

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING
AVERAGE* PADA PENGENDALIAN KUALITAS PROSES
PRODUKSI GULA**

(Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)

SKRIPSI

**OLEH
MUTIMATUL FADLILAH
NIM. 220601110038**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING
AVERAGE* PADA PENGENDALIAN KUALITAS PROSES
PRODUKSI GULA**

(Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Mutimatul Fadlilah
NIM. 220601110038**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM
MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING
AVERAGE* PADA PENGENDALIAN KUALITAS PROSES
PRODUKSI GULA**

(Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)

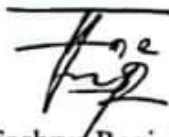
SKRIPSI

**Oleh
Mutimatul Fadlilah
NIM. 220601110038**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 12 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



**Dr. Fachrud Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012**

Dosen Pembimbing II



**Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004**



**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**

**Dr. Fachrud Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012**

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI *MAXIMUM*
MULTIVARIATE EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING
AVERAGE PADA PENGENDALIAN KUALITAS PROSES
PRODUKSI GULA**

(Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)

SKRIPSI

**Oleh
Mutimatul Fadlilah
NIM. 220601110038**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 9 Juni 2026

Ketua Penguji : Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si

Anggota Penguji 1 : Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si

Anggota Penguji 3 : Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mutimatul Fadlilah
NIM : 220601110038
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Implementasi Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* pada Pengendalian Kualitas Proses Produksi Gula (Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan menyantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 Juni 2026

Yang membuat pernyataan,



Mutimatul Fadlilah

NIM. 220601110038

MOTO

“Dan tidak ada keberhasilanku melainkan dengan pertolongan Allah.”

Al-Quran Surah Al-Hud ayat 88

“Menjadi kuat bukan tentang tidak lelah, tetapi tetap melangkah dengan tawakkal.”

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kepada Allah Swt., karya ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta, Bapak Muhamad Ngalim dan Ibu Dewi Quroisyin, atas doa, kasih sayang, dukungan, dan kepercayaan yang tidak pernah putus dalam setiap langkah penulis menempuh pendidikan. Untuk adik-adik tersayang, Maya Roudhotul Jannah, Tsalitsna Tahmeela In'amia, dan Tsalitska Tahmeela Arzaqia, terima kasih atas doa dan semangat yang selalu menguatkan penulis. Terima kasih kepada seluruh orang baik di sekitar penulis, sahabat seperjuangan, murid-murid penulis, serta orang tua murid atas dukungan dan doa yang telah diberikan. Dan untuk diri sendiri, terima kasih telah bertahan dan terus berjuang di tengah proses membagi waktu antara kuliah, pondok, organisasi, dan pekerjaan. Perjalanan ini mengajarkan bahwa menuntut ilmu membutuhkan keikhlasan, kesabaran, dan tawakkal kepada Allah SWT.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT., yang telah memberikan rahmat dan pertolongan-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan selama proses penyusunan skripsi ini, secara khusus kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., CAHRM, CRMP, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dan selaku Dosen Pembimbing I, yang telah memberikan pengetahuan, bimbingan yang bijaksana, dan motivasi, serta nasihat yang tiada henti kepada penulis.
4. Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II, atas dukungan dan nasihat berharga kepada penulis.
5. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Penguji dalam ujian skripsi yang telah memberi arahan, nasehat, serta saran kepada penulis.
6. Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si, selaku Anggota Penguji I dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan, nasihat, serta saran kepada penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Seluruh mahasiswa angkatan 2022 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah bersama dalam perjalanan ini, berbagi tantangan dan kebahagiaan, serta membangun kenangan yang tak terlupakan.
9. Kak Intan, selaku narahubung instansi PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.
10. Deni Dwianto, selaku pembimbing lapangan di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.
11. Keluarga tercinta, khususnya Bapak Muhamad Ngalim, Ibu Dewi

Quroisyin, Adek Maya, Dek Lisna, dan Dek Liska

12. Pengasuh pondok umma Dr. Nury Firdausia, M.Pd.I dan buya M. Nadif Anwar, Lc. M.Pd serta seluruh mbak-mbak pondok, atas doa, nasihat, dan keteladanan yang telah diberikan kepada penulis.
13. Orang tua murid privat serta murid privat penulis, atas kepercayaan, dukungan, dan doa yang turut menguatkan langkah penulis.
14. Keluarga besar PMII Rayon *Pencerahan* Galileo dan Keluarga besar IKAHIMATIKA Wilayah V, baik anggota, pengurus dan alumni, atas kebersamaan, solidaritas, serta ruang belajar dan berproses yang penuh makna.
15. Teman-teman penulis, atas dukungan, semangat, serta doa tulus yang senantiasa menguatkan penulis dalam setiap proses penyusunan skripsi ini.

Semoga segala bantuan dan dukungan yang telah diberikan mendapatkan balasan yang setimpal dan penuh berkah dari Allah SWT. Dengan ridho Allah SWT., penulis berharap dapat memberikan manfaat bagi diri penulis dan para pembaca.
Amin.

Malang, 9 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERSETUJUAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
ABSTRAK	xvii
ABSTRACT	xviii
مستخلص البحث.....	xix
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	9
1.3 Tujuan Penelitian	9
1.4 Manfaat Penelitian	10
1.5 Batasan Masalah	11
BAB II KAJIAN TEORI	12
2.1 Teori Pendukung	12
2.1.1 Kualitas Produk	12
2.1.2 Pengendalian Kualitas	12
2.1.3 Statistika Multivariat	14
2.1.4 Uji Normalitas Multivariat	16
2.1.5 Uji Asumsi Korelasi	17
2.1.6 Grafik Pengendali Max-MEWMA	18
2.1.7 Diagram <i>Ishikawa</i>	28
2.1.8 Kapabilitas Proses	29
2.1.9 Proses Produksi Gula pada PT PG Rajawali I Kabupaten Malang	30
2.1.10 Parameter Kualitas Gula	31
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits	35
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	38
BAB III METODE PENELITIAN	40
3.1 Jenis Penelitian.....	40
3.2 Jenis dan Sumber Data	40
3.3 Struktur Data	40
3.4 Tahapan Analisis Data	41
3.5 Grafik Alir Penelitian	45
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	46
4.1 Analisis Statistik Deskriptif Karakteristik Kualitas Gula	46
4.2 Uji Asumsi Normalitas Multivariat.....	50
4.3 Uji Asumsi Korelasi.....	57
4.4 Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase I	59

4.4.1 Menaksir Nilai Awal μ_0 dan Σ_0	59
4.4.2 Hitung Nilai U_i dan V_i	61
4.4.3 Hitung Nilai M_i	65
4.4.4 Plotkan Nilai M_i Pada Setiap Pengamatan.....	66
4.5 Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase II	72
4.5.1 Menggunakan Parameter μ_0 , Σ_0 , dan UCL dari Fase I.....	72
4.5.2 Menghitung Z_i , W_i , U_i , V_i dan M_i	73
4.5.3 Plotkan Nilai M_i pada Setiap Pengamatan	75
4.5.4 Identifikasi Penyebab Khusus (<i>assignable cause</i>).....	76
4.6 Analisis Kapabilitas Proses Produksi Gula Kristal Putih.....	87
4.7 Interpretasi Hasil Pemantauan Proses	90
4.8 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits	93
BAB V PENUTUP.....	96
5.1 Kesimpulan	96
5.2 Saran.....	98
DAFTAR PUSTAKA	100
LAMPIRAN.....	103
RIWAYAT HIDUP	121

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Struktur Data Multivariat Berupa Subgrup ($n > 1$).....	14
Tabel 2.2 Spesifikasi Gula Kristal Putih.....	32
Tabel 3.1 Variabel Penelitian.....	40
Tabel 3.2 Struktur Data Multivariat Berupa Subgrup ($n = 2$).....	41
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Gula.....	46
Tabel 4.2 Plotting Simbol Pada Lokasi i, Mi	76
Tabel 4.3 Nilai E_j untuk Identifikasi Penyebab Penyimpangan Proses	84
Tabel 4.4 Nilai LSL dan USL yang digunakan pabrik.....	88

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Grafik Max-MEWMA.....	27
Gambar 2.2	Diagram Ishikawa	29
Gambar 2.3	Proses Produksi Gula Di PT Pabrik Gula Rajawali I.....	30
Gambar 2.4	Gula Sesuai SNI	35
Gambar 3.1	Grafik Alir Penelitian	45
Gambar 4.1	Grafik Univariat X-Bar Data Asli Fase I untuk Variabel a. Kadar Air, b. BJB, dan c. Warna Larutan.....	48
Gambar 4.2	Grafik Univariat X-Bar Data Asli Fase II untuk Variabel a. Kadar Air, b. BJB, dan c. Warna Larutan.....	49
Gambar 4.3	Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I	67
Gambar 4.5	Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I Perbaikan II	70
Gambar 4.6	Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I Perbaikan Terakhir ...	71
Gambar 4.7	Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase II	75
Gambar 4.8	Plot Simbol yang Out Of Control.....	78
Gambar 4.9	Diagram Ishikawa	85

DAFTAR SIMBOL

i	: Indeks pengamatan ke- i , $i = 1, 2, \dots, m$
j	: Indeks variabel ke- j , $j = 1, 2, \dots, p$
k	: Indeks sampel dalam subgroup, $k = 1, 2, \dots, n$
p	: Banyaknya karakteristik kualitas
n	: Ukuran sampel
m	: Banyaknya pengamatan
$\mathbf{X}_{i,k}$	: Vektor pengamatan ke- k pada subgroup ke- i
$\bar{\mathbf{X}}_i$	: Vektor rata-rata subgroup ke- i
$\bar{X}_{i,j}$	: Vektor rata-rata pengamatan ke- i untuk variabel ke- j
$\bar{\mathbf{X}}_j$	: Vektor rata-rata keseluruhan variabel ke- j
$\bar{\mathbf{X}}$	: Vektor rata-rata keseluruhan variabel
$\mathbf{X}_{i,k,j}$	: Vektor pengamatan ke- k pada subgroup ke- i dan variabel ke- j
$\boldsymbol{\mu}$	: Vektor rata-rata proses
$\boldsymbol{\mu}_0$	: Vektor rata-rata proses dalam kondisi terkendali (<i>in-control</i>)
$\boldsymbol{\Sigma}$	: Matriks kovariansi proses
$\boldsymbol{\Sigma}_0$	: Matriks kovariansi proses dalam kondisi terkendali
$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$	: Invers dari matriks kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathbf{S}_i$	: Matriks kovariansi sampel ke- i
$\bar{S}$	: Rata-rata matriks kovariansi
$'$	: Operasi transpose
$\mathbf{I}$	: Matriks identitas
λ	: Parameter pelican/pemulus (<i>smoothing parameter</i>) atau pembobot, $0 \leq \lambda \leq 1$
D_i^2	: Jarak kuadrat
$\mathbf{Z}_i$	: Statistik MEWMA multivariat untuk memantau rata-rata proses
$\mathbf{Z}_0$	: Nilai awal statistik MEWMA
$Cov(\mathbf{Z}_i)$	: Matriks kovariansi dari statistik $\mathbf{Z}_i$
T_i	: Statistik skalar hasil transformasi dari $\mathbf{Z}_i$
χ_j^2	: Peubah acak <i>chi-square</i> dengan derajat bebas j
χ_{p,δ^2}^2	: Distribusi <i>chi-square non-sentral</i> dengan derajat kebebasan p dan parameter <i>non-centrality</i> δ^2
δ^2	: Parameter <i>non-centrality</i> pada distribusi <i>chi-square</i>
$\exp(.)$	: Fungsi eksponensial
$\ln(.)$	: Logaritma natural
$H_p(.)$	: Fungsi distribusi kumulatif (CDF) <i>chi-square</i> dengan derajat kebebasan p
$\Phi(.)$	: Fungsi distribusi kumulatif normal standar
$\Phi^{-1}(.)$	: Fungsi invers distribusi normal standar
$\phi(.)$	: Fungsi kepadatan probabilitas (<i>probabilitas density function</i> / PFD) dari distribusi normal standar
U_i	: Statistik univariat untuk memantau pergeseran rata-rata proses
W_i	: Statistik untuk memantau variabilitas proses
Y_i	: Statistik EWMA dari W_i

V_i	: Statistik transformasi untuk memantau variabilitas proses
M_i	: Statistik Max-MEWMA, $M_i = \max\{ U_i , V_i \}$ pada pengamatan ke- i
$E(M_i)$	: Nilai harapan dari statistika <i>run length</i>
$Var(M_i)$	: Varians dari statistik <i>run length</i>
ARL	: <i>Average Run length</i>
L	: Parameter pengendalian grafik Max-MEWMA
$UCL(h)$	: Batas kendali atas (<i>Upper Control Limit</i>)
α	: Tingkat signifikansi
C_{pk}	: Indeks kapabilitas proses multivariat
$C_{pk}(X_j)$	: Indeks kapabilitas univariat variabel ke- j
w_j	: Bobot karakteristik kualitas ke- j
USL_j	: Batas spesifikasi atas variabel ke- j
LSL_j	: Batas spesifikasi bawah variabel ke- j
σ_j	: Simpangan baku variabel ke- j

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.	Data Karakteristik Kualitas Gula.....	103
Lampiran 2.	Hasil Perhitungan Jarak Mahalanobis	103
Lampiran 3.	Perhitungan <i>Mi</i> Fase I	104
Lampiran 4.	Perhitungan <i>Mi</i> Fase I Perbaikan 1	105
Lampiran 5.	Perhitungan <i>Mi</i> Fase I Perbaikan 2	106
Lampiran 6.	Perhitungan <i>Mi</i> Fase I Perbaikan 3	107
Lampiran 7.	Koding Max-MEWMA Fase I.....	108
Lampiran 8.	Perhitungan <i>Mi</i> Fase II	112
Lampiran 9.	Koding Fase II	113
Lampiran 10.	Koding Grafik Simbol Fase II	116
Lampiran 11.	Surat Keterangan Izin Penelitian	120

ABSTRAK

Fadlilah, Mutimatul. 2026. **Implementasi Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Max-MEWMA)* pada Pengendalian Kualitas Proses Produksi Gula (Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata Kunci: Pengendalian Kualitas, Max-MEWMA, Gula Kristal Putih, Kapabilitas Proses

Pengendalian kualitas diperlukan untuk menjaga mutu gula agar tetap sesuai standar perusahaan dan SNI. Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasi grafik pengendali *Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Max-MEWMA)* pada proses produksi gula kristal putih di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang menggunakan serta mengetahui kapabilitas proses produksinya. Karakteristik yang digunakan yaitu kadar air, besar jenis butir (BJB), dan warna larutan (ICUMSA). Data penelitian berupa data subgroup berukuran dua yang dibagi menjadi Fase I dan Fase II. Sebelum pembentukan grafik pengendali tahapan yang dilakukan yaitu uji normalitas multivariat dan uji korelasi antar variabel. Grafik pengendali Max-MEWMA dibentuk menggunakan pembobot $\lambda = 0,2$ untuk mendeteksi pengamatan yang berada di luar batas kendali. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada Fase I masih terdapat beberapa titik *out of control* sehingga dilakukan perbaikan dengan mengelurakan data yang *out of control* setelah itu mengulang tahapan hingga proses berada dalam kondisi terkendali. Pada Fase II, masih ditemukan beberapa pengamatan yang *out of control*. Semua variabel merupakan penyebab *out of control* tetapi variabel yang memengaruhi terbanyak variabel warna larutan, analisis kapabilitas menunjukkan bahwa proses produksi secara keseluruhan telah kapabel dengan nilai indeks kapabilitas multivariat MC_{pk} sebesar 1,44. jika dilihat satu-persatu variabel besar jenis butir dan warna larutan masih belum kapabel sehingga kualitas produk pada kedua variabel tersebut belum sepenuhnya konsisten memenuhi spesifikasi perusahaan.

ABSTRACT

Fadlilah, Mutimatul. 2026. **Implementation of the Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Max-MEWMA) Control Chart in the Quality Control of the Sugar Production Process (Case Study: PT PG Rajawali I, Malang Regency)**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Departemen, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.
Advisors: (I) Dr Fachrur Rozi, M.Si. (II) Dr Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keywords: Quality Control, Max-MEWMA, White Crystal Sugar, Process Capability

Quality control is necessary to maintain sugar quality in accordance with company standards and the Indonesian National Standard (SNI). This study aims to implement the Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Max-MEWMA) control chart in the white crystal sugar production process at PT PG Rajawali I and to evaluate the capability of the production process. The characteristics used in this study were moisture content, grain specific gravity (BJB), and solution color (ICUMSA). The research data consisted of subgroup data with a sample size of two, which were divided into Phase I and Phase II. Before constructing the control chart, multivariate normality and correlation tests among variables were conducted. The Max-MEWMA control chart was constructed using a smoothing parameter of $\lambda = 0.2$ to detect observations outside the control limits. The results showed that in Phase I there were still several out-of-control points; therefore, improvements were made by removing the out-of-control data and repeating the analysis stages until the process achieved a controlled condition. However, in Phase II, several *out of control* observations were still identified. All variables contributed to the out of control conditions, but the variable with the greatest influence was solution color. Process capability analysis indicated that the overall production process was capable, with a multivariate capability index MC_{pk} value of 1.4256. However, when evaluated individually, the grain specific gravity and solution color variables were still not capable, indicating that the product quality for these two variables had not been fully consistent in meeting the company specifications.

مستخلص البحث

فضل اللّٰه، ممّنة. ٢٠٢٦. تطبيق مخطط التحكم المتعدد المتغيرات ذي المتوسط المتحرك المرجح أسياً الأقصى ($Max-MEWMA$) في مراقبة جودة عملية إنتاج السكر (دراسة حالة: شركة $PT PG Rajawali I$ بمقاطعة مالانغ). بحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية بمالانغ.

المشرفان: (١) فخر الرازي، الماجستير في العلوم. (٢) محمد جموري، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: مراقبة الجودة، $Max-MEWMA$ ، السكر الأبيض البلوري، كفاءة العملية

يعد التحكم في الجودة ضرورياً للحفاظ على جودة السكر بحيث تظل مطابقة لمعايير الشركة ومعايير SNI. هدفت هذه الدراسة إلى تطبيق مخطط التحكم $Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Max-MEWMA)$ في عملية إنتاج السكر البلوري الأبيض في شركة $PT PG Rajawali I$ بمقاطعة مالانغ، وكذلك تحديد كفاءة عملية الإنتاج. الخصائص المستخدمة هي نسبة الرطوبة، وحجم الحبيبات (B/B)، ولون المحلول ($ICUMSA$). تتكون بيانات البحث من بيانات مجموعات فرعية مكونة من مجموعتين تم تقسيمها إلى المرحلة الأولى والمرحلة الثانية. قبل إنشاء مخطط التحكم، تم إجراء اختبار التوزيع الطبيعي المتعدد المتغيرات واختبار الارتباط بين المتغيرات. تم إنشاء مخطط التحكم $Max-MEWMA$ باستخدام معامل الترجيح $\lambda = 0,2$ للكشف عن الملاحظات التي تقع خارج حدود التحكم. أظهرت نتائج البحث أنه في المرحلة الأولى لا تزال هناك بعض النقاط خارج نطاق التحكم، لذا تم إجراء تصحيح عن طريق استبعاد البيانات الخارجة عن نطاق التحكم، ثم تكرار الخطوات حتى أصبح العملية في حالة خاضعة للتحكم. في المرحلة الثانية، لا تزال هناك بعض الملاحظات خارج نطاق التحكم. جميع المتغيرات هي أسباب الخروج عن نطاق التحكم، لكن المتغير الذي يؤثر بشكل أكبر هو لون المحلول، ويظهر تحليل القدرة أن عملية الإنتاج ككل قد أصبحت قادرة، حيث بلغت قيمة مؤشر القدرة المتعددة المتغيرات (MC_{PK}) 1,44. وعند النظر إلى كل متغير على حدة، لا يزال حجم الحبيبات ولون المحلول غير قادرين، وبالتالي فإن جودة المنتج فيما يتعلق بهذين المتغيرين لا تفي تماماً بمواصفات الشركة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kualitas merupakan salah satu indikator utama dalam menjamin daya saing suatu produk di tengah dinamika industri yang semakin kompetitif. Montgomery (2013) menyatakan bahwa kualitas memiliki hubungan erat dengan sejauh mana suatu produk dapat memenuhi fungsi atau tujuan penggunaannya, dan berperan penting dalam membentuk kecenderungan konsumen terhadap minat barang atau jasa tertentu. Oleh karena itu, pengawasan dan pengendalian mutu perlu dilakukan secara berkelanjutan agar kualitas produk tetap konsisten selama proses produksi berlangsung.

Menurut Herlina dkk. (2021), pengendalian dan pengawasan kualitas diperlukan untuk menjaga kestabilan mutu produk yang dihasilkan. Zacharias (2022) menambahkan bahwa pengendalian kualitas melibatkan serangkaian metode dan prosedur terstruktur seperti inspeksi, pengujian, penerapan teknik statistik, dan tindakan korektif berbasis data yang bertujuan untuk memastikan bahwa setiap produk yang dihasilkan sesuai dengan standar mutu yang telah ditetapkan.

Salah satu metode yang umum digunakan dalam pengendalian kualitas adalah pengendalian kualitas statistik. Pengendalian kualitas secara statistik (*statistical quality control*) merupakan metode pengendalian mutu dengan memanfaatkan teknik statistik untuk mengamati, menganalisis, dan mengendalikan kualitas produk atau jasa. Metode ini digunakan untuk mengevaluasi apakah suatu proses produksi terkendali secara statistik. Salah satu alat yang efektif dalam

pendekatan ini adalah grafik pengendali (*control chart*), yang tidak hanya dapat memantau kestabilan dan kemampuan proses dari waktu ke waktu, tetapi juga membantu dalam mengestimasi parameter penting untuk peningkatan mutu (Montgomery, 2013).

Dalam industri modern, pengendalian kualitas proses menjadi elemen penting untuk menjamin konsistensi mutu dan efisiensi produksi. Pendekatan pengendalian kualitas yang selama ini digunakan seperti *Seven Tools*, *Statistical Process Control (SPC)*, dan *Failure Mode and Effect Analysis (FMEA)* memang mampu mengidentifikasi penyebab cacat secara umum (Susetyo dkk., 2020), namun kurang sensitif untuk mendeteksi perubahan kecil yang bersifat sistematis atau autokorelasi antar variabel.

Grafik pengendali pertama kali diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart pada tahun 1924 sehingga dikenal dengan sebutan *Shewhart Control chart*. Grafik ini memantau apakah suatu proses produksi berada dalam kondisi terkendali. Namun, grafik ini cenderung kurang sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang relatif kecil karena hanya memanfaatkan informasi pada pengamatan terakhir. Sebagai alternatif, Roberts (1959) mengembangkan *Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart*, yang lebih mampu mendeteksi pergeseran kecil dalam rata-rata proses. Dalam penerapannya, terdapat dua jenis grafik pengendali, yaitu univariat dan multivariat. Untuk kasus multivariat, EWMA dikembangkan menjadi *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA)*.

Grafik *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA)* digunakan ketika data yang dianalisis terdapat beberapa variabel yang saling

berkorelasi. Keunggulan utama grafik ini adalah kemampuannya yang lebih sensitif dalam mendeteksi perubahan kecil pada proses, sehingga menjadi salah satu pilihan utama dalam pengendalian kualitas (Fahlevi dkk., 2020). Studi pendahuluan menggunakan grafik pengendali MEWMA pada proses produksi gula di PG Rajawali I, ditunjukkan bahwa adanya titik pengamatan yang keluar dari batas kendali (*out of control*) pada setiap pembobot λ mulai dari 0,1 sampai 0,9. Hasil ini membuktikan bahwa MEWMA cukup efektif dalam memantau rata-rata proses, tetapi belum mampu memberikan informasi lebih rinci mengenai apakah penyimpangan disebabkan oleh pergeseran rata-rata atau peningkatan varians. Padahal, varians parameter kualitas seperti kadar air (susutan pengeringan), besar jenis butir, dan warna larutan sangat menentukan kesesuaian produk dengan standar mutu (Fahlevi dkk., 2020).

Metode MEWMA kemudian dikembangkan menjadi Maximum MEWMA (Max-MEWMA), yaitu metode yang menghitung nilai maximum dari statistika rata-rata dan statistika variabilitas sehingga mampu mendeteksi penyimpangan proses dengan lebih cepat dan akurat, khususnya pada sistem kompleks yang melibatkan banyak variabel (Fachrizal, 2020). Selain itu, pergeseran variansi pada grafik pengendali Max-MEWMA dapat memengaruhi batas kendali pada grafik rata-rata. Dalam kondisi seperti ini, penggunaan grafik pengendali simultan menjadi lebih tepat, khususnya untuk data yang memiliki struktur subgrup. Karena data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data subgrup, maka grafik pengendali Max-MEWMA dipilih sebagai metode yang paling sesuai. Penggunaan grafik pengendali multivariat ini memungkinkan deteksi dini terhadap pergeseran proses yang disebabkan oleh faktor-faktor khusus, sehingga tindakan korektif dapat

segera dilakukan.

Penelitian yang dilakukan oleh (Ghashghaei & Amiri, 2017) mengevaluasi performa grafik pengendali Max-MEWMA dalam pemantauan simultan *mean* dan variansi kovariansisi pada *multivariate multiple linear regression profiles*. Berdasarkan hasil simulasi yang disajikan dalam artikel, Max-MEWMA menunjukkan kemampuan deteksi yang baik, terutama pada pergeseran yang terjadi pada elemen matriks variansi kovariansisi. Hal ini terlihat dari nilai *Average Run length* (ARL) yang lebih rendah pada berbagai skenario pergeseran, sehingga Max-MEWMA dapat memberikan respons yang lebih cepat terhadap perubahan kondisi proses. Dengan hasil tersebut, Max-MEWMA menjadi salah satu pendekatan yang efektif untuk diaplikasikan dalam pemantauan kualitas berbasis profil regresi multivariat.

Selanjutnya, Garcia dkk. (2019) melakukan penelitian mengenai pengendalian kualitas produk billet baja KS1008 di PT Krakatau Steel Cilegon dengan menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini mampu mendeteksi penyimpangan proses secara lebih cepat dan akurat dibandingkan metode konvensional. Penerapan grafik pengendali Max-MEWMA juga terbukti efektif dalam memantau stabilitas proses produksi serta mengidentifikasi faktor penyebab ketidaksesuaian produk, sehingga dapat digunakan sebagai alat bantu dalam upaya peningkatan kualitas produk baja

Penelitian yang dilakukan oleh Fachrizal (2020) menunjukkan bahwa penerapan Max-MEWMA mampu mendeteksi pergeseran proses produksi garam konsumsi di PT Garam secara efektif. Hasil penelitian tersebut mengungkap bahwa pada periode 2019 proses produksi relatif terkendali, meskipun kadar air menjadi

faktor utama yang menyebabkan kondisi *out of control*. Sementara itu, pada periode 2020 terdapat salah satu fase yang tidak terkendali dengan kadar garam sebagai penyebab dominan. Uji kapabilitas menunjukkan bahwa proses memiliki presisi yang baik namun belum mencapai tingkat akurasi yang memadai, sehingga secara keseluruhan produksi belum dikategorikan kapabel.

Metode Max-MEWMA digunakan karena mampu memantau perubahan rata-rata dan varians proses secara simultan pada data multivariat yang saling berkorelasi, serta lebih sensitif dalam mendeteksi penyimpangan kecil dibandingkan metode MEWMA biasa. Dengan karakteristik proses produksi gula yang kompleks dan melibatkan banyak variabel kualitas, Max-MEWMA menjadi metode yang paling tepat untuk memastikan proses produksi tetap stabil dan sesuai standar mutu.

Menurut Cahyaningtyas & Sugiyanto (2023) kemampuannya untuk memantau variabel secara simultan serta mengakomodasi autokorelasi menjadikannya alat yang relevan untuk industri yang mengandalkan konsistensi mutu secara ketat. Salah satu produk strategis yang sangat bergantung pada pengendalian kualitas adalah gula kristal putih (GKP). Produk ini tidak hanya menjadi komoditas penting untuk konsumsi masyarakat, tetapi juga memiliki peran strategis dalam mendukung ketahanan pangan nasional (Cahyaningtyas & Sugiyanto, 2023).

GKP atau gula pasir merupakan salah satu dari sembilan bahan pokok di Indonesia yang memiliki peran penting dalam perekonomian nasional. Permintaan gula pasir terus meningkat seiring pertumbuhan penduduk. Pada tahun 2023, kebutuhan gula nasional mencapai 6,8 juta ton, sementara produksi dalam negeri

hanya sekitar 2,7 juta ton. Hal ini menunjukkan adanya kesenjangan antara produksi dan kebutuhan, sehingga peningkatan kuantitas dan kualitas produksi menjadi tantangan besar. Kualitas gula kristal putih sangat dipengaruhi oleh tahapan produksi seperti pemurnian, pengkristalan, dan pengeringan.

