

**SIFAT KELENGKAPAN SUBRUANG DARI RUANG
BERNORMA-2**

SKRIPSI

**OLEH
FAUZI DWI KURNIAWAN
NIM. 220601110102**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**SIFAT KELENGKAPAN SUBRUANG DARI RUANG
BERNORMA–2**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)**

**Oleh
Fauzi Dwi Kurniawan
NIM. 220601110102**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

SIFAT KELENGKAPAN SUBRUANG DARI RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Oleh
Fauzi Dwi Kurniawan
NIM. 220601110102

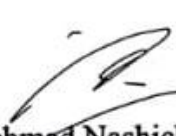
Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 8 Mei 2026

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II


Dian Maharani, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001


Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrudin Rozi, M.Si.
NIP. 19600527 200801 1 012

SIFAT KELENGKAPAN SUBRUANG DARI RUANG BERNORMA-2

SKRIPSI

Oleh
Fauzi Dwi Kurniawan
NIM. 220601110102

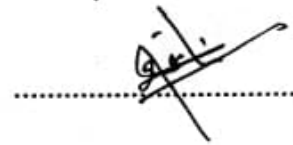
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Tanggal 15 Juni 2026

Ketua Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si.



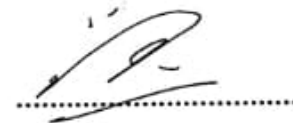
Anggota Penguji 1 : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.



Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.



Anggota Penguji 3 : Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrud Rozi, M.Si.
NIP. 19800327 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Fauzi Dwi Kurniawan

NIM : 220601110102

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan Subruang dari Ruang Bernorma-2

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2026



Fauzi Dwi Kurniawan

NIM. 220601110102

MOTO

"Barang siapa bertakwa kepada Allah niscaya Dia akan membukakan jalan keluar baginya, dan Dia akan memberinya rezeki dari arah yang tidak disangkanya. Dan barang siapa bertawakal kepada Allah, maka cukuplah Allah baginya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan-Nya. Sungguh, Allah telah mengadakan ketentuan bagi setiap sesuatu. (QS. At-Talaq: 2–3)"

مَنْ لَمْ يَذُقْ ذُلَّ التَّعَلُّمِ سَاعَةً تَجَرَّعَ ذُلَّ الْجُهْلِ طُولَ حَيَاتِهِ

*"Barang siapa tidak merasakan pahitnya belajar walau sesaat, maka ia akan menanggung hinanya kebodohan sepanjang hidupnya."
— Imam Asy-Syafi'i*

"No matter how hard it gets, never stop chasing your dreams. One day, you'll look back and realize that every prayer was answered in ways you never expected."

"Setiap langkah yang terlihat kecil hari ini adalah bagian dari perjalanan besar yang akan disyukuri di masa depan."

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

“Ibu dan Bapak tercinta yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang, dukungan, pengorbanan, serta motivasi terbaik dalam setiap langkah kehidupan penulis. Kakak-kakak tercinta dan keponakan tersayang yang selalu hadir dengan dukungan, canda, dan kebersamaan yang menjadi penyemangat bagi penulis. Sahabat dan teman-teman yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta berbagai kenangan berharga selama perjalanan pendidikan ini. Dan terakhir, untuk diri sendiri, terima kasih telah bertahan, berjuang, dan tidak menyerah dalam menghadapi setiap proses hingga mampu menyelesaikan skripsi ini”.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah rabbil 'alamin, segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Sifat Kelengkapan Subruang dari Ruang Bernorma-2” dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang penuh ilmu pengetahuan dan cahaya Islam.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah memberikan doa, dukungan, bantuan, serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan bimbingan, arahan, motivasi, dan perhatian kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing 2 yang telah memberikan arahan, bimbingan, motivasi, serta masukan selama proses penyusunan skripsi ini.
6. Hairur Rahman, M.Si., selaku Ketua Penguji, serta Nafie Jauhari, M.Si., selaku Anggota Penguji 1 yang telah memberikan kritik, saran, dan masukan dalam proses penyempurnaan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah dengan sabar membimbing, mengajar, dan membagikan ilmu kepada penulis sejak semester pertama hingga akhir masa perkuliahan. Terima kasih atas dedikasi, keteladanan, serta pengalaman belajar yang diberikan sehingga penulis tidak hanya

memperoleh pemahaman akademik, tetapi juga menumbuhkan kecintaan terhadap matematika. Sebagai mahasiswa yang tidak berasal dari latar belakang pendidikan matematika yang kuat, penulis merasakan bahwa bimbingan dan pembelajaran dari para dosen telah menjadi bagian penting dalam proses bertumbuh, memahami, dan mencintai bidang matematika hingga mampu menyelesaikan studi dan skripsi ini.

8. Kedua orang tua tercinta, Bapak Waimin dan Ibu Samiyem, yang senantiasa menjadi sumber kekuatan, doa, dan kasih sayang bagi penulis. Terima kasih atas segala pengorbanan, kerja keras, serta ketulusan yang tidak pernah berhenti mengiringi setiap langkah penulis. Dari awal perkuliahan hingga akhirnya menyelesaikan skripsi ini, Bapak dan Ibu selalu berusaha memberikan dukungan terbaik, baik secara moral maupun material, meskipun harus melalui berbagai tantangan dan pengorbanan. Setiap doa yang dipanjatkan, setiap peluh yang dikeluarkan, dan setiap nasihat yang diberikan menjadi alasan bagi penulis untuk terus bertahan dan berjuang hingga sampai pada titik ini. Tidak ada kata yang cukup untuk menggambarkan rasa terima kasih penulis atas segala cinta, pengorbanan, dan kepercayaan yang telah diberikan.
9. Kakak penulis, Eko Yuswanto dan Rismaya Sayidatul Husna, serta ponakan tersayang Alfa, yang selalu memberikan semangat dan kebahagiaan bagi penulis.
10. Teman-teman kontrakan "When Ya", yaitu Iqbal, Surya, Fadil, Rega, Lutfi, Yuoncu, Ali, dan Daviq, yang telah menjadi bagian penting dalam perjalanan perkuliahan penulis. Terima kasih atas kebersamaan, cerita, canda tawa, serta berbagai momen yang telah dilalui bersama. Kehadiran kalian tidak hanya menjadi teman berbagi suka dan duka, tetapi juga menjadi tempat penulis menemukan semangat di tengah rasa lelah, kesepian, dan berbagai tantangan selama menjalani kehidupan perkuliahan. Terima kasih atas setiap ajakan untuk berkumpul, bermain, berdiskusi, dan menghabiskan waktu bersama yang secara tidak langsung membantu penulis tetap bertahan dan menikmati setiap proses hingga akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini.

11. Teman-teman Program Studi Matematika angkatan 2022 “MATDEUX” yang telah menjadi teman seperjuangan selama menjalani perkuliahan.
12. Seluruh teman penulis di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah menjadi bagian dari perjalanan hidup penulis sejak semester pertama hingga semester terakhir. Terima kasih atas kebersamaan, dukungan, pengalaman, pelajaran, serta berbagai kenangan yang telah dibagikan selama masa perkuliahan. Setiap pertemuan, diskusi, kerja sama, dan cerita yang pernah dilalui bersama telah memberikan warna tersendiri dalam proses tumbuh, belajar, dan berkembang menjadi pribadi yang lebih baik. Semoga silaturahmi dan kebersamaan yang telah terjalin selama ini tetap terjaga meskipun kelak kita menempuh jalan kehidupan yang berbeda.
13. Teman-teman “3,14 Fractal Devourez”, yaitu Floo, Malvard, P4SEP 969, Dunss, dan Symphoni yang selalu menjadi tempat penulis melepas penat di tengah proses penyusunan skripsi. Terima kasih atas kebersamaan, candaan, hiburan, serta suasana santai yang secara tidak langsung membantu penulis tetap semangat dan tidak merasa jenuh selama menjalani perkuliahan dan menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih pula karena telah menjadi rekan seperjuangan dalam berbagai proses, tantangan, dan kompetisi hingga berhasil meraih berbagai pencapaian dan penghargaan bersama. Kebersamaan sederhana maupun perjuangan yang telah dilalui bersama tersebut menjadi bagian berharga yang turut mewarnai perjalanan penulis hingga dapat menyelesaikan penelitian ini.
14. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah memberikan bantuan, dukungan, doa, motivasi, maupun kebaikan dalam berbagai bentuk selama perjalanan perkuliahan dan penyusunan skripsi ini. Terima kasih atas setiap perhatian, kepedulian, dan bantuan yang diberikan, baik secara langsung maupun tidak langsung. Kehadiran dan kontribusi yang diberikan telah menjadi bagian penting yang membantu penulis melewati berbagai tantangan, kesulitan, serta proses panjang hingga akhirnya dapat menyelesaikan pendidikan dan skripsi ini dengan baik.
15. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sebagai tempat penulis menimba ilmu, pengalaman, serta berbagai pelajaran kehidupan

yang berharga. Terima kasih telah menjadi ruang bagi penulis untuk bertumbuh, belajar, dan berkembang, tidak hanya dalam bidang akademik tetapi juga dalam membentuk karakter, memperbaiki akhlak, memperluas cara pandang, serta menanamkan nilai-nilai keislaman dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai pengalaman yang diperoleh selama menempuh pendidikan di kampus ini telah memberikan banyak pelajaran yang akan selalu menjadi bekal bagi penulis dalam menjalani kehidupan di masa yang akan datang.

