81					
30	8/18/2025	8,72	51,20	0,79					
31	8/19/2025	8,81	46,32	1,20					
32	8/20/2025	8,76	44,05	1,09					
33	8/21/2025	8,79	40,94	0,88					
34	8/22/2025	8,93	39,40	1,18					
35	8/23/2025	8,82	45,66	1,22					
36	8/24/2025	8,83	45,54	1,17					

Lampiran 2. Pengambilan Keputusan Perbandingan Nilai *Chi-Square* dan Nilai d_i^2

i	d_i^2	Nilai <i>Chi-Square</i>	Keterangan	i	d_i^2	Nilai <i>Chi-Square</i>	Keterangan
1	2,00	14,1563	Normal	42	2,16	14,1563	Normal
2	2,50	14,1563	Normal	43	1,63	14,1563	Normal
3	1,95	14,1563	Normal	44	2,70	14,1563	Normal
4	6,49	14,1563	Normal	45	1,54	14,1563	Normal
5	1,85	14,1563	Outlier	46	1,28	14,1563	Normal
6	4,37	14,1563	Normal	47	1,10	14,1563	Normal
7	4,67	14,1563	Normal	48	2,54	14,1563	Normal
8	4,53	14,1563	Normal	49	4,88	14,1563	Normal
9	1,95	14,1563	Normal	50	1,32	14,1563	Normal
10	1,88	14,1563	Normal	51	3,31	14,1563	Normal
11	2,37	14,1563	Normal	52	1,91	14,1563	Normal
12	1,14	14,1563	Normal	53	1,93	14,1563	Normal
13	1,49	14,1563	Normal	54	2,43	14,1563	Normal
14	0,74	14,1563	Normal	55	3,76	14,1563	Normal
15	0,57	14,1563	Normal	56	2,50	14,1563	Normal
16	0,56	14,1563	Normal	57	0,76	14,1563	Normal
17	1,90	14,1563	Normal	58	7,95	14,1563	Normal
18	1,76	14,1563	Normal	59	1,92	14,1563	Normal
19	2,10	14,1563	Normal	60	0,50	14,1563	Normal
20	3,43	14,1563	Normal	61	0,95	14,1563	Normal
21	6,64	14,1563	Normal	62	2,14	14,1563	Normal
22	0,54	14,1563	Normal				
23	2,06	14,1563	Normal				
24	4,28	14,1563	Normal				
25	4,60	14,1563	Normal				
26	10,17	14,1563	Normal				
27	4,14	14,1563	Normal				
28	2,63	14,1563	Normal				
29	12,18	14,1563	Normal				
30	2,26	14,1563	Normal				
31	1,32	14,1563	Normal				
32	1,28	14,1563	Normal				
33	0,98	14,1563	Normal				
34	3,82	14,1563	Normal				
35	1,59	14,1563	Normal				
36	1,20	14,1563	Normal				
37	1,47	14,1563	Normal				
38	1,85	14,1563	Normal				
39	1,50	14,1563	Normal				
40	1,39	14,1563	Normal				
41	1,62	14,1563	Normal				