Mutu gula diatur agar sesuai dengan Standar Nasional Indonesia (SNI), yang meliputi kadar air, besar jenis butir, serta warna larutan gula (ICUMSA). Mutu gula yang tidak memenuhi standar dapat menurunkan daya saing produk dan kepercayaan konsumen (Mahendra dkk., 2023). Menjaga kualitas produk pangan merupakan bentuk tanggung jawab moral dan spiritual, sebagaimana perintah Allah SWT dalam Al-Qur'an agar manusia senantiasa menjaga kesempurnaan dalam timbangan dan takaran, serta tidak merugikan orang lain dengan produk yang cacat atau tidak layak konsumsi.

Dalam Al-Qur'an Surah Asy-Syu'ara[26]: 181-183 menegaskan peringatan agar manusia selalu menjaga kejujuran, keadilan, dan tanggung jawab dalam kegiatan ekonomi dan produksi, termasuk dalam industri pangan. Allah SWT menekankan pentingnya menjaga akurasi dan integritas dalam proses pengukuran—baik dari sisi jumlah, berat, kadar, maupun kualitas. Kemudian, frasa *"janganlah kamu merugikan manusia mengurangi hak-haknya"* menunjukkan larangan tegas terhadap segala bentuk penipuan atau kelalaian dalam kualitas produk yang dapat merugikan masyarakat serta kerusakan yang disebut dalam ayat (*"wala ta'tsau fil-ardhi mufsidin"*) tidak hanya mencakup kerusakan lingkungan, tetapi juga mencakup kerusakan etika dan moral dalam proses produksi dan distribusi. Mengedarkan produk bermutu rendah, tidak sesuai takaran, atau berpotensi membahayakan konsumen, merupakan bentuk kerusakan yang

menurunkan kepercayaan masyarakat dan kerusakan tatanan ekonomi secara luas.

Di Indonesia, industri gula masih menghadapi tantangan besar dalam menjaga kualitas dan kuantitas produksi. Produksi nasional belum mampu memenuhi kebutuhan konsumsi masyarakat, sehingga Indonesia masih bergantung pada impor. Menurut Hartatie & Safira (2022), rendemen tebu yaitu kadar gula dalam batang tebu merupakan salah satu faktor penting penentu kualitas gula. Rendemen dipengaruhi oleh kondisi iklim, termasuk curah hujan. Curah hujan yang tinggi cenderung menurunkan rendemen, sehingga kualitas gula yang dihasilkan juga menurun. Selain itu, rendemen gula nasional masih lebih rendah dibanding negara pesaing seperti Thailand, yakni hanya sekitar 7% dibandingkan dengan 11,82% (Sholiha & Syaichu, 2019). Oleh karena itu, diperlukan peningkatan baik dari sisi budidaya tebu maupun pengolahan di pabrik gula.

PT Pabrik Gula Rajawali I unit Kribet Baru yang berlokasi di Kabupaten Malang, merupakan salah satu pabrik gula yang berperan penting dalam mendukung program swasembada gula nasional milik BUMN. Lokasi pabrik ini strategis karena didukung oleh ketersediaan bahan baku, tenaga kerja, dan infrastruktur memadai (Kristiyanti dkk., 2024). PT Pabrik Gula Rajawali I unit Kribet Baru memproduksi gula kristal putih dan juga menghasilkan produk samping seperti tetes, dengan proses produksi yang terdiri dari beberapa tahapan kompleks mulai dari penggilingan, pemurnian, hingga kristalisasi (Mahendra dkk., 2023).

Pabrik gula ini memiliki dua unit, yaitu Pabrik Gula Kribet Baru I dan Pabrik Gula Kribet Baru II. Perbedaan antara Pabrik Gula Kribet Baru I dan Pabrik Gula Kribet Baru II yaitu tahun berdirinya dan kapasitas tebu yang mampu digiling.

Berdasarkan penyampaian pegawai administrasi pabrik PG Krebet Baru I, berdiri pada tahun 1906 dengan kapasitas giling 6.500 ton per hari (*inclusive* JB) dan 6.700 ton per hari (*exclusive* JB). PG Krebet Baru II, berdiri pada tahun 1976 dengan kapasitas giling 5.800 ton per hari (*inclusive* JB) dan 6.000 ton per hari (*exclusive* JB).

Perusahaan ini melakukan pengendalian kualitas terhadap beberapa variabel karakteristik GKP, di antaranya kadar air, besar jenis butir, dan warna larutan gula (ICUMSA). Variabel-variabel ini saling memengaruhi, misalnya semakin rendah kadar air maka semakin baik kualitas kristal, yang ditandai dengan besar jenis butir yang lebih tinggi. Pengambilan sampel dilakukan setiap hari dan pengujian dilakukan di Laboratorium *Quality Assurance* (QA).

Pada penelitian ini akan dilakukan analisis terhadap data produksi tahun 2025. Metode yang digunakan adalah grafik pengendali Max-MEWMA, karena data yang dianalisis berbentuk subgrup dan melibatkan tiga variabel kualitas produk. grafik pengendali Max-MEWMA memiliki kepekaan yang tinggi dalam mendeteksi pergeseran proses kecil secara multivariat, sehingga dapat diketahui apakah proses produksi gula mengalami pergeseran atau tidak. Hasil analisis ini nantinya dapat dijadikan dasar untuk melakukan evaluasi guna mencapai proses produksi yang stabil dan sesuai dengan spesifikasi kualitas yang ditetapkan.

Setelah kondisi *out of control* berhasil dikendalikan dan proses berada dalam batas kendali, dilakukan analisis kapabilitas proses untuk menilai sejauh mana proses produksi gula mampu menghasilkan produk yang memenuhi standar yang telah ditetapkan (Montgomery, 2013). Analisis ini juga bertujuan untuk

meminimalkan produk cacat atau di luar spesifikasi di masa mendatang dengan cara mengurangi variabilitas dalam proses manufaktur.

Diharapkan hasil penelitian ini dapat berkontribusi sebagai upaya perbaikan berkelanjutan *continuous improvement* di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang, serta menjadi bahan pertimbangan dalam pengambilan keputusan terkait proses produksi dan pengendalian kualitas di perusahaan tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Bagaimana pengendalian kualitas proses produksi gula kristal putih di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang menggunakan metode grafik pengendali Max-MEWMA?
2. Bagaimana analisis kapabilitas proses pada proses produksi gula di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah

1. Menganalisis hasil implementasi metode grafik pengendali Max-MEWMA dalam pengendalian kualitas proses produksi gula kristal putih di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.
2. Menganalisis kapabilitas proses pada proses produksi gula di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian maka dapat diambil beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Mahasiswa

Mahasiswa memperoleh wawasan dan pengetahuan terkait penerapan grafik pengendali Max-MEWMA. Dan penelitian ini dapat meningkatkan daya saing mahasiswa di dunia kerja terutama pada bidang pengendalian kualitas atau sejenisnya.

2. Bagi Masyarakat

Masyarakat dapat menambah wawasan dan pengetahuan terkait pentingnya pengendalian kualitas dan kegunaan grafik pengendali Max-MEWMA serta masyarakat juga dapat mengetahui kualitas gula yang sesuai dengan Standar Nasional Indonesia (SNI).

3. Bagi Program Studi

Menjadi wawasan baru bagi program studi serta menjadi referensi untuk dilakukan penelitian lebih lanjut terkait metode Max-MEWMA dalam pengendalian kualitas.

4. Bagi Pabrik Gula PT PG Rajawali I

Memberikan kemudahan pihak PT PG Rajawali I Kabupaten Malang berupa metode statistik alternatif yang lebih efektif dalam mendeteksi penyimpangan proses produksi secara dini. Implementasi Max-MEWMA dapat membantu pihak pabrik dalam meningkatkan efisiensi proses produksi gula kristal putih.

1.5 Batasan Masalah

Batasan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini menganalisis kapabilitas proses pada proses produksi gula di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.
2. Parameter kualitas yang digunakan hanya 3 karakteristik kualitas, di antaranya susutan pengeringan (kadar air), besar jenis butir (BJB), dan warna larutan (ICUMSA).
3. Data yang digunakan adalah data kualitas mulai 23 Juli – 20 Oktober 2025 yang dibagi menjadi dua fase yaitu Fase I dari tanggal 23 Juli – 5 September 2025 dan Fase II dari 6 September – 20 Oktober 2025.
4. Nilai pembobot λ yang digunakan dalam penelitian ini sebesar 0,2.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Kualitas Produk

Kualitas produk merupakan faktor penting bagi keberlangsungan industri karena berhubungan langsung dengan kepuasan konsumen dan daya saing perusahaan. Menurut Wijaya (2023), kualitas produk adalah kemampuan produk untuk memenuhi atau melampaui harapan pelanggan. Hal ini sejalan dengan Montgomery (2013) yang menyatakan bahwa kualitas mencerminkan kesesuaian produk dengan kebutuhan pelanggan serta menjadi kunci dalam mempertahankan dan meningkatkan daya saing.

Montgomery (2013) juga menegaskan bahwa kualitas tidak hanya dinilai dari hasil akhir, tetapi dari sejauh mana proses produksi dapat dikendalikan untuk meminimalkan variasi. Fahlevi dkk. (2020) menambahkan bahwa kualitas mencakup berbagai aspek, seperti fisik (ukuran, bentuk, daya tahan), indra (rasa, aroma, tampilan), dan orientasi waktu (ketepatan distribusi dan umur simpan). Dengan demikian, kualitas produk merupakan kombinasi berbagai dimensi yang harus dijaga secara konsisten agar memberikan nilai tambah dan memperkuat reputasi perusahaan.

2.1.2 Pengendalian Kualitas

Pengendalian kualitas merupakan pendekatan sistematis untuk memastikan produk atau jasa memenuhi standar yang ditetapkan dan kebutuhan pelanggan. Menurut Montgomery (2013), pengendalian kualitas berfungsi menjaga

konsistensi proses produksi melalui pemantauan, evaluasi, dan perbaikan berkelanjutan, dengan fokus utama pada pengurangan variasi yang menjadi penyebab utama penurunan mutu.

Salah satu metode yang umum digunakan ialah *Statistical Process Control* (SPC), yaitu pendekatan berbasis data untuk memantau kestabilan proses dan mendeteksi penyimpangan secara dini agar tindakan korektif dapat segera dilakukan. Montgomery (2013) membedakan dua jenis variasi dalam proses yakni *common causes* (fluktuasi alami sistem) dan *assignable causes* (faktor khusus seperti kesalahan operator atau kerusakan peralatan). Tujuan pengendalian kualitas adalah mempertahankan proses hanya dengan *common causes* serta segera mengidentifikasi dan menghilangkan *assignable causes* bila muncul.

Dalam praktik industri, Montgomery (2013) memperkenalkan tujuh alat pengendalian kualitas (*seven quality control tools*). Salah satu dari tujuh alat yang utama digunakan yaitu grafik pengendali (*control chart*) berfungsi untuk memantau apakah proses berada dalam kondisi *in control* atau *out of control*. Grafik ini memiliki batas kendali atas (*Upper Control Limit*, UCL) dan batas kendali bawah (*Lower Control Limit*, LCL). Proses dikatakan terkendali bila seluruh titik pengamatan berada di antara kedua batas tersebut. Sebaliknya, titik yang berada di luar batas kendali menandakan adanya *assignable causes* yang perlu segera ditelusuri.

Grafik pengendali menjadi alat efektif untuk menjaga mutu karena mampu membedakan variasi yang wajar dan tidak wajar. Dengan demikian, penggunaannya tidak hanya memastikan konsistensi kualitas produk, tetapi juga mencegah cacat dalam jumlah besar melalui deteksi dini terhadap penyimpangan

proses Montgomery (2013). Kemudian dapat diambil tindakan perbaikan yang sesuai apabila terdapat perbedaan atau penyimpangan antara hasil yang sebenarnya dengan standar (Andini dkk., 2021).

2.1.3 Statistika Multivariat

Statistika multivariat adalah cabang ilmu statistika yang mempelajari analisis dan interpretasi data yang memiliki lebih dari satu variabel terikat secara simultan (Irsyad dkk., 2020) . Teknik analisis statistik yang memperlakukan sekelompok variabel kriteria yang saling berkorelasi sebagai suatu sistem dengan memperhitungkan korelasi antar variabel-variabel tersebut disebut metode statistika multivariat. Struktur data multivariat ditunjukkan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Struktur Data Multivariat Berupa Subgrup ($n > 1$)

Pengamatan ke-	Sampel ke-	Variabel ke-			
		1	2	...	p
1	1	$X_{1,1,1}$	$X_{1,1,2}$	...	$X_{1,1,p}$
	2	$X_{1,2,1}$	$X_{1,2,2}$	...	$X_{1,2,p}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	$X_{1,n,1}$	$X_{1,n,2}$	...	$X_{1,n,p}$
	Rata-rata ke- i	$\bar{X}_{1,1}$	$\bar{X}_{1,2}$	...	$\bar{X}_{1,p}$
2	1	$X_{2,1,1}$	$X_{2,1,2}$	...	$X_{2,1,p}$
	2	$X_{2,2,1}$	$X_{2,2,2}$	...	$X_{2,2,p}$
	$\vdots$	$\vdots$	...	$\ddots$	$\vdots$
	n	$X_{2,n,1}$	$X_{2,n,2}$	...	$X_{2,n,p}$
	Rata-rata ke-2	$\bar{X}_{2,1}$	$\bar{X}_{2,2}$	...	$\bar{X}_{2,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	1	$X_{m,1,1}$	$X_{m,1,2}$	...	$X_{m,1,p}$
	2	$X_{m,2,1}$	$X_{m,2,2}$	...	$X_{m,1,1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	$X_{m,n,1}$	$X_{m,n,2}$	...	$X_{m,n,p}$
	Rata-rata ke- m	$\bar{X}_{m,1}$	$\bar{X}_{m,2}$	...	$\bar{X}_{m,p}$
Rata-rata keseluruhan		$\bar{\bar{X}}_1$	$\bar{\bar{X}}_2$	...	$\bar{\bar{X}}_p$

dengan $X_{i,k,j}$ merupakan pengamatan ke- i pada sampel ke- k dan variabel ke- j ,

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, p$. Rata-rata data

pengamatan ke- i dari variabel ke- j dinyatakan dengan

$$\bar{X}_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k,j} \quad (2.1)$$

rata-rata keseluruhan dari pengamatan ke- i untuk variabel ke- j dinyatakan dengan

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_{ij} \quad (2.2)$$

vektor pengamatan ke- i pada sampel ke- k dinyatakan dengan

$$\mathbf{X}_{i,k} = (X_{i,k,1}, X_{i,k,2}, \dots, X_{i,k,p})' \quad (2.3)$$

vektor rata-rata perpengamatan dinyatakan dengan

$$\bar{\mathbf{X}}_i = (\bar{X}_{i,1}, \bar{X}_{i,2}, \dots, \bar{X}_{i,p})' \quad (2.4)$$

vektor rata-rata keseluruhan dinyatakan dengan

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}} = (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2, \dots, \bar{\bar{X}}_p)' \quad (2.5)$$

matriks variansi kovariansisi pada pengamatan ke- i dinyatakan dengan

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{i,11} & \mathbf{S}_{i,12} & \cdots & \mathbf{S}_{i,1p} \\ \mathbf{S}_{i,21} & \mathbf{S}_{i,22} & \cdots & \mathbf{S}_{i,2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{i,p1} & \mathbf{S}_{i,p2} & \cdots & \mathbf{S}_{i,pp} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

dengan $S_{i,jl}$ didefinisikan

$$S_{i,jl} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l}), j, l = 1, 2, \dots, p \quad (2.7)$$

rata-rata matriks kovariansisi dinyatakan dengan

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \quad (2.8)$$

2.1.4 Uji Normalitas Multivariat

Distribusi normal adalah salah satu jenis distribusi yang sering digunakan sebagai asumsi dalam berbagai metode statistika. Distribusi normal multivariat digunakan untuk menguji apakah data multivariat memenuhi asumsi normalitas, yang merupakan perluasan dari distribusi normal univariat. Uji normalitas multivariat ini berfungsi untuk memastikan bahwa seluruh variabel dalam data pengamatan mengikuti distribusi normal (Arinda, 2016). Secara matematis, distribusi normal p-variat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ dan matriks kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$ memiliki fungsi kepadatan peluang (Montgomery, 2013b).

$$f(x_{i,k}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_{i,k} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (x_{i,k} - \boldsymbol{\mu})} \quad (2.9)$$

dengan

$\boldsymbol{\mu}$: Vektor rata-rata dari distribusi normal p-variat

$\boldsymbol{\Sigma}$: Matriks kovariansi dari distribusi normal p-variat

Hipotesis dari data multivariat untuk pengujian normalitas multivariat adalah:

$\mathbf{H}_0$: Vektor pengamatan berdistribusi normal multivariat

$\mathbf{H}_1$: Vektor pengamatan tidak berdistribusi normal multivariat

Pada penelitian ini menggunakan statistik uji normalitas multivariat yang biasa digunakan dengan jarak Mahalanobis D_i^2 . Jarak Mahalanobis memiliki keunggulan karena memperhitungkan perbedaan skalar antar variabel dan hubungan korelasi antar variabel (Frangkamon dkk., 2019). Sehingga jarak kuadrat Mahalanobis memberikan ukuran yang lebih akurat mengenai seberapa jauh pengamatan menyimpang dari pusat data (Johnson & Wichern, 2007). Perhitungan jarak mahalanobis dilakukan dengan setiap Pengamatan terhadap

rata-rata data, menggunakan persamaan:

$$D_i^2 = (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\bar{\mathbf{X}}})' \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\bar{\mathbf{X}}}) \quad (2.10)$$

dengan $\bar{\mathbf{X}}_i$ merupakan rata-rata pengamatan ke- i dan $\bar{\bar{\mathbf{X}}}$ merupakan vektor rata-rata keseluruhan dan $(\bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\bar{\mathbf{X}}})'$ merupakan vektor *transpose* nilai rata-rata pengamatan yang dikurangi vektor rata-rata keseluruhan. Matriks $\bar{\mathbf{S}}^{-1}$ merupakan invers rata-rata kovariansi $\mathbf{S}$ berukuran $\mathbf{p} \times \mathbf{p}$ dengan setiap elemen dapat diperoleh dari Persamaan 2.7. Apabila banyaknya nilai D_i^2 lebih kecil dari kuartil $\chi_{\alpha, df}^2$ dengan banyaknya data kurang dari 50%, maka dapat disimpulkan bahwa data memenuhi asumsi distribusi normal multivariat (Andini dkk., 2021). Dengan α adalah tingkat signifikansi dan df adalah derajat kebebasan.

2.1.5 Uji Asumsi Korelasi

Uji korelasi merupakan metode statistik yang digunakan untuk mengetahui ada atau tidaknya hubungan antar variabel serta seberapa kuat hubungan tersebut. Analisis ini penting karena dapat menunjukkan keterkaitan antar variabel yang diamati sehingga penulis dapat memahami pola data sebelum melakukan pengujian lebih lanjut. Dalam penelitian ini, uji korelasi diterapkan untuk melihat hubungan antara kadar air, besar jenis butir, dan warna larutan gula. Hubungan ketiga variabel tersebut diuji menggunakan *Bartlett's Test* untuk mengetahui korelasi data dengan lebih dari dua variabel. Berikut ialah hipotesis pada uji *Bartlett*

H₀: $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (tidak terdapat korelasi antar variabel)

H₁: $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (terdapat korelasi antar variabel)

Statistik uji yang digunakan pada uji Bartlett berada Persamaan (2.11) (Bartlett,

1951).

$$\chi^2_{hitung} = -(M - 1 - \frac{2p + 5}{6}) \ln|R| \quad (2.11)$$

dengan

$$M = n \times m \quad (2.12)$$

di mana,

M : Jumlah total pengamatan

m : Banyaknya pengamatan berupa subgroup,

n : *Sampel size*,

p : Banyaknya karakteristik kualitas,

R : Matriks korelasi dari p -variabel,

$|R|$: Determinan matriks korelasi R ,

I : Matriks identitas berukuran $p \times p$.

R adalah matriks korelasi antarvariabel dengan

Maka $\chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}$ adalah nilai quartil dari distribusi *chi-square* dengan tingkat

kepercayaan sebesar α dan derajat bebas sebesar $\frac{1}{2}p(p-1)$. Keputusannya : H_0

ditolak jika nilai $\chi^2_{hitung} \geq \chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}$.

2.1.6 Grafik Pengendali Max-MEWMA

Grafik pengendali Max-MEWMA merupakan pengembangan dari grafik pengendali MEWMA yang digunakan untuk mendeteksi variasi kecil maupun besar pada proses produksi multivariat. Keunggulan utama grafik pengendali ini adalah kemampuannya dalam meningkatkan sensitivitas terhadap perubahan parameter proses, khususnya ketika terjadi pergeseran *mean* pada salah satu atau beberapa variabel kualitas.

Pada grafik pengendali ini, misalkan suatu proses terdiri dari p karakteristik kualitas yang dilambangkan $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$, dengan $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan $\mathbf{X}_{i,k} = (X_{i,k,1}, X_{i,k,2}, \dots, X_{i,k,p})'$ adalah peubah acak yang diperoleh dari pengamatan ke- i , sampel ke- k dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $k = 1, 2, \dots, n$ yang dibuat dari proses. Misalkan $\boldsymbol{\mu}_0$ adalah vektor rata-rata dan $\boldsymbol{\Sigma}_0$ adalah matriks kovariansi dalam keadaan terkendali. Asumsikan bahwa vektor acak $\mathbf{X}_{i,k}$ saling bebas satu sama lain, baik dalam pengamatan dan antar pengamatan. Maka didefinisikan statistik untuk memantau rata-rata dan variabilitas proses sebagai berikut:

1. Statistik untuk Memantau Rata-Rata Proses

Misalkan $\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_{i,k}$ menjadi vektor rata-rata ke- i dan didefinisikan

$$\mathbf{Z}_i = (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{i-1} + \lambda(\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \quad (2.13)$$

dengan $\mathbf{Z}_0$ merupakan titik awal, $\boldsymbol{\mu}_0$ merupakan vektor rata-rata sampel total dalam keadaan terkendali dan λ adalah *smoothing* parameter yang bernilai $0 \leq \lambda \leq 1$. Parameter pembobot λ pada grafik MEWMA dipilih berdasarkan literatur Chen dkk. (2005) yang menggunakan beberapa kandidat nilai $\lambda \in \{0,05; 0,10; 0,20; 0,30; 0,60; 0,80; 1,00\}$. Dalam penelitian ini menggunakan $\lambda = 0,2$ karena nilai tersebut termasuk dalam rentang parameter yang digunakan dalam Chen dkk. (2005) serta mewakili kategori pembobot kecil. Pembobot yang relatif kecil diketahui lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran kecil pada proses, sehingga sesuai dengan tujuan pengendalian kualitas. Selain itu, penelitian ini bersifat aplikasi, sehingga digunakan satu nilai pembobot yang representatif dari literatur tanpa melakukan pengujian terhadap berbagai nilai λ . Serta dalam penelitian

Chen dkk. (2005), tidak diberikan kriteria baku dalam menentukan nilai pembobot λ yang optimal. Selanjutnya ketika $\mathbf{Z}_0 = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0$ maka

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{Z}_i) &= (1 - \lambda)^i E(\mathbf{Z}_0) + \lambda \sum_{q=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} E(\bar{\mathbf{X}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \\
 &= (1 - \lambda)^i (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) + \lambda \sum_{q=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \\
 &= (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) [(1 - \lambda)^i + 1 - (1 - \lambda)^i] \\
 &= (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \times 1 \\
 &= \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

dan

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i} = \frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{n(2 - \lambda)} \boldsymbol{\Sigma}. \tag{2.15}$$

Pada metode Max-MEWMA, statistik yang digunakan untuk memantau pergeseran vektor rata-rata proses adalah statistik MEWMA multivariat $\mathbf{Z}_i$. Statistik ini didefinisikan sebagai kombinasi linier antara statistik sebelumnya dan selisih antara rata-rata sampel dengan vektor rata-rata target, sehingga $\mathbf{Z}_i$ masih berbentuk vektor berdimensi p . Secara teoritis, ketika proses berada dalam kondisi terkendali, $\mathbf{Z}_i$ berdistribusi normal multivariat, yaitu

$$\mathbf{Z}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}) \tag{2.16}$$

dengan $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ merupakan matriks kovariansi dari $\mathbf{Z}_i$. Namun, karena vektor tidak dapat diplot secara langsung pada grafik pengendali satu dimensi, maka diperlukan transformasi dari statistik multivariat $\mathbf{Z}_i$ menjadi statistik skalar (*univariat*). Transformasi ini dilakukan menggunakan bentuk

kuadratik yang mempertimbangkan struktur kovariansi antar variabel, yaitu

$$\begin{aligned}
 T_i &= \mathbf{Z}_i' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}^{-1} \mathbf{Z}_i \\
 &= \mathbf{Z}_i' \left(\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{n(2 - \lambda)} \boldsymbol{\Sigma} \right)^{-1} \mathbf{Z}_i \\
 &= \mathbf{Z}_i' \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_i \\
 &= \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \mathbf{Z}_i' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_i.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Bentuk kuadratik tersebut mengukur jarak Mahalanobis antara $\mathbf{Z}_i$ dan titik nol, sehingga mampu merangkum informasi seluruh variabel kualitas dalam satu nilai skalar. T_i mengikuti distribusi *chi-square non-sentral*, yaitu

$$T_i \sim \chi_{p, \delta^2}^2. \tag{2.18}$$

Dengan derajat kebebasan sebesar p dan *parameter non-sentral*

$$\delta^2 = \left\{ \frac{n}{2-\lambda} \left[\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}] \right] \right\} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0). \tag{2.19}$$

Selanjutnya, agar statistik tersebut dapat dibandingkan dengan batas kendali berbasis distribusi normal standar, dilakukan transformasi lanjutan menggunakan fungsi distribusi kumulatif *chi-square* $H_p(\cdot)$ dan fungsi invers distribusi normal standar $\Phi^{-1}(\cdot)$. Statistik pemantau vektor rata-rata proses kemudian didefinisikan sebagai

$$U_i = \Phi^{-1} \left[H_p \left\{ \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \mathbf{Z}_i' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{Z}_i \right\} \right]. \tag{2.20}$$

Melalui tahapan ini, statistik multivariat $\mathbf{Z}_i$ berhasil ditransformasikan menjadi statistik univariat U_i yang mengikuti distribusi normal standar ketika proses berada dalam kondisi terkendali. Transformasi ini

memungkinkan statistik tersebut dipetakan pada grafik pengendali satu dimensi, sehingga perubahan kecil pada vektor rata-rata proses dapat dideteksi secara efektif.

2. Statistik untuk Memantau Variabilitas Proses

Dalam grafik pengendali Max-MEWMA, pemantauan variabilitas proses dilakukan melalui beberapa tahapan statistik, dimulai dari statistik W_i , kemudian ditransformasikan menjadi Y_i , dan selanjutnya distandarisasi menjadi V_i . Statistik W_i didefinisikan sebagai

$$W_i = \sum_{k=1}^n (\mathbf{X}_{i,k} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{X}_{i,k} - \bar{\mathbf{X}}_i). \quad (2.21)$$

Statistik W_i digunakan untuk menangkap perubahan pada matriks kovariansi proses. Ketika proses berada dalam kondisi terkendali, yaitu $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$, statistik W_i mengikuti distribusi *chi-square* dengan derajat kebebasan $p(n-1)$. Karena W_i masih berskala multivariat dan tidak dapat digunakan secara langsung pada grafik pengendali univariat, maka dilakukan transformasi menggunakan fungsi distribusi kumulatif *chi-square* $H_{p(n-1)}(.)$ yang diikuti oleh fungsi invers distribusi normal standar. Transformasi ini menghasilkan statistik

$$Y_i = (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda\Phi^{-1}\{H_{p(n-1)}(W_i)\} \quad (2.22)$$

dengan Y_0 merupakan titik awal dan λ merupakan *smoothing* parameter yang bernilai $0 \leq \lambda \leq 1$. Statistik Y_i merupakan statistik EWMA yang menggabungkan informasi historis dan pengamatan terbaru, sehingga lebih sensitif terhadap perubahan kecil pada variabilitas proses. Ketika variabilitas proses dalam keadaan terkendali ($\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$) dan $Y_0 = 0$, maka diperoleh

$$E(Y_i) = 0 \quad (2.23)$$

kemudian $Var(Y_i)$ dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Var(Y_i) &= (1 - \lambda)^2 Var(Y_{i-1}) \\ &\quad + \lambda^2 Var(\Phi^{-1}\{H_{p(n-1)}(W_i)\}) \\ &= (1 - \lambda)^2 Var(Y_{i-1}) + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{k=0}^{i-1} (1 - \lambda)^{2k} \\ &= \lambda^2 \frac{1 - (1 - \lambda)^{2i}}{1 - (1 - \lambda)^2} \\ &= \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Selanjutnya, untuk memperoleh statistik dengan skala baku, Y_i ditransformasi menggunakan varians asimtotiknya. Statistik tertransformasi untuk memantau variabilitas proses didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{Y_i - E(Y_i)}{\sqrt{Var(Y_i)}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \lambda}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}} Y_i, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$V_i \sim N(0,1).$$

Dalam kondisi proses terkendali, yaitu $\Sigma = \Sigma_0$, dan $Y_0 = 0$, statistik V_i mengikuti distribusi normal standar.