16. Terakhir, kepada diri sendiri, Fauzi Dwi Kurniawan. Terima kasih telah mampu bertahan, berjuang, dan terus melangkah hingga sampai pada titik ini. Terima kasih karena tidak memilih menyerah ketika menghadapi berbagai kesulitan, tekanan, keraguan, dan kegagalan yang datang selama perjalanan perkuliahan. Terima kasih karena tetap berusaha bangkit setiap kali merasa lelah, tetap percaya pada proses ketika hasil belum sesuai harapan, serta tetap melanjutkan langkah meskipun jalan yang ditempuh tidak selalu mudah. Perjalanan ini mungkin tidak sempurna, tetapi setiap proses, perjuangan, dan pengorbanan yang telah dilalui menjadi bukti bahwa segala sesuatu dapat dicapai dengan usaha, doa, dan ketekunan. Semoga pencapaian ini menjadi awal dari perjalanan yang lebih panjang, penuh manfaat, dan membawa keberkahan bagi diri sendiri, keluarga, serta orang-orang di sekitar.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan di masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Definisi Istilah	6
BAB II KAJIAN TEORI	9
2.1 Teori Pendukung.....	9
2.1.1 Ruang Bernorma	9
2.1.2 Barisan Konvergen di Ruang Bernorma	11
2.1.3 Barisan Cauchy	13
2.1.4 Kelengkapan pada Ruang Bernorma	14
2.1.5 Subruang Bernorma	15
2.1.6 Ruang Hasil Kali Dalam	17
2.2 Keteraturan Alam Semesta dalam Al-Qur'an.....	19
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	20
BAB III METODE PENELITIAN	24
3.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian	24
3.2 Pra Penelitian	24
3.3 Tahapan Penelitian.....	25
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	26
4.1 Ruang Bernorma–2.....	26
4.2 Kekonvergenan pada Ruang Bernorma–2.....	29
4.3 Subruang Bernorma–2.....	35
4.4 Sifat Kelengkapan Subruang Bernorma–2	37
4.5 Matematika Sebagai Bukti Keteraturan Ciptaan Allah	42
BAB V PENUTUP.....	45
5.1 Kesimpulan.....	45
5.2 Saran	45
DAFTAR PUSTAKA.....	46
RIWAYAT HIDUP	47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Representasi 2-norma sebagai luas jajargenjang.....	26
--	----

DAFTAR SIMBOL

X	: Ruang Bernorma-2.
Y	: Subruang Bernorma-2.
x, y, z, u, v	: Vektor pada Ruang Bernorma-2.
(x_n)	: Barisan Vektor.
$\ \cdot, \cdot\ $	: Norma-2.
$\ u \times v\ $	: Panjang Hasil Kali Silang Vektor.
$u \times v$	: Hasil Kali Silang Dua Vektor.
$\rightarrow$	: Konvergen Menuju.
$\lim_{n \rightarrow \infty}$	: Limit saat n Menuju Tak Hingga.
$\dim(Y)$	: Dimensi Subruang Y .
$x_n \rightarrow x$	: Barisan (x_n) Konvergen ke x .
$x_n - x_m$	: Selisih Dua Elemen Barisan.
m, n	: Indeks Bilangan Asli.
X, Y lengkap	: Setiap Barisan Cauchy Konvergen di Ruang Tersebut.

ABSTRAK

Kurniawan, Fauzi Dwi. 2026. **Sifat Kelengkapan Subruang dari Ruang Bernorma-2.**
Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas
Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Barisan Cauchy, Kelengkapan, Himpunan Tertutup, Ruang Bernorma-2,
Subruang Bernorma-2.

Ruang bernorma-2 merupakan generalisasi dari ruang bernorma yang memiliki konsep konvergensi, barisan Cauchy, dan kelengkapan. Salah satu kajian penting dalam ruang bernorma-2 adalah sifat kelengkapan pada subruangnya karena tidak setiap subruang secara otomatis mewarisi sifat kelengkapan dari ruang induknya. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2. Penelitian dilakukan menggunakan metode penelitian kepustakaan (library research) dengan pendekatan deduktif aksiomatik melalui pengkajian definisi, aksioma, lema, dan teorema yang berkaitan dengan ruang bernorma-2, kekonvergenan, dan barisan Cauchy. Pembahasan difokuskan pada subruang ruang bernorma-2 berdimensi sekurang-kurangnya dua pada ruang vektor riil. Hasil penelitian menunjukkan bahwa subruang Y dari ruang bernorma-2 lengkap X bersifat lengkap jika dan hanya jika Y merupakan himpunan tertutup di X . Hasil tersebut diperoleh dengan membuktikan bahwa setiap subruang lengkap merupakan himpunan tertutup di ruang induknya dan setiap subruang tertutup dari ruang bernorma-2 lengkap juga bersifat lengkap. Selain itu, diperoleh bahwa setiap barisan konvergen pada ruang bernorma-2 merupakan barisan Cauchy sehingga konsep konvergensi dan kelengkapan memiliki keterkaitan yang erat dalam pembahasan sifat kelengkapan subruang. Dengan demikian, sifat ketertutupan subruang menjadi syarat penting dalam menjamin kelengkapan subruang pada ruang bernorma-2.

ABSTRACT

Kurniawan, Fauzi Dwi. 2026. **The Completeness Property of Subspaces in 2-Normed Spaces**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Dr. Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Cauchy Sequence, Completeness, Closed Subspace, 2-Normed Space, 2-Normed Subspace.

A 2-normed space is a generalization of a normed space that possesses the concepts of convergence, Cauchy sequences, and completeness. One of the important topics in 2-normed spaces is the completeness property of its subspaces, since not every subspace automatically inherits the completeness property of its ambient space. This study aims to investigate the completeness property of subspaces in 2-normed spaces. The research was conducted using the library research method with a deductive-axiomatic approach through the study of definitions, axioms, lemmas, and theorems related to 2-normed spaces, convergence, and Cauchy sequences. The discussion focuses on subspaces of 2-normed spaces with dimension at least two over real vector spaces. The results show that a subspace Y of a complete 2-normed space X is complete if and only if Y is a closed subset of X . This result is obtained by proving that every complete subspace is closed in its ambient space and that every closed subspace of a complete 2-normed space is also complete. In addition, it is shown that every convergent sequence in a 2-normed space is a Cauchy sequence, indicating that the concepts of convergence and completeness are closely related in the study of the completeness property of subspaces. Therefore, the closedness of a subspace is an essential condition for guaranteeing the completeness of subspaces in 2-normed spaces.

مستخلص البحث

فوزي دوي كورنياوان. ٢٠٢٦. خاصية الكمال للفضاءات الجزئية في الفضاءات ذات المعيار-٢. البحث العملي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بالانج.

المشرف: (١) ديان مهاراني، الماجستير في العلوم. (٢) الدكتور أحمد ناصح الدين، الماجستير في التربية.

الكلمات الأساسية: متتالية كوشي، الكمال، الفضاء الجزئي المغلق، الفضاء ذو المعيار-٢، الفضاء الجزئي ذو المعيار-٢.

يهدف هذا البحث إلى دراسة خاصية الكمال للفضاءات الجزئية في الفضاءات ذات المعيار-٢. استخدم في هذا البحث منهج البحث المكتبي بالمدخل الاستنباطي الأكسيوماتيكي من خلال دراسة التعريفات والمسلمات واللمّات والنظريات المتعلقة بالفضاءات ذات المعيار-٢، والتقارب، ومتتاليات كوشي. وتركز الدراسة على الفضاءات الجزئية من الفضاءات ذات المعيار-٢ ذات البعد الذي لا يقل عن اثنين على الفضاءات المتجهية الحقيقية. أظهرت نتائج البحث أن الفضاء الجزئي من الفضاء ذي المعيار-٢ الكامل يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان هذا الفضاء الجزئي مجموعة مغلقة في الفضاء الأصلي. كما تبين أن كل متتالية متقاربة في الفضاء ذي المعيار-٢ هي متتالية كوشي. وقد تضمن البحث مثلاً لبرهان خاصية الكمال في فضاء جزئي داخل $\mathbb{R}^3$ باستخدام معيار-٢ المعروف بجداء المتجهات الاتجاهي. وبذلك، فإن خاصية الانغلاق للفضاء الجزئي تُعد شرطاً مهماً لضمان كمال الفضاءات الجزئية في الفضاءات ذات المعيار-٢. ومن المتوقع أن تسهم نتائج هذا البحث في إثراء دراسة التحليل الدالي، خاصة فيما يتعلق ببنية الفضاءات ذات المعيار-٢ وخصائص كمالها.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang bernorma merupakan salah satu konsep dasar yang sangat penting dalam analisis fungsional maupun dalam berbagai topik matematika lainnya. Untuk mendefinisikan norma, diperlukan sebuah ruang vektor dan sebuah fungsi yang didefinisikan pada ruang vektor tersebut (John W, 1990). Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Suatu fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut norma apabila untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, fungsi tersebut bernilai tak negatif, homogen dan memenuhi ketaksamaan segitiga (Kreyszig, 1978).

Berdasarkan konsep norma pada ruang vektor, dapat dibahas pula mengenai subruang bernorma. Subruang bernorma adalah subruang Y dari ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ yang merupakan himpunan bagian $Y \subseteq X$ dan juga ruang vektor, dengan norma yang didefinisikan sebagai pembatasan norma dari ruang induknya, yaitu $\|y\|_Y = \|y\|_X \forall y \in Y$ (Kreyszig, 1978). Subruang ini tetap memiliki karakteristik yang serupa dengan ruang bernorma asalnya. Salah satu sifat penting dalam ruang bernorma adalah sifat kelengkapan. Ruang bernorma yang lengkap disebut sebagai ruang Banach, yaitu ruang bernorma di mana setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Gunawan, 2017).