Lampiran 3. Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase I

t	Z_t	Y_t	C_t	S_t	M_t	t	Z_t	Y_t	C_t	S_t	M_t
1	-0,9529	-0,5463	0,3631	0	0,3631	23	-0,3457	-0,6063	1,8388	1,7075	1,8388
2	-1,1478	-0,3169	0,9211	0	0,9211	24	0,6337	0,246	0,6152	0,8717	0,8717
3	-0,8059	-0,6045	1,1372	0,0147	1,1372	25	1,2946	0,4046	0,7487	0	0,7487
4	-0,5422	1,254	1,0896	0,6642	1,0896	26	2,3421	1,835	2,501	1,2452	2,501
5	-0,6478	3,098	1,1476	3,1724	3,1724	27	1,0395	0,3704	2,9507	1,0258	2,9507
6	-1,5317	0,3148	2,0896	2,8974	2,8974	28	1,18	-0,1893	3,5408	0,2467	3,5408
7	-1,8501	0,5047	3,3498	2,8124	3,3498	29	1,305	2,2025	4,256	1,8594	4,256
8	-1,6505	0,3397	4,4105	2,5622	4,4105	30	-0,448	-0,4474	3,2182	0,8222	3,2182
9	-1,0651	-0,6443	4,8858	1,3281	4,8858	31	0,6212	-0,7654	3,2496	0,1756	3,2496
10	-0,9629	-0,703	5,2589	0,1678	5,2589	32	-0,1356	-0,9559	2,5241	0,5417	2,5241
11	-0,4829	-0,3046	5,152	0	5,152	33	-0,1482	-0,8179	1,7861	0,7698	1,7861
12	0,4466	-0,2721	4,1156	0	4,1156	34	1,5493	0,9282	2,7457	0,3384	2,7457
13	1,0736	0,5539	2,4521	0	2,4521	35	0,7123	-0,5248	2,8682	0	2,8682
14	-0,1619	-0,7002	2,0243	0,1103	2,0243	36	0,7731	-0,7154	3,0515	0,1256	3,0515
15	-0,3255	-1,4821	1,7599	1,0026	1,7599	37	1,276	0,1733	3,7377	0	3,7377
16	0,3856	-1,4825	0,7845	1,8954	1,8954	38	0,646	0,0067	3,7938	0	3,7938
17	-0,7478	-0,6148	0,9425	1,9204	1,9204	39	0,7664	0,0611	3,9704	0	3,9704
18	-0,2256	-0,2005	0,5783	1,531	1,531	40	0,0348	-0,8281	3,4154	0,2383	3,4154
19	-0,6299	-0,4766	0,6183	1,4178	1,4178	41	0,8939	0,6925	3,7195	0,1027	3,7195
20	-1,5436	0,0215	1,5721	0,8065	1,5721	42	0,0521	0,1517	3,1819	0	3,1819
21	-1,4424	1,1926	2,4247	0,6028	2,4247	43	1,0161	0,7689	3,6082	0,1791	3,6082
22	-0,248	-2,2808	2,0829	1,6909	2,0829						

Lampiran 4. Hasil Estimasi *Bootstrap* Menggunakan *Python*

<i>Resampling</i>	<i>Bootstrap</i>
1	3,7377
2	3,9704
3	3,9704
4	3,9704
5	4,1156
6	4,1156
7	4,1156
8	4,1156
9	4,1156
10	4,2560
⋮	⋮
997	5,2589
998	5,2589
999	5,2589
1000	5,2589

Secara keseluruhan dapat diakses melalui Scan QR berikut:



Lampiran 5. Statistik Max-MCUSUM pada Data Fase I Perbaikan

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i	i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
1	-0,9749	-0,526	0,3854	0	0,3854	23	0,5922	0,2209	0,7889	0,8134	0,8134
2	-1,1627	-0,3101	0,9586	0	0,9586	24	1,2567	0,367	0,6699	0	0,6699
3	-0,8373	-0,5647	1,2065	0	1,2065	25	2,3048	1,7905	2,3853	1,201	2,3853
4	-0,5804	1,24	1,1974	0,6505	1,1974	26	1,0057	0,3335	2,8015	0,945	2,8015
5	-0,704	3,0716	1,312	3,1327	3,1327	27	1,1474	-0,2263	3,3594	0,1293	3,3594
6	-1,5511	0,3292	2,2736	2,8724	2,8724	28	1,254	2,1558	4,0239	1,6955	4,0239
7	-1,8769	0,5421	3,561	2,825	3,561	29	-0,4783	-0,4388	2,9561	0,6672	2,9561
8	-1,6657	0,3506	4,6372	2,5861	4,6372	30	0,5968	-0,802	2,9634	0,2125	2,9634
9	-1,0858	-0,6164	5,1335	1,3802	5,1335	31	-0,1551	-0,9762	2,2188	0,5992	2,2188
10	-0,5099	-0,3049	5,054	0,4858	5,054	32	-0,1601	-0,8496	1,4693	0,8593	1,4693
11	0,4285	-0,3083	4,0359	0	4,0359	33	1,5383	0,8953	2,4181	0,3058	2,4181
12	1,0638	0,5183	2,3827	0	2,3827	34	0,689	-0,562	2,5176	0	2,5176
13	-0,1731	-0,7321	1,9662	0,1426	1,9662	35	0,7505	-0,7544	2,6786	0,1649	2,6786
14	-0,3451	-1,4835	1,7218	1,0367	1,7218	36	1,2584	0,1382	3,3474	0	3,3474
15	0,3633	-1,5242	0,769	1,9714	1,9714	37	0,625	-0,0302	3,383	0	3,383
16	-0,7618	-0,6221	0,9414	2,004	2,004	38	0,7487	0,0234	3,5422	0	3,5422
17	-0,2326	-0,2345	0,5845	1,649	1,649	39	0,0143	-0,8539	2,967	0,2644	2,967
18	-0,6431	-0,4923	0,6381	1,5518	1,5518	40	0,8912	0,6575	3,2687	0,068	3,2687
19	-1,5664	0,0543	1,615	0,908	1,615	41	0,0476	0,1141	2,7268	0	2,7268
20	-1,4727	1,1969	2,4983	0,6074	2,4983	42	1,0122	0,7342	3,1495	0,1447	3,1495
21	-0,2734	-2,2088	2,1822	1,6193	2,1822						
22	-0,3779	-0,594	1,9706	1,6238	1,9706						