Dalam hal ini U_i dan V_i merupakan peubah acak saling bebas. Ketika $\mu = \mu_0$, $\Sigma = \Sigma_0$, $Z_0 = \mathbf{0}$, dan $Y_0 = 0$, maka U_i dan V_i keduanya mengikuti distribusi normal standar. Berdasarkan pada U_i dan V_i didefinisikan statistik baru untuk multivariat *single chart* yaitu

$$M_i = \max\{|U_i|, |V_i|\}. \quad (2.26)$$

Karena M_i merupakan maksimum dari $|U_i|$ dan $|V_i|$, yaitu nilai pembobot absolut dari dua statistik *Multivariate Exponential Weighted Moving Average* (MEWMA), maka grafik pengendali Max-MEWMA disebut grafik pengendali baru (Chen dkk., 2005). Nilai M_i yang besar untuk grafik pengendali Max-MEWMA menunjukkan bahwa vektor rata-rata proses dan atau matriks kovariansi telah bergeser dari μ_0 dan atau variabilitas proses berupa matriks kovariansi telah bergeser dari Σ_0 . Sebaliknya nilai M_i yang kecil menyiratkan bahwa vektor rata-rata dan variabilitas proses tetap dekat ke nilai μ_0 dan Σ_0 .

Karena U_i dan V_i saling bebas mengikuti distribusi normal standar. Dalam kondisi proses terkendali yaitu $\mu = \mu_0$ dan $\Sigma = \Sigma_0$, maka *cumulative Distribution Function* (CDF) dari M_i adalah

$$\begin{aligned} F(y|\mu_0, \Sigma_0) &= P(M_i \leq y | \mu = \mu_0, \Sigma = \Sigma_0) \\ &= P(|U_i| \leq y, |V_i| \leq y). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Karena U_i dan V_i saling bebas, maka

$$F(y|\mu_0, \Sigma_0) = P(|U_i| \leq y)P(|V_i| \leq y). \quad (2.28)$$

Selanjutnya, karena U_i dan V_i masing-masing berdistribusi normal standar $N(0,1)$, maka

$$P(|U_i| \leq y) = P(-y \leq U_i \leq y) \quad (2.29)$$

dengan menggunakan fungsi distribusi kumulatif normal standar $\Phi(\cdot)$, diperoleh

$$P(-y \leq U_i \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y) \quad (2.30)$$

karena distribusi normal standar bersifat simetris terhadap nol, maka

$$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y) \quad (2.31)$$

sehingga

$$P(|U_i| \leq y) = \Phi(y) - [1 - \Phi(y)] = 2\Phi(y) - 1 \quad (2.32)$$

dengan cara yang sama

$$P(|V_i| \leq y) = 2\Phi(y) - 1 \quad (2.33)$$

oleh karena itu

$$\begin{aligned} F(y|\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= P(|U_i| \leq y)P(|V_i| \leq y) \\ &= (2\Phi(y) - 1)(2\Phi(y) - 1) \\ &= [2\Phi(y) - 1]^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

didefinisikan fungsi distribusi kumulatif normal standar $\Phi(\cdot)$, sebagai berikut:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.35)$$

Selanjutnya, fungsi densitas peluang atau disebut *probability density function* (PDF) dari M_i diperoleh dengan menurunkan fungsi distribusi kumulatif terhadap y , yaitu

$$\begin{aligned} f(y|\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= \frac{d}{dy} F(y|\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) \\ &= \frac{d}{dy} [2\Phi(y) - 1]^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

dengan menggunakan aturan rantai (*chain rule*), diperoleh

$$f(y|\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) = 2[2\Phi(y) - 1] \frac{d}{dy} [2\Phi(y) - 1]. \quad (2.37)$$

Karena $\Phi(y)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif normal standar, maka turunannya adalah fungsi densitas peluang (*probability densitas function*) normal standar $\phi(y)$

$$\frac{d}{dy} \left[\int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] = f(y) \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dy}\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{d}{dy}\Phi(y) = \phi(y)$$

$$\frac{d}{dy}[2\Phi(y) - 1] = 2\phi(y)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 2.38 ke Persamaan 2.32 diperoleh

$$\begin{aligned} f(y|\mu_0, \Sigma_0) &= \frac{d}{dy}[2\Phi(y) - 1]^2 \\ &= 2[2\Phi(y) - 1] \frac{d}{dy}[2\Phi(y) - 1] \\ &= 2[2\Phi(y) - 1][2\phi(y)] \\ &= 4\phi(y)[2\Phi(y) - 1], \quad y \geq 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Karena M_i bernilai *non-negative*, maka batas kendali grafik pengendali Max-MEWMA hanya ditentukan oleh UCL (h). Dalam hal ini UCL dari grafik pengendali Max-MEWMA adalah

$$\begin{aligned} UCL &= E(M_i) + L\sqrt{Var(M_i)} \\ &= 1,128379 + 0,602811L \end{aligned} \tag{2.40}$$

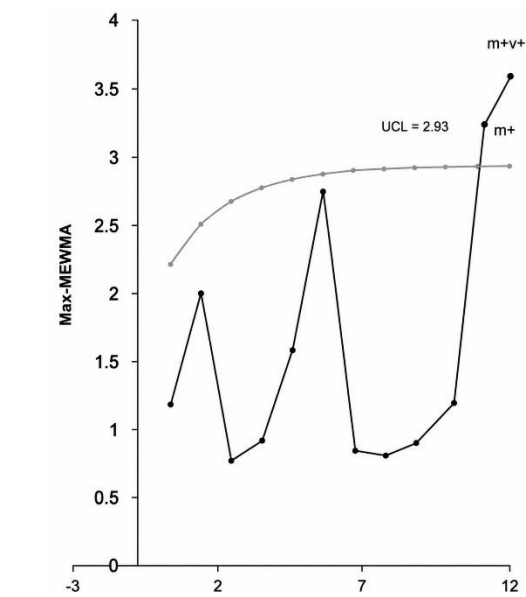
yang secara numerik dinyatakan sebagai berikut

$$UCL = 1,128379 + 0,602811L \tag{2.41}$$

dimana $E(M_i)$ dan $L\sqrt{Var(M_i)}$ diperoleh secara numerik berdasarkan hasil penelitian Chen dkk. Untuk kasus jumlah variabel $p = 3$ dan ukuran $n = 2$. Parameter L merupakan konstanta pengendalian yang digunakan bersama pembobot λ untuk mengatur kinerja grafik pengendali (Chen dkk., 2005).

Dalam penelitian ini digunakan nilai *Average Run Length* (ARL) *in-control* sebesar 200, mengacu pada pendekatan yang digunakan dalam Chen dkk. (2005). Nilai ARL tersebut digunakan sebagai target dalam penentuan parameter desain grafik pengendali, sehingga kombinasi nilai λ dan L dipilih agar menghasilkan ARL *in-control* sebesar 200. Nilai ini menunjukkan bahwa ketika proses berada dalam kondisi terkendali, sinyal ketidakterkendalian secara rata-rata akan muncul setelah 200 pengamatan. Dalam penelitian ini, satu pengamatan merepresentasikan satu subgrup per hari, sehingga secara rata-rata sinyal tersebut akan muncul setelah sekitar 200 hari pengamatan.

Statistik pengendali Max-MEWMA dinyatakan sebagai M_i , dan grafik pengendali hanya memiliki batas kendali atas (*Upper Control Limit*, UCL) dengan nilai $UCL > 0$. Apabila $M_i \geq UCL$, maka grafik pengendali memberikan sinyal bahwa proses berada di luar kendali (*out of control*). Sebaliknya, apabila $M_i < UCL$, maka proses dianggap masih berada dalam kondisi terkendali. Berikut contoh grafik pengendali Max-MEWMA (Chen dkk., 2005b).



Gambar 2.1 Ilustrasi Grafik Max-MEWMA
(Sumber: Chen dkk., 2005)

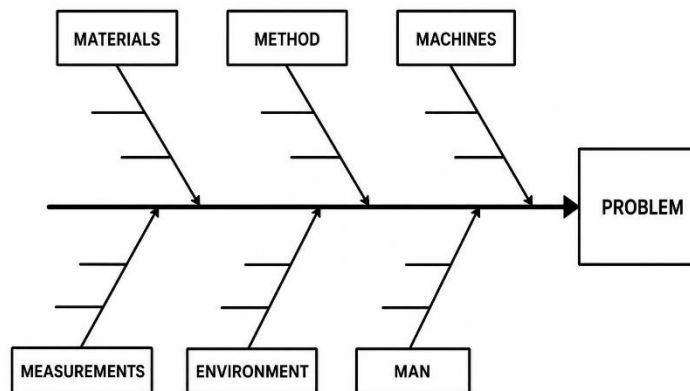
2.1.7 Diagram *Ishikawa*

Diagram sebab akibat (*ishikawa*) atau yang juga dikenal dengan sebutan *fishbone diagram* (diagram tulang ikan) adalah salah satu metode dalam meningkatkan kualitas. Diagram sebab akibat merupakan alat yang digunakan untuk mengidentifikasi, memilih, dan menampilkan berbagai akar permasalahan suatu masalah dengan membangkitkan ide-ide yang menggambarkan hubungan antara masalah dengan faktor-faktor penyebab yang dapat memengaruhi adanya masalah tersebut, sehingga dapat memudahkan penulis untuk mengatasinya (Heizer, J., & Render, 2011). Diagram ini pertama kali diperkenalkan oleh Kaoru Ishikawa pada tahun 1960-an sebagai bagian dari sistem pengendalian kualitas di industri manufaktur Jepang.

Diagram *ishikawa* terdiri dari 6 bagian yang dikenal dengan 5M+1E yaitu *methode, machine, men, measurement, material*, dan *environment* (Heizer, J., & Render, 2011). Keenam kategori tersebut digambarkan sebagai tulang yang mengarah ke kepala ikan, di mana kepala ikan merepresentasikan masalah atau efek yang sedang dianalisis. Kategori *Man* mencakup faktor sumber daya manusia seperti keterampilan, ketelitian, dan kepatuhan terhadap prosedur. Kategori *Machine* mencakup kondisi dan kinerja peralatan produksi. Kategori *Method* mencakup prosedur dan teknik yang diterapkan dalam proses produksi. Kategori *Measurement* mencakup akurasi dan konsistensi alat serta metode pengukuran. Kategori *Material* mencakup kualitas bahan baku yang digunakan. Sedangkan kategori *Environment* mencakup kondisi lingkungan sekitar yang dapat memengaruhi jalannya proses produksi.

Dalam pengendalian kualitas statistik, diagram *ishikawa* berfungsi sebagai

alat diagnostik yang melengkapi grafik pengendali. Montgomery (2013) menyatakan bahwa diagram sebab-akibat merupakan salah satu dari tujuh alat pengendalian kualitas (*seven quality tools*) yang penting dalam proses perbaikan berkelanjutan (*continuous improvement*). Apabila grafik pengendali mendeteksi adanya kondisi *out of control*, diagram *ishikawa* digunakan untuk menelusuri dan mengidentifikasi faktor-faktor penyebab penyimpangan proses secara terstruktur.



Gambar 2.2 Diagram Ishikawa
(Sumber: Montgomery, 2013)

2.1.8 Kapabilitas Proses

Analisis kapabilitas proses digunakan untuk mengukur kemampuan suatu proses dalam menghasilkan produk sesuai dengan spesifikasi yang ditetapkan (Montgomery, 2013b). Indeks kapabilitas multivariat dapat dihitung berdasarkan rata-rata tertimbang karakteristik mutu, yaitu (Pan dkk., 2016):

$$MC_{pk} = \sum_{j=1}^p w_j C_{pk}(X_j), j = 1, 2, \dots, p \quad (2.42)$$

dengan w_j adalah bobot tiap variabel mutu dengan $\sum_{j=1}^p w_j = 1$, dan p adalah jumlah karakteristik mutu. Indeks $C_p(X_j)$ dan $C_{pk}(X_j)$ untuk tiap karakteristik dihitung sebagai:

$$C_{pk}(X_j) = \min\left(\frac{USL_j - \bar{X}_j}{3S_j}, \frac{\bar{X}_j - LSL_j}{3S_j}\right) \quad (2.43)$$

dengan

USL_j : Batas spesifikasi atas karakteristik ke- j

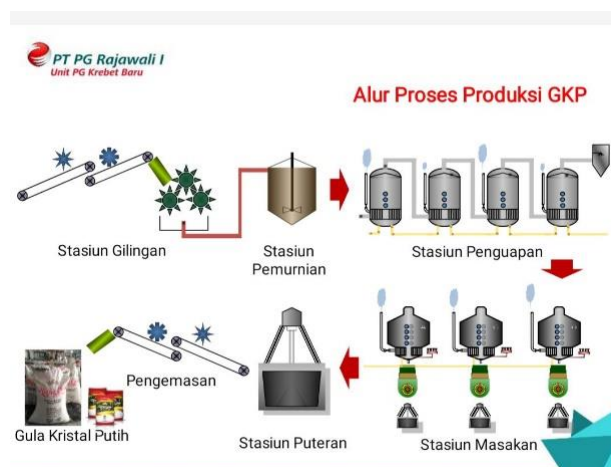
LSL_j : Batas spesifikasi bawah karakteristik ke- j

$\bar{X}_j$: Rata-rata karakteristik ke- j

S_j : Standar deviasi ke- j

Dalam analisis kapabilitas proses, idealnya digunakan dua batas spesifikasi, yaitu batas atas (*Upper Specification Limit/USL*) dan batas bawah (*Lower Specification Limit/LSL*). Namun, pada kondisi tertentu hanya tersedia satu batas spesifikasi saja, sehingga analisis kapabilitas dilakukan menggunakan batas yang diketahui tersebut (kapabilitas satu sisi). Jika hanya terdapat USL, maka indeks kapabilitas yang digunakan berfokus pada kemampuan proses agar tidak melebihi batas atas. Sebaliknya, jika hanya terdapat LSL, maka analisis difokuskan agar proses tidak berada di bawah batas tersebut.

2.1.9 Proses Produksi Gula pada PT PG Rajawali I Kabupaten Malang



Gambar 2.3 Proses Produksi Gula Di PT Pabrik Gula Rajawali I

Proses pembuatan gula kristal putih (GKP) di PT PG Rajawali I Unit PG Krebet Baru dimulai dari stasiun gilingan, di mana tebu digiling untuk memisahkan nira dari ampasnya. Nira hasil gilingan kemudian masuk ke stasiun pemurnian untuk dibersihkan dari kotoran dan zat pengotor. Setelah itu, nira murni diproses di stasiun penguapan, di mana air dalam nira diuapkan hingga terbentuk nira kental. Nira kental ini kemudian dipindahkan ke stasiun masakan, tempat nira dimasak hingga terbentuk kristal gula. Selanjutnya, kristal gula dipisahkan dari larutan menggunakan stasiun puteran (*centrifuge*). Gula yang sudah kering kemudian dikemas di stasiun pengemasan menjadi produk akhir berupa gula kristal putih siap edar.

2.1.10 Parameter Kualitas Gula

Kualitas merupakan karakteristik keseluruhan dari suatu produk atau jasa yang berkaitan dengan kemampuannya untuk memenuhi kebutuhan pelanggan (Gaspersz, 2005 dalam Susetyo dkk., 2020). Dalam konteks industri, kualitas berpengaruh terhadap daya saing, efisiensi, dan reputasi perusahaan. Pengendalian kualitas adalah aktivitas untuk menjamin bahwa produk yang dihasilkan sesuai dengan spesifikasi yang telah ditetapkan. Tujuan utamanya adalah untuk meminimalkan produk cacat, mempertahankan stabilitas proses, serta meningkatkan kepuasan pelanggan (Susetyo dkk., 2020).

Gula kristal putih (GKP) adalah hasil pemurnian tebu melalui proses seperti sulfitasi, karbonatasi, atau metode lain, sehingga siap dikonsumsi. Permintaan GKP di Indonesia terus meningkat seiring pertumbuhan konsumsi masyarakat dan kebutuhan industri, sehingga pabrik gula dituntut meningkatkan kapasitas

produksi mereka. Namun, peningkatan volume ini harus disertai dengan peningkatan mutu untuk memastikan produk tetap memenuhi standar kualitas.

Dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), kualitas menggambarkan seberapa baik atau buruk suatu produk. Secara khusus kualitas diartikan sebagai tingkat kesesuaian antara karakteristik produk dengan spesifikasi atau standar yang telah ditetapkan. Artinya pengendalian mutu tidak hanya berfokus pada kuantitas, tetapi juga pada kemampuan produk memenuhi parameter mutu seperti kadar air, besar jenis butir, dan warna larutan (ICUMSA).

Berdasarkan Standar Nasional Indonesia (SNI) tahun 2010, gula kristal putih harus memenuhi parameter pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Spesifikasi Gula Kristal Putih

No.	Parameter Uji	Satuan	Persyaratan	
			GKP 1	GKP 2
1.	Warna Larutan	IU	81 – 200	201 – 300
2.	Besar Jenis Butir	mm	0,8 – 1,2	0,8 – 1,2
3.	Susutan Pengeringan (b/b)	%	Maks. 0,1	Maks. 0,1

1. Kadar Air

Kadar air dalam gula adalah jumlah air yang masih tersisa setelah gula diproses dari bahan baku nira atau tebu. Parameter ini sangat penting karena secara langsung memengaruhi mutu fisik, kestabilan, dan daya simpan gula. Pada proses produksi gula, kadar air yang terlalu tinggi dapat menyebabkan gula mudah menggumpal, cepat meleleh, serta berwarna lebih gelap karena terjadinya reaksi pencoklatan. Kondisi ini menurunkan kualitas tampilan visual larutan gula serta memengaruhi warna larutan ketika gula dilarutkan (Wilberta dkk., 2021).

Selain itu, kadar air juga berkaitan dengan besar jenis butir gula. Semakin tinggi kadar air, densitas atau besar jenis butiran gula cenderung

lebih rendah karena masih banyak ruang antar-kristal yang terisi air. Sebaliknya, bila kadar air rendah butiran gula menjadi lebih padat, keras, dan stabil (Wilberta dkk., 2021).

Dalam konteks pengendalian kualitas menggunakan grafik MEWMA, kadar air berfungsi sebagai salah satu indikator stabilitas proses. Nilai kadar air yang melebihi batas kendali menunjukkan adanya penyimpangan dalam proses penguapan atau kristalisasi. Sementara kadar air yang konsisten rendah dan stabil menandakan bahwa proses produksi gula berlangsung terkendali dan menghasilkan mutu produk yang baik (Wilberta dkk., 2021).

2. Besar Jenis Butir

Besar Jenis Butir merupakan salah satu karakteristik fisik gula yang sangat penting dalam menentukan mutu produk. Secara sederhana, besar jenis butir dapat diartikan sebagai perbandingan antara massa dengan volume butiran gula. Nilai besar jenis butir yang tinggi menunjukkan tingkat kepadatan dan kerapatan butir gula yang baik, sehingga gula cenderung lebih kompak, tidak mudah hancur, serta memiliki mutu yang stabil. Sebaliknya, nilai berat jenis yang terlalu rendah dapat mengindikasikan adanya rongga udara pada kristal, ketidakseragaman proses kristalisasi, atau bahkan adanya pengotor dalam produk gula. Dalam industri gula, pengendalian besar jenis butir diperlukan karena parameter ini berhubungan langsung dengan kualitas fisik maupun sifat larut gula saat dikonsumsi. Oleh karena itu, besar jenis butir menjadi salah satu indikator utama yang digunakan dalam penelitian pengendalian kualitas, khususnya ketika diintegrasikan dengan variabel lain seperti kadar air dan warna larutan gula.

Melalui pendekatan multivariat, ketiga variabel tersebut dapat saling melengkapi dalam memberikan gambaran menyeluruh tentang mutu produk gula yang dihasilkan (Putri, 2012).

3. Warna Larutan (ICUMSA)

Warna merupakan salah satu parameter penting dalam menilai kualitas gula, karena secara visual warna dapat memberikan indikasi tentang tingkat kemurnian, kebersihan, dan proses pemurnian yang dilakukan. Dalam industri gula, standar yang digunakan secara internasional untuk menilai warna adalah metode *International Commission for Uniform Methods of Sugar Analysis* (ICUMSA). Metode ini mengukur tingkat absorbansi larutan gula pada panjang gelombang tertentu (umumnya 420 nm) dengan spektrofotometer, kemudian hasil pengukuran dinyatakan dalam satuan IU (ICUMSA Unit) (Sari, 2024). Semakin rendah nilai warna ICUMSA, maka gula akan tampak semakin putih dan bersih, menandakan kualitas yang lebih tinggi. Sebaliknya, semakin tinggi nilai warna, gula cenderung berwarna kekuningan atau kecoklatan, yang biasanya disebabkan oleh adanya sisa pengotor atau proses pemurnian yang kurang optimal.

4. Karakteristik Fisik Gula (Sesuai SNI)

Selain parameter kimia dan instrumental, kualitas gula kristal putih juga dapat dinilai dari karakteristik fisiknya. Berdasarkan Standar Nasional Indonesia (SNI), gula yang memenuhi standar mutu memiliki penampakan berwarna putih bersih, kristal yang relatif seragam, tidak menggumpal, serta bebas dari kotoran maupun bau asing. Secara umum, gula dengan kualitas baik juga akan menghasilkan larutan yang jernih dan tidak berwarna

kekuningan, yang menunjukkan tingkat kemurnian yang tinggi. Berikut Gula Sesuai SNI ditunjukkan pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Gula Sesuai SNI

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Dalam Islam, setiap aktivitas dan pengendalian mutu tidak hanya bertujuan untuk memperoleh keuntungan ekonomi, tetapi juga merupakan wujud dari amanah dan tanggung jawab moral terhadap Allah SWT dan sesama manusia. Prinsip ini sejalan dengan firman Allah dalam Al-Quran Surah Asy-Syu'ara [26]: 181-183

أَوْفُوا الْكَيْلَ وَلَا تَكُونُوا مِنَ الْمُحْسِرِينَ ﴿١٨١﴾ وَزِنُوا بِالْقِسْطَاسِ الْمُسْتَقِيمِ ﴿١٨٢﴾ وَلَا تَبْخُسُوا النَّاسَ أَشْيَاءَهُمْ
وَلَا تَعْتُوا فِي الْأَرْضِ مُفْسِدِينَ ﴿١٨٣﴾

“Sempurnakanlah takaran dan janganlah kamu termasuk orang-orang yang merugikan, dan timbanglah dengan timbangan yang benar. Dan janganlah kamu merugikan manusia pada hak-haknya dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi.”(Kemenag, 2022).

Ayat ini menegaskan pentingnya kejujuran, ketelitian, dan keadilan dalam setiap proses produksi dan distribusi barang dalam konteks penelitian ini, ayat tersebut dapat diakui sebagai dasar moral dan spiritual dalam pengendalian kualitas (*quality control*). Penggunaan grafik pengendali Max-MEWMA bertujuan

untuk memastikan bahwa setiap produk sesuai standar mutu yang telah ditetapkan tanpa mengurangi hak konsumen atas kualitas yang baik.

Selain ayat tersebut, Allah SWT juga berfirman dalam Surah Al-Muthaffifin [83]: 1-3

وَيْلٌ لِّلْمُطَفِّفِينَ ﴿١﴾ الَّذِينَ إِذَا اكْتَالُوا عَلَى النَّاسِ يَسْتَوْفُونَ ﴿٢﴾ وَإِذَا كَالُوا لَهُمْ أَوْ وَزَنُوا لَهُمْ يُخْسِرُونَ ﴿٣﴾

“kecelakaan besarlah bagi orang- orang yang curang, yaitu orang-orang yang apabila menerima takaran dari orang lain mereka minta dipenuhi, dan apabila mereka menakar atau menimbang untuk orang lain, mereka mengurangi” (Kemenag, 2022).

Ayat ini memperingatkan bahwa kecurangan dalam pengukuran atau penimbangan merupakan bentuk kezaliman terhadap hak orang lain. Dengan demikian, pengendalian kualitas melalui grafik pengendali Max-MEWMA tidak hanya berfungsi sebagai alat teknis, tetapi juga menjadi sarana menjaga integritas dan tanggung jawab moral terhadap kualitas produk.

Nilai ketelitian dan kesempurnaan dalam bekerja (*itqan*) terdapat dalam hadis Rasulullah SAW, beliau bersabda:

“Sesungguhnya Allah mencintai seseorang yang apabila melakukan sesuatu pekerjaan, ia melakukannya dengan sempurna(itqan).(HR. al-Baihaqi).

Hadis ini diriwayatkan oleh Imam Thabrani (891) dan Imam Baihaqi (334). Hadis ini menegaskan bahwa profesionalisme dan ketelitian dalam bekerja merupakan bagian dari ibadah. Oleh karena itu, penerapan grafik pengendali Max-MEWMA adalah salah satu wujud nyata dari prinsip *itqan*, karena metode ini mampu mendeteksi pergeseran kecil dalam proses produksi secara akurat dan cepat.

Selain itu, dalam Surah Al-A’raf [7]: 85, Allah SWT juga menegaskan:

وَالْإِلَى مَدِينٍ أَخَاهُمْ شُعَيْبًا قَالَ يَبْقُومُوا عِبَادُوا اللَّهَ مَا لَكُمْ مِنْ إِلَهٍ غَيْرُهُ قَدْ جَاءَتْكُمْ بَيِّنَةٌ مِنْ رَبِّكُمْ فَأَوْفُوا الْكَيْلَ
وَالْمِيزَانَ وَلَا تَبْخَسُوا النَّاسَ أَشْيَاءَهُمْ وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا ذَلِكَ خَيْرٌ لَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ

﴿٨٥﴾

“dan sempurnakanlah takaran dan timbangan dengan adil, dan janganlah kamu merugikan manusia terhadap hak-hak mereka, dan janganlah kamu membuat kerusakan di bumi setelah Allah memperbaikinya.” (Kementerian Agama RI, 2022).

Ayat ini memperkuat perintah agar setiap individu menjaga keseimbangan dan keadilan dalam aktivitas ekonomi serta mencegah kerusakan (baik fisik maupun moral). Dalam konteks industri gula, menjaga kualitas produksi berarti menjaga Amanah Allah atas sumber daya alam dan memberi manfaat optimal bagi masyarakat.

Lebih jauh, prinsip kejujuran dalam takaran dan timbangan yang disebut dalam Q.S Asy-Syu'ara [26]: 181-183 juga mengandung pesan agar setiap pihak dalam rantai produksi mulai dari petani tebu, operator pabrik, hingga manajemen menjaga integritas dan keadilan. Dalam perspektif *Total Quality Management* (TQM) hal ini sejalan dengan prinsip *continuous improvement* dan *customer focus*, yaitu memberikan produk yang bermutu sebagai bentuk tanggung jawab sosial dan spiritual.

Dengan demikian, penerapan metode Max-MEWMA bukan hanya memiliki nilai teknis dalam dunia industri, tetapi juga mencerminkan nilai-nilai islam tentang amanah, kejujuran, dan keadilan dalam menjaga kualitas hasil kerja. Ketika suatu proses produksi dikendalikan dengan baik dan sesuai standar, maka hal itu menjadibagian dari pelaksanaan perintah Allah SWT untuk tidak mengurangi hak orang lain dan tidak melakukan kerusakan di muka bumi.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pengendalian kualitas gula yang digunakan pada penelitian ini akan menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA. Grafik pengendali Max-MEWMA akan digunakan untuk mendeteksi pergeseran rata-rata ataupun variansi dari data multivariat.

Adapun Langkah-langkah yang digunakan untuk mengimplementasikan grafik pengendali Max-MEWMA berdasarkan teori pendukung yang ada, yaitu diawali dengan uji normalitas multivariat menggunakan uji statistik pada Persamaan (2.9). Kemudian, data yang diuji normalitas diharapkan normal.

Selanjutnya adalah uji dependensi variabel. Adanya pengujian yang dipilih adalah uji Bartlett. Berdasarkan statistik uji di Persamaan (2.11), akan diketahui apakah terdapat hubungan antar variabel. Data yang diujikan diasumsikan berkorelasi, hingga H_0 ditolak.

Ketika sudah dilakukan uji asumsi, dilakukan perhitungan pada setiap variabel untuk mengetahui nilai statistik deskriptifnya. Selanjutnya, dilakukan pengontrolan menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA. Setiap grafik pengendali memiliki UCL dan LCL. UCL pada grafik pengendali Max-MEWMA diperoleh melalui hasil simulasi *Average Run length* (ARL) dengan parameter pembobot (λ) tertentu, sedangkan batas kendali bawah bernilai nol.