Salah satu sifat penting yang berkaitan dengan ruang bernorma maupun subruang bernorma adalah sifat kelengkapan. Konsep kelengkapan dalam ruang bernorma berkaitan erat dengan barisan konvergen dan barisan Cauchy. Misalkan (x_n) adalah barisan pada ruang bernorma X . Barisan (x_n) dikatakan

konvergen ke suatu elemen $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\|x_n - x\| < \varepsilon$, atau ekuivalen dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, yang ditulis $x_n \rightarrow x$. Selanjutnya (x_n) disebut barisan cauchy apabila $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $m, n \geq N$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, atau ekuivalen dengan $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$ (Reddy B, 1998).

Perkembangan norma mendorong lahirnya generalisasi norma, salah satunya adalah ruang bernorma-2 yang diperkenalkan oleh S. Gähler pada dekade 1960-an sebagai perluasan dari ruang bernorma biasa. Pada ruang bernorma-2, ukuran tidak lagi ditentukan oleh satu vektor, melainkan oleh pasangan vektor melalui fungsi norma-2, yang secara geometris dapat diinterpretasikan sebagai luas jajar genjang yang direntang oleh dua vektor. Akibatnya, konsep konvergensi, barisan Cauchy, dan kelengkapan dalam ruang bernorma-2 didefinisikan berdasarkan fungsi norma-2 yang melibatkan pasangan vektor, sehingga kriteria konvergensi dan Cauchy ditentukan melalui pengukuran terhadap setiap vektor lain dalam ruang tersebut. Hal ini menyebabkan karakteristik struktur yang dihasilkan berbeda dari ruang bernorma biasa. Gagasan ini telah menjadi objek penelitian lanjutan dalam analisis fungsional, termasuk studi mengenai hubungan antara ruang bernorma-2 dan norma turunan pada ruang berdimensi hingga.

Ruang bernorma-2 merupakan perluasan dari ruang bernorma. Secara geometris, norma-2 diinterpretasikan sebagai ukuran luas jajar genjang (parallelogram) yang direntang oleh dua vektor. Misalkan X adalah ruang vektor riil dengan $\dim(X) \geq 2$. Suatu norma-2 adalah fungsi $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu bernilai nol jika dan hanya jika kedua vektornya bergantung linear, invarian terhadap pertukaran (simetri), homogen terhadap skalar,

serta memenuhi ketaksamaan segitiga. Pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ yang memenuhi sifat-sifat tersebut disebut sebagai ruang bernorma-2 (Gunawan, 2017).

Sebagaimana pada ruang bernorma, pada ruang bernorma-2 juga dikenal sifat kelengkapan. Akan tetapi, konsep kelengkapan dalam ruang bernorma-2 didefinisikan berdasarkan 2-norma yang melibatkan pasangan vektor, sehingga kriteria konvergensi dan barisan Cauchy ditentukan melalui pengukuran terhadap pasangan vektor dalam ruang tersebut (Gunawan, 2017). Dengan demikian, konsep barisan konvergen, barisan Cauchy, dan kelengkapan pada ruang bernorma-2 merupakan perluasan dari konsep pada ruang bernorma biasa, namun memiliki karakteristik struktural yang berbeda. Beberapa penelitian sebelumnya lebih banyak membahas definisi dasar, sifat konvergensi, serta hubungan norma-2 dengan ruang hasil kali dalam, sedangkan pembahasan mengenai sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2 masih belum dibahas secara rinci, khususnya dalam bentuk pembuktian dan contoh pada subruang tertentu. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada kajian sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2 (Dutta & Reddy, 2012).

Konsep kelengkapan tersebut tidak hanya dapat dipahami dalam kajian matematis, tetapi juga dapat direfleksikan dalam perspektif keislaman melalui keteraturan dan kesempurnaan ciptaan Allah. Hal ini sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an Surah Al-Mulk ayat 3 menggambarkan ciptaan Allah SWT penuh dengan keseimbangan dan kesempurnaan, sebagaimana firman-Nya: (RI., 2010).

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفْوُتٍ ۚ فَأَرْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang.

Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” (QS. Al-Mulk [67]: 3).

Menurut penafsiran Tafsir Ibnu Katsir, (2009) ayat ini menjelaskan bahwa seluruh ciptaan Allah tersusun secara sempurna, harmonis, dan tidak terdapat kekurangan pada sistem yang diciptakan-Nya. Langit yang berlapis-lapis, peredaran benda-benda langit, pergantian siang dan malam, serta keteraturan hukum alam menunjukkan adanya susunan yang terencana dan seimbang. Setiap unsur dalam ciptaan Allah memiliki fungsi, ukuran, dan kedudukan masing-masing, sehingga tidak ada bagian yang diciptakan secara sia-sia. Keselarasan tersebut menunjukkan bahwa kesempurnaan tercapai melalui keteraturan antarbagian yang saling berkaitan dan bekerja sesuai ketentuan-Nya.

Nilai tersebut sejalan dengan konsep subruang bernorma-2 dalam matematika, di mana suatu subruang tidak cukup hanya menjadi himpunan bagian dari ruang yang lebih besar, tetapi juga harus memenuhi syarat-syarat tertentu agar tetap mempertahankan strukturnya. Syarat tersebut meliputi tertutup terhadap operasi penjumlahan, perkalian skalar, serta memenuhi aksioma-aksioma pada norma-2 yang berlaku. Apabila salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka subruang tersebut tidak dapat dipandang sebagai struktur yang lengkap sesuai definisinya. Dengan kata lain, kelengkapan dalam matematika menuntut adanya keterpenuhan seluruh unsur pembentuk secara konsisten dan menyeluruh (Gunawan, 2017).

Selain itu, konsep kelengkapan pada subruang bernorma-2 juga menegaskan bahwa setiap barisan Cauchy di dalam subruang harus konvergen ke elemen yang masih berada di dalam subruang tersebut. Hal ini menunjukkan adanya kestabilan internal dalam struktur matematika, yaitu bahwa setiap proses pendekatan tetap

berakhir pada himpunan yang sama dan tidak keluar dari sistemnya. Prinsip ini memiliki kesesuaian makna dengan keteraturan ciptaan Allah, di mana setiap bagian bergerak sesuai ketetapan dan tidak menyimpang dari hukum yang telah ditentukan (Dutta & Reddy, 2012).

Dengan demikian, baik dalam kajian matematika maupun dalam perspektif keislaman, suatu sistem dapat disebut sempurna apabila setiap unsur penyusunnya terpenuhi secara teratur, konsisten, dan saling mendukung. Kesempurnaan bukan hanya terletak pada keberadaan bagian-bagian secara terpisah, melainkan pada hubungan yang harmonis antarbagian sehingga membentuk kesatuan yang utuh. Oleh karena itu, konsep kelengkapan pada subruang bernorma-2 tidak hanya memiliki makna teoritis dalam matematika, tetapi juga memberikan refleksi tentang pentingnya keteraturan, keseimbangan, dan kesempurnaan dalam memahami ciptaan Allah (Ibnu Katsir, 2009).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat kelengkapan pada subruang bernorma-2?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat kelengkapan pada subruang dari ruang bernorma-2 lengkap serta mengkaji hubungan antara barisan Cauchy, kekonvergenan, dan sifat ketertutupan subruang.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiliki beberapa manfaat, beberapa diantaranya adalah sebagai berikut:

- 1) Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kajian dan pembuktian yang lebih sistematis mengenai sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2, serta memperjelas hubungan antara konsep konvergensi, barisan Cauchy, dan himpunan tertutup dalam ruang bernorma-2.
- 2) Selain itu, hasil penelitian ini juga dapat menjadi referensi bagi mahasiswa atau peneliti lain dalam memahami konsep-konsep subruang ruang bernorma serta aplikasinya dalam studi lanjut analisis matematika, sehingga memberikan manfaat praktis yang nyata.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada subruang dari ruang bernorma-2 pada ruang vektor riil $\mathbb{R}^3$ dengan dimensi sekurang-kurangnya dua, serta difokuskan pada sifat kelengkapan, kekonvergenan, dan barisan Cauchy di dalamnya.

1.6 Definisi Istilah

Proposal memuat istilah khusus yang berkaitan dengan konsep-konsep dalam matematika, terutama analisis fungsional. Beberapa istilah tersebut dijelaskan sebagai berikut:

1) Ruang Bernorma-2

Misalkan X adalah ruang vektor riil dengan $\dim X \geq 2$. Suatu fungsi $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$
3. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

disebut sebagai norma-2 di X , dan pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut suatu ruang bernorma-2. Secara geometri, norma-2 diinterpretasikan sebagai luas jajargenjang yang direntang oleh x dan y . Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut

$$\|x, y\| = \left| \begin{matrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Norma-2 tersebut juga dikenal sebagai norma-2 standar pada $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

2) Kekonvergenan di Ruang Bernorma-2

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2, suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika terdapat dua vektor $u, v \in X$ yang saling bebas linear sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$\|x_n - x, u\| < \varepsilon$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$\|x_n - x, v\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0$$

dengan u dan v saling bebas linear.

3) Subruang Bernorma-2

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ suatu ruang bernorma-2 suatu himpunan bagian $Y \subset X$ disebut subruang bernorma-2 di X jika memenuhi:

1. Y merupakan subruang vektor dari X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$, berlaku $x + y \in Y$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in Y$, berlaku $\alpha x \in Y$.
2. Dimensi Y sekurang-kurangnya dua, yaitu $\dim(Y) \geq 2$, sehingga terdapat pasangan vektor yang bebas linear di dalam Y .
3. Norma pada Y didefinisikan sebagai pembatas norma pada X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku

$$\|x, y\|_Y := \|x, y\|_X$$

Dalam hal ini $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ juga merupakan ruang bernorma-2

4) Sifat Kelengkapan Subruang Bernorma-2

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 lengkap dan $Y \subset X$ merupakan subruang bernorma-2. Subruang Y dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $(x_n) \subset Y$ konvergen ke suatu elemen $x \in Y$, yaitu terdapat dua vektor bebas linear $u, v \in Y$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0$$

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Berdasarkan uraian dalam bagian latar belakang, akan dikaji beberapa landasan teori yang berhubungan dengan pembahasan yang akan dibuktikan dalam studi ini.