Lampiran 6. Hasil Estimasi *Bootstrap* pada Data Fase I Perbaikan

<i>Resampling</i>	<i>Bootstrap</i>
1	3,6123
2	3,845
3	3,845
4	3,845
5	3,9902
6	3,9902
7	3,9902
8	3,9902
9	3,9902
10	4,1306
⋮	⋮
997	5,1335
998	5,1335
999	5,1335
1000	5,1335



Lampiran 7. Statistik Max-MCUSUM pada Data Fase I Perbaikan Kedua

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i	i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
1	-1,0099	-0,4801	0,4188	0	0,4188	23	1,2342	0,3294	0,6432	0	0,6432
2	-1,1964	-0,2666	1,0242	0	1,0242	24	2,3002	1,7659	2,3523	1,1749	2,3523
3	-0,8606	-0,5546	1,2938	0	1,2938	25	0,9753	0,2943	2,7366	0,8782	2,7366
4	-0,5869	1,2003	1,2896	0,6093	1,2896	26	1,1279	-0,2624	3,2734	0,0247	3,2734
5	-0,7445	3,0295	1,4431	3,0478	3,0478	27	1,2551	2,1124	3,9375	1,5461	3,9375
6	-1,5759	0,3487	2,4279	2,8054	2,8054	28	-0,5117	-0,4317	2,8348	0,5233	2,8348
7	-1,9081	0,5809	3,7449	2,7953	3,7449	29	0,579	-0,8435	2,8227	0,2525	2,8227
8	-1,6965	0,3861	4,8504	2,5904	4,8304	30	-0,176	-0,9986	2,0557	0,66	2,0557
9	-0,5462	-0,2945	4,8055	1,7049	4,8055	31	-0,1878	-0,8608	1,2768	0,9297	1,2768
10	0,3916	-0,3342	3,8229	0,7796	3,8229	32	1,5211	0,8594	2,2068	0,2684	2,2068
11	1,0265	0,4792	2,2054	0,6678	2,2054	33	0,6721	-0,6016	2,2879	0,0106	2,2879
12	-0,207	-0,7325	1,8213	0,1415	1,8213	34	0,7317	-0,7955	2,4285	0,215	2,4285
13	-0,3778	-1,443	1,6081	0,9935	1,6081	35	1,2256	0,0994	3,063	0	3,063
14	0,3418	-1,5739	0,6752	1,9764	1,9764	36	0,5879	-0,062	3,0599	0	3,0599
15	-0,7896	-0,6045	0,8737	1,9898	1,9898	37	0,7116	-0,0106	3,1805	0	3,1805
16	-0,2626	-0,2483	0,5453	1,6471	1,6471	38	-0,005	-0,8852	2,5845	0,2941	2,5845
17	-0,669	-0,4896	0,6232	1,5457	1,5457	39	0,8565	0,6182	2,8499	0,0272	2,8499
18	-1,5983	0,1003	1,6305	0,8543	1,6305	40	0,0189	0,0867	2,2777	0	2,2777
19	-1,4856	1,1777	2,525	0,5867	2,525	41	0,9757	0,6942	2,6624	0,1031	2,6624
20	-0,2987	-2,1713	2,2327	1,5802	2,2327						
21	-0,4085	-0,5932	2,0502	1,5824	2,0502						
22	0,5699	0,1825	0,8893	0,8088	0,8893						