Kemudian dilakukan perhitungan vektor M_i menggunakan Persamaan (2.26). Statistik M_i ini digunakan untuk menentukan posisi titik pengamatan pada grafik pengendali Max-MEWMA. Apabila seluruh nilai M_i berada di bawah UCL (h), maka proses produksi gula dinyatakan terkendali secara statistik (*in control*). Sebaliknya, apabila terdapat satu atau lebih titik pengamatan yang melewati UCL,

maka proses dikategorikan tidak terkendali (*out of control*). Dalam penelitian ini, nilai h dan λ diperoleh melalui simulasi menggunakan data yang berdistribusi normal multivariat dengan parameter rata-rata dan kovariansi yang sama dengan data proses produksi gula.

Apabila ditemukan titik *out of control*, maka dilakukan analisis terhadap penyebab ketidakterkendalian tersebut dan dilakukan perbaikan pada grafik pengendali Max-MEWMA. Langkah terakhir adalah menganalisis hasil grafik pengendali Max-MEWMA yang telah diperoleh untuk menarik kesimpulan mengenai kestabilan proses produksi gula.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kuantitatif. Penelitian ini memanfaatkan data kuantitatif dengan cara melakukan uji terhadap data sekunder. Data sekunder yang digunakan berupa informasi data kualitas Gula Kristal Putih (GKP) di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang didapatkan dari bagian *Quality Assurance* (QA) di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang. Data tersebut mencakup tiga karakteristik kualitas gula kristal putih. Variabel-variabel yang diamati adalah kadar air (X_1), besar jenis butir (X_2), dan warna larutan (X_3). Variabel-variabel yang diamati pada penelitian ini disajikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian		
Variabel	Keterangan Variabel	Satuan Variabel
X_1	Kadar air	%
X_2	Besar Jenis Butir	mm
X_3	Warna larutan	IU

Data pengamatan karakteristik kualitas dari tiga variabel kadar air, besar jenis butir, dan warna larutan. Sampel yang digunakan dibagi menjadi dua fase di mana pada tanggal 23 Juli – 5 September 2025 sebagai Fase I dan 6 September – 20 Oktober sebagai Fase II.

3.3 Struktur Data

Struktur data yang digunakan pada penelitian proses produksi gula di PT PG Rajawali Kabupaten Malang ditunjukkan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Struktur Data Multivariat Berupa Subgrup ($n = 2$)

Fase	Pengamatan Hari ke-	Sampel	Variabel		
			Kadar Air	BJB	Warna Larutan
I	1	1	$X_{1,1,1}$	$X_{1,1,2}$	$X_{1,1,3}$
		2	$X_{1,2,1}$	$X_{1,2,2}$	$X_{1,2,3}$
	2	1	$X_{2,1,1}$	$X_{2,1,2}$	$X_{2,1,3}$
		2	$X_{2,2,1}$	$X_{2,2,2}$	$X_{2,2,3}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
II	m_1	1	$X_{m_1,1,1}$	$X_{m_1,1,2}$	$X_{m_1,1,3}$
		2	$X_{m_1,2,1}$	$X_{m_1,2,2}$	$X_{m_1,2,3}$
	1	1	$Y_{1,1,1}$	$Y_{1,1,2}$	$Y_{1,1,3}$
		2	$Y_{1,2,1}$	$Y_{1,2,2}$	$Y_{1,2,3}$
	2	1	$Y_{2,1,1}$	$Y_{2,1,2}$	$Y_{2,1,3}$
		2	$Y_{2,2,1}$	$Y_{2,2,2}$	$Y_{2,2,3}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m_2	1	$Y_{m_2,1,1}$	$Y_{m_2,1,2}$	$Y_{m_2,1,3}$
		2	$Y_{m_2,2,1}$	$Y_{m_2,2,2}$	$Y_{m_2,2,3}$

Struktur data pada penelitian ini terdiri dari dua fase. Agar membedakan Fase I dan Fase II, Fase I dinotasikan $X_{i,k,j}$ dan Fase II dinotasikan $Y_{i,k,j}$. Pada Fase I digunakan sebanyak m_1 pengamatan data historis, sedangkan pada Fase II digunakan sebanyak m_2 pengamatan data monitoring. Setiap pengamatan terdiri dari 2 sampel, sesuai dengan frekuensi pengambilan data yaitu dua sampel per hari. Setiap sampel memiliki $p = 3$ variabel kualitas, yaitu kadar air X_1 , BJB X_2 , dan warna larutan X_3 untuk Fase I, dan kadar air Y_1 , BJB Y_2 , dan warna larutan Y_3 Fase II. Data penelitian ini dapat dilihat pada Lampiran 1.

3.4 Tahapan Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut.

1. Melakukan analisis deskriptif data karakteristik kualitas gula di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang.
2. Melakukan pengujian distribusi normal multivariat terhadap karakteristik kualitas gula berdasarkan Persamaan (2.9).

3. Melakukan pengujian korelasi variabel terhadap parameter kualitas gula dengan uji Bartlett berdasarkan Persamaan (2.11).
4. Dilakukan pengendalian terhadap rata-rata dan variabilitas proses pada variabel dengan memanfaatkan Grafik pengendali Max-MEWMA. Pada pembuatan grafik pengendali Max-MEWMA menggunakan dua fase. Fase I digunakan untuk menentukan parameter awal (*mean vektor* dan matriks kovariansisi), menghitung UCL, membuat grafik Fase I, dan mengidentifikasi/menangani data yang tidak terkendali sebelum memasuki monitoring berkelanjutan berikut langkah-langkahnya.
 - a. Menaksir nilai awal μ_0 sebagai rata-rata vektor dan Σ_0 sebagai nilai matriks kovariansisi dapat dilakukan dengan mengantinya menggunakan rata-rata sampel $\bar{\bar{X}}$ berdasarkan Persamaan (2.5) serta rata-rata matriks kovariansisi dari Persamaan (2.8) $\bar{S}$ sebagai penaksir Σ_0 , yang digunakan untuk memperoleh Σ_0^{-1} . Nilai $\bar{\bar{X}}$ dan $\bar{S}$ masing-masing merepresentasikan rata-rata vektor sampel dan rata-rata matriks kovariansisi sampel.
 - b. Untuk masing-masing pengamatan, hitung Z_i berdasarkan Persamaan (2.13) dengan $Z_0 = 0$ sebagai nilai awal, dan hitung Y_i dengan $Y_0 = 0$ sebagai nilai awal.
 - c. Menghitung nilai statistik uji U_i berdasarkan Persamaan (2.20) dan V_i berdasarkan Persamaan (2.25).
 - d. Cari UCL berdasarkan Persamaan (2.34).
 - e. Hitung nilai M_i berdasarkan Persamaan (2.26) dan bandingkan dengan UCL.

- f. Plotkan sebuah titik pada lokasi (i, M_i) ketika $M_i \leq UCL$. Perbaiki dilakukan dengan investigasi dan eliminasi pengamatan yang mengidentifikasi kondisi *out of control*, dan ulangi perhitungan Fase I dari poin a hingga hasil perbaikan menunjukkan proses berada dalam kondisi *in-control*.
 - g. Setelah data Fase I diolah dan tidak ada sinyal yang *out of control*, tetapkan parameter akhir μ_0 dan Σ_0 serta UCL yang akan digunakan di Fase II.
5. Fase II digunakan untuk memantau proses menggunakan parameter dan UCL yang sudah ditetapkan di Fase I, serta melakukan tindakan diagnostik bila sinyal muncul. Berikut langkah-langkahnya
- a. Gunakan μ_0, Σ_0 dan UCL hasil dari Fase I dengan $Z_0 = 0$ dan $Y_0 = 0$
 - b. Hitung Z_i, W_i, U_i, V_i dan M_i . Dan bandingkan M_i dengan UCL.
 - c. Plotting (i, M_i) dengan simbol sesuai aturan Fase I (titik biasanya bila $M_i \leq UCL$; simbol diagnosis bila $M_i > UCL$)
 - d. Identifikasi penyebab khusus (*assignable cause*)
 - i. Plotkan sebuah simbol pada lokasi (i, M_i) ketika $M_i > UCL$. Untuk kasus di mana hanya $|U_i| > UCL$, plot “m+” jika $U_i > 0$ dan “m-” jika $U_i < 0$. Untuk kasus di mana hanya $|V_i| > UCL$, plot “v+” jika $V_i > 0$ dan “v-” jika $V_i < 0$. Untuk kasus di mana $|U_i| > UCL$ maupun $|V_i| > UCL$, plot “m+v+” jika $U_i > 0$ dan $V_i > 0$, plot “m+v-” jika $U_i > 0$ dan $V_i < 0$, plot “m-v+” jika $U_i < 0$ dan $V_i > 0$ serta plot “m-v-” jika $U_i < 0$ dan $V_i < 0$

ii. Ketika $|U_i| > UCL$, hitung

$$C_i = \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda} Z_i' \Sigma_0^{-1} Z_i \quad (3.1)$$

kemudian hitung

$$D_j = C_i - C_{i(j)}, \quad (3.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

di mana $C_{i(j)}$ dihitung dengan cara yang sama seperti C_i , kecuali bahwa data untuk variabel ke- j serta baris dan kolom ke- j dari Σ_0^{-1} dihilangkan dari perhitungan. Bandingkan besarnya nilai relatif dari D_j nilai yang besar dapat secara potensial mengidentifikasi penyebab khusus (*assignable cause*) untuk *vektor mean*.

iii. Ketika $|V_i| > UCL$, hitung

$$E_j = |V_i| - |V_{i(j)}|, \quad (3.3)$$

$$j = 1, 2, \dots, p,$$

di mana $|V_{i(j)}|$ dihitung cara yang sama seperti $|V_i|$, kecuali bahwa data untuk variabel ke- j serta baris dan kolom ke- j dari Σ_0^{-1} dihilangkan dari perhitungan. Bandingkan besar relatif dari nilai E_j ; nilai yang besar dapat secara potensial mengidentifikasi penyebab khusus (*assignable cause*) untuk *vektor variabilitas proses*.

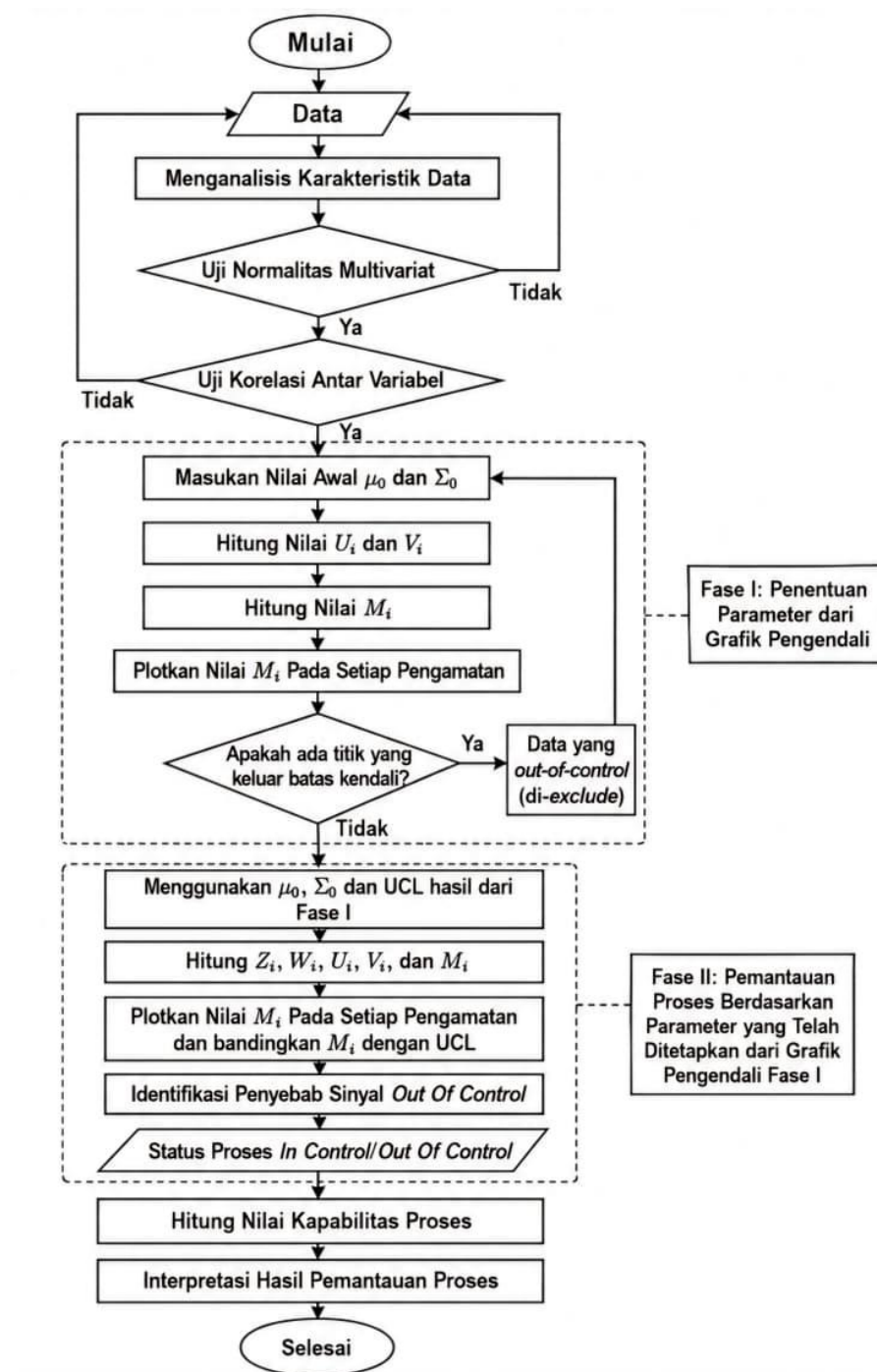
Untuk setiap *out of control* selidiki kemungkinan penyebab khusus (*assignable cause*) berdasarkan D_j dan E_j .

6. Melakukan analisis kapabilitas Max-MEWMA pada proses produksi untuk mengukur kinerja proses produksi gula.

7. Membuat Interpretasi Hasil Pemantauan Proses.

3.5 Grafik Alir Penelitian

Grafik alir dari penelitian pengendalian proses produksi gula di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang dijabarkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Grafik Alir Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Statistik Deskriptif Karakteristik Kualitas Gula

Analisis statistika deskriptif digunakan sebagai tahap awal untuk memberikan gambaran umum mengenai karakteristik data kualitas gula sebelum dilakukan pengendalian kualitas secara statistik menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA. Analisis ini bertujuan untuk mengetahui kecenderungan pusat data, tingkat penyebaran, serta rentang nilai dari setiap karakteristik kualitas yang diamati.

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Gula

Variabel	Rata-Rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Kadar air	0,0321	0,0065	0,0200	0,0500
Besar Jenis Butir	0,8718 mm	0,0563 mm	0,7700 mm	1,1800 mm
Warna Larutan	291,8670 IU	16,3645 IU	179,7200 IU	299,6000 IU

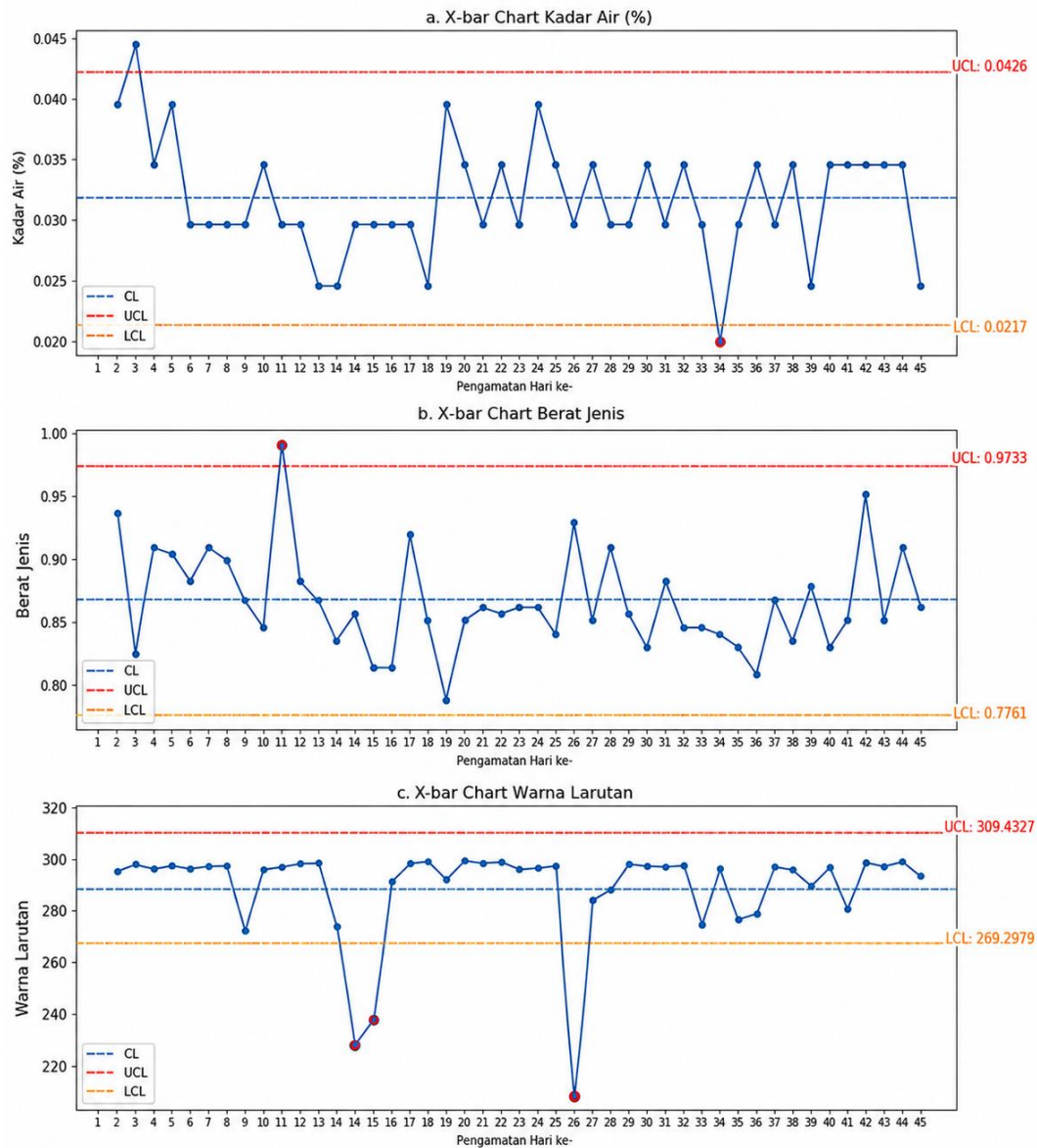
Pada Tabel 4.1, angka kadar air ditulis dalam satuan persen tanpa simbol %, bukan bentuk decimal dalam arti proporsi. Penyajian dalam bentuk desimal dilakukan karena nilai kadar air relatif kecil, sehingga lebih memudahkan dalam proses analisis statistik. Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat diperoleh bahwa rata-rata kadar air sebesar 0,0321, dengan nilai minimum 0,0200 dan maksimum 0,0500. Standar deviasi kadar air yang relatif kecil, yaitu 0,0065, menunjukkan bahwa tingkat penyebaran data kadar air tergolong rendah dan cenderung stabil di sekitar nilai rata-ratanya. Hal ini mengindikasikan bahwa proses pengeringan gula secara umum berlangsung cukup konsisten.

Karakteristik besar jenis butir memiliki nilai rata-rata sebesar 0,8718 mm, dengan nilai minimum 0,7700 mm dan maksimum 1,1800 mm. Standar deviasi

berat jenis sebesar 0,0563 mm menunjukkan bahwa penyebaran data masih dalam rentang yang wajar, meskipun terdapat perbedaan nilai antar pengamatan yang perlu diperhatikan lebih lanjut.

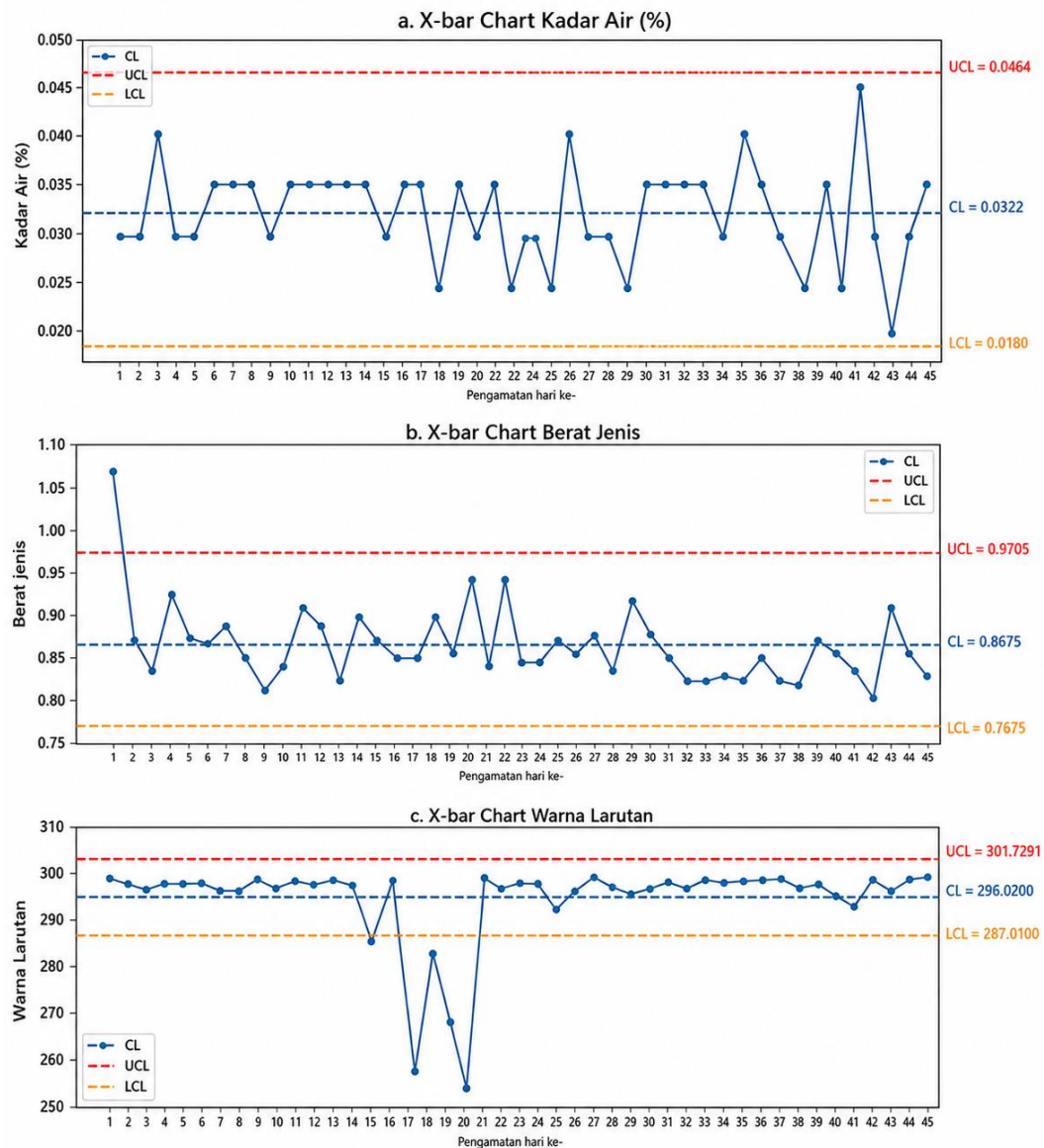
Selanjutnya, karakteristik warna larutan diperoleh nilai rata-rata sebesar 291,8670 UI, dengan nilai minimum sebesar 179,7200 IU dan maksimum 299,6000 IU. Nilai standar deviasi sebesar 16,3645 IU, menunjukkan adanya tingkat penyebaran data yang relatif lebih besar dibandingkan karakteristik kadar air. Hal ini mengindikasikan bahwa proses yang memengaruhi warna gula, seperti pemurnian dan kristalisasi, berpotensi mengalami fluktuasi yang lebih besardibandingkan karakteristik lainnya.

Secara keseluruhan, hasil statistika deskriptif menunjukkan bahwa setiap karakteristik kualitas gula memiliki skala dan tingkat variasi yang berbeda. Perbedaan variasi ini menjadi indikasi awal bahwa karakteristik kualitas memiliki kontribusi yang berbeda dalam merepresentasikan kondisi proses produksi gula. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan pengendalian kualitas multivariat, khususnya menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA, agar pergeseran kecil pada rata-rata maupun variabilitas proses dapat dideteksi secara lebih sensitif dan simultan. Untuk memberikan gambaran visual mengenai pola data, disajikan grafik pengendali univariat X-bar data Fase I dan Fase II. Berikut ini sajian grafik pengendali univariat X-bar data Fase I



Gambar 4.1 Grafik Univariat X-Bar Data Asli Fase I untuk Variabel a. Kadar Air, b. BJB, dan c. Warna Larutan

Berdasarkan Gambar 4.1 terlihat masih ada beberapa yang keluar dari batas kendala atas. Variabel kadar air terdapat dua pengamatan yang *out of control* yaitu di pengamatan ke-2 dan pengamatan ke-34. Variabel berat jenis butir terdapat satu titik pengamatan yang keluar batas kendali yaitu pengamatan ke-1. Variabel warna larutan ada yang *out of control* ada tiga yaitu di pengamatan ke-14, ke-15, dan ke-26. Selanjutnya penyajian grafik pengendali univariat X-bar data Fase I



Gambar 4.2 Grafik Univariat X-Bar Data Asli Fase II untuk Variabel a. Kadar Air, b. BJB, dan c. Warna Larutan

Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat masih ada beberapa yang *out of control*. Variabel berat jenis butir terdapat satu titik pengamatan yang *out of control* yaitu pengamatan ke-1. Variabel warna larutan ada yang *out of control* ada empat yaitu di pengamatan ke-18, ke-19, ke-20 dan ke-21.

Berdasarkan Grafik X-bar Warna Larutan pada Fase I, terdapat beberapa pengamatan yang menunjukkan pola penyimpangan yang cukup jauh dibandingkan rata-rata proses, khususnya pada pengamatan ke-14, ke-15, dan ke-26. Nilai warna

larutan pada pengamatan tersebut cenderung lebih rendah dibandingkan pengamatan lainnya sehingga secara visual tampak berbeda dari pola umum proses. Kondisi serupa juga ditemukan pada Fase II, yaitu pada pengamatan ke-18, ke-19, ke-20, dan ke-21 yang berada di luar batas kendali bawah (LCL). Secara statistik, pengamatan-pengamatan tersebut mengindikasikan adanya kondisi *out of control* karena menyimpang dari pola proses yang digunakan dalam pembentukan batas kendali. Namun demikian, berdasarkan hasil konfirmasi dengan pihak PT PG Rajawali I Kabupaten Malang, nilai warna larutan tersebut bukan disebabkan oleh kesalahan pencatatan maupun kesalahan pengukuran laboratorium.

Nilai yang diperoleh masih memenuhi persyaratan mutu berdasarkan Standar Nasional Indonesia (SNI) untuk Gula Kristal Putih (GKP), bahkan termasuk dalam kategori GKP 1. Meskipun target produksi perusahaan adalah GKP 2 produk yang memenuhi standar GKP 1 tetap dapat diterima karena masih berada dalam rentang spesifikasi mutu yang berlaku. Temuan ini menunjukkan bahwa sinyal *out of control* pada grafik pengendali tidak selalu mengindikasikan produk cacat (*out of specification*), melainkan menunjukkan adanya variasi proses yang berbeda dari kondisi historis yang digunakan dalam pembentukan batas kendali. Dengan demikian, pengamatan yang berada di luar batas kendali tersebut menunjukkan adanya pergeseran proses secara statistik, tetapi produk yang dihasilkan tetap memenuhi standar kualitas yang ditetapkan perusahaan dan SNI sehingga masih layak untuk dipasarkan.

4.2 Uji Asumsi Normalitas Multivariat

Uji asumsi normalitas multivariat dilakukan untuk mengetahui kesesuaian distribusi data karakteristik kualitas gula sebelum dilakukan analisis menggunakan

grafik pengendali Max-MEWMA. Pengujian ini diperlukan karena data yang digunakan melibatkan lebih dari satu variabel yang dianalisis secara simultan.

Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

H₀: Vektor pengamatan berdistribusi normal multivariat

H₁: Vektor pengamatan tidak berdistribusi normal multivariat

Keputusan yang diambil adalah H₀ gagal ditolak jika nilai D_i^2 yang kurang dari $\chi_{\alpha,df}^2$ sebesar 50%, maka dapat disimpulkan bahwa data memenuhi asumsi distribusi normal multivariat.