2.1.1 Ruang Bernorma

Definisi 2.1 (Kreyzig, 1978)

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Norma dari X adalah fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\forall x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, (homogenitas positif)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (ketaksamaan segitiga).

Ruang vektor X yang memiliki norma disebut ruang Bernorma.

Definisi 2.2 (Kreyzig, 1978)

Suatu ruang vektor X yang dilengkapi dengan fungsi norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma X dan dapat dituliskan sebagai $(X, \|\cdot\|)$.

Contoh 2.3 (Kreyzig, 1978)

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan norma pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\|x\| = |x|$$

buktikan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ruang bernorma

Bukti:

ditunjukkan $\|x\|$ memenuhi aksioma-aksioma norma, yaitu:

1. Akan ditunjukkan bahwa

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = |x| \geq 0$$

jelas bahwa syarat (N1) terpenuhi berdasarkan definisi nilai mutlak yaitu

$|x| \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ dan bahwa $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $\|x\| = |x| = 0$ maka $x = 0$

Diketahui bahwa $\|x\| = 0$, diperoleh,

$$\|x\| = |x| = 0$$

$$x = 0$$

($\leftarrow$) Akan ditunjukkan $x = 0$ maka $\|x\| = 0$

Diketahui bahwa $x = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x| = |0| = 0$$

Jadi syarat 2 terpenuhi.

3. Akan dibuktikan

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| = |\alpha x|$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| |x|$$

4. Akan dibuktikan

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\| = |x + y|$$

$$\leq |x| + |y|$$

$$\leq \|x\| + \|y\|$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Syarat 4 terpenuhi $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Karena 1 sampai 4 Jika syarat-syarat tersebut dipenuhi, maka $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ merupakan ruang Bernorma.

2.1.2 Barisan Konvergen di Ruang Bernorma

Definisi 2.4 (Reddy B, 1998)

Barisan (x_n) pada ruang bernorma X dikatakan konvergen ke $x \in X$ apabila $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

Sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ atau dapat dinotasikan dengan $x_n \rightarrow x$ dengan x merupakan limit X .

Contoh 2.5 (Kreyszig, 1978)

Misalkan diberikan barisan (x_n) dengan $x_n \in \mathbb{R}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ yang didefinisikan dengan

$$x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

dan

$$\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Tunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke $x = 0$

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ jika $n \in \mathbb{N}$ maka

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > 1/\varepsilon$$

sehingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika dipilih $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ maka untuk semua $n \geq N$

berlaku

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Dengan demikian barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ terbukti konvergen ke $x = 0$. Jadi terbukti

bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ konvergen ke $x = 0$.

Contoh 2.6 (Kreyszig, 1978)

Pada ruang bernorma $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ dengan norma mutlak $\|x\| = |x|$, didefinisikan barisan (x_n) oleh

$$x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke 0

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa

$$\|x_n - 0\| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

pilih $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ maka $\forall n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - 0\| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

maka barisan (x_n) konvergen ke 0 di $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$.

2.1.3 Barisan Cauchy

Definisi 2.7 (Reddy B, 1998)

Barisan (x_n) pada ruang bernorma X disebut barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Contoh 2.8 (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan diberikan (x_n) pada ruang bernorma yang didefinisikan oleh

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

tunjukkan barisan (x_n) tersebut merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Berdasarkan definisi 2.7 barisan (x_n) dalam ruang bernorma X dikatakan sebagai barisan Cauchy apabila $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Dengan $x_n = \frac{1}{n}$, diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &= \left| \frac{m - n}{mn} \right| \end{aligned}$$

Jika diasumsikan $m > n$, maka $m - n > 0$, sehingga

$$= \frac{m - n}{mn}$$

Karena $m - n \leq m$, maka

$$\frac{m - n}{mn} \leq \frac{m}{mn}$$

$$= \frac{1}{n}$$

Selanjutnya pilih $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Jika $m, n \geq N$, maka

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Jadi (x_n) merupakan barisan Cauchy.

2.1.4 Kelengkapan pada Ruang Bernorma

Definisi 2.9 (Reddy B, 1998)

Suatu ruang bernorma $(X, \|\cdot\|)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X .

Contoh 2.10

Diketahui ruang Bernorma $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, yaitu himpunan semua bilangan riil dengan norma

$$\|x\| = |x|$$

apakah $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma yang lengkap?

Bukti:

Misalkan (x_n) barisan Cauchy di $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon$.

karena $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil yang lengkap terhadap norma nilai mutlak, maka setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ konvergen ke limit $x \in \mathbb{R}$.

maka terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

karena (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, sehingga dapat disimpulkan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ruang Bernorma lengkap (ruang Banach).

2.1.5 Subruang Bernorma

Definisi 2.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma. Himpunan bagian $Y \subseteq X$ disebut subruang dari X jika Y merupakan ruang vektor dengan operasi yang sama seperti X . Pada ruang Y norma didefinisikan dengan pembatasan norma dari X yaitu

$$\|y\|_Y := \|y\|_X \quad \forall y \in Y$$

Teorema 2.12 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma lengkap (ruang Banach), $Y \subseteq X$ merupakan subruang yang tertutup di X . Maka $(Y, \|\cdot\|)$ juga merupakan ruang bernorma lengkap.

Contoh 2.13 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ merupakan suatu ruang bernorma

$$\|x\| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

tentukan apakah himpunan

$$Y = \{0\}$$

Adalah subruang dari $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$.

Bukti:

$$0 \in Y$$

jika $y_1, y_2 \in Y$ maka $y_1 = 0, y_2 = 0$ sehingga

$$y_1 + y_2 = 0 \in Y$$

untuk $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $y \in Y$

$$\alpha y = \alpha \cdot 0 = 0 \in Y$$

jadi Y adalah subruang vektor.

definisikan

$$\|y\|_Y := \|y\|_{\mathbb{R}} = |y|, y \in Y$$

karena sifat norma di $\mathbb{R}$ berlaku $\|\cdot\|_Y$ memenuhi nonnegatif, homogenitas, dan ketaksamaan segitiga sehingga $(Y, \|\cdot\|_Y)$ adalah Ruang Bernorma.

Contoh 2.14

Misalkan $X = (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ruang bernorma lengkap (ruang Banach). Ambil $Y = \{0\} \subseteq X$. Buktikan bahwa $(Y, \|\cdot\|)$ merupakan subruang bernorma tertutup dan lengkap dari $(X, \|\cdot\|)$

Bukti:

Subruang

$$0 \in Y$$

jika $y_1, y_2 \in Y$ maka $y_1 = 0, y_2 = 0$

$$y_1 + y_2 = 0 \in Y$$

maka Y adalah subruang vektor.

kemudian ditunjukkan bahwa memenuhi norma pada Y

menurut definisi 2.3 $\|y\|_Y := |y|$ untuk $y \in Y$. $\forall y \in Y$ berlaku:

$$\|y\|_Y = |y| \geq 0$$

$$\|y\|_Y = 0 \leftrightarrow y = 0$$

untuk $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha y\|_Y = |\alpha y| = |\alpha||y| = |\alpha|\|y\|_Y$$

untuk $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\|y_1 + y_2\|_Y = |y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| = \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y$$

terbukti memenuhi sifat-sifat pada norma

dibuktikan bahwa Y lengkap, ambil sebarang barisan cauchy $(y_n) \subset Y$ dengan

$y_n = 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Jadi $y = 0 \in Y$. Maka Y tertutup.

kemudian dibuktikan bahwa Y lengkap. Ambil sebarang barisan cauchy $(y_n) \subset Y$ dan $y_n = 0$ untuk setiap n jelas bahwa $y_n \rightarrow 0 \in Y$. Dengan demikian, setiap barisan Cauchy pada himpunan Y konvergen di Y , sehingga Y lengkap.

jadi $Y = \{0\}$ merupakan subruang bernorma tertutup dari $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Selain itu, karena setiap barisan Cauchy di Y konvergen ke elemen di Y , maka $(Y, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma lengkap, atau dengan kata lain $(Y, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach.

2.1.6 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.15 (Nur & Idris, 2023)

Misalkan X ruang vektor atas bilangan riil, suatu hasil kali dalam pada X adalah pemetaan $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut $\forall x, x', y \in X$ dan skalar $\gamma \in \mathbb{R}$:

1. $(x, x) \geq 0$ dan $x = 0$ jika dan hanya jika $(x, x) = 0$
2. $(x, y) = (y, x)$
3. $(\gamma x, y) = \gamma(x, y)$
4. $(x + y, x') = (y, x') + (x, x')$

Pasangan $(X, (\cdot, \cdot))$ disebut ruang hasil kali dalam

Definisi 2.16 (Anton, Howard; Rorres, 2014)

Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ dan $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan vektor-vektor di X . Himpunan

$$\text{span}(A) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

setiap elemen $\text{span}(A)$ disebut kombinasi linear dari vektor-vektor dalam A . Jika himpunan A terdiri atas vektor-vektor bebas linear, maka $\text{span}(A)$ adalah subruang vektor dari X .

Contoh 2.17 (Nur, 2012)

Misalkan $x = x_1, x_2$ dan $y = y_1, y_2$ diruang vektor X apakah $(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ dapat membentuk suatu ruang hasil kali dalam?