Lampiran 8. Hasil Estimasi *Bootstrap* pada Data Fase I Perbaikan Kedua

<i>Resampling</i>	<i>Bootstrap</i>
1	3,3292
2	3,5619
3	3,5619
4	3,5619
5	3,7071
6	3,7071
7	3,7071
8	3,7071
9	3,7071
10	3,8475
⋮	⋮
997	4,8504
998	4,8504
999	4,8504
1000	4,8504



Lampiran 9. Statistik Max-MCUSUM Pada Data Fase II

i	Z_i	Y_i	C_i	S_i	M_i
42	1,2248	0,6525	0,6338	0,0615	0,6338
43	-0,2663	-0,0454	0	0	0
44	0,1258	-0,0052	0	0	0
45	0,5351	0,1675	0	0	0
46	1,1811	1,1884	0,5901	0,5973	0,5973
47	0,9158	1,7795	0,9148	1,7858	1,7858
48	1,1375	0,4396	1,4613	1,6343	1,6343
49	1,6282	1,5361	2,4985	2,5794	2,5794
50	1,2588	0,8395	3,1663	2,8279	3,1663
51	1,1921	0,8753	3,7674	3,1122	3,7674
52	1,3914	0,9539	4,5677	3,475	4,5677
53	1,6554	1,1895	5,6321	4,0735	5,6321
54	1,5364	1,1651	6,5775	4,6475	6,5775
55	0,9381	-0,0767	6,9245	3,9797	6,9245
56	1,7998	1,5061	8,1332	4,8948	8,1332
57	1,4016	0,4022	8,9437	4,7059	8,9437
58	0,8563	-0,2705	9,209	3,8443	9,209
59	0,4548	-0,0633	9,0727	3,19	9,0727
60	0,1094	0,2957	8,5911	2,8946	8,5911