Sebelum menghitung D_i^2 karena data subgroup maka perlu menghitung rata-rata data pengamatan ke- i dari variabel ke- j yang dinyatakan dengan $\bar{X}_{i,j}$. Berikut contohnya perhitungan $\bar{X}_{i,j}$ menggunakan data Fase I pada pengamatan hari pertama pada setiap variabel:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{1,1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 X_{1,k,1} \\
 &= \frac{X_{1,1,1} + X_{1,2,1}}{2} \\
 &= \frac{0,04 + 0,04}{2} \\
 &= 0,04
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{1,2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 X_{1,k,2} \\
 &= \frac{X_{1,1,2} + X_{1,2,2}}{2} \\
 &= \frac{0,96 + 0,92}{2} \\
 &= 0,94
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{1,3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 X_{1,k,3} \\
&= \frac{X_{1,1,3} + X_{1,2,3}}{2} \\
&= \frac{296,71 + 294,43}{2} \\
&= 295,57.
\end{aligned}$$

Perhitungan yang sama dilakukan untuk mencari rata-rata data pada setiap pengamatan dan setiap karakteristik kualitas pada data Fase I dan Fase II. Selanjutnya nilai D_i^2 dapat diperoleh dengan menghitung vektor rata-rata keseluruhan dari pengamatan ke- i untuk variabel ke- j ($\bar{\bar{X}}_j$) pada setiap karakteristik kualitas pada data Fase I dan Fase II. Berikut contoh perhitungan pada data Fase I untuk setiap variabel:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{X}}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{45} \bar{X}_{i,1}}{45} \\
&= \frac{\bar{X}_{1,1} + \bar{X}_{2,1} + \dots + \bar{X}_{45,1}}{45} \\
&= \frac{0,040 + 0,045 + \dots + 0,025}{45} \\
&= 0,0321
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{X}}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{45} \bar{X}_{i,2}}{45} \\
&= \frac{\bar{X}_{1,3} + \bar{X}_{2,3} + \dots + \bar{X}_{45,3}}{45} \\
&= \frac{0,94 + 0,8350 + \dots + 0,8700}{45} \\
&= 0,8747
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{X}}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^{45} \bar{X}_{i,3}}{45} \\
&= \frac{\bar{X}_{1,2} + \bar{X}_{2,2} + \dots + \bar{X}_{45,2}}{45} \\
&= \frac{295,57 + 297,81 + \dots + 293,88}{45} \\
&= 289,3653.
\end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh vektor rata-rata berikut:

$$\bar{\bar{X}} = \begin{pmatrix} 0,0321 \\ 0,8747 \\ 289,3653 \end{pmatrix}.$$

Perhitungan yang sama dilakukan untuk mencari rata-rata keseluruhan dan vektor rata-rata yang dihasilkan data Fase II. Kemudian, hitung matriks variansi kovariansi yang akan dibagi menjadi Fase I dan Fase II dengan menggunakan Persamaan (2,7). Berikut adalah contoh perhitungan elemen matriks kovariansi untuk setiap karakteristik kualitas pada Fase I pada pengamatan hari pertama.

$$\begin{aligned}
S_{1,11} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (0,04 - 0,04)(0,04 - 0,04) + (0,04 - 0,04)(0,04 - 0,04) \\
&= 0,0000 \\
S_{1,22} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (0,96 - 0,94)(0,96 - 0,94) + (0,92 - 0,94)(0,92 - 0,94) \\
&= 0,0008
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{1,33} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (296,71 - 295,57)(296,71 - 295,57) + (294,43 - 295,57)(294,43 - 295,57) \\
&= 2,5992
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{1,12} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (0,04 - 0,04)(0,96 - 0,94) + (0,04 - 0,04)(0,92 - 0,94) \\
&= 0,0000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{1,13} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (0,04 - 0,04)(296,71 - 295,57) + (0,04 - 0,04)(294,43 - 295,57) \\
&= 0,0000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{1,23} &= \frac{\sum_{k=1}^2 (X_{i,k,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,k,l} - \bar{X}_{i,l})}{2 - 1} \\
&= \frac{(X_{i,1,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,1,l} - \bar{X}_{i,l}) + (X_{i,2,j} - \bar{X}_{i,j})(X_{i,2,l} - \bar{X}_{i,l})}{1} \\
&= (0,96 - 0,94)(296,71 - 295,57) + (0,92 - 0,94)(294,43 - 295,57) \\
&= 0,0456
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh variansi kovariansi pengamatan hari ke-1 pada data Fase I berikut:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0008 & 0,0456 \\ 0,0000 & 0,0456 & 2,5992 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

langkah yang sama seperti pada contoh dilakukan pada setiap karakteristik kualitas gula dan setiap pengamatan pada data Fase I dan Fase II. Selanjutnya menghitung rata-rata variansi kovariansisi. Berikut ini contoh perhitungan rata-rata variansi kovariansisi karakteristik kualitas gula dari Fase I.

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_{i,jl} \\ &= \frac{1}{45} \sum_{i=1}^{45} S_{i,11} \\ &= \frac{1}{45} \left(\begin{bmatrix} 0,00 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,00 & 0,0008 & 0,0456 \\ 0,00 & 0,0456 & 2,5992 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0,00005 & -0,0005 & -0,0157 \\ -0,0005 & 0,0050 & 0,1570 \\ -0,0157 & 0,1570 & 4,9298 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{45} \left(\begin{bmatrix} 0,0014 & -0,0022 & 0,3461 \\ -0,0022 & 0,1246 & -4,9704 \\ 0,3461 & -4,9704 & 9225,3598 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh rata-rata variansi kovariansisi pada data Fase I berikut:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0,00003 & -0,00005 & 0,00769 \\ -0,00005 & 0,00276 & -0,11045 \\ 0,00769 & -0,11045 & 205,00799 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Kemudian, dilakukan invers terhadap matriks varian kovariansisi pada Persamaan (4.1) dari data Fase I

$$\bar{\mathbf{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

langkah yang sama seperti pada contoh dengan hasil Persamaan 4.4 dan 4.5 dilakukan pada data Fase II, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai D_i^2 berdasarkan Persamaan (2.10) dengan nilai invers matriks variansi kovariansisi pada Persamaan (4.2). Berikut adalah contoh perhitungan nilai D_i^2 .

$$\begin{aligned}
D_1^2 &= (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})' \bar{S}^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}}) \\
&= [(0,04 \quad 0,94 \quad 295,57) - (0,0321 \quad 0,8747 \quad 289,3653)] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,04 - 0,0321 \\ 0,94 - 0,8747 \\ 295,57 - 289,3653 \end{bmatrix} \\
&= (0,0079 \quad 0,0653 \quad 6,2047) \times \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0653 \\ 6,2047 \end{bmatrix} \\
&= 4,5258
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^2 &= (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})' \bar{S}^{-1} (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}}) \\
&= [(0,045 \quad 0,835 \quad 297,805) - (0,0321 \quad 0,8747 \quad 289,3653)] \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,045 - 0,0321 \\ 0,835 - 0,8747 \\ 297,805 - 289,3653 \end{bmatrix} \\
&= (0,0129 \quad -0,0397 \quad 8,4397) \times \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0129 \\ -0,0397 \\ 8,4397 \end{bmatrix} \\
&= 5,342068
\end{aligned}$$

Langkah yang sama dilakukan untuk menghitung $D_1^2, D_2^2, D_3^2, \dots, D_{45}^2$ di Fase I dan Fase II. Hasil dari nilai D_i^2 akan disajikan dalam Lampiran 2. Setelah itu diperoleh nilai $D_1^2, D_2^2, D_3^2, \dots, D_{45}^2$ Fase I dan Fase II. Selanjutnya akan ditentukan nilai *chi-square* yang digunakan untuk mengujian dengan tingkat signifikansi α sebesar 0,05 dan derajat kebebasan ($df = 3$). Berdasarkan tabel *chi-square*, nilai $\chi_{0,05;3}^2$ sebesar 7,815. Kemudian, dihitung jumlah nilai D_i^2 yang kurang dari dan lebih dari 7,815. Berdasarkan hasil perhitungan, terdapat 3 pengamatan pada data Fase I dan 3 pengamatan pada Fase II yang memiliki nilai D_i^2 yang lebih dari 7,815 (informasi ditampilkan pada Lampiran 2). Hal ini menunjukkan bahwa lebih dari 50% nilai D_i^2 yang kurang dari $\chi_{0,05;3}^2 = 7,815$, yakni sebanyak 42 dari 45

pengamatan. Sehingga, dapat diambil keputusan gagal tolak H_0 , artinya data berdistribusi normal multivariat.

4.3 Uji Asumsi Korelasi

Setelah dilakukan uji asumsi normalitas multivariat pada Subbab 4.2 selanjutnya akan dilakukan uji asumsi korelasi antar variabel. Tahap uji ini bertujuan untuk mengetahui hubungan antar variabel. Pada kasus pengamatan yang menggunakan tiga variabel, maka digunakan uji Bartlett dengan hipotesis berikut:

$H_0: \mathbf{R} = \mathbf{I}$ (tidak terdapat korelasi antar variabel)

$H_1: \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ (terdapat korelasi antar variabel)

Keputusan yang diambil adalah H_0 ditolak jika $\chi^2 \geq \chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}p(p-1))}$ atau $p - value <$

$\alpha = 0,05$. Tahapan dalam melakukan uji asumsi korelasi adalah menghitung matriks korelasi (R) menggunakan aplikasi *Excel*. Berdasarkan data Fase I dan Fase II, diperoleh matriks korelasi sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0,1911 & 0,0313 \\ -0,1911 & 1 & -0,0446 \\ 0,0313 & -0,0446 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dimana nilai negatif pada variabel ke-2 dalam matriks korelasi (R) menunjukkan adanya hubungan yang berlawanan arah antara variabel tersebut dengan variabel lainnya. Pada matriks di atas, variabel ke-2 yaitu besar jenis butir (BJB) memiliki korelasi sebesar $-0,1911$ dengan kadar air dan $-0,0446$ dengan warna larutan. Nilai negatif ini berarti ketika nilai besar jenis butir meningkat, maka kadar air atau warna larutan cenderung menurun, meskipun hubungan tersebut tergolong lemah karena nilainya mendekati nol.

Secara proses produksi gula, kondisi ini masih logis. Kristal gula dengan ukuran atau kepadatan butir yang lebih baik biasanya memiliki kadar air yang lebih

rendah karena proses pengeringan berlangsung lebih optimal. Selain itu, perubahan pada proses kristalisasi juga dapat memengaruhi warna larutan sehingga hubungan antar variabel tidak selalu searah. Oleh karena itu, tanda negatif pada matriks korelasi tidak menunjukkan kesalahan perhitungan, melainkan menggambarkan arah hubungan antar karakteristik kualitas gula.

Kemudian, dihitung nilai determinan matriks korelasi ($|R|$) berdasarkan nilai matriks korelasi (R) pada Persamaan (4.4) dan diperoleh sebesar 0,9567. Selanjutnya akan dihitung nilai χ^2 sebagai statistik uji Bartlett berdasarkan persamaan (2.4) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \chi^2 &= -\left(180 - 1 - \frac{2m + 5}{6}\right) \ln|R| \\
 &= -\left(180 - 1 - \frac{2(3) + 5}{6}\right) \ln|R| \\
 &= -\left(179 - \frac{6 + 5}{6}\right) \ln|0,9567| \\
 &= -\left(179 - \frac{11}{6}\right) (-0,044) \\
 &= -(177,17)(-0,044) \\
 &= -(-7,8407) \\
 &= 7,8407.
 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh χ^2 , selanjutnya akan di temukan nilai *Chi-square* yang akan digunakan untuk menguji signifikansi dengan $\alpha = 0,05$ dan derajat kebebasan $\frac{1}{2}(3)(3 - 1) = 3$. Adapun nilai $\chi^2_{0,05;3}$ sebesar 7,815. Berdasarkan nilai *Chi-square* tersebut, diperoleh bahwa nilai χ^2 lebih besar dari $\chi^2_{0,05;3}$. Sehingga dapat diambil keputusan tolak H_0 , artinya antarvariabel karakteristik kualitas gula berkorelasi.

Selain itu, diperoleh p -value sebesar sekitar 0,049 yang lebih kecil dari taraf signifikansi 0,05. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar variabel karakteristik kualitas gula yang diamati. Namun, karena nilai statistik uji dan p -value berada sangat dekat dengan batas signifikansi, maka tingkat signifikansi yang diperoleh bersifat marginal.

4.4 Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase I

Setelah dilakukan uji asumsi normalitas multivariat dan uji asumsi korelasi antar variabel, langkah selanjutnya adalah membentuk grafik pengendali Max-MEWMA Fase I. Grafik ini digunakan untuk mengidentifikasi apakah proses berada dalam kondisi terkendali secara statistik serta sebagai dasar dalam penentuan parameter awal proses.

Pada Fase I, data pengamatan terdiri dari 45, di mana setiap pengamatan perhari terdapat 2 subgrup. Tahapan dalam membuat grafik pengendali Max-MEWMA adalah menghitung rata-rata pengamatan ke- i dari variabel ke- j yang dinotasi sebagai $\bar{X}_{i,j}$. Perhitungan ini mengacu pada Persamaan (4.1). Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh nilai rata-rata subgrup pertama sebagai berikut:

$$\bar{X}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,94 \\ 295,57 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

nilai rata-rata ini selanjutnya digunakan dalam proses penaksiran parameter awal, yaitu rata-rata μ_0 dan matriks kovariansi Σ_0 , yang selanjutnya akan dibahas pada subbab penaksiran parameter.

4.4.1 Menaksir Nilai Awal μ_0 dan Σ_0

Pada tahap awal analisis pengendalian kualitas multivariat, diperlukan penaksiran parameter populasi yang meliputi vektor rata-rata dan matriks

kovariansi. Parameter ini digunakan sebagai acuan dalam menentukan kondisi proses berada dalam keadaan terkendali secara statistik.

Penaksir nilai awal vektor rata-rata μ_0 dilakukan dengan menghitung rata-rata keseluruhan dari pengamatan ke- i untuk variabel ke- j . Perhitungan ini mengacu pada Persamaan (4.2), sehingga diperoleh:

$$\mu_0 = \bar{X}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_{i,j}$$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh nilai vektor rata-rata awal sebagai berikut:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0,0321 \\ 0,8747 \\ 289,3653 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, penaksiran matriks kovariansi awal Σ_0 dilakukan dengan menghitung rata-rata dari matriks kovariansi setiap subgrup. Perhitungan ini mengacu pada Persamaan (2,8), yaitu:

$$\Sigma_0 = \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$$

dengan menggunakan hasil perhitungan pada Persamaan (4.4), diperoleh matriks kovariansi awal sebagai berikut:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0,00003 & -0,00005 & 0,00769 \\ -0,00005 & 0,00276 & -0,11045 \\ 0,00769 & -0,11045 & 205,00799 \end{bmatrix}$$

Setelah mengetahui parameter yang akan digunakan maka selanjutnya parameter tersebut digunakan untuk menghitung statistik U_i dan V_i yang akan dibahas disubbab selanjutnya.

4.4.2 Hitung Nilai U_i dan V_i

Setelah diperoleh parameter awal berupa vektor rata-rata μ_0 dan matriks kovariansi Σ_0 , langkah selanjutnya adalah menghitung nilai statistik U_i dan V_i yang merupakan bagian dari pembentukan grafik pengendali Max-MEWMA. Nilai U_i dan V_i digunakan untuk mendeteksi adanya penyimpangan proses dari kondisi terkendali secara multivariat. Perhitungan kedua statistik tersebut dilakukan untuk setiap subgrup pengamatan ke- i , dengan memanfaatkan informasi rata-rata subgrup serta parameter awal yang telah diestimasi. Adapun tahapan perhitungan nilai U_i dan V_i dijelaskan sebagai berikut.

1. Hitung Nilai U_i

Sebelum menghitung nilai U_i pada penelitian ini, pembobot λ yang digunakan dalam grafik pengendali MEWMA adalah 0,2. Nilai awal statistik ditentukan sebagai $Z_0 = \mathbf{0}$ dan $Y_0 = 0$. Setelah parameter awal proses μ_0 dan Σ_0 diperoleh, langkah selanjutnya adalah menghitung statistik U_i sebagai representasi pergeseran rata-rata proses secara multivariat. Perhitungan nilai U_i dilakukan melalui beberapa tahapan, yaitu menghitung Z_i , dilanjutkan dengan menghitung T_i , kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk U_i . Perhitungan awal yang harus dilakukan menghitung nilai Z_i menggunakan Persamaan (2.13) untuk pengamatan hari ke- $i = 1$

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= (1 - \lambda)Z_0 + \lambda(\bar{X}_1 - \mu_0) \\
 &= (1 - 0,2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,2 \left(\begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,94 \\ 295,57 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0321 \\ 0,8747 \\ 289,3653 \end{bmatrix} \right) \\
 &= (0,8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,2 \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,0653 \\ 6,2047 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Setelah diperoleh nilai $\mathbf{Z}_i$, selanjutnya dilakukan perhitungan T_i sesuai dengan Persamaan (2.17) dengan $n = 2$. Maka didapatkan nilai T_i sebagai berikut untuk pengamatan hari ke- $i = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot 1}]} \mathbf{Z}_1' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_1 \\
 &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2[1 - (1 - 0,2)^2]} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}' \\
 &\quad \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{2(1,8)}{0,2[1 - (0,8)^2]} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}' \\
 &\quad \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{3,6}{0,2[1 - 0,64]} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}' \\
 &\quad \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{3,6}{0,2[0,36]} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 57,3375 \\ 6,0517 \\ 0,00714 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{3,6}{0,072} \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0131 \\ 1,2409 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 57,3375 \\ 6,0517 \\ 0,00714 \end{bmatrix} \\
 &= 50 \cdot 0,1771 \\
 &= 8,8525
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan nilai vektor rata-rata (U_i) sesuai dengan Persamaan (2.20), yaitu dengan mentransformasikan nilai T_i kedalam

distribusi normal standar. Sehingga didapatkan nilai vektor rata-rata sebagai berikut untuk pengamatan hari ke-1

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \Phi^{-1} \left[H_3 \left\{ \frac{n(2-\lambda)}{\lambda[1-(1-\lambda)^{2\cdot 1}]} \mathbf{Z}_1' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{Z}_1 \right\} \right] \\
 &= \Phi^{-1} [H_3\{T_1\}] \\
 &= \Phi^{-1} [H_3\{8,8525\}] \\
 &= \Phi^{-1} [0,9680] \\
 &= 1,8610
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Selanjutnya, nilai U_1 dinyatakan dalam bentuk nilai absolut, maka di peroleh:

$$|U_1| = 1,8610$$

Nilai statistik U_i yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk menghitung nilai M_i . Semua langkah perhitungan U_i tersebut diterapkan pada seluruh pengamatan dalam data Fase I. . Untuk nilai U_i dan $|U_i|$ keseluruhan berada di lampiran 3. Selanjutnya mencari nilai V_i .

2. Hitung Nilai V_i

Setelah diperoleh nilai statistik U_i yang mempresentasikan pergeseran rata-rata proses, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai variabilitas proses yang dinyatakan dengan statistik V_i . Nilai V_i digunakan untuk mendeteksi perubahan variabilitas proses secara multivariat dalam Grafik pengendali Max-MEWMA. Perhitungan nilai V_i dilakukan melalui beberapa tahapan, yaitu dengan menghitung nilai W_i dilanjutkan dengan Y_i kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk V_i . untuk setiap pengamatan hari ke- i , adapun langkah pertama adalah menghitung nilai W_i yang mengacu pada

Persamaan (2.21). Untuk pengamatan hari ke-1, maka diperoleh nilai W_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \Sigma_{k=1}^2 (\mathbf{X}_{1,k} - \bar{\mathbf{X}}_1)' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_{1,k} - \bar{\mathbf{X}}_1) \\
 &= (\mathbf{X}_{1,1} - \bar{\mathbf{X}}_1)' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_{1,1} - \bar{\mathbf{X}}_1) + (\mathbf{X}_{1,2} - \bar{\mathbf{X}}_1)' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_{1,2} - \bar{\mathbf{X}}_1) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0.04 - 0,04 \\ 0.96 - 0,94 \\ 296,71 - 295,57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.04 - 0,04 \\ 0.96 - 0,94 \\ 296,71 - 295,57 \end{bmatrix} \right) \\
 &+ \left(\begin{bmatrix} 0.04 - 0,04 \\ 0.92 - 0,94 \\ 294,43 - 295,57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32095,056 & 543,194 & -0,911 \\ 543,194 & 378,281 & 0,183 \\ -0,911 & 0,183 & 0,005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.04 - 0,04 \\ 0.92 - 0,94 \\ 294,43 - 295,57 \end{bmatrix} \right) \quad (4.11) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.02 \\ 1,14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,3238 \\ 7,8377 \\ 0,0093 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.02 \\ -1,14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11,3238 \\ -7,8377 \\ -0,0093 \end{bmatrix} \right) \\
 &= 0,1662 + 0,1662 \\
 &= 0,3324
 \end{aligned}$$

Setelah menghitung nilai W_i , selanjutnya dilakukan perhitungan nilai Y_i mengacu pada Persamaan (2.22) didapatkan nilai Y_i sebagai berikut untuk pengamatan hari ke-1

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (1 - 0,2)Y_{1-1} + 0,2\Phi^{-1}\{H_{3(2-1)}(W_1)\} \\
 &= (0,8)Y_0 + 0,2\Phi^{-1}\{H_{3(1)}(W_1)\} \\
 &= (0,8)Y_0 + 0,2\Phi^{-1}\{H_{3(1)}(0,3324)\} \quad (4.12) \\
 &= (0,8)(0) + 0,2(-1,6832) \\
 &= -0,3366
 \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai Y_i selanjutnya menghitung nilai variabilitas proses (V_i) mengacu pada Persamaan (2.25). Didapatkan nilai variabilitas proses (V_i) sebagai berikut untuk pengamatan hari ke-1

$$\begin{aligned}
V_1 &= \sqrt{\frac{2 - 0,2}{0,2[1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 1}]} Y_1} \\
&= \sqrt{\frac{1,8}{0,2[1 - (0,8)^2]} (-0,3366)} \\
&= \sqrt{\frac{1,8}{0,2[1 - 0,64]} (-0,3366)} \\
&= \sqrt{\frac{1,8}{0,2[0,36]} (-0,3366)} \tag{4.13} \\
&= \sqrt{\frac{1,8}{0,072} (-0,3366)} \\
&= \sqrt{25} (-0,3366) \\
&= (5) (-0,3366) \\
&= -1,6830
\end{aligned}$$

selanjutnya, nilai V_1 dinyatakan dalam bentuk nilai absolut, maka di peroleh:

$$|V_1| = 1,6830$$

Nilai statistik V_i yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk menghitung nilai M_i . Semua langkah perhitungan V_i tersebut diterapkan pada seluruh pengamatan dalam data Fase I. . Untuk nilai V_i dan $|V_i|$ keseluruhan berada di lampiran 3. Selanjutnya menghitung nilai M_i .

4.4.3 Hitung Nilai M_i

Setelah seluruh perhitungan nilai U_i dan V_i dilakukan, langkah selanjutnya adalah menentukan nilai statistika M_i . Nilai M_i diperoleh dengan mengambil nilai maksimum dari nilai absolut U_i dan V_i pada setiap pengamatan. Contoh perhitungan untuk pengamatan hari ke-1, mengacu pada Persamaan (2.26). Untuk

pengamatan hari ke- $i = 1$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \max\{|U_1|, |V_1|\} \\
 &= \max\{1,8610, 1,6830\} \\
 &= 1,8610
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Perhitungan nilai M_i dilakukan untuk seluruh pengamatan pada Fase I. Hasil perhitungan lengkap nilai M_i disajikan pada Lampiran 3. Nilai M_i yang telah diperoleh selanjutnya diplotkan pada setiap pengamatan yang di bahas pada subbab selanjutnya.

4.4.4 Plotkan Nilai M_i Pada Setiap Pengamatan

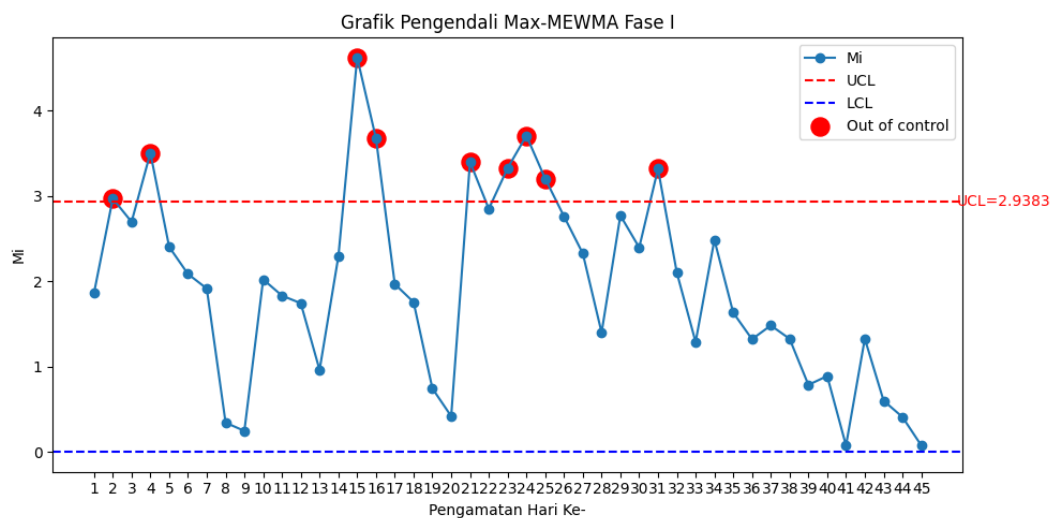
Nilai M_i yang telah diperoleh selanjutnya digunakan untuk membentuk grafik pengendali Max-MEWMA pada data Fase I, grafik ini bertujuan untuk mengidentifikasi apakah proses berada dalam kondisi terkendali secara statistik atau mengalami penyimpangan, secara umum, proses dikatakan berada dalam kondisi terkendali apabila nilai M_i berada di bawah batas kendali atas (UCL). Sebaliknya, jika terdapat nilai M_i yang melebihi UCL, maka hal tersebut mengindikasikan adanya pergeseran proses (*out of control*).

Apabila terdeteksi adanya titik yang berada di luar batas kendali, maka dilakukan evaluasi dengan mengeluarkan (*exclude*) data tersebut. Selanjutnya, perhitungan parameter awal μ_0 dan Σ_0 diulang menggunakan data yang telah diperbaiki hingga diperoleh kondisi proses yang terkendali.

Sebelum membentuk grafik pengendali, terlebih dahulu ditentukan nilai batas atas (UCL). Perhitungan UCL mengacu pada Persamaan (2.30) dengan jumlah variabel 3, ukuran subgrup sebesar 2, serta pembobot yang digunakan 0,2 maka nilai konstanta L yang digunakan 3,0025 berdasarkan (Chen dkk., 2005).

$$\begin{aligned}
 UCL &= E(M_i) + L\sqrt{Var(M_i)} \\
 &= 1,128379 + 0,602811L \\
 &= 1,128379 + 0,602811 \cdot 3,0025 \\
 &= 2,9383.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, selanjutnya dibuat grafik pengendalian Max-MEWMA untuk data Fase I. Grafik hasil pemantauan di tunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I

Sumbu horizontal pada grafik pengendali Max-MEWMA menunjukkan urutan pengamatan, sedangkan sumbu vertikal menunjukkan nilai statistik M_i pada setiap pengamatan. Garis batas atas atau *Upper Control Limit* (UCL) yang berwarna merah digunakan pada grafik ini adalah sebesar 2,9383, sedangkan batas kendali bawah (LCL) yang berwarna biru berada pada nilai 0.