Jawab:

$$\begin{aligned}
 1. \quad (x, x) &= 3x_1x_1 + 2x_2x_2 \\
 &= 3(x_1)^2 + 2(x_2)^2 \geq 0 \\
 &= 3(x_1)^2 + 2(x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \\
 &\text{atau } x = (x_1, x_2) = 0 \\
 2. \quad (x, y) &= 3x_1y_1 + 2x_2y_2 = 3y_1x_1 + 2y_2x_2 = \langle y, x \rangle \\
 3. \quad (\gamma x, y) &= 3(\gamma x_1y_1) + 2(\gamma x_2y_2) \\
 &= \gamma(3x_1y_1) + \gamma(2x_2y_2) \\
 &= \gamma(3x_1y_1 + 2x_2y_2) \\
 &= \gamma(x, y) \\
 4. \quad (x + y, x') &= 3(x_1 + y_1)x'_1 + 2(x_2 + y_2)x'_2 \\
 &= 3x_1x'_1 + 2x_2x'_2 + 3y_1x'_1 + 2y_2x'_2 \\
 &= (y, x) + (x', y)
 \end{aligned}$$

karena keempat aksioma terpenuhi sehingga merupakan ruang hasil kali dalam

Contoh 2.18 (Anton, Howard; Rorres, 2014)

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dan $v_1 = (2, 1)$

maka

$$\text{span}\{v_1\} = \{\alpha(2, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

hasil untuk semua titik pada garis melalui titik asal $(0, 0)$ dan arah vektor $(2, 1)$

2.2 Keteraturan Alam Semesta dalam Al-Qur'an

Alam semesta merupakan tanda kekuasaan Allah SWT yang menunjukkan adanya keteraturan, keseimbangan, dan kesempurnaan ciptaan-Nya. Segala sesuatu di alam ini berjalan secara teratur sesuai ketentuan yang telah ditentukan Allah. Al-Qur'an mengandung banyak ayat yang menggambarkan keteraturan langit dan bumi sebagai tanda kebesaran serta keagungan Allah SWT. (RI., 2010). Kalam Allah SWT dalam QS. *Ar-Ra'd* [13]: 2:

اللَّهُ الَّذِي رَفَعَ السَّمَاوَاتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا ثُمَّ اسْتَوَىٰ عَلَى الْعَرْشِ وَسَحَّرَ الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ ۖ كُلٌّ يَجْرِي لِأَجَلٍ مُّسَمًّى ۖ يُدَبِّرُ الْأَمْرَ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لَعَلَّكُمْ بِلِقَاءِ رَبِّكُمْ تُوقِنُونَ

“Allah-lah yang meninggikan langit tanpa tiang yang kamu lihat, kemudian Dia bersemayam di atas ‘Arsy dan menundukkan matahari dan bulan. Masing-masing beredar sampai waktu yang ditentukan. Dia mengatur urusan (makhluk-Nya), menjelaskan tanda-tanda (kekuasaan-Nya), supaya kamu yakin akan pertemuan dengan Tuhanmu.”

Menurut Tafsir Ibnu Katsir (2009), ayat ini menegaskan bahwa langit yang luas dan kokoh itu berdiri tanpa tiang yang tampak, namun tidak roboh karena dijaga oleh kekuasaan dan kehendak Allah SWT. Beliau menjelaskan bahwa setiap lapisan langit memiliki sistem dan keseimbangan tersendiri, sehingga objek-objek langit seperti matahari, bulan, dan bintang dapat beredar pada lintasan masing-masing tanpa bertabrakan. Hal ini merupakan bentuk *tadbīr* (pengaturan) Allah SWT yang sangat sempurna dan menunjukkan keagungan-Nya dalam menciptakan alam semesta. Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Anbiya' [21]: 32

وَجَعَلْنَا السَّمَاءَ سَقْفًا مَّحْفُوظًا وَهُمْ عَنْ آيَاتِهَا مُعْرِضُونَ

“Dan Kami menjadikan langit itu sebagai atap yang terpelihara, namun mereka berpaling dari tanda-tanda (kekuasaan) itu.”

Dalam Al-Maraghi, (1993) menggambarkan fungsi langit sebagai pelindung bumi. Langit dijadikan Allah SWT seperti atap yang menjaga kehidupan

di bawahnya dari berbagai bahaya, seperti panas matahari yang berlebihan, meteor, dan gangguan lainnya. Al-Maraghi menegaskan bahwa langit memiliki sistem perlindungan yang luar biasa, seperti atmosfer yang menyaring sinar dan menjaga keseimbangan suhu di bumi. Keteraturan ini menjadi bukti kebesaran serta wujud dan rahmat Allah SWT terhadap makhluk-Nya. Allah SWT berfirman dalam QS. Adz-Dzariyat [51]: 7

وَالسَّمَاءِ ذَاتِ الْحُبُوكِ

“Demi langit yang mempunyai jalan-jalan (peredaran yang teratur).”

Menurut As-Sa’di, (2002) kata al-ḥubuk berarti jalinan yang kuat dan teratur, menggambarkan struktur langit yang memiliki lintasan-lintasan benda langit seperti planet dan bintang yang bergerak secara konsisten sesuai hukum Allah. Beliau menegaskan bahwa setiap benda langit berjalan di orbitnya tanpa menyimpang, dan sistem yang teratur ini merupakan tanda kebesaran dan kesempurnaan ciptaan Allah SWT. Keteraturan tersebut tidak hanya menunjukkan kekuasaan Allah, tetapi juga menjadi bukti kebijaksanaan-Nya dalam menciptakan alam semesta dengan keseimbangan yang sempurna.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Subbab ini menguraikan berbagai hal ingin dibuktikan mengenai topik sifat kelengkapan pada subruang dari ruang Bernorma-2 dengan menggunakan teori pendukung yang dijelaskan di subbab sebelumnya.

Definisi 2.19 (Harmanus Batkunda, 2023)

Misalkan X adalah ruang vektor riil dengan $\dim X \geq 2$. Suatu fungsi $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier

2. $\|x, y\| = \|y, x\|$
3. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

disebut sebagai norma-2 di X , dan pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut suatu ruang bernorma-2. Secara geometri, norma-2 diinterpretasikan sebagai luas jajaran genjang yang direntang oleh x dan y . Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut

$$\|x, y\| = \left| \begin{matrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Norma-2 tersebut juga dikenal sebagai norma-2 standar pada $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Definisi 2.20 (Adjid dkk., 2022)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2, suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$. Jika terdapat dua vektor $u, v \in X$ yang saling bebas linear sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$\|x_n - x, u\| < \varepsilon$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$\|x_n - x, v\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0$$

dengan u dan v saling bebas linear.

Definisi 2.21 (Adjid dkk., 2022)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2. Suatu barisan (x_n) pada X disebut barisan Cauchy jika terdapat dua vektor $y, z \in X$ yang saling bebas linear sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - x_m, y\| < \varepsilon$$

dan

$$\|x_n - x_m, z\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.22 (Gunawan, 2017)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan (x_n) di X barisan yang konvergen dalam X . Jika $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$ maka $x = y$.

Teorema 2.23 (Gunawan, 2017)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $(x_n) \subset X$. Jika (x_n) konvergen terhadap norma-2 di X , maka (x_n) merupakan barisan Cauchy di X .

Definisi 2.24

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang bernorma-2 suatu himpunan bagian $Y \subset X$ disebut subruang bernorma-2 di X jika memenuhi:

1. Y merupakan subruang vektor dari X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$, berlaku $x + y \in Y$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in Y$, berlaku $\alpha x \in Y$.
2. Dimensi Y sekurang-kurangnya dua, yaitu $\dim(Y) \geq 2$, sehingga terdapat pasangan vektor yang bebas linear di dalam Y .
3. Norma pada Y didefinisikan sebagai pembatas norma pada X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku

$$\|x, y\|_Y := \|x, y\|_X$$

Dalam hal ini $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ juga merupakan ruang bernorma-2

Definisi 2.25

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 lengkap dan $Y \subset X$ merupakan subruang bernorma-2. Subruang Y dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $(x_n) \subset Y$ konvergen ke suatu elemen $x \in Y$, yaitu terdapat dua vektor bebas linear $u, v \in Y$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0$$

Teorema 2.26

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ ruang bernorma-2 lengkap dan $Y \subset X$ subruang bernorma-2. Hubungan antara sifat kelengkapan dan ketertutupan subruang akan dikaji melalui pembuktian pada penelitian ini.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*) dengan pendekatan deduktif aksiomatik. Data penelitian diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan, baik berupa buku, jurnal ilmiah, maupun referensi akademik lain yang berkaitan dengan ruang bernorma-2, barisan Cauchy, kekonvergenan, dan sifat kelengkapan.

Pendekatan deduktif aksiomatik dilakukan dengan memanfaatkan definisi, aksioma, lema, dan teorema yang telah ada sebagai dasar dalam menyusun pembuktian matematis secara logis dan sistematis. Penelitian ini secara khusus difokuskan pada pembuktian sifat kelengkapan pada subruang dari ruang bernorma-2.

3.2 Pra Penelitian

Penulis melakukan penelusuran referensi dan kajian terhadap berbagai penelitian terdahulu yang berkaitan dengan ruang bernorma-2 sebagai tahap awal penelitian. Referensi yang digunakan berasal dari buku analisis fungsional, jurnal nasional, dan jurnal internasional yang membahas konsep ruang bernorma-2, kekonvergenan, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan. Selanjutnya, penulis mengkaji definisi, aksioma, lema, dan teorema yang relevan sebagai dasar dalam menyusun pembuktian mengenai sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2.