Lampiran 10. Syntax Python

```
# Upload file
from google.colab import files
uploaded = files.upload()

# Import library
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import chi2

# Baca file
filename = list(uploaded.keys())[0]
df = pd.read_excel(filename, header=1)

# Buang kolom kosong / indeks
df = df.iloc[:, 1:5]
df.columns = ["Tanggal", "pH", "TDS", "Turbidity"]

# Pastikan kolom numerik
for col in ["pH", "TDS", "Turbidity"]:
    df[col] = pd.to_numeric(df[col], errors="coerce")
# Ambil data lengkap
X = df[["pH", "TDS", "Turbidity"]].dropna()

# Mean dan kovarians
mean_vec = X.mean().values
cov_mat = np.cov(X.values, rowvar=False)
inv_cov_mat = np.linalg.inv(cov_mat)
print("Covarians Matrics:")
print(cov_mat)
print("Invers Covariance Matrics:")
print(inv_cov_mat)

# Fungsi Mahalanobis
def mahalanobis_d2(x, mean, inv_cov):
    diff = x - mean
    return float(diff.T @ inv_cov @ diff)

# Hitung Mahalanobis d2
df.loc[X.index, "Mahalanobis_d2"] = [
    mahalanobis_d2(row.values, mean_vec, inv_cov_mat)
    for _, row in X.iterrows()
]

# Hitung nilai Chi-Square
alpha = 0.0027
p = 3
chi_crit = chi2.ppf(1 - alpha, df=p)
df["Chi_Square_Critical"] = chi_crit

# Keputusan Outlier
df["Keputusan"] = np.where(
```

```

        df["Mahalanobis_d2"] > chi_crit,
        "Outlier",
        "Normal"
    )

# Matriks korelasi
R = X.corr()

# Parameter Bartlett
n = X.shape[0]          # jumlah pengamatan
p = X.shape[1]          # jumlah karakteristik kualitas

# Statistik uji Bartlett
det_R = np.linalg.det(R)
chi_square = -(n - 1 - (2*p + 5)/6) * np.log(det_R)
df_bartlett = p * (p - 1) / 2
chi_critical = chi2.ppf(0.9973, df_bartlett)

# Keputusan uji Bartlett
keputusan = "Tolak H0 artinya terdapat korelasi antar
variabel" if chi_square > chi_critical else "Gagal Tolak H0"

# Tampilkan hasil
print("Matriks Korelasi:")
display(R)
print("determinan R")
print(det_R)
print("\nStatistik Uji Bartlett")
print("Chi-Square hitung :", chi_square)
print("Chi-Square tabel :", chi_critical)
print("Derajat bebas      :", df_bartlett)
print("Keputusan          :", keputusan)

# Split Fase 1 dan Fase 2
fase1 = data[(data['Tanggal'] >= '2025-07-20') &
              (data['Tanggal'] <= '2025-08-31')].copy()
fase2 = data[data['Tanggal'] > '2025-08-31'].copy()

X1 = fase1[["pH", "TDS", "Turbidity"]].values
X2 = fase2[["pH", "TDS", "Turbidity"]].values
print(f"Fase 1: {len(X1)} observasi")
print(f"Fase 2: {len(X2)} observasi")

# Parameter dari Fase 1
mu = np.mean(X1, axis=0)
Sigma = np.cov(X1.T, ddof=1)
Sigma_inv = np.linalg.inv(Sigma)
p = X1.shape[1]
delta = np.full(p, 0.1)
D = np.sqrt(np.dot(delta, np.dot(Sigma_inv, delta)))
a = np.dot(delta, Sigma_inv) / D
k = 0.5 * D
print(f"\nD = {D:.6f} | k = {k:.6f}")

# Fungsi Zi dan Yi
def Zi(x):
    return np.dot(a, (x - mu))

```

```

def Yi(x):
    diff = x - mu
    d2 = np.dot(diff.T, np.dot(Sigma_inv, diff))
    u = chi2.cdf(d2, df=p)
    u = np.clip(u, 1e-8, 1 - 1e-8)
    return norm.ppf(u)

# Fungsi MAX-MCUSUM
def compute_max_mcusum(X, C_plus=0.0, C_minus=0.0, S_plus=0.0,
S_minus=0.0):
    results = []
    for i, x in enumerate(X, start=1):
        z = Zi(x)
        y = Yi(x)

        # Mean part (C)
        C_plus_new = max(0, z - 0.5 * D + C_plus)
        C_minus_new = max(0, -z - 0.5 * D + C_minus)
        C = max(C_plus_new, C_minus_new)

        k + S_plus)
        S_minus_new = max(0, -y - k + S_minus)
        S = max(S_plus_new, S_minus_new)

        Mi = max(C, S)

        results.append({
            'Observasi': i,
            'Z_i': round(z, 4),
            'Y_i': round(y, 4),
            'C_plus': round(C_plus_new, 4),
            'C_minus': round(C_minus_new, 4),
            'C': round(C, 4),
            'S_plus': round(S_plus_new, 4),
            'S_minus': round(S_minus_new, 4),
            'S': round(S, 4),
            'Mi': round(Mi, 4)
        })

        # Update nilai untuk observasi berikutnya
        C_plus = C_plus_new
        C_minus = C_minus_new
        S_plus = S_plus_new
        S_minus = S_minus_new

    return pd.DataFrame(results), C_plus, C_minus, S_plus,
S_minus

S_plus_new = max(0, y - k + S_plus)
S_minus_new = max(0, -y - k + S_minus)
S = max(S_plus_new, S_minus_new)
Mi = max(C, S)