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa sebagian besar titik pengamatan berada di dalam batas kendali. Namun terdapat beberapa titik yang berada di atas batas kendali $UCL = 2,9383$, yaitu pada pengamatan ke-2, ke-4, ke-15, ke-16, ke-21, ke-23, ke-24, ke-25, dan ke-31 ditandai dengan bulatan besar berwarna

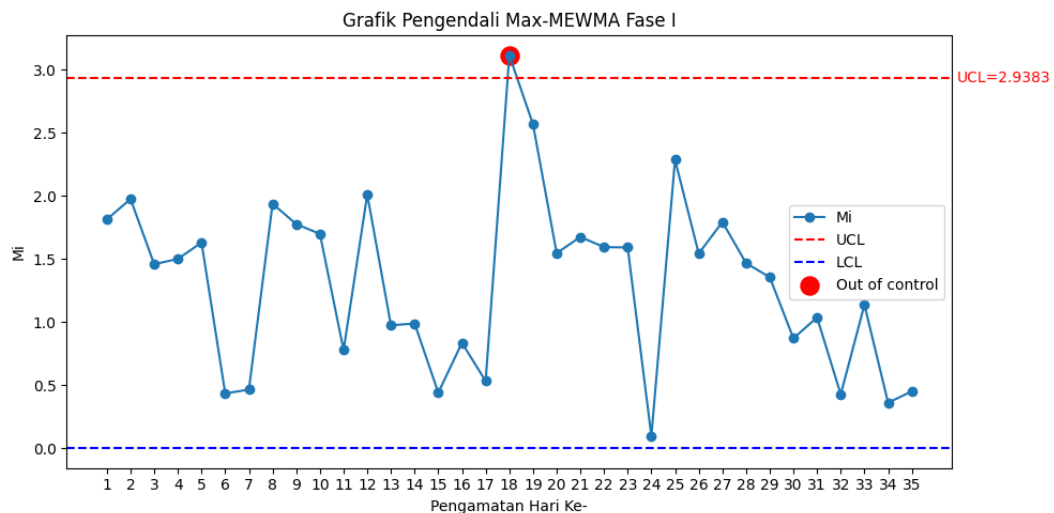
merah pada grafik pengendali. Titik-titik tersebut menunjukkan bahwa pada pengamatan tersebut proses berada di luar batas kendali (*out of control*) secara statistik.

Data yang berada di luar batas kendali atas (UCL) dapat disebabkan oleh nilai rata-rata yang besar, nilai variansi yang besar, maupun keduanya yang sama-sama bernilai besar. Pada Fase I, dari 9 pengamatan yang berada di luar batas kendali, pengamatan hari ke-2, ke-4, ke-15, ke-16, dan ke-31 dipengaruhi oleh nilai rata-rata yang besar. Sementara itu, pengamatan hari ke-21, ke-23, ke-24 dan ke-25 dipengaruhi oleh nilai variansi yang besar. Untuk mengetahui nilai data secara rinci berada di Lampiran 3.

Kondisi tersebut menunjukkan bahwa proses produksi gula belum sepenuhnya terkendali secara statistik. Ketidaksesuaian tersebut diduga dipengaruhi oleh beberapa faktor lapangan, seperti kondisi mesin produksi yang telah digunakan dalam waktu lama sehingga kinerja mesin menjadi kurang optimal. Selain itu, berdasarkan informasi dari pegawai pabrik, warna gula yang kurang bersih dipengaruhi oleh proses puteran (*centrifuge*). Namun, apabila proses puteran dilakukan terlalu maksimal, ukuran kristal gula menjadi terlalu kecil sehingga gula lebih mudah menyerap air dan menyebabkan kadar air meningkat selama penyimpanan. Oleh karena itu, diperlukan pengawasan proses produksi serta pengecekan dan perawatan mesin secara berkala agar kemungkinan produk yang tidak sesuai standar dapat diminimalkan.

Dalam analisis grafik pengendali Fase I, pengamatan yang berada di luar batas kendali biasanya dikeluarkan dari data karena diduga mengandung penyebab khusus yang dapat mempengaruhi kestabilan proses. Oleh karena itu,

pengamatan yang teridentifikasi *out of control* tidak digunakan dalam analisis selanjutnya sehingga diperoleh data yang benar-benar berada dalam kondisi terkendali secara statistik (*in control*). Berdasarkan hasil tersebut, dilakukan perbaikan pertama dengan mengeluarkan data yang teridentifikasi *out of control*. Hasil grafik pengendali setelah perbaikan pertama ditunjukkan pada Gambar 4.4.

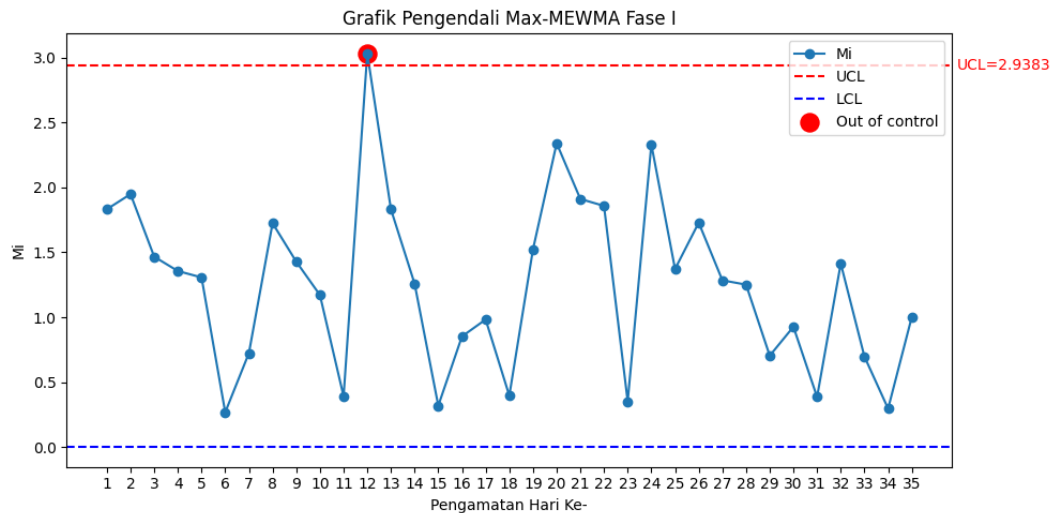


Gambar 4.4 Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I Perbaikan I

Berdasarkan Gambar 4.4, terlihat bahwa sebagian besar titik pengamatan telah berada di dalam batas kendali. Namun, masih terdapat pengamatan yang berada di luar batas kendali, yaitu pada pengamatan ke-18 yang ditandai dengan bulatan merah pada grafik pengendali. Pengamatan tersebut berada di luar batas kendali atas (UCL) karena dipengaruhi oleh nilai rata-rata yang besar. Rincian data pengamatan tersebut disajikan pada Lampiran 4.

Keberadaan titik pengamatan yang masih berada di luar batas kendali tersebut menunjukkan bahwa proses masih belum terkendali secara statistik. Oleh karena itu, pengamatan yang teridentifikasi *out of control* tersebut dikeluarkan dari data agar diperoleh data yang berada dalam kondisi terkendali secara statistik (*in control*). Selanjutnya dilakukan perbaikan berikutnya dengan menghilangkan

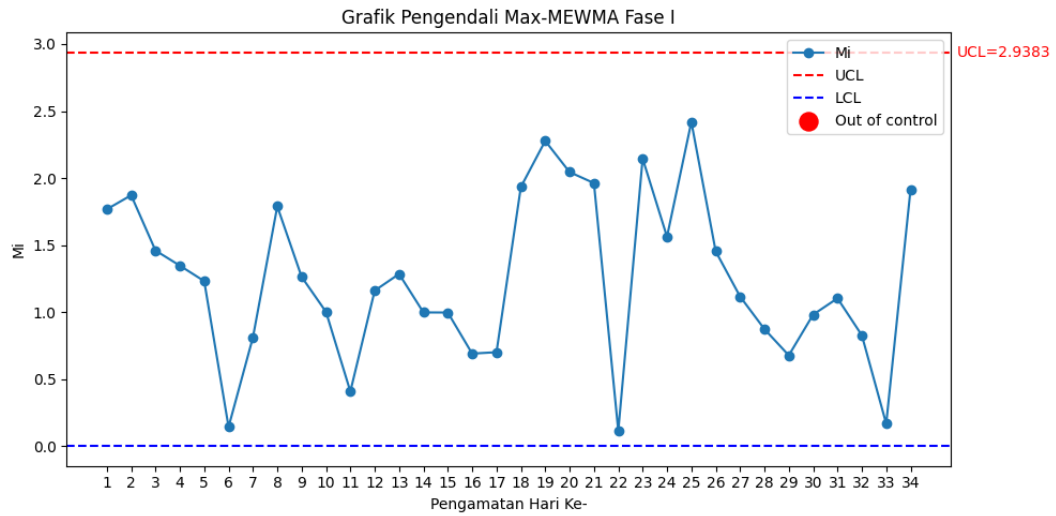
pengamatan yang teridentifikasi *out of control*. Hasil Grafik pengendali setelah perbaikan kedua ditunjukkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I Perbaikan II

Setelah mengeluarkan pengamatan ke-18 yang teridentifikasi *out of control*, diperoleh grafik pengendali Max-MEWMA seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5. Berdasarkan grafik tersebut terlihat bahwa sebagian besar titik pengamatan telah berada di dalam batas kendali. Namun demikian, masih terdapat satu titik pengamatan yang berada di luar batas kendali, yaitu pada pengamatan ke-12 yang melewati batas kendali atas (UCL) yang ditandai dengan bulatan besar berwarna merah pada grafik pengendali. Dimana pengamatan tersebut berada di luar batas kendali atas (UCL) karena dipengaruhi oleh nilai rata-rata yang besar. Rincian data pengamatan tersebut disajikan pada Lampiran 5.

Keberadaan titik pengamatan tersebut menunjukkan bahwa proses masih belum terkendali secara statistik. Oleh karena itu, dilakukan perbaikan selanjutnya dengan mengeluarkan pengamatan ke-12 yang teridentifikasi *out of control* agar diperoleh data yang berada dalam kondisi terkendali secara statistik (*in control*). Hasil grafik pengendali setelah perbaikan ketiga ditunjukkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I Perbaikan Terakhir

Perbaikan grafik pengendali Max-MEWMA pada tahap terakhir dilakukan dengan mengeluarkan pengamatan yang sebelumnya teridentifikasi *out of control*. Hasil perbaikan tersebut menghasilkan grafik pengendali Max-MEWMA seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.6. Berdasarkan grafik tersebut terlihat bahwa seluruh nilai M_i berada di dalam batas kendali yang telah ditetapkan dan tidak terdapat lagi pengamatan yang melewati batas kendali. Rincian data pengamatan tersebut disajikan pada Lampiran 6.

Kondisi tersebut menunjukkan bahwa proses telah berada dalam keadaan terkendali secara statistik (*in control*) dengan parameter yang di hasilkan

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0,00004 & -0,00007 & 0,01059 \\ -0,00007 & 0,00268 & -0,11252 \\ 0,01059 & -0,11252 & 116,15789 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0,0316 \\ 0,8769 \\ 293,0873 \end{bmatrix}$$

$$UCL = 2,9383.$$

Hal ini mengidentifikasi bahwa tidak terjadi pergeseran baik pada rata-rata maupun variabilitas proses dari data yang diamati. Dengan demikian, data

yang tersisa setelah proses perbaikan dapat digunakan sebagai dasar dalam analisis pengendalian kualitas pada tahap selanjutnya. Selanjutnya dilakukan pengendalian kualitas pada Fase II untuk memonitor kestabilan proses produksi menggunakan data pengamatan berikutnya.

4.5 Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase II

Data yang digunakan untuk mengendalikan kualitas gula kristal putih pada Fase II ini adalah data selama tanggal 6 September 2025 sampai tanggal 20 Oktober 2025 dengan masing-masing terdiri dari 2 subgrup. Batas kendali yang digunakan pada fase ini sama dengan batas kendali di Fase I. Pada Fase II ini menggunakan parameter rata-rata dan variansi dari data Fase I.

4.5.1 Menggunakan Parameter μ_0 , Σ_0 , dan UCL dari Fase I

Setelah diperoleh kondisi proses yang terkendali pada Fase I, serta ditentukan parameter awal berupa vektor rata-rata μ_0 , matriks kovariansi Σ_0 , dan batas kendali atas (UCL), maka parameter tersebut selanjutnya digunakan sebagai acuan dalam analisis pada Fase II.

Pada Fase II, parameter μ_0 dan Σ_0 , yang diperoleh dari Fase I dianggap merepresentasikan kondisi proses yang stabil (*in-control*), sehingga digunakan sebagai dasar dalam menghitung statistik pengendali untuk data pengamatan berikutnya. Selain itu, nilai UCL yang telah ditentukan juga digunakan sebagai batas keputusan untuk mengidentifikasi apakah proses masih berada dalam kondisi terkendali atau telah mengalami pergeseran. Dengan demikian, analisis pada Fase II difokuskan pada pemantauan proses secara berkelanjutan menggunakan parameter yang telah ditetapkan pada Fase I, tanpa melakukan penaksiran ulang parameter.

4.5.2 Menghitung Z_i, W_i, U_i, V_i dan M_i

Pada Fase II, perhitungan statistik Max-MEWMA dilakukan dengan menggunakan parameter μ_0, Σ_0 , dan batas kendali atas (UCL) yang diperoleh dari Fase I. Parameter tersebut dianggap merepresentasikan kondisi proses yang terkendali, sehingga tidak dilakukan penaksiran ulang. Perhitungan statistik meliputi Z_i, W_i, U_i, V_i dan M_i untuk setiap pengamatan ke- i . Sebagai ilustrasi, berikut ditampilkan contoh perhitungan untuk pengamatan hari ke- $i = 1$. Untuk perhitungan Z_1 mengacu pada Persamaan (2.14) dan seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.7) sebagai berikut

$$Z_1 = (1 - \lambda)Z_0 + \lambda(\bar{X}_1 - \mu_0)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0,00032 \\ 0,03861 \\ 0,94354 \end{bmatrix}$$

setelah di ketahui nilai Z_1 Selanjutnya menghitung nilai T_1 mengacu pada Persamaan (2.17) dan seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.8) sebagai berikut

$$T_1 = \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot i}]} Z_1' \Sigma^{-1} Z_1$$

$$T_1 = 31,13499$$

setelah T_1 yang sudah di ketahui maka dilanjutkan perhitungan U_1 dengan mengacu pada Persamaan (2.20) seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.9) sebagai berikut

$$U_1 = \Phi^{-1} \left[H_3 \left\{ \frac{n(2 - \lambda)}{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot 1}]} Z_1' \Sigma_0^{-1} Z_1 \right\} \right]$$

$$U_1 = 4,79928$$

Nilai absolut U_1

$$|U_1| = 4,79928$$

setelah mendapatkan nilai $|U_1|$ cari nilai $|V_1|$ dengan menghitung nilai W_1 terlebih dahulu mengacu pada Persamaan (2.21) seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.10) sebagai berikut

$$W_1 = \Sigma_{k=1}^2 (\mathbf{X}_{1,k} - \bar{\mathbf{X}}_1)' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{X}_{1,k} - \bar{\mathbf{X}}_1)$$

$$W_1 = 9,54746$$

setelah diketahui nilai W_1 dilanjutkan dengan mencari Y_1 mengacu pada Persamaan (2.22) seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.11) sebagai berikut

$$Y_1 = (1 - 0,2)Y_{1-1} + 0,2\Phi^{-1}\{H_{3(2-1)}(W_1)\}$$

$$Y_1 = 0,39969$$

setelah diketahui nilai Y_1 dilanjutkan dengan mencari V_1 mengacu pada Persamaan (2.25) seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.12) sebagai berikut

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 - 0,2}{0,2[1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 1}]} } Y_1$$

$$V_1 = 1,99849$$

Nilai absolut V_1

$$|V_1| = 1,99849$$

setelah di ketahui nilai absolut dari $|U_1|$ dan $|V_1|$ selanjutnya menghitung nilai M_1 yang mengacu pada Persamaan (2.26) seperti contoh perhitungan pada Persamaan (4.13) sebagai berikut

$$M_1 = \max\{|U_i|, |V_i|\}$$

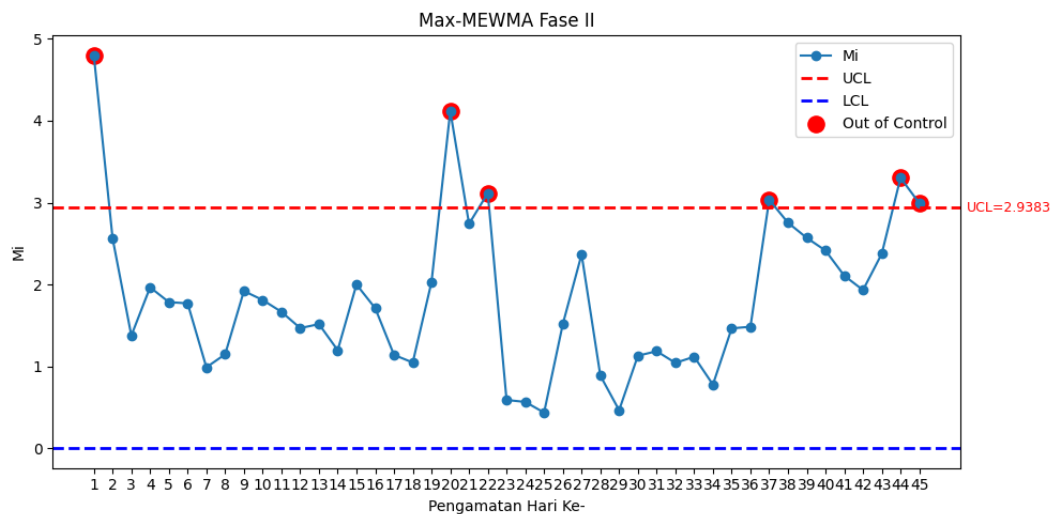
$$M_1 = 4,79928$$

Perhitungan yang sama dilakukan untuk seluruh pengamatan pada data Fase II.

Hasil lengkap perhitungan nilai M_i disajikan pada Lampiran 8.

4.5.3 Plotkan Nilai M_i pada Setiap Pengamatan dan Bandingkan M_i dengan UCL

Setelah melalui semua tahap perhitungan mulai dari Z_i sampai M_i didapat Grafik pengendali Max-MEWMA Fase II yang ditunjukkan pada Gambar 4.7 Sebagai berikut



Gambar 4.7 Grafik Pengendalian Max-MEWMA Fase II

Berdasarkan Gambar 4.7, sumbu vertikal menunjukkan nilai statistik M_i yang di plotkan untuk setiap pengamatan, sedangkan garis merah merupakan batas kendali atas (UCL) yang nilainya sama dengan UCL pada Fase I. Grafik pengendalian Max-MEWMA pada Fase II untuk kualitas gula kristal putih tidak terkendali secara statistik karena masih terdapat enam titik pengamatan yang berada di atas UCL yaitu pada pengamatan ke-1, ke-20, ke-22, ke-37, ke-44, dan ke-45 yang ditandai dengan bulatan besar berwarna merah pada grafik pengendali. Untuk penyebab adanya titik yang keluar dari batas UCL akan di bahas pada subbab berikutnya.

4.5.4 Identifikasi Penyebab Khusus (*assignable cause*)

Setelah dilakukan pengeplotkan nilai M_i pada grafik pengendali Max-MEWMA dan dibandingkan dengan batas kendali atas (UCL), langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi adanya penyebab khusus proses berada dalam kondisi tidak terkendali (*out of control*) diagnosis ini dilakukan dengan mengamati titik-titik pada grafik yang berada di luar batas kendali, yaitu titik dengan koordinat (i, M_i) yang memiliki nilai melebihi UCL. Selain itu, analisis lebih lanjut dilakukan dengan memperhatikan nilai statistik U_i dan V_i untuk mengetahui apakah penyimpangan disebabkan oleh pergeseran rata-rata proses atau perubahan variabilitas proses. Berdasarkan kriteria yang telah dijelaskan pada Bab III, kondisi berikut digunakan sebagai acuan dalam identifikasi penyebab khusus

1. Plotkan sebuah simbol pada lokasi (i, M_i)

Berdasarkan nilai statistik M_i yang telah dihitung, selanjutnya dilakukan plotting pada grafik pengendali dengan menempatkan simbol pada koordinat (i, M_i) yang berada diatas UCL, di mana i menunjukkan urutan pengamatan. Berikut tabel plotting untuk data Fase II yang *out of control*.

Tabel 4.2 Plotting Simbol pada Lokasi (i, M_i)

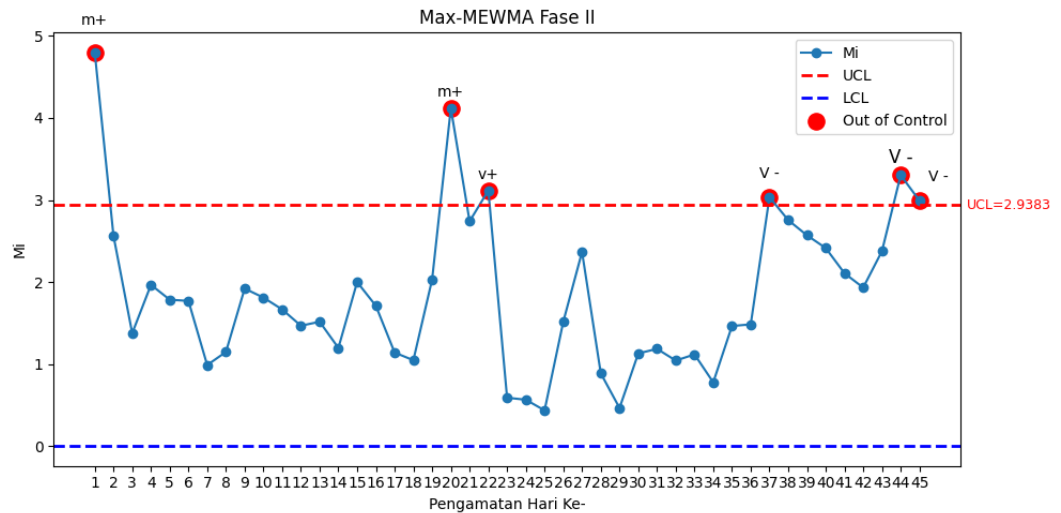
Pengamatan Hari ke- i	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	Status	Keterangan Plot
M_1	4,79928	4,79928	1,99849	1,99849	<i>Out of Control</i>	$m +$
M_{20}	4,11819	4,11819	2,26319	2,26319	<i>Out of Control</i>	$m +$
M_{22}	1,39729	1,39729	3,11602	3,11602	<i>Out of Control</i>	$v +$
M_{37}	1,61658	1,61658	-3,03470	3,03470	<i>Out of Control</i>	$v -$
M_{44}	1,22374	1,22374	-3,30250	3,30250	<i>Out of Control</i>	$v -$
M_{45}	1,25790	1,25790	-2,99326	2,99326	<i>Out of Control</i>	$v -$

Berdasarkan Tabel 4.2 pada pengamatan ke-1, ke-20, ke-22, ke-37, dan ke-44 dan ke-45. Pengamatan ke-1 *out of control* disebabkan karena nilai $|U_i|$ lebih besar dari UCL dan U_i bernilai positif, sehingga titik tersebut

diidentifikasi sebagai $m +$, yang menunjukkan adanya pergeseran rata-rata proses ke arah yang lebih tinggi. Selanjutnya, pada pengamatan ke-20 juga diperoleh kondisi *Out of Control*. Hal ini disebabkan oleh nilai $|U_i|$ yang melebihi UCL dengan U_i bernilai positif, sehingga diidentifikasi sebagai $m +$. Kondisi ini menunjukkan kembali adanya peningkatan rata-rata poses.

Pada pengamatan ke-22, nilai M_i berada di luar batas kendali yang disebabkan oleh nilai $|V_i|$ yang lebih besar dari UCL dengan V_i bernilai positif. Oleh karena itu, titik ini diidentifikasi sebagai $v +$, yang menunjukkan adanya peningkatan variabilitas proses. Selanjutnya, ada pengamatan ke-37 diperoleh kondisi *Out of Control* yang disebabkan oleh nilai $|V_i|$ yang melebihi UCL dengan V_i bernilai negatif. Oleh karena itu, titik ini diidentifikasi sebagai $v -$, yang menunjukkan adanya perubahan variabilitas proses ke arah yang lebih rendah. Pada pengamatan ke-44 dan ke-45 juga diperoleh *Out of Control* yang disebabkan oleh nilai $|V_i|$ yang lebih besar dari UCL dengan V_i bernilai negatif. Oleh karena itu, kedua titik tersebut diidentifikasi sebagai $v -$, yang menunjukkan adanya penurunan variabilitas proses

Secara keseluruhan, hasil analisis menunjukkan pengamatan yang berada di luar batas kendali yang disebabkan oleh pergeseran rata-rata proses ($m +$) serta perubahan variabilitas proses ($v +$ dan $v -$). Hal ini mengindikasikan bahwa proses produksi belum sepenuhnya beberapa dalam kondisi terkendali secara statistik dan masih dipengaruhi oleh sebab khusus (*assignable causes*). Berikut ini plot sebuah simbol pada lokasi (i, M_i) dalam grafik pengendali

Gambar 4.8 Plot Simbol yang *Out Of Control*

2. Ketika $|U_i| > UCL$

Berdasarkan hasil perhitungan Fase II data yang memiliki nilai $|U_i|$ lebih besar dari UCL adalah pengamatan ke-1 dan pengamatan ke-20 maka dilakukan perhitungan untuk 2 pengamatan tersebut. Perhitungan pengamatan ke-1 mengacu pada Persamaan (3.1).

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{2(2-0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & 597,0769 & -1,8558 \\ 597,0769 & 403,0653 & 0,3360 \\ -1,8558 & 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \\ 0,9435 \end{bmatrix} \\
 &= (18) \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 13,2870 \\ 15,6962 \\ 0,0221 \end{bmatrix} \\
 &= 18 \cdot 0,6228 \\
 &= 11,2104
 \end{aligned}$$

selanjutnya perhitungan untuk pengamatan hari ke-20

$$\begin{aligned}
 C_{20} &= \frac{2(2-0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & 597,0769 & -1,8558 \\ 597,0769 & 403,0653 & 0,3360 \\ -1,8558 & 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix} \\
 &= (18) \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 40,8402 \\ -0,5893 \\ -0,1096 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= 18 \cdot 1,3571$$

$$= 24,4278$$

Setelah di ketahui C_i maka dilanjutkan menghitung D_j yang mengacu berdasarkan persamaan (3.2) dimana dalam menghitung D_j dihitung masing-masing variabel. Sebelum menghitung nilai D_j menghitung $C_{i(j)}$ pada pengamatan ke-1 disetiap variabel. Untuk variabel kadar air $C_{20(1)}$, berat jenis butir $C_{20(2)}$, dan warna larutan $C_{20(3)}$

$$\begin{aligned} C_{1(1)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} 0,0386 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 403,0653 & 0,3660 \\ 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0384 \\ 0,9328 \end{bmatrix} \\ &= (18) \begin{bmatrix} 0,0386 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 15,8753 \\ 0,0216 \end{bmatrix} \\ &= 18 \cdot 0,6332 \\ &= 11,3976 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1(2)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & -1,8558 \\ -1,8558 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,9435 \end{bmatrix} \\ &= (18) \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,9435 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -9,7596 \\ 0,0092 \end{bmatrix} \\ &= 18 \cdot 0,0116 \\ &= 0,2088 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1(3)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & 597,0769 \\ 597,0769 & 403,0653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \end{bmatrix} \\ &= (18) \begin{bmatrix} -0,0003 \\ 0,0386 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 15,0380 \\ 15,3792 \end{bmatrix} \\ &= 18 \cdot 0,5891 \\ &= 10,6038 \end{aligned}$$

Selanjutnya perhitungan nilai $C_{i(j)}$ pada pengamatan hari ke-20 untuk

setiap variabel. Berikut ini variabel kadar air $C_{20(1)}$, berat jenis butir $C_{20(2)}$, dan warna larutan $C_{20(3)}$

$$\begin{aligned}
 C_{20(1)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 403,0653 & 0,3360 \\ 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix} \\
 &= (18) \begin{bmatrix} 0,0080 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -0,8878 \\ -0,1087 \end{bmatrix} \\
 &= 18 \cdot 1,2333 \\
 &= 23,8194
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{20(2)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & -1,8558 \\ -1,8558 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ -12,2389 \end{bmatrix} \\
 &= (18) \begin{bmatrix} 0,0005 \\ -12,2389 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 36,0636 \\ -0,1123 \end{bmatrix} \\
 &= 18 \cdot 1,3924 \\
 &= 25,0632
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{20(3)} &= \frac{2(2 - 0,2)}{0,2} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4440 & 597,0769 \\ 597,0769 & 403,0653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \end{bmatrix} \\
 &= (18) \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0080 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 18,1253 \\ 3,5230 \end{bmatrix} \\
 &= 18 \cdot 0,0373 \\
 &= 0,6714
 \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai $C_{i(j)}$ aplikasikan ke Persamaan (3.2) pada pengamatan hari ke-1 dan pengamatan hari ke-20. Sehingga diperoleh perhitungan D_j untuk pengamatan hari ke-1

$$D_1 = 11,2104 - 11,3976 = -0,1872$$

$$D_2 = 11,2104 - 0,2088 = 11,0016$$

$$D_3 = 11,2104 - 10,6038 = 0,6066$$

Setelah itu perhitungan D_j untuk pengamatan hari ke-20

$$D_1 = 24,4278 - 23,8194 = 0,6084$$

$$D_2 = 24,4278 - 25,0632 = -0,6354$$

$$D_3 = 24,4278 - 0,6714 = 23,7564$$

Nilai D_j dihitung berdasarkan nilai absolutnya, sehingga tanda negatif tidak diperhitungkan. Yang menjadi perhatian adalah besarnya angka, bukan arah simpangannya, karena kedua nilai tersebut mencerminkan besarnya selisih antara nilai pengamatan dengan nilai yang seharusnya. Sehingga pengamatan ke-1 nilai D_j terbesar terdapat pada variabel ke-2. Hal ini menunjukkan bahwa variabel ke-2 memberikan kontribusi paling besar terhadap sinyal *out of control*. Dengan demikian, variabel ke-2 diidentifikasi sebagai penyebab utama penyimpangan proses pada pengamatan ke-1. Pengamatan ke-20 nilai D_j terbesar terdapat pada variabel ke-3. Hal ini menunjukkan bahwa variabel ke-3 merupakan faktor yang paling berpengaruh terhadap terjadinya penyimpangan proses. Oleh karena itu, variabel ke-3 diidentifikasi sebagai penyebab utama sinyal *out of control* pada pengamatan ke-20.