3.3 Tahapan Penelitian

Untuk membuktikan sifat kelengkapan pada subruang dari ruang bernorma-2, penulis melakukan beberapa tahapan penelitian sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi ruang bernorma-2 dan subruangnya sebagai objek penelitian.
2. Mengumpulkan serta mempelajari berbagai referensi yang berkaitan dengan ruang bernorma-2, kekonvergenan, barisan Cauchy, subruang, dan sifat kelengkapan.
3. Mengkaji definisi, aksioma, lema, dan teorema yang mendukung pembuktian mengenai ruang bernorma-2.
4. Membuktikan bahwa himpunan yang dikaji merupakan subruang bernorma-2.
5. Membuktikan sifat kekonvergenan dan barisan Cauchy pada ruang bernorma-2.
6. Membuktikan bahwa subruang dari ruang bernorma-2 memenuhi sifat kelengkapan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

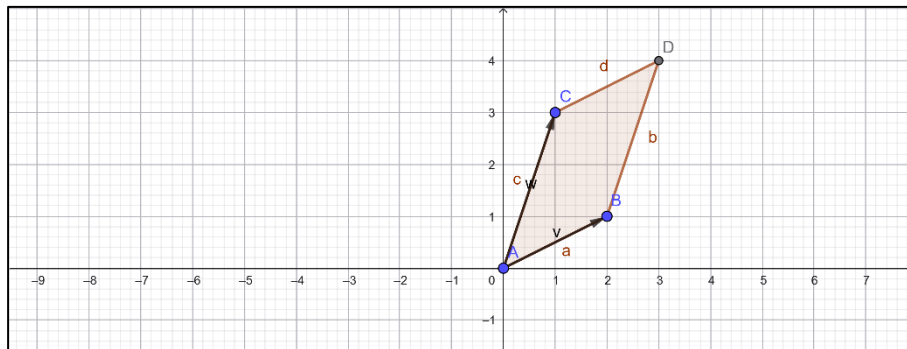
4.1 Ruang Bernorma-2

Definisi 4.1 (Harmanus Batkunde, 2023)

Misalkan X adalah ruang vektor riil dengan $\dim X \geq 2$. Suatu fungsi $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, yang memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$
3. $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

disebut sebagai norma-2 di X , dan pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut suatu ruang bernorma-2. Secara geometri, norma-2 diinterpretasikan sebagai luas jajar genjang yang direntang oleh x dan y .



Gambar 4.1 Representasi 2-norma sebagai luas jajar genjang

Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut

$$\|x, y\| = \left| \begin{matrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Norma-2 tersebut juga dikenal sebagai norma-2 standar pada $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Contoh 4.2

Misal $X = \mathbb{R}^2$ dengan hasil kali dalam $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ untuk $x = (x_1, x_2)$

dan $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
 \|x, y\| &= \left| \begin{array}{cc} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{array} \right|^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{array} \right|} \\
 &= \sqrt{\left| \begin{array}{cc} x_1^2 + x_2^2 & x_1y_1 + x_2y_2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 & y_1^2 + y_2^2 \end{array} \right|} \\
 &= \sqrt{|(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2|} \\
 &= \sqrt{|x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2|} \\
 \|x, y\| &= |x_1y_2 - x_2y_1| \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

Akan dibuktikan $\|\cdot, \cdot\|$ pada persamaan (1) adalah norma-2 di $\mathbb{R}^2$

$$1. \quad \|x, y\| = 0$$

$(\Rightarrow)$

$$|x_1y_2 - x_2y_1| = 0$$

maka $x_1y_2 = x_2y_1$

Jika $y_1 \neq 0$, $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, sehingga $x = \lambda y$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{R}$

Jika $y_1 = 0$, maka $x_1y_2 = 0$, yang berarti $x_1 = 0$ atau $y_2 = 0$

Maka x dan y bergantung linier

$(\Leftarrow)$

Jika x dan y bergantung linier, misalkan $x = \lambda y$

maka $x_1 = \lambda y_1$ dan $x_2 = \lambda y_2$

$$\|x, y\| = |\lambda y_1 \cdot y_2 - \lambda y_2 \cdot y_1| = |\lambda| |y_1 y_2 - y_2 y_1| = 0$$

maka terbukti.

2. Akan dibuktikan $\|x, y\| = \|y, x\|$

$$\begin{aligned}\|y, x\| &= |y_1 x_2 - y_2 x_1| \\ &= |-(x_1 y_2 - x_2 y_1)| \\ &= |x_1 y_2 - x_2 y_1| \\ &= \|x, y\|\end{aligned}$$

maka terbukti

3. Akan dibuktikan $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|$ untuk $\alpha \in \mathbb{R}$

bukti:

$$\begin{aligned}\|x, \alpha y\| &= |x_1(\alpha y_2) - x_2(\alpha y_1)| \\ &= |\alpha(x_1 y_2 - x_2 y_1)| \\ &= |\alpha| |x_1 y_2 - x_2 y_1| \\ &= |\alpha| \|x, y\|\end{aligned}$$

terbukti

4. Akan ditunjukkan $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

bukti:

untuk $z = (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned}\|x, y + z\| &= |x_1(y_2 + z_2) - x_2(y_1 + z_1)| \\ &= |x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 z_2 - x_2 z_1| \\ &\leq |x_1 y_2 - x_2 y_1| + |x_1 z_2 - x_2 z_1| \\ &= \|x, y\| + \|x, z\|\end{aligned}$$

Jadi aksioma 4 terpenuhi

Karena semua aksioma terpenuhi maka dapat disimpulkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2.

4.2 Kekonvergenan pada Ruang Bernorma-2

Definisi 4.3 (Adjid dkk., 2022)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2, suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$. jika terdapat dua vektor $u, v \in X$ yang saling bebas linear sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$\|x_n - x, u\| < \varepsilon$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$\|x_n - x, v\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0$$

dengan u dan v saling bebas linear.

Contoh 4.4

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dengan norma-2 yang didefinisikan oleh

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

untuk setiap $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Akan dibuktikan bahwa barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ konvergen ke $x = (0, 0)$ dalam ruang bernorma-2

Bukti:

Berdasarkan Definisi 4.3, barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika terdapat dua vektor bebas linear $u, v \in X$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, v\| = 0.$$

Ambil dua vektor bebas linear

$$u = (1, 0), v = (0, 1).$$

Untuk vektor u , diperoleh

$$\|x_n - (0, 0), u\| = \left| \frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \right| = \left| -\frac{2}{n} \right| = \frac{2}{n}.$$

Karena

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (0, 0), u\| = 0.$$

Selanjutnya untuk vektor v , diperoleh

$$\|x_n - (0, 0), v\| = \left| \frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Karena

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty,$$

maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (0, 0), v\| = 0.$$

Karena terdapat dua vektor bebas linear u dan v sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (0,0), u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (0,0), v\| = 0,$$

maka berdasarkan Definisi 4.3 diperoleh

$$x_n \rightarrow (0,0).$$

Definisi 4.5 (Adjid dkk., 2022)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2. Suatu barisan (x_n) pada X disebut barisan Cauchy jika terdapat dua vektor $y, z \in X$ yang saling bebas linear sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\|x_n - x_m, y\| < \varepsilon$$

dan

$$\|x_n - x_m, z\| < \varepsilon.$$

Contoh 4.6

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dengan norma-2 yang didefinisikan oleh

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

untuk setiap $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$

Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) yang didefinisikan oleh

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

merupakan Barisan Cauchy di ruang bernorma-2

Bukti:

Berdasarkan definisi barisan (x_n) pada ruang bernorma-2 disebut barisan Cauchy, apabila terdapat $y, z \in X$ yang saling bebas linear, sedemikian sehingga berlaku,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$$

Ambil dua vektor di $\mathbb{R}^2$ yaitu $y = (1,0)$ dan $z = (0,1)$

Jelas bahwa vektor y dan z saling bebas linear

Selanjutnya hitung

$$x_n - x_m = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}, \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

- untuk vektor $y = (1,0)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m, y\| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} & \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\ 1 & 0 \end{array} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \cdot 0 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \cdot 1 \right| \\ &= \left| - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ dan $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ untuk $n, m \rightarrow \infty$ maka

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0$$

maka

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$$

- untuk vektor uji $z = (0,1)$ dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m, z\| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} & \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\ 0 & 1 \end{array} \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \cdot 0 \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \end{aligned}$$

karena $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0$ saat $n, m \rightarrow \infty$ maka

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$$

karena terdapat dua vektor y dan z yang saling bebas linear sedemikian sehingga

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$$

maka berdasarkan definisi 4.5 barisan (x_n) merupakan Barisan Cauchy di ruang bernorma-2

Teorema 4.7 (Gunawan, 2017)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan (x_n) di X barisan yang konvergen dalam X . Jika $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$ maka $x = y$.

Bukti:

Andaikan $x_n \rightarrow x$ dan $x_n \rightarrow y$

Ambil dua vektor $u, v \in X$ yang saling bebas linear.

Menurut Definisi 4.3 diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, u\| = 0$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y, u\| = 0$$

Perhatikan bahwa

$$\|x - y, u\| = \|(x - x_n) + (x_n - y), u\|$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\|x - y, u\| \leq \|x - x_n, u\| + \|x_n - y, u\|$$

Ambil limit $n \rightarrow \infty$, maka

$$\begin{aligned}\|x - y, u\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n, u\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y, u\| \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Sehingga

$$\|x - y, u\| = 0$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\|x - y, v\| = 0$$

Karena u dan v saling bebas linear, maka berdasarkan Definisi 4.1 diperoleh

$$x - y = 0$$

Jadi,

$$x = y$$

Teorema 4.8 (Gunawan, 2017)

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 dan $(x_n) \subset X$. Jika (x_n) konvergen terhadap norma-2 di X , maka (x_n) merupakan barisan Cauchy di X .