```

```

        results.append({
            'Observasi': i,
            'Z_i': round(z, 4),
            'Y_i': round(y, 4),
            'C_plus': round(C_plus_new, 4),
            'C_minus': round(C_minus_new, 4),
            'C': round(C, 4),
            'S_plus': round(S_plus_new, 4),
            'S_minus': round(S_minus_new, 4),
            'S': round(S, 4),
            'Mi': round(Mi, 4)
        })
        # Update nilai untuk observasi berikutnya
        C_plus = C_plus_new
        C_minus = C_minus_new
        S_plus = S_plus_new
        S_minus = S_minus_new

    return pd.DataFrame(results), C_plus, C_minus, S_plus,
    S_minus

# Hitung Fase 1 (reset di awal)
print("\nMenghitung Fase 1...")

res1, C_final, C_minus_final, S_final, S_minus_final =
compute_max_mcusum(X1)

fase1_final = fase1.reset_index(drop=True).join(res1)

# Hitung Fase 2 (LANJUT dari akhir Fase 1)
print("Menghitung Fase 2 (melanjutkan akumulasi dari Fase
1)...")

res2, _, _, _ = compute_max_mcusum(X2, C_final,
C_minus_final, S_final, S_minus_final)

fase2_final = fase2.reset_index(drop=True).join(res2)
# Bootstrap untuk batas kendali h

print("Melakukan Bootstrap (B=1000) untuk menentukan h...")
B = 1000
np.random.seed(42)
boot = []
for _ in range(B):
    samp = X1[np.random.choice(len(X1), len(X1),
replace=True)]

    temp, _, _, _ = compute_max_mcusum(samp)

    boot.append(temp['Mi'].max())

h = np.quantile(boot, 0.9973)
print(f"Batas Kendali h = {h:.4f}")
print(f"Fase 1: {len(X1)} observasi")
> h).sum()})")
# Ringkasan
print(f"\nMax Mi di Fase 2 = {fase2_final['Mi'].max():.4f}")
print(f"Jumlah Out of Control di Fase 2 = {(fase2_final['Mi']

```

```

for var in variabel:
    plt.figure(figsize=(7,5))

    plt.plot(range(1, len(fase1)+1), fase1[var],
              marker='o', label=var)

    plt.title(f"Grafik Univariat {var} Fase I")
    plt.xlabel("Pengamatan ke-i")
    plt.ylabel(var)

    plt.xticks(range(1, len(fase1)+1, 5))
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()

for var in variabel:
    plt.figure(figsize=(7,5))

    plt.plot(range(1, len(fase2)+1), fase2[var],
              marker='o', color='blue', label=var)

    plt.title(f"Grafik Univariat {var} Fase II")
    plt.xlabel("Pengamatan ke-i")
    plt.ylabel(var)

    plt.xticks(range(1, len(fase2)+1, 5))
    plt.grid(True)

    plt.tight_layout()
    plt.show()

# Plot Chart
plt.figure(figsize=(14,5))
plt.plot(fase1_final["Observasi"], fase1_final["Mi"],
         marker='o')
plt.axhline(h, linestyle='--', color='red', label=f'UCL =
{h:.4f}')
plt.title("Grafik Max-MCUSUM Fase I")
plt.xlabel("Data ke-i")
plt.ylabel("Statistik Mi")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(14,5))
plt.plot(fase2_final["Observasi"], fase2_final["Mi"],
         marker='o', color='blue')
plt.axhline(h, linestyle='--', color='red', label=f'UCL =
{h:.4f}')
plt.title("Grafik Max-MCUSUM Fase II")
plt.xlabel("Data ke-i")
plt.ylabel("Statistik Mi")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

RIWAYAT HIDUP



Zulaiha lahir di Malang pada tanggal 03 Januari 2003 dan merupakan anak kedua dari tiga bersaudara. Pendidikan formal peneliti diawali di RA Wahid Hasyim dan lulus pada tahun 2010, kemudian melanjutkan ke MI Wahid Hasyim dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, peneliti menempuh pendidikan di MTs Nahdlatul Ulama dan lulus pada tahun 2019, serta melanjutkan ke MA Nahdlatul Ulama dan lulus pada tahun 2022. Pada tahun yang sama, peneliti melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi. Selain berfokus pada bidang akademik, peneliti juga aktif dalam kegiatan pengajaran dengan memberikan bimbingan belajar privat kepada siswa sekolah sebagai bentuk kontribusi dalam bidang pendidikan.