3. Ketika $|V_i| > UCL$

Berdasarkan hasil perhitungan Fase II data yang memiliki nilai $|V_i|$ lebih besar dari UCL adalah pengamatan ke-22, pengamatan ke-37, pengamatan ke-44 dan pengamatan ke-45. Kondisi ini mengindikasikan adanya ketidakterkendalian proses, sehingga diperlukan analisis lebih lanjut untuk mengidentifikasi variabel yang berkontribusi terhadap penyimpangan tersebut.

Untuk mengidentifikasi penyebab khusus (*assignable cause*), digunakan pendekatan kontribusi masing-masing variabel melalui perhitungan nilai E_j mengacu pada Persamaan (3.3)

$$E_j = |V_i| - |V_{i(j)}|.$$

Sebelum mencari E_j maka kita perlu mencari $V_{i(j)}$, berikut perhitungan untuk $V_{22(1)}$

$$\begin{aligned} V_{22(1)} &= \begin{bmatrix} 0,81 - 0,945 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00268 & -0,11252 \\ -0,11252 & 116,15789 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,81 - 0,945 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1,08 - 0,945 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00268 & -0,11252 \\ -0,11252 & 116,15789 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,08 - 0,945 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,135 \\ 2,255 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 403,0653 & 0,3360 \\ 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,135 \\ 2,255 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,135 \\ -2,255 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 403,0653 & 0,3360 \\ 0,3360 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,135 \\ -2,255 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,135 \\ 2,255 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -53,6561 \\ -0,02483 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 53,6561 \\ 0,02483 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,135 \\ -2,255 \end{bmatrix} \\ &= 7,1875 + 7,1875 \\ &= 14,3750 \end{aligned}$$

Selanjutnya perhitungan untuk $V_{22(2)}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} V_{22(2)} &= \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00004 & 0,01059 \\ 0,01059 & 116,1578 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00004 & 0,01059 \\ 0,01059 & 116,1578 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4439 & -1,8558 \\ -1,8558 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 298,59 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4439 & -1,8558 \\ -1,8558 & 0,0091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 294,08 - 296,335 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,005 \\ 2,225 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -137,6715 \\ 0,0297 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,005 \\ -2,225 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 137,6715 \\ -0,0297 \end{bmatrix} \\ &= 0,75554 + 0,75554 \\ &= 1,5108. \end{aligned}$$

Selanjutnya menghitung $V_{22(3)}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
V_{22(3)} &= \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 0,81 - 0,945 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00003 & -0,00007 \\ -0,00007 & 0,00282 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 0,81 - 0,945 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 1,08 - 0,945 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0,00003 & -0,00007 \\ -0,00007 & 0,00282 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 1,08 - 0,945 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 0,81 - 0,945 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4439 & 597,0769 \\ 597,0769 & 403,0653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,02 - 0,025 \\ 0,81 - 0,945 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 1,08 - 0,945 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 26697,4439 & 597,0769 \\ 597,0769 & 403,0653 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,03 - 0,025 \\ 1,08 - 0,945 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0,005 \\ -0,135 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -173,9819 \\ -30,3198 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0014 \\ 0,2022 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 128,198 \\ 75,476 \end{bmatrix} \\
&= 8,7706 + 8,7706 \\
&= 17,5412.
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan $V_{i(j)}$ lanjut menghitung nilai E_j pada setiap variabel maka diperoleh

$$E_1 = |3,1160| - |14,3750| = -11,8325$$

$$E_2 = |3,1160| - |1,5108| = 1,6052$$

$$E_3 = |3,1160| - |17,5412| = -16,6715.$$

Lakukan perhitungan yang sama untuk setiap variabel pada setiap pengamatan ke-37, pengamatan ke-44 dan pengamatan ke-45. Sehingga didapatkan E_1, E_2 , dan E_3 yang disajikan pada tabel berikut, dengan menghilangkan simbol negative karena nilai E_j dihitung berdasarkan nilai absolutnya, sehingga tanda negatif tidak diperhitungkan. Yang menjadi perhatian adalah besarnya angka, bukan arah simpangannya, karena kedua nilai tersebut mencerminkan besarnya selisih antara nilai pengamatan dengan nilai yang seharusnya.

Tabel 4.3 Nilai E_j untuk Identifikasi Penyebab Penyimpangan Proses

Pengamatan Hari ke-	E_1	E_2	E_3	Variabel Utama Penyebab <i>Out Of</i> , <i>Control</i>
22	11,8325	1,6052	16,6715	Variabel Ke-3
37	3,0229	3,0229	3,0347	Variabel Ke-3
44	3,1897	3,2839	3,2218	Variabel Ke-2
45	2,8127	1,6598	1,6561	Variabel Ke-1

Berdasarkan hasil perhitungan nilai E_j pada Tabel 4.3, diperoleh bahwa variabel dengan nilai E_j terbesar merupakan variabel yang memberikan kontribusi paling dominan terhadap sinyal *out of control*. Pada pengamatan ke-22 dan ke-37, nilai terbesar terdapat pada E_3 , sehingga dapat diidentifikasi bahwa variabel ke-3 menjadi penyebab utama terjadinya penyimpangan proses.

Selanjutnya, pada pengamatan ke-44, nilai terbesar diperoleh pada E_2 . Hal ini menunjukkan bahwa variabel ke-2 merupakan faktor yang paling berkontribusi terhadap kondisi *out of control* pada kedua pengamatan tersebut. Sementara itu, pada pengamatan ke-45, nilai terbesar terdapat pada E_1 , yang mengindikasikan bahwa variabel ke-1 menjadi penyebab utama penyimpangan proses.

4. Diagram Ishikawa

Berdasarkan hasil analisis grafik pengendali Max-MEWMA pada Fase II yang menunjukkan adanya beberapa pengamatan dalam kondisi *out of control*, selanjutnya dilakukan analisis diagram Ishikawa untuk mengidentifikasi faktor-faktor penyebab ketidaksesuaian kualitas Gula Kristal Putih (GKP) di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang. Analisis ini mencakup tiga variabel kualitas yang diamati, yaitu kadar air (susutan pengeringan), besar jenis butir (BJB), dan warna larutan (ICUMSA).

Penyusunan diagram Ishikawa dilakukan berdasarkan hasil observasi lapangan, serta kajian literatur yang relevan dengan menggunakan pendekatan enam kategori 5M+1E.



Gambar 4.9 Diagram Ishikawa Ketidaksesuaian Kualitas GKP di PT PG Rajawali I

Berdasarkan Gambar 4.9, ketidaksesuaian kualitas GKP dipengaruhi oleh enam faktor utama, yaitu manusia, mesin, metode, material, pengukuran, dan lingkungan. Keenam faktor tersebut saling berkaitan dan dapat menyebabkan produk yang dihasilkan tidak memenuhi standar kualitas yang telah ditetapkan. Faktor manusia berkaitan dengan kemampuan dan kedisiplinan operator dalam menjalankan proses produksi. Beberapa penyebab yang ditemukan antara lain kurangnya pelatihan operator, kesalahan dalam membaca parameter kualitas, ketidakdisiplinan saat pengambilan sampel, kelelahan kerja pada shift malam, serta tidak dijalankannya prosedur kerja dengan baik. Kondisi tersebut dapat

meningkatkan risiko terjadinya kesalahan selama proses produksi maupun pengendalian kualitas.

Pada faktor mesin, penyebab yang ditemukan meliputi gangguan pada mesin kristalisasi, alat pengering yang tidak berfungsi dengan baik, pengaturan suhu penguapan yang tidak stabil, pengaturan RPM sentrifugal yang kurang tepat, serta kinerja mesin sentrifugal yang kurang optimal. Mesin yang tidak bekerja secara maksimal dapat menghambat proses produksi dan memengaruhi kualitas gula yang dihasilkan.

Faktor metode berhubungan dengan pelaksanaan tahapan proses produksi. Beberapa permasalahan yang ditemukan yaitu proses pemurnian yang tidak optimal, waktu kristalisasi yang tidak konsisten, sulfitasi berlebih, proses pengeringan yang tidak sesuai standar, dan siklus pencucian kristal yang kurang optimal. Ketidaksesuaian pada tahap ini dapat menyebabkan perubahan warna, ukuran kristal, maupun tingkat kemurnian gula.

Faktor material berasal dari kualitas bahan baku tebu yang digunakan. Rendahnya kualitas tebu, tingginya kadar air akibat curah hujan, kematangan tebu yang tidak seragam, adanya bahan asing, rendemen yang berbeda antar wilayah, serta lamanya waktu tunggu sebelum penggilingan menjadi beberapa penyebab yang berpotensi memengaruhi kualitas produk akhir.

Faktor pengukuran berkaitan dengan keakuratan data kualitas yang diperoleh. Permasalahan yang ditemukan meliputi kalibrasi alat yang kurang akurat, kesalahan pencatatan hasil pengujian, perbedaan metode pengambilan sampel, frekuensi kalibrasi yang tidak sesuai jadwal, dan ketidakpastian hasil pengujian laboratorium. Apabila proses pengukuran tidak dilakukan dengan

baik, hasil pengendalian kualitas dapat menjadi kurang tepat.

Selain itu, faktor lingkungan juga turut memengaruhi kualitas GKP. Beberapa penyebab yang teridentifikasi adalah pencemaran udara di area produksi, kondisi penyimpanan yang tidak standar, musim hujan yang menurunkan kualitas tebu, kelembaban udara yang tinggi, serta suhu ruang produksi yang tidak terkontrol. Lingkungan produksi yang kurang mendukung dapat menyebabkan perubahan kualitas gula selama proses produksi maupun penyimpanan.

Berdasarkan hasil analisis Diagram Ishikawa, dapat diketahui bahwa ketidaksesuaian kualitas GKP tidak disebabkan oleh satu faktor saja, melainkan oleh berbagai faktor yang saling memengaruhi. Oleh karena itu, perbaikan perlu dilakukan pada seluruh aspek yang terlibat dalam proses produksi agar kualitas GKP yang dihasilkan dapat lebih konsisten dan sesuai dengan standar yang ditetapkan.

4.6 Analisis Kapabilitas Proses Produksi Gula Kristal Putih

Kapabilitas proses digunakan untuk mengetahui bagaimana kinerja proses produksi suatu perusahaan secara keseluruhan dalam memenuhi batas spesifikasi yang sudah ditentukan. Pada penelitian ini, analisis kapabilitas proses dilakukan secara multivariat dengan mempertimbangkan keterkaitan antar variabel kualitas. Perhitungan kapabilitas menggunakan parameter rata-rata vektor dan matriks kovariansi yang diperoleh dari data Fase I yang telah berada dalam kondisi terkendali, sehingga mencerminkan kondisi proses yang stabil secara statistik.

Selanjutnya, dilakukan perhitungan simpangan baku masing-masing variabel yang diperoleh dari akar diagonal matriks kovariansi sebagai ukuran

variasi proses. Batas spesifikasi bawah (LSL) dan batas spesifikasi atas (USL) ditentukan berdasarkan standar SNI untuk kategori GKP 2. Sehingga

Tabel 4.4 Nilai LSL dan USL yang digunakan pabrik berdasarkan SNI GKP 2

Variabel	LSL	USL
Kadar air	0%	0,1%
Besar Jenis Butir	0,8 mm	1,2 mm
Warna Larutan	201 IU	300 IU

Setelah itu gunakan parameter pada Fase I dengan Σ_0 dan μ_0 pada Persamaan (4.15). Setelah itu hitung standar deviasi (σ) yang diperoleh dari akar diagonal matriks kovariansi hasil Fase I

$$S_1 = \sqrt{0,00004} \approx 0,0063$$

$$S_2 = \sqrt{0,00268} \approx 0,0517$$

$$S_3 = \sqrt{116,15789} \approx 10,7776$$

perhitungan indeks kapabilitas proses dilakukan menggunakan pendekatan multivariat, yaitu dengan menghitung nilai indeks kapabilitas (C_{pk}) untuk setiap variabel. Untuk variabel dengan dua batas spesifikasi digunakan nilai minimum antara jarak ke batas atas dan batas bawah, sedangkan untuk variabel dengan satu batas spesifikasi hanya digunakan satu sisi perhitungan.

Selanjutnya menghitung C_{pk} menggunakan Persamaan 2.32 untuk setiap variabel. Variabel kadar air merupakan karakteristik dengan batas spesifikasi satu sisi (*upper specification limit*), sehingga perhitungan indeks kapabilitas hanya menggunakan batas atas. Perhitungan $C_{pk}(X_1)$ untuk variabel kadar air sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C_{pk}(X_1) &= \frac{0,1 - 0,0316}{3(0,0063)} \\
 &= \frac{0,0684}{0,0189} \approx 3,62.
 \end{aligned}$$

Perhitungan $C_{pk}(X_2)$ untuk variabel besar jenis butir sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C_{pk}(X_2) &= \min\left(\frac{USL_2 - \bar{X}_2}{3S_2} - \frac{\bar{X}_2 - LSL_2}{3S_2}\right) \\
 &= \min\left(\frac{1,2 - 0,8769}{3(0,0517)}, \frac{0,8769 - 0,8}{3(0,0517)}\right) = \min\left(\frac{0,3231}{0,1551}, \frac{0,0769}{0,1551}\right) \\
 &= \min(2,08, 0,49) \\
 &= 0,49.
 \end{aligned}$$

Perhitungan $C_{pk}(X_3)$ untuk variabel warna larutan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C_{pk}(X_3) &= \min\left(\frac{USL_3 - \bar{X}_3}{3S_3} - \frac{\bar{X}_3 - LSL_3}{3S_3}\right) \\
 &= \min\left(\frac{300 - 293,0873}{3(10,7776)}, \frac{293,0873 - 201}{3(10,7776)}\right) = \min\left(\frac{6,9127}{32,33}, \frac{92,1408}{32,33}\right) \\
 &= \min(0,21, 2,8) \\
 &= 0,21
 \end{aligned}$$

Setelah itu menghitung MC_{pk} mengacu pada Persamaan 2.31

$$\begin{aligned}
 MC_{pk} &= w_1 C_{pk}(X_1) + w_2 C_{pk}(X_2) + w_3 C_{pk}(X_3) \\
 &= 3,62 \cdot \frac{1}{3} + 0,49 \cdot \frac{1}{3} + 0,21 \cdot \frac{1}{3} \\
 &= 1,44
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai indeks kapabilitas setiap variabel untuk variabel kadar air sebesar 3,62, variabel berat jenis butir sebesar 0,49, dan variabel warna larutan sebesar 0,21. Selanjutnya, indeks kapabilitas proses multivariat (MC_{pk}) dihitung menggunakan rata-rata tertimbang dari seluruh indeks kapabilitas setiap variabel, sehingga diperoleh nilai sebesar 1,44. Nilai tersebut menunjukkan bahwa nilai gabungan menunjukkan proses produksi telah kapabel dalam memenuhi batas spesifikasi yang ditetapkan, karena MC_{pk} berada di

atas nilai 1,33. Namun demikian, secara karakteristik proses belum sepenuhnya kapabel karena berat jenis butir dan warna larutan, yang masing-masing memiliki nilai indeks kapabilitas kurang dari 1. Variabel warna larutan merupakan variabel dengan nilai indeks kapabilitas terendah, sehingga diduga menjadi faktor yang paling dominan dalam memengaruhi ketidaksesuaian kualitas produk. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun secara keseluruhan proses telah memenuhi kriteria kapabilitas, masih diperlukan perbaikan terarah pada variabel-variabel tertentu agar kestabilan dan konsistensi kualitas produk dapat ditingkatkan.

Perlu diketahui bahwa hingga saat ini belum terdapat kriteria baku yang secara khusus digunakan untuk menginterpretasikan indeks kapabilitas proses multivariat (MC_{pk}) dalam literatur. Oleh karena itu, dalam penelitian ini interpretasi MC_{pk} mengacu pada kriteria indeks kapabilitas univariat, yaitu nilai $\geq 1,33$ menunjukkan proses kapabel, sedangkan nilai < 1 menunjukkan proses belum kapabel. Berdasarkan hasil analisis kapabilitas proses, dapat disimpulkan bahwa proses produksi secara umum berada dalam kondisi kapabel. Namun demikian, masih ditemukan adanya ketidaksesuaian pada beberapa pengamatan terhadap batas spesifikasi SNI kategori gula kristal putih, yang mengindikasikan adanya variasi khusus (*assignable cause*) yang menyebabkan sebagian kecil produk belum memenuhi standar mutu.

4.7 Interpretasi Hasil Pemantauan Proses

Berdasarkan hasil analisis pada Fase I, diperoleh bahwa proses produksi gula kristal putih pada awalnya belum berada dalam kondisi terkendali secara statistik. Hal ini ditunjukkan oleh adanya beberapa titik pengamatan yang melebihi batas kendali atas (*Upper Control Limit/UCL*), yaitu sebesar 2,9383, yang

mengindikasikan adanya penyebab khusus (*assignable cause*) yang memengaruhi kestabilan proses, baik dari sisi rata-rata maupun variabilitas karakteristik kualitas.

Setelah dilakukan perbaikan dengan mengeluarkan titik-titik yang berada di luar batas kendali dan dilakukan perhitungan ulang, diperoleh kondisi proses yang berada dalam keadaan terkendali (*in control*), di mana seluruh nilai statistik berada di bawah batas kendali. Hal ini menunjukkan bahwa parameter proses yang dihasilkan pada Fase I, yaitu vektor rata-rata dan matriks kovariansi, telah representatif dalam menggambarkan kondisi proses yang stabil dan dapat digunakan sebagai dasar monitoring pada Fase II.

Pada Fase II, hasil pemantauan menunjukkan bahwa sebagian besar titik pengamatan berada di bawah nilai UCL, sehingga proses produksi dapat dikatakan relatif terkendali. Namun demikian, masih terdapat beberapa titik pengamatan yang melebihi batas kendali, yang mengindikasikan adanya gangguan proses yang perlu segera diidentifikasi. Berdasarkan hasil diagnosis menggunakan statistik Max-MEWMA, penyimpangan tersebut disebabkan oleh pergeseran rata-rata (*mean shift*), dan perubahan variabilitas (*variance shift*).

Secara spesifik, variabel warna larutan (ICUMSA) menunjukkan tingkat variasi yang lebih tinggi dibandingkan variabel lainnya dan menjadi penyumbang utama kondisi *out of control*. Hal ini diperkuat oleh hasil analisis kapabilitas proses yang menunjukkan bahwa variabel warna larutan memiliki nilai indeks kapabilitas sebesar 3,62 yang merupakan nilai terbesar dibandingkan variabel besar jenis butir dan warna larutan. Nilai tersebut berada di bawah kriteria kapabilitas proses ($C_{pk} < 1$), sehingga menunjukkan bahwa proses belum mampu memenuhi spesifikasi kualitas yang ditetapkan secara konsisten. Sementara itu, variabel kadar air dan

besar jenis butir menunjukkan tingkat kestabilan yang relatif lebih baik, meskipun tetap perlu diawasi untuk menjaga konsistensi kualitas produk.

Hasil grafik pengendali X-bar Gambar 4.2 menunjukkan bahwa variabel berat jenis (variabel ke-2) mengalami kondisi *out of control* pada pengamatan ke-1, sedangkan variabel warna larutan (variabel ke-3) mengalami kondisi *out of control* pada pengamatan ke-17, ke-18, ke-19, dan ke-20. Hasil tersebut memiliki keterkaitan dengan grafik pengendali Max-MEWMA Fase II Gambar 4.7, di mana pengamatan ke-1, dan ke-44 didominasi oleh variabel ke-2, pengamatan ke-20, ke-37, dan ke-22 didominasi oleh variabel ke-3, serta pengamatan ke-45 didominasi oleh variabel ke-1. Kesesuaian tersebut menunjukkan bahwa titik *out of control* pada grafik Max-MEWMA dapat ditelusuri sumber penyebabnya melalui grafik X-bar masing-masing variabel. Pada pengamatan ke-1, sinyal pada grafik Max-MEWMA dipengaruhi oleh variabel berat jenis yang juga keluar batas kendali pada grafik X-bar. Begitu pula pada pengamatan ke-20 dan ke-22, dominansi variabel warna larutan sejalan dengan adanya beberapa titik *out of control* pada grafik X-bar warna larutan. Selain itu, terdapat beberapa pengamatan pada grafik Max-MEWMA yang terdeteksi didominasi oleh variabel tertentu meskipun pada grafik X-bar masih berada dalam batas kendali. Kondisi ini menunjukkan bahwa grafik Max-MEWMA lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran kecil (*small shift*) secara multivariat dibandingkan grafik X-bar yang hanya memantau masing-masing variabel secara terpisah. Dengan demikian, penggunaan grafik pengendali Max-MEWMA mampu memberikan deteksi yang lebih dini terhadap perubahan proses produksi gula kristal putih dibandingkan grafik pengendali X-bar.

Hasil analisis ini menunjukkan bahwa grafik pengendali Max-MEWMA

mampu mendeteksi pergeseran kecil pada proses produksi secara sensitif dibandingkan metode konvensional, karena mampu memantau rata-rata dan variabilitas secara simultan dalam konteks multivariat.

Meskipun proses produksi telah berada dalam kondisi terkendali secara statistik (*in control*), hasil analisis kapabilitas menunjukkan bahwa tidak seluruh karakteristik kualitas memenuhi spesifikasi yang ditetapkan. Nilai indeks kapabilitas proses multivariat (MC_{pk}) sebesar 1,44 mengindikasikan bahwa secara keseluruhan proses telah kapabel, namun secara satu persatu masih terdapat variabel yang belum memenuhi kriteria kapabilitas, yaitu berat jenis butir dan warna larutan. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun variasi proses sudah stabil dan didominasi oleh penyebab umum (*common cause*), tingkat variabilitasnya masih relatif besar terhadap batas spesifikasi, sehingga diperlukan upaya perbaikan berkelanjutan untuk meningkatkan konsistensi kualitas produk.

Secara keseluruhan, penerapan grafik pengendali Max-MEWMA terbukti efektif dalam mendeteksi dan memantau kestabilan proses produksi gula kristal putih, serta mampu mengidentifikasi penyimpangan proses secara dini. Dengan demikian, metode ini dapat digunakan sebagai alat bantu yang optimal dalam pengendalian kualitas berbasis statistik.

4.8 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Pada BAB I Subbab 1.1 telah dijelaskan integrasi topik penelitian dengan Surah Asy-Syu'ara [26]: 181–183, yang menegaskan perintah untuk menyempurnakan takaran dan timbangan serta larangan untuk merugikan pihak lain. Ayat tersebut memberikan landasan nilai bahwa setiap proses produksi harus dilakukan secara jujur, adil, dan bertanggung jawab. Konsep ini relevan dengan

pengendalian kualitas dalam proses produksi gula, khususnya dalam menjaga kestabilan dan kesesuaian mutu produk.

Berdasarkan integrasi tersebut dan dikaitkan dengan penerapan grafik pengendali *Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (Max-MEWMA), maka diperoleh beberapa manfaat sebagai berikut:

1. Ketakwaan

Ketakwaan tercermin dalam upaya menjalankan proses produksi sesuai dengan ketentuan dan standar yang telah ditetapkan. Penerapan grafik pengendali Max-MEWMA membantu memastikan proses produksi gula berada dalam kondisi terkendali, sehingga produsen dapat menjalankan amanah produksi dengan penuh tanggung jawab sebagai bentuk ketaatan kepada Allah SWT.

2. Kejujuran

Surah Asy-Syu'ara [26]: 181–183 menekankan pentingnya kejujuran dalam takaran dan timbangan. Grafik pengendali Max-MEWMA berfungsi sebagai alat statistik yang objektif dalam mendeteksi penyimpangan proses, sehingga kualitas produk yang dihasilkan dapat disampaikan secara jujur sesuai dengan kondisi sebenarnya dan tidak merugikan konsumen.

3. Keadilan

Penerapan pengendalian kualitas menggunakan grafik Max-MEWMA membantu menjaga konsistensi mutu produk gula. Hal ini mencerminkan prinsip keadilan dalam Islam, yaitu memberikan hak konsumen dengan menghasilkan produk yang sesuai standar serta mencegah beredarnya produk yang tidak memenuhi spesifikasi kualitas.

4. Tanggung Jawab dan Profesionalisme

Integrasi nilai Al-Qur'an dalam penelitian ini menumbuhkan kesadaran bahwa penerapan metode statistik merupakan bagian dari tanggung jawab profesional. Dengan adanya pemantauan proses secara berkelanjutan melalui grafik pengendali Max-MEWMA, tindakan perbaikan dapat dilakukan secara tepat waktu sehingga proses produksi berjalan secara efektif, efisien, dan beretika.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada Bab IV mengenai pengendalian kualitas proses produksi gula kristal putih di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pengendalian kualitas proses produksi gula kristal putih di PT PG Rajawali I Kabupaten Malang menggunakan grafik pengendali Max-MEWMA menunjukkan bahwa:
 - a. Pada Fase I, proses produksi awalnya berada dalam kondisi tidak terkendali (*out of control*), yang ditunjukkan oleh adanya sebanyak 9 titik pengamatan yang melebihi batas kendali atas (UCL) sebesar 2,9383. Setelah dilakukan perbaikan dengan mengeluarkan titik-titik penyebab ketidakterkendalian, diperoleh seluruh titik pengamatan berada di bawah UCL, sehingga proses dinyatakan telah terkendali secara statistik (*in control*). Perbaikan dilakukan sebanyak 3 kali. Parameter yang dihasilkan pada Fase I selanjutnya digunakan sebagai dasar untuk tahap monitoring.
 - b. Berdasarkan hasil analisis pada Fase II, teridentifikasi beberapa pengamatan yang berada dalam kondisi *out of control*, yaitu pada pengamatan ke-1, ke-20, ke-22, ke-37, ke-44, dan ke-45. Hasil perhitungan kontribusi variabel melalui nilai D_j dan E_j menunjukkan bahwa setiap sinyal penyimpangan dipengaruhi oleh variabel yang berbeda. Pada

pengamatan ke-1, variabel ke-2 (berat jenis butir) memberikan kontribusi terbesar terhadap penyimpangan proses, sedangkan pada pengamatan ke-20, ke-22, dan ke-37 didominasi oleh variabel ke-3 (warna larutan). Selanjutnya, pada pengamatan ke-44, variabel ke-2 kembali menjadi faktor utama, dan pada pengamatan ke-45 penyimpangan dipengaruhi oleh variabel ke-1 (kadar air). Hal ini menunjukkan bahwa penyebab ketidakterkendalian proses tidak berasal dari satu variabel saja, melainkan dipengaruhi oleh beberapa variabel yang berbeda pada setiap waktu pengamatan.

2. Berdasarkan analisis kapabilitas proses, diperoleh nilai indeks kapabilitas parsial untuk variabel kadar air sebesar 3,62, besar jenis butir sebesar 0,49, dan warna larutan sebesar 0,21, serta nilai indeks kapabilitas multivariat (MC_{pk}) sebesar 1,44. Nilai tersebut menunjukkan bahwa secara keseluruhan proses produksi telah kapabel karena $MC_{pk} > 1,33$. Namun demikian, ketika dilihat satu persatu masih terdapat variabel yang belum kapabel, yaitu besar jenis butir dan warna larutan (nilai < 1), dengan variabel warna larutan menjadi faktor dominan yang memengaruhi ketidakkonsistenan kualitas produk.

Secara keseluruhan, penerapan grafik pengendali Max-MEWMA efektif digunakan dalam pengendalian kualitas proses produksi gula kristal putih, karena mampu mendeteksi penyimpangan proses secara dini dan memberikan informasi yang komprehensif terkait kondisi proses, sehingga dapat mendukung pengambilan keputusan dalam peningkatan kualitas produksi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada penelitian ini, penulis memberikan saran agar dapat lebih baik sebagai berikut

1. Perusahaan disarankan menggunakan hasil penelitian ini sebagai bahan evaluasi dalam pengendalian kualitas proses produksi gula, khususnya pada karakteristik kualitas yang diamati.
2. Pengendalian kualitas perlu dilakukan secara berkala menggunakan data produksi terkini agar penyimpangan proses dapat dideteksi lebih cepat dan tindakan perbaikan dapat segera dilakukan.
3. Perusahaan disarankan untuk memfokuskan upaya pengendalian kualitas pada variabel warna larutan dan Besar Jenis Butir (BJB) karena kedua variabel tersebut memberikan kontribusi terhadap kondisi proses yang berada di luar kendali statistik. Perbaikan dapat dilakukan melalui evaluasi proses pemurnian, peningkatan pengawasan selama produksi, serta kalibrasi alat ukur secara berkala.
4. Analisis lanjutan terhadap faktor-faktor penyebab variasi proses perlu dilakukan untuk meminimalkan potensi penyimpangan kualitas sehingga proses produksi dapat berjalan lebih stabil dan optimal.
5. Penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan penggunaan nilai parameter pembobot (λ) yang berbeda pada grafik pengendali Max-MEWMA untuk mengkaji sensitivitas metode dalam mendeteksi pergeseran proses.
6. Penelitian selanjutnya dapat menggunakan jumlah variabel kualitas, ukuran subgrup, atau periode pengamatan yang berbeda guna menguji konsistensi dan kinerja grafik pengendali Max-MEWMA pada berbagai kondisi data.

7. Penelitian selanjutnya juga dapat membandingkan metode Max-MEWMA dengan metode pengendalian kualitas multivariat lainnya, seperti MEWMA atau Hotelling's T^2 , untuk memperoleh metode yang paling efektif dalam mendeteksi ketidakstabilan proses.

DAFTAR PUSTAKA

- Andini, E., Sudarno, S., & Rahmawati, R. (2021). Penerapan Metode Pengendalian Kualitas MEWMA Berdasarkan Arl dengan Pendekatan Rantai Markov (Studi Kasus: Batik Semarang 16, Meteseh). *Jurnal Gaussian*, 10(1), 125–135. <https://doi.org/10.14710/j.gauss.v10i1.30939>
- Arinda, A. (2016). *Penerapan Diagram Kontrol Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) Pada Pengendalian Karakteristik Kualitas Air (Studi Kasus: Instalasi Pengolahan Air III PDAM Tirta Moedal Kota Semarang)*. 5, 31–40.
- Bartlett, M. S. (1951). The Effect of Standardization on a 2 Approximation in Factor Analysis. *Biometrika*, 38, 337–344.
- Cahyaningtyas, A., & Sugiyanto, Fx. (2023). Demand Analysis of White Crystal Sugar in Indonesia. *Jurnal Ilmu Ekonomi dan Pembangunan*, 23(2), 88. <https://doi.org/10.20961/jiep.v23i2.62073>
- Chen, G., Cheng, S. W., & Xie, H. (2005). A new multivariate control chart for monitoring both location and dispersion. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 34(1), 203–217. <https://doi.org/10.1081/SAC-200047087>
- Fachrizal, W. (2020). *Pengendalian Kualitas Garam Konsumsi Beryodium Di Pt Garam (Persero) Menggunakan Diagram Maximum Multivariate Exponential Weighted Moving Average (Max-MEWMA)*.
- Fahlevi, R., Yasin, H., & Ispriyanti, D. (2020). Komputasi Metode Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) untuk Pengendalian Kualitas Proses Produksi Menggunakan Gui Matlab (Studi Kasus: PT. Pismatex Textile Industry Pekalongan). *Jurnal Gaussian*, 9(3), 283–291. <https://doi.org/10.14710/j.gauss.v9i3.28908>
- Frangkamon, B., Nasution, Y. N., & Purnamasari, I. (2019). Penggunaan Weighted Probabilistic Neural Network (WPNN) Dalam Klasifikasi Data Berat Bayi Lahir Berdasarkan Usia Ibu, Jarak Paritas dan Masa Gestasi. *Prosiding Seminar Nasional Matematika, Statistika, dan Aplikasinya 2019 Universitas Mulawarman, Samarinda*, 1–7.
- Garcia, A. R., Filipe, S. B., Fernandes, C., Estevão, C., & Ramos, G. (2019). *Pengendalian Kualitas Produk Billet Baja KS1008 Di PT Krakatau Steel, Cilegon Menggunakan Grafik Kendali Max-MEWMA*.
- Ghashghaei, R., & Amiri, A. (2017). Maximum multivariate exponentially weighted moving average and maximum multivariate cumulative sum control charts for simultaneous monitoring of mean and variability of multivariate multiple linear regression profiles. *Scientia Iranica*, 24(5), 2605–2622.

<https://doi.org/10.24200/sci.2017.4385>

Hartatie, D., & Safira, Z. B. (2022). Efektivitas Ekstrak Daun Kelor terhadap Pertumbuhan Bibit Tebu (*Saccharum officinarum* L.) Varietas VMC 86-550 pada Metode Bud Set. *Jurnal Ilmiah Inovasi*, 22(1), 84–89. <https://doi.org/10.25047/jii.v22i1.3123>

Heizer, J., & Render, B. (2011). *Operations Management (10th ed.)*.

Herlina, E., Prabowo, F. H. E., & Nuraida, D. (2021). Analisis Pengendalian Mutu Dalam Meningkatkan Proses Produksi. *Jurnal Fokus Manajemen Bisnis*, 11(2), 173. <https://doi.org/10.12928/fokus.v11i2.4263>

H.R Imam Thabrani (891) dan Imam Baihaqi (334).

Irsyad, T., Wuryandini, E., Yunus, M., & Hadi, D. P. (2020). Analisis Keaktifan Mahasiswa dalam Proses Pembelajaran Statistika Multivariat. *Jurnal Pendidikan Ekonomi Undiksha*, 12(1), 89. <https://doi.org/10.23887/jjpe.v12i1.24294>

Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical*. Dalam *New Jersey : Prentice Hall*.

Kemenag. (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta: Kemenag RI.

Kristiyanti, H. L. A., Setiyawan, A., & Poerwati, T. (2024). Faktor yang Mempengaruhi Penentuan Lokasi Kawasan Pabrik Gula Kreet Baru, Kabupaten Malang. *Urban Planning, Spatial, Culture, Landscape, Environment and Social studies*, 1(1), 49–60. <https://doi.org/10.36040/upscales.v1i1.10034>

Mahendra, A. R., Mufid, Ramadhan, P. J., & Handayani, M. (2023). Analisis Kebutuhan Luas Permukaan Pemanas Juice Heater Ii Pada Stasiun Pemurnian Pabrik Gula Kreet Baru Ii Malang. *DISTILAT: Jurnal Teknologi Separasi*, 9(4), 580–586. <https://doi.org/10.33795/distilat.v9i4.4210>

Montgomery, D. c. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control* (Vol. 17).

Pan, J.-N., Li, C.-I. L., & Shih, W.-C. (2016). *New multivariate process capability indices for measuring the performance of multivariate processes subject to non-normal distributions*. <https://doi.org/10.1108/IJQRM-12-2013-0195>

Putri, R. S. W. (2012). *The effect of sea water abrasion on concrete with sugar based additives in terms of specific gravity, compressive strength, and porosity*.

Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1, 239–250.

Sari, R. S. (2024). Penentuan Warna Pada Gula Kristal Rafinasi Dengan Metode

- Icumsa Untuk Jenis Gula R1 Dan R2 Pada Pt. Xyz. *Jurnal Teknologi Pertanian*, 13(1), 20–26. <https://doi.org/10.32520/jtp.v13i1.3177>
- Sholiha, L., & Syaichu, A. (2019). Analisa Pengendalian Kualitas Produk Gula Kristal Putih Dengan Metode Seven Tools Lailatus Sholiha, Achmad Syaichu 6. *jurnal Ilmu - Ilmu Teknik - Sistem*, 13(1), 50–58.
- Susetyo, J., Yusuf, M., & Geriot, J. (2020). Pengendalian Kualitas Produk Gula Dengan Metode Statistical Processing Control (Spc) Dan Failure Mode and Efect Analysis (Fmea). *Jurnal Teknologi*, 13, 127–135.
- Wijaya, H. P. (2023). *Pengaruh Kualitas Pelayanan, Kualitas Produk Dan Harga Terhadap Kepuasan Pelanggan CV Cahaya Konveksi Klaten*. hlm. 70-72.
- Wilberta, N., Sonya, N. T., & Lydia, S. H. R. (2021). Analisis Kandungan Gula Reduksi pada Gula Semut Dari Nira Aren yang Dipengaruhi PH dan Kadar Air. *Bioedukasi (Jurnal Pendidikan Biologi)*, 12(1), 101. <https://doi.org/10.24127/bioedukasi.v12i1.3760>
- Zacharias, M. (2022). The Importance of Quality Control for The Success of A Company. *Asian Journal of Logistics Management*, 1(2), 99–106. <https://doi.org/10.14710/ajlm.2022.16787>

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Karakteristik Kualitas Gula

	Pengamatan Hari ke-	Sampel	Variabel		
			Kadar Air (%)	BJB (mm)	Warna Larutan (IU)
I	1	1	0,04	0,96	296,71
		2	0,04	0,92	294,43
	2	1	0,04	0,83	298,41
		2	0,05	0,84	297,20
	3	1	0,03	0,86	297,20
		2	0,04	0,97	295,32
	4	1	0,04	0,80	296,12
		2	0,04	1,02	298,67
	5	1	0,03	0,87	296,15
		2	0,03	0,91	296,74
	6	1	0,03	0,87	296,85
		2	0,03	0,96	297,57
	7	1	0,03	0,96	295,98
		2	0,03	0,85	298,42
	8	1	0,03	0,87	295,03
		2	0,03	0,88	254,57
	9	1	0,04	0,80	297,10
		2	0,03	0,91	295,03
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	45	1	0,02	0,92	295,45
		2	0,03	0,82	292,31
II	1	1	0,03	0,96	299,60
		2	0,03	1,18	296,01
	2	1	0,03	0,82	295,84
		2	0,03	0,93	298,03
	3	1	0,04	0,84	295,32
		2	0,04	0,84	297,10
	4	1	0,03	0,95	296,00
		2	0,03	0,90	298,43
	5	1	0,03	0,83	298,28
		2	0,03	0,92	295,82
	6	1	0,03	0,87	296,10
		2	0,04	0,87	298,55
	7	1	0,04	0,94	298,08
		2	0,03	0,84	294,06
	8	1	0,04	0,85	295,55
		2	0,03	0,86	296,42
	9	1	0,03	0,84	298,40
		2	0,03	0,80	297,30
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	45	1	0,02	0,92	295,45
		2	0,03	0,82	292,31

Lampiran 2. Hasil Perhitungan Jarak Mahalanobis

Fase	Pengamatan Hari ke-	Nilai D_i^2	$D_i^2 \leq \chi_{\alpha,df}^2$
I	1	4,5258	0
	2	5,3420	0
	3	1,3299	0
	4	3,1291	0
	5	0,5184	0
	6	1,1168	0
	7	0,8454	0
	8	0,7946	0
	9	0,4813	0
	10	6,0060	0
	11	0,6587	0
	12	1,1152	0
	13	3,0053	0
	14	16,3981	1
	15	12,6808	1
	16	1,2212	0
	17	1,5813	0
	18	2,4352	0
	19	3,3108	0
	20	0,6645	0
	21	0,5935	0
	⋮	⋮	⋮
	45	1,8634	0
II	1	13,7595	1
	2	0,1868	0
	3	1,4344	0
	4	1,1983	0
	5	0,1965	0
	6	0,3826	0
	7	0,4637	0
	8	0,5392	0
	9	1,1418	0
	10	0,3835	0
	11	1,1407	0
	12	0,0763	0
	13	0,8019	0
	14	0,7627	0
	15	0,9915	0
	16	0,4109	0
	17	14,8621	1
	18	2,7580	0
	19	7,0884	0
	20	23,7814	1
	21	0,6065	0
	⋮	⋮	⋮
	45	0,7573	0

Lampiran 3. Perhitungan M_i Fase I

No	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	M_i
1	1,8610	1,8610	-1,6832	1,6832	1,8610
2	2,9702	2,9702	-1,3294	1,3294	2,9702
3	2,6975	2,6975	-0,3981	0,3981	2,6975
4	3,5056	3,5056	0,9796	0,9796	3,5056
5	2,4041	2,4041	-0,3446	0,3446	2,4041
6	2,0867	2,0867	-0,5466	0,5466	2,0867
7	1,9161	1,9161	-0,4644	0,4644	1,9161
8	0,3446	0,3446	0,0294	0,0294	0,3446
9	0,0414	0,0414	0,2482	0,2482	0,2482
10	2,0232	2,0232	1,6608	1,6608	2,0232
11	1,8332	1,8332	0,2876	0,2876	1,8332
12	1,7442	1,7442	-0,0322	0,0322	1,7442
13	0,9626	0,9626	-0,0056	0,0056	0,9626
14	2,2921	2,2921	1,4221	1,4221	2,2921
15	4,6245	4,6245	2,0502	2,0502	4,6245
16	3,6745	3,6745	-0,1754	0,1754	3,6745
17	1,9685	1,9685	-1,3994	1,3994	1,9685
18	1,7574	1,7574	-1,3664	1,3664	1,7574
19	0,7455	0,7455	-0,3037	0,3037	0,7455
20	-0,0956	0,0956	-0,4202	0,4202	0,4202
21	-0,2665	0,2665	-3,4003	3,4003	3,4003
22	-0,3643	0,3643	-2,8500	2,8500	2,8500
23	-0,1710	0,1710	-3,3267	3,3267	3,3267
24	0,1270	0,1270	-3,7078	3,7078	3,7078
25	0,6001	0,6001	-3,2034	3,2034	3,2034
26	2,7620	2,7620	-1,4600	1,4600	2,7620
27	2,3275	2,3275	-1,3069	1,3069	2,3275
28	1,4007	1,4007	-1,0774	1,0774	1,4007
29	-0,0742	0,0742	-2,7727	2,7727	2,7727
30	-0,9272	0,9272	-2,3967	2,3967	2,3967
31	-3,3195	3,3195	-2,3310	2,3310	3,3195
32	-1,5451	1,5451	-2,1038	2,1038	2,1038
33	-1,2895	1,2895	-0,3639	0,3639	1,2895
34	0,7962	0,7962	-2,4868	2,4868	2,4868
35	1,1489	1,1489	-1,6338	1,6338	1,6338
36	1,3226	1,3226	-1,1631	1,1631	1,3226
37	0,7115	0,7115	-1,4840	1,4840	1,4840
38	0,4046	0,4046	-1,3271	1,3271	1,3271
39	0,6535	0,6535	-0,7874	0,7874	0,7874
40	0,4227	0,4227	-0,8911	0,8911	0,8911
41	-0,0767	0,0767	0,0764	0,0764	0,0767
42	-1,3284	1,3284	0,0074	0,0074	1,3284
43	-0,6016	0,6016	-0,1708	0,1708	0,6016
44	0,4112	0,4112	-0,1407	0,1407	0,4112
45	-0,0788	0,0788	0,0678	0,0678	0,0788

Lampiran 4. Perhitungan M_i Fase I Perbaikan 1

No	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	M_i
1	1,9029	1,9029	-1,6278	1,6278	1,9029
2	2,0700	2,0700	-0,3891	0,3891	2,0700
3	1,3133	1,3133	-1,4547	1,4547	1,4547
4	1,5248	1,5248	-1,3403	1,3403	1,5248
5	1,6229	1,6229	-1,0235	1,0235	1,6229
6	0,0681	0,0681	-0,4302	0,4302	0,4302
7	-0,4044	0,4044	-0,1454	0,1454	0,4044
8	1,9276	1,9276	1,4517	1,4517	1,9276
9	1,7386	1,7386	0,1429	0,1429	1,7386
10	1,5783	1,5783	-0,2345	0,2345	1,5783
11	0,5810	0,5810	-0,2288	0,2288	0,5810
12	2,0324	2,0324	1,2216	1,2216	2,0324
13	0,9294	0,9294	-0,2579	0,2579	0,9294
14	0,8438	0,8438	-0,5339	0,5339	0,8438
15	-0,5351	0,5351	0,2357	0,2357	0,5351
16	-0,9197	0,9197	-0,0550	0,0550	0,9197
17	-0,5461	0,5461	-0,2301	0,2301	0,5461
18	3,2234	3,2234	0,8538	0,8538	3,2234
19	2,6722	2,6722	0,4588	0,4588	2,6722
20	1,6667	1,6667	0,3203	0,3203	1,6667
21	0,2210	0,2210	-1,6464	1,6464	1,6464
22	-0,5065	0,5065	-1,5599	1,5599	1,5599
23	-0,5743	0,5743	-1,5695	1,5695	1,5695
24	-0,0356	0,0356	-0,0815	0,0815	0,0815
25	0,6293	0,6293	-2,2690	2,2690	2,2690
26	1,2353	1,2353	-1,5076	1,5076	1,5076
27	1,7444	1,7444	-1,1470	1,1470	1,7444
28	0,9414	0,9414	-1,4444	1,4444	1,4444
29	0,7786	0,7786	-1,3646	1,3646	1,3646
30	0,5787	0,5787	-0,8588	0,8588	0,8588
31	0,5944	0,5944	-1,0352	1,0352	1,0352
32	0,3681	0,3681	-0,0436	0,0436	0,3681
33	-1,0048	1,0048	-0,1472	0,1472	1,0048
34	-0,2604	0,2604	-0,3583	0,3583	0,3583
35	0,5744	0,5744	-0,3272	0,3272	0,5744
36	-0,2034	0,2034	-0,1123	0,1123	0,2034

Lampiran 5. Perhitungan M_i Fase I Perbaikan 2

No	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	M_i
1	1,8321	1,8321	-1,6453	1,6453	1,8321
2	1,9485	1,9485	-0,3971	0,3971	1,9485
3	1,1018	1,1018	-1,4667	1,4667	1,4667
4	1,2579	1,2579	-1,3563	1,3563	1,3563
5	1,3072	1,3072	-1,0314	1,0314	1,3072
6	0,0251	0,0251	-0,2690	0,2690	0,2690
7	-0,7242	0,7242	-0,0312	0,0312	0,7242
8	1,7245	1,7245	1,5293	1,5293	1,7245
9	1,4288	1,4288	0,1975	0,1975	1,4288
10	1,1718	1,1718	-0,2058	0,2058	1,1718
11	0,3918	0,3918	-0,1767	0,1767	0,3918
12	3,0323	3,0323	1,4586	1,4586	3,0323
13	1,8314	1,8314	-0,0722	0,0722	1,8314
14	1,2584	1,2584	-0,3988	0,3988	1,2584
15	0,0133	0,0133	0,3199	0,3199	0,3199
16	-0,8531	0,8531	0,0050	0,0050	0,8531
17	-0,9832	0,9832	-0,1914	0,1914	0,9832
18	-0,3969	0,3969	-0,3648	0,3648	0,3969
19	-1,5234	1,5234	-0,2284	0,2284	1,5234
20	-2,3399	2,3399	-2,0677	2,0677	2,3399
21	-0,8085	0,8085	-1,9110	1,9110	1,9110
22	-0,1721	0,1721	-1,8579	1,8579	1,8579
23	-0,3530	0,3530	-0,2123	0,2123	0,3530
24	0,6616	0,6616	-2,3307	2,3307	2,3307
25	1,1671	1,1671	-1,3720	1,3720	1,3720
26	1,7287	1,7287	-0,9671	0,9671	1,7287
27	0,9526	0,9526	-1,2849	1,2849	1,2849
28	0,7731	0,7731	-1,2516	1,2516	1,2516
29	0,5492	0,5492	-0,7047	0,7047	0,7047
30	0,5012	0,5012	-0,9273	0,9273	0,9273
31	0,3867	0,3867	0,0781	0,0781	0,3867
32	-1,4140	1,4140	-0,0674	0,0674	1,4140
33	-0,6980	0,6980	-0,3095	0,3095	0,6980
34	0,1492	0,1492	-0,2971	0,2971	0,2971
35	-1,0025	1,0025	-0,1081	0,1081	1,0025

Lampiran 6. Perhitungan M_i Fase I Perbaikan 3

No	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	M_i
1	1,7674	1,7674	-1,5982	1,5982	1,7674
2	1,8721	1,8721	-0,3962	0,3962	1,8721
3	1,0099	1,0099	-1,4598	1,4598	1,4598
4	1,1783	1,1783	-1,3471	1,3471	1,3471
5	1,2316	1,2316	-1,0377	1,0377	1,2316
6	0,0489	0,0489	0,1437	0,1437	0,1437
7	-0,8121	0,8121	0,2874	0,2874	0,8121
8	1,5799	1,5799	1,7892	1,7892	1,7892
9	1,2631	1,2631	0,4148	0,4148	1,2631
10	1,0023	1,0023	-0,0478	0,0478	1,0023
11	0,4083	0,4083	0,0955	0,0955	0,4083
12	0,6628	0,6628	-1,1608	1,1608	1,1608
13	1,0919	1,0919	-1,2850	1,2850	1,2850
14	-0,9982	0,9982	-0,4137	0,4137	0,9982
15	-0,9975	0,9975	-0,5976	0,5976	0,9975
16	-0,5812	0,5812	-0,6909	0,6909	0,6909
17	-0,7007	0,7007	-0,7014	0,7014	0,7014
18	-1,9337	1,9337	-0,4103	0,4103	1,9337
19	-2,2776	2,2776	-2,2167	2,2167	2,2776
20	-0,8892	0,8892	-2,0451	2,0451	2,0451
21	-0,2878	0,2878	-1,9630	1,9630	1,9630
22	-0,0657	0,0657	-0,1149	0,1149	0,1149
23	0,6984	0,6984	-2,1461	2,1461	2,1461
24	1,5624	1,5624	-0,9112	0,9112	1,5624
25	2,4189	2,4189	-0,4310	0,4310	2,4189
26	1,4535	1,4535	-0,8710	0,8710	1,4535
27	1,1169	1,1169	-0,8967	0,8967	1,1169
28	0,8737	0,8737	-0,3755	0,3755	0,8737
29	0,6646	0,6646	-0,6778	0,6778	0,6778
30	0,9817	0,9817	0,6005	0,6005	0,9817
31	-1,1034	1,1034	0,3586	0,3586	1,1034
32	-0,8275	0,8275	0,0182	0,0182	0,8275
33	-0,1680	0,1680	-0,0514	0,0514	0,1680
34	-1,9169	1,9169	0,1147	0,1147	1,9169

Lampiran 7. Koding Max-MEWMA Fase I

```

import pandas as pd
import numpy as np
from google.colab import files
from scipy.stats import chi2, norm
import matplotlib.pyplot as plt

# Upload dan baca data
print("Upload file Multivariat:")
uploaded = files.upload()
file_name = list(uploaded.keys())[0]

cols = ["Kadar Air (%)", "Berat Jenis", "Warna Larutan"]

df = (
    pd.read_excel(file_name)[["Tanggal", "Jam"] + cols]
    .assign(Tanggal=lambda x: x["Tanggal"].ffill())
)
df[cols] = df[cols].apply(pd.to_numeric, errors="coerce")
df = df.dropna(subset=cols)

# Pastikan semua subgroup n = 2
group_sizes = df.groupby("Tanggal").size()
if not all(group_sizes == 2):
    raise ValueError("Ada subgroup dengan n \u2260 2")

# Hitung Mean Subgroup dan Grand Mean
mean_sub = df.groupby("Tanggal")[cols].mean()
grand_mean = mean_sub.mean()

# Hitung Deviasi
df = df.join(mean_sub.add_suffix("_mean"), on="Tanggal")
for c in cols:
    df[c+"_dev"] = df[c] - df[c+"_mean"]

# Hitung Matriks Kovariansi Si dan S_bar
Si_list = []
for tanggal, group in df.groupby("Tanggal"):
    dev_matrix = group[[c+"_dev" for c in cols]].values
    Si_list.append(np.cov(dev_matrix.T))

S_bar_matrix = np.mean(Si_list, axis=0)
S_bar_inv = np.linalg.inv(S_bar_matrix)

# Hitung Zi
lambda_ = 0.2
n = 2
p = len(cols) # number of variables
m = len(mean_sub) # number of subgroups

X = mean_sub.values
mu = grand_mean.values

Z = np.zeros((m, p))
for i in range(m):
    deviation = X[i] - mu
    Z[i] = lambda_ * deviation + (1 - lambda_) * (Z[i-1] if i > 0 else np.zeros(p))

```

```

Zi_df = pd.DataFrame(
    Z,
    columns=["Z_KadarAir", "Z_BeratJenis", "Z_Warna"],
    index=mean_sub.index
)

# Hitung Ti
Ti = []
for i in range(m):
    zi = Z[i].reshape(-1,1)
    quad = (zi.T @ S_bar_inv @ zi).item()
    factor = (n*(2-lambda_)/lambda_) / (1 - (1-lambda_)**(2*(i+1)))
    Ti.append(factor * quad)
Ti_array = np.array(Ti)

# Hitung Ui
Hp = chi2.cdf(Ti_array, df=p)
Ui = norm.ppf(Hp)
Ui_abs = np.abs(Ui)

# Hitung Wi
Wi = []
df_chi = p * (n - 1)
for tanggal, group in df.groupby("Tanggal"):
    Xi_bar = group[cols].mean().values.reshape(-1,1)
    sub_Wi = 0
    for _, row in group.iterrows():
        Xik = row[cols].values.reshape(-1,1)
        diff = Xik - Xi_bar
        sub_Wi += (diff.T @ S_bar_inv @ diff).item()
    Wi.append(sub_Wi)
Wi_array = np.array(Wi)

# Hitung Yi
Yi = []
Y_prev = 0
for w_val in Wi_array:
    prob = chi2.cdf(w_val, df=df_chi)
    transform = norm.ppf(prob)
    yi = (1 - lambda_) * Y_prev + lambda_ * transform
    Yi.append(yi)
    Y_prev = yi
Yi_array = np.array(Yi)

# Hitung Vi
Vi = []
for i, y_val in enumerate(Yi_array, start=1):
    factor = np.sqrt(
        (2 - lambda_) /
        (lambda_ * (1 - (1 - lambda_)**(2*i)))
    )
    Vi.append(factor * y_val)
Vi_array = np.array(Vi)
Vi_abs = np.abs(Vi_array)

# Hitung Mi
Mi = np.maximum(Ui_abs, Vi_abs)

```

```

# Siapkan DataFrame hasil
Mi_df = pd.DataFrame({
    "Tanggal": mean_sub.index,
    "Mi": Mi
})

# Batas Kendali (Contoh, sesuaikan jika perlu)
UCL = 2.9383
LCL = 0

# Tentukan Status Kontrol
status = np.where(Mi > UCL, "Out of control", "In control")
control_df = Mi_df.assign(Status=status)

print("\n===== STATUS KONTROL =====")
display(control_df)

# Prepare Si_list for Excel saving by flattening matrices
Si_df_to_save = []
for i, matrix in enumerate(Si_list):
    # Flatten the matrix and prepend the corresponding Tanggal from mean_sub.index
    Si_df_to_save.append([mean_sub.index[i]] + matrix.flatten().tolist())

si_cols = ["Tanggal"] + [f"S{r+1}{c+1}" for r in range(p) for c in range(p)]
Si_df_excel = pd.DataFrame(Si_df_to_save, columns=si_cols)

# Simpan semua hasil ke Excel
with pd.ExcelWriter("Hasil_Fase1_MaxMEWMA.xlsx") as writer:
    df.to_excel(writer, sheet_name="Data+Deviasi", index=False)
    mean_sub.to_excel(writer, sheet_name="Mean Subgrup")
    Si_df_excel.to_excel(writer, sheet_name="Matriks Si List", index=False) # Use the flattened
Si_df_excel
    pd.DataFrame(S_bar_matrix).to_excel(writer, sheet_name="S_bar_matrix", index=False)
    pd.DataFrame(S_bar_inv).to_excel(writer, sheet_name="S_bar_inverse", index=False)
    grand_mean.to_frame("Mean").to_excel(writer, sheet_name="Grand Mean")
    Zi_df.to_excel(writer, sheet_name="Zi", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "Ti": Ti_array}).to_excel(writer,
sheet_name="Ti", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "Hp(Ti)": Hp, "Ui": Ui}).to_excel(writer,
sheet_name="Ui", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "|Ui|": Ui_abs}).to_excel(writer,
sheet_name="Ui_abs", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "Wi": Wi_array}).to_excel(writer,
sheet_name="Wi", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "Yi": Yi_array}).to_excel(writer,
sheet_name="Yi", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "Vi": Vi_array}).to_excel(writer,
sheet_name="Vi", index=False)
    pd.DataFrame({"Tanggal": mean_sub.index, "|Vi|": Vi_abs}).to_excel(writer,
sheet_name="Vi_abs", index=False)
    Mi_df.to_excel(writer, sheet_name="Mi", index=False)

files.download("Hasil_Fase1_MaxMEWMA.xlsx