Bukti:

Misalkan $x_n \rightarrow x$. Ambil dua vektor $u, v \in X$ yang saling bebas linear.

Karena $x_n \rightarrow x$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq N_1$, berlaku

$$\|x_n - x, u\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq N_2$, berlaku

$$\|x_n - x, v\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $N = \max\{N_1, N_2\}$. Untuk setiap $m, n \geq N$, diperoleh

$$\|x_n - x_m, u\| = \|(x_n - x) + (x - x_m), u\|$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga,

$$\|x_n - x_m, u\| \leq \|x_n - x, u\| + \|x - x_m, u\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\|x_n - x_m, v\| < \varepsilon$$

Karena terdapat dua vektor u dan v yang saling bebas linear sehingga

$$\|x_n - x_m, u\| < \varepsilon$$

dan

$$\|x_n - x_m, v\| < \varepsilon$$

maka (x_n) merupakan barisan Cauchy pada ruang bernorma-2.

4.3 Subruang Bernorma-2

Definisi 4.9

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang bernorma-2 suatu himpunan bagian $Y \subset X$ disebut subruang bernorma-2 di X jika memenuhi:

1. Y merupakan subruang vektor dari X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$, berlaku $x + y \in Y$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in Y$, berlaku $\alpha x \in Y$.
2. Dimensi Y sekurang-kurangnya dua, yaitu $\dim(Y) \geq 2$, sehingga terdapat pasangan vektor yang bebas linear di dalam Y .
3. Norma pada Y didefinisikan sebagai pembatas norma pada X , yaitu untuk setiap $x, y \in Y$ berlaku

$$\|x, y\|_Y := \|x, y\|_X$$

Dalam hal ini $(Y, \|\cdot, \cdot\|)$ juga merupakan ruang bernorma-2

Contoh 4.10

Misal $X = \mathbb{R}^3$ dengan norma-2 yang didefinisikan oleh

$$\|x, y\| = |x \times y|$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^3$ dimana $x \times y$ menyatakan hasil kali silang dari x dan y

kemudian ambil himpunan bagian $Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Akan ditunjukkan bahwa Y merupakan subruang bernorma-2 dari X

Bukti:

1. Y merupakan subruang vektor dari X

Ambil sebarang $u = (x_1, y_1, 0)$ $v = (x_2, y_2, 0) \in Y$, maka:

Penjumlahan:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in Y.$$

Perkalian skalar:

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, 0) \in Y$$

karena tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar, sehingga Y merupakan subruang vektor dari X .

2. dimensi $Y \geq 2$

Himpunan Y memiliki basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$,

sehingga $\dim(Y) = 2 \geq 2$

maka terdapat pasangan vektor yang bebas linear didalam Y .

3. norma pada Y merupakan pembatas dari norma pada X

Ambil sebarang $u = (x_1, y_1, 0)$ dan $v = (x_2, y_2, 0) \in Y$

Maka $\|u, v\|_Y = \|u, v\|_X = \|u \times v\|$

$$\text{Hitung hasil kali silang: } u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Sehingga $\|u \times v\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$

maka $\|u, v\|_Y = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ yang merupakan bentuk norma-2.

4.4 Sifat Kelengkapan Subruang Bernorma-2

Definisi 4.11

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 yang lengkap dan $Y \subset X$ merupakan subruang bernorma-2. Subruang Y dikatakan memiliki sifat kelengkapan jika setiap barisan Cauchy (x_n) di Y konvergen ke suatu elemen di Y , yaitu terdapat $x \in Y$ sehingga

$$x_n \rightarrow x$$

dalam ruang bernorma-2.

Definisi 4.12

Misalkan X adalah ruang bernorma-2 dan $Y \subset X$. Subruang Y dikatakan tertutup di X jika untuk setiap barisan (x_n) di Y yang konvergen ke $x \in X$, berlaku $x \in Y$.

Atau secara matematis:

$$x_n \in Y, x_n \rightarrow x \text{ di } X \Rightarrow x \in Y$$

Teorema 4.13

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma-2 lengkap dan $Y \subset X$ adalah subruang bernorma-2. maka Y lengkap jika dan hanya jika Y merupakan himpunan tertutup di X .

Bukti:

($\Rightarrow$) Jika Y lengkap, maka Y tertutup di X

Ambil sebarang barisan $(x_n) \subset Y$ yang konvergen ke suatu $x \in X$, yaitu

$$x_n \rightarrow x \text{ di } X.$$

Berdasarkan Teorema 2.23, (x_n) merupakan barisan Cauchy di X .

Maka untuk dua vektor bebas linear $u, v \in Y \subset X$,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, u\|_X = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, v\|_X = 0.$$

Karena norma pada Y merupakan pembatasan norma pada X , maka

$$\|x_n - x_m, u\|_Y = \|x_n - x_m, u\|_X$$

dan

$$\|x_n - x_m, v\|_Y = \|x_n - x_m, v\|_X.$$

Akibatnya,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, u\|_Y = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, v\|_Y = 0.$$

Jadi (x_n) merupakan barisan Cauchy di Y .

Karena Y lengkap, maka terdapat $y \in Y$ sehingga

$$x_n \rightarrow y$$

di Y .

Karena norma pada Y merupakan pembatasan norma pada X , maka

$$x_n \rightarrow y$$

di X .

Sedangkan sebelumnya

$$x_n \rightarrow x \text{ di } X.$$

Berdasarkan ketunggalan limit diperoleh

$$x = y.$$

Karena

$$y \in Y,$$

maka

$$x \in Y.$$

Jadi Y tertutup di X .

($\Leftarrow$) Jika Y tertutup di X , maka Y lengkap

Ambil sebarang barisan Cauchy $(x_n) \subset Y$.

Maka terdapat dua vektor bebas linear $u, v \in Y$ sehingga

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, u\|_Y = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, v\|_Y = 0.$$

Karena norma pada Y merupakan pembatasan norma pada X , maka

$$\|x_n - x_m, u\|_Y = \|x_n - x_m, u\|_X$$

dan

$$\|x_n - x_m, v\|_Y = \|x_n - x_m, v\|_X.$$

Akibatnya

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, u\|_X = 0$$

dan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, v\|_X = 0.$$

Jadi (x_n) merupakan barisan Cauchy di X .

Karena X lengkap, maka terdapat $x \in X$ sehingga

$$x_n \rightarrow x$$

di X .

Karena Y tertutup di X dan

$$x_n \in Y, \forall n,$$

maka

$$x \in Y.$$

Dengan demikian

$$x_n \rightarrow x$$

dengan

$$x \in Y.$$

Jadi setiap barisan Cauchy di Y konvergen ke suatu elemen di Y .

Maka Y lengkap.

Contoh 4.14

Misalkan $X = \mathbb{R}^3$ dengan norma-2 yang didefinisikan oleh

$$\|u, v\| = \|u \times v\|,$$

untuk setiap $u, v \in \mathbb{R}^3$, dan diketahui bahwa $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ merupakan ruang

bernorma-2 yang lengkap. Ambil subruang $Y = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$

akan ditunjukkan bahwa Y memiliki sifat kelengkapan

Bukti:

ambil sebarang barisan Cauchy (u_n) di Y , dengan

$$(u_n) = (a_n, b_n, 0).$$

Karena (u_n) merupakan barisan Cauchy di ruang bernorma-2, maka terdapat dua

vektor bebas linear di Y , misalkan

$$z_1 = (1, 0, 0) \text{ dan } z_2 = (0, 1, 0)$$

sehingga

$$\|u_n - u_m, z_1\| \rightarrow 0 \text{ dan } \|u_n - u_m, z_2\| \rightarrow 0$$

untuk $n, m \rightarrow \infty$.

Untuk $z_1 = (1, 0, 0)$, diperoleh

$$u_n - u_m = (a_n - a_m, b_n - b_m, 0)$$

Sehingga

$$(u_n - u_m) \times z_1 = (0, 0, -(b_n - b_m))$$

maka

$$\|u_n - u_m, z_1\| = |b_n - b_m| \rightarrow 0$$

Jadi (b_n) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Selanjutnya untuk

$$z_2 = (0, 1, 0)$$

diperoleh

$$(u_n - u_m) \times z_2 = (0, 0, a_n - a_m)$$

maka

$$\|u_n - u_m, z_2\| = |a_n - a_m| \rightarrow 0$$

Jadi (a_n) juga merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka terdapat $a, b \in \mathbb{R}$ sehingga

$$a_n \rightarrow a \text{ dan } b_n \rightarrow b$$

Akibatnya,

$$u_n = (a_n, b_n, 0) \rightarrow (a, b, 0) = u$$

Karena

$$u = (a, b, 0) \in Y$$

maka limit barisan (u_n) berada di dalam Y .

Maka Y merupakan subruang bernorma-2 yang lengkap.

4.5 Matematika Sebagai Bukti Keteraturan Ciptaan Allah

Keteraturan merupakan salah satu prinsip penting yang dapat diamati baik dalam ajaran Islam maupun dalam kajian matematika. Dalam perspektif keislaman, keteraturan alam semesta menunjukkan adanya kekuasaan, kebijaksanaan, dan kesempurnaan ciptaan Allah. Hal ini dijelaskan dalam Al-Qur'an Surah Ar-Rahman ayat 5 (RI., 2010):

اِلَٰلَٰهٌ مُّشْتَرِكٌ ۖ لَّسْهُنَّ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ ﴿٥﴾

“Matahari dan bulan beredar menurut perhitungan.”

Ayat ini menunjukkan bahwa benda-benda langit bergerak dalam aturan yang pasti, teratur, dan tidak berjalan secara acak. Menurut penafsiran Tafsir Ibnu Katsir, kata *biḥusbān* bermakna dengan hitungan yang teliti, ukuran yang tepat, dan ketetapan waktu yang sempurna. Matahari dan bulan bergerak pada garis edar yang telah ditentukan Allah tanpa saling bertabrakan, tanpa terlambat, dan tanpa mendahului ketetapan yang telah ditetapkan-Nya. Peredaran keduanya menjadi dasar bagi manusia dalam menentukan waktu siang dan malam, perhitungan bulan, tahun, musim, serta berbagai kebutuhan hidup lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa ciptaan Allah tidak berlangsung secara kebetulan, melainkan berada dalam sistem yang sangat rapi, seimbang, dan konsisten. Selain itu, keteraturan tersebut juga menjadi bukti kekuasaan Allah yang mengatur seluruh alam semesta dengan hukum-hukum yang tetap sehingga dapat dipelajari dan dimanfaatkan oleh manusia. Dengan demikian, ayat ini menegaskan bahwa fenomena alam semesta mengandung nilai keteraturan, ketepatan, dan keseimbangan yang menjadi tanda kesempurnaan ciptaan (Ibnu Katsir, 2009).

Keteraturan yang tampak pada peredaran matahari dan bulan tersebut menjadi bukti bahwa alam semesta berjalan berdasarkan hukum-hukum yang tetap.

Fenomena seperti pergantian siang dan malam, penanggalan, musim, dan perhitungan waktu merupakan contoh nyata bahwa ciptaan Allah memiliki pola yang konsisten. Keadaan ini mendorong manusia untuk berpikir, meneliti, dan memahami hukum-hukum tersebut melalui ilmu pengetahuan. Salah satu ilmu yang sangat erat kaitannya dengan pola dan keteraturan adalah matematika. Matematika mempelajari hubungan, struktur, perubahan, dan pola secara logis sehingga menjadi sarana penting dalam menjelaskan keteraturan alam semesta (Abdussakir, 2007)

Salah satu bentuk keteraturan dalam matematika dapat dilihat pada kajian ruang bernorma-2. Ruang bernorma-2 merupakan generalisasi dari ruang bernorma yang menggunakan pasangan vektor dalam pengukurannya. Pada ruang ini berlaku aksioma-aksioma tertentu, yaitu bernilai nol jika kedua vektor bergantung linear, bersifat simetri, homogen terhadap perkalian skalar, serta memenuhi ketaksamaan segitiga. Seluruh aksioma tersebut menunjukkan bahwa ruang bernorma-2 dibangun atas dasar aturan yang jelas, konsisten, dan sistematis. Jika salah satu aksioma tidak terpenuhi, maka struktur tersebut tidak dapat disebut sebagai ruang bernorma-2 (Gunawan, 2017).

Keteraturan dalam ruang bernorma-2 juga tampak pada pembahasan subruangnya. Suatu subruang dari ruang bernorma-2 harus memenuhi syarat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar agar tetap menjadi ruang vektor, serta mempertahankan sifat-sifat norma-2 yang berlaku. Selain itu, pada kajian kelengkapan, setiap barisan Cauchy dalam subruang harus konvergen ke elemen yang tetap berada di dalam subruang tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa struktur matematika yang baik menuntut keteraturan internal, yaitu setiap proses yang berlangsung di dalam sistem tetap kembali pada sistem itu sendiri. Dengan

demikian, konsep keteraturan yang digambarkan Al-Qur'an melalui peredaran matahari dan bulan menunjukkan adanya tatanan alam semesta yang diciptakan Allah secara teratur. Matematika, termasuk kajian ruang bernorma-2, merupakan bagian dari keteraturan tersebut yang tercermin melalui unsur, sifat, dan proses yang tersusun secara sistematis dan konsisten (Dutta & Reddy, 2012).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan pada subruang ruang bernorma-2 lengkap di $\mathbb{R}^3$, diperoleh bahwa sifat kelengkapan suatu subruang berkaitan erat dengan sifat ketertutupannya di dalam ruang induk. Jika $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ merupakan ruang bernorma-2 lengkap dan $Y \subset X$ merupakan subruang bernorma-2, maka setiap barisan Cauchy di Y akan konvergen ke suatu elemen di Y apabila Y merupakan himpunan tertutup di X .

Selain itu, diperoleh bahwa subruang Y bersifat lengkap jika dan hanya jika Y merupakan himpunan tertutup di X . Dengan demikian, tidak setiap subruang dari ruang bernorma-2 lengkap secara otomatis memiliki sifat kelengkapan, melainkan harus memenuhi syarat ketertutupan di dalam ruang induknya.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, penulis memberikan beberapa saran Penelitian ini masih terbatas pada kajian teoritis mengenai sifat kelengkapan pada subruang ruang bernorma-2. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian ini pada ruang bernorma-2 berdimensi tak hingga.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. (2007). *Matematika dalam Al-Qur'an*. UIN Malang Press.
- Adjid, S. F., Batkunde, H., & Wattimena, A. Z. (2022). Kekonvergenan Barisan di Ruang Bernorma-2 Berdasarkan Norma Ruang Kuosiennya. *Amalgamasi Journal of Mathematics and Application*.
- Al-Maraghi, A. M. (1993). *Tafsir Al-Maraghi*. Mustafa Al-Babi Al-Halabi.
- Anton, Howard; Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Algebra* (11th Editi). John Wiley & Sons.
- As-Sa'di, A. bin N. (2002). *Taisir Karimirrahman fi Tafsir Kalam Al-Mannan*. Darussalam.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Dutta, H., & Reddy, B. S. (2012). On some sequence spaces. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(1), 1–12.
- Gunawan, H. (2017). *On n -inner product, n -norms, and the Cauchy-Schwarz inequality*. April.
- Harmanus Batkunde, F. Y. R. (2023). Norma pada ruang bernorma- ? berdimensi tertentu. *Equator: Journal of Mathematical and Statistical Sciences (EJMSS)*, 2(1), 27–31.
- Ibnu Katsir, I. bin U. (2009). *Tafsir Ibnu Katsir*. Darul Fikr.
- John W, C. (1990). *A Course in Functional Analysis* (Vol. 17).
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Nur, M. (2012). *Ruang Norm- dan Ruang Hasil Kali Dalam-*. 8(2), 86–91.
- Nur, M., & Idris, M. (2023). A New Notion Of Inner Product In A Subspace Of N-Normed Space. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 29(3), 372–381. <https://doi.org/10.22342/jims.29.3.1412.372-381>
- Reddy B. (1998). *Introductory Functional Analysis: With Application to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Springer.
- RI., K. A. (2010). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Departemen Agama Republik Indonesia.

RIWAYAT HIDUP



Fauzi Dwi Kurniawan lahir di Nganjuk pada 25 Mei 2004. Penulis merupakan putra kedua dari pasangan Bapak Waimin dan Ibu Samiyem. Penulis menempuh pendidikan formal di TK Dharma Wanita 2 dan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SDN 2 Ngadiboyo dan lulus pada tahun 2016. Pendidikan menengah pertama ditempuh di MTs Darul-Ihsan dan diselesaikan pada tahun 2019. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan di MA Darul-Ihsan dan lulus pada tahun 2022. Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti berbagai kegiatan akademik dan nonakademik, baik di lingkungan program studi maupun fakultas. Penulis juga terlibat dalam berbagai kepanitiaan kegiatan mahasiswa, kegiatan KOMET Matematika, serta berbagai kegiatan pengembangan diri yang mendukung peningkatan kemampuan akademik dan keterampilan sosial. Selain aktif berorganisasi, penulis juga berpartisipasi dalam berbagai kompetisi dan berhasil meraih beberapa prestasi, di antaranya sebagai Juara 1 *First Winner Reels Competition English Exposure 2024* serta Juara 2 *Mobile Legends Competition* Malang. Berbagai prestasi tersebut menjadi motivasi bagi penulis untuk terus mengembangkan potensi diri, baik dalam bidang akademik maupun nonakademik. Selain kegiatan akademik, penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Kota Malang. Pengalaman tersebut memberikan wawasan dan pengalaman dalam pengolahan serta analisis data yang mendukung pengembangan kemampuan akademik penulis. Dalam bidang keilmuan, penulis memiliki ketertarikan pada kajian analisis matematika dan analisis fungsional, yang kemudian menjadi dasar dalam penyusunan skripsi. Berbagai pengalaman yang diperoleh selama masa studi diharapkan dapat menjadi bekal bagi penulis untuk terus mengembangkan kemampuan akademik, profesional, dan sosial, serta memberikan kontribusi yang bermanfaat bagi masyarakat, khususnya dalam bidang matematika.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fauzi Dwi Kurniawan
NIM : 220601110102
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan Subruang dari Ruang Bernorma-2
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Achmad Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	29 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	2 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	6 Oktober 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	8 Oktober 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	9 Oktober 2025	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	16 Oktober 2025	ACC Seminar Proposal	7.
8.	11 November 2025	Seminar Proposal	8.
9.	24 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	9.
10.	12 Desember 2025	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	10 Februari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	9 Maret 2026	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	31 Maret 2026	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	13.
14.	9 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	14.
15.	19 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	22 April 2026	ACC Bab IV dan V	16.
17.	28 April 2026	ACC Seminar Hasil	17.
18.	8 Mei 2026	Seminar Hasil	18.
19.	18 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	19 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Kajian Agama Bab IV	20.
21.	20 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	21 Mei 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	22.
23.	22 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	23.
24.	25 Mei 2026	ACC Naskah Skripsi	24.
25.	15 Juni 2026	ACC Keseluruhan	25.

Malang, 15 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Paehrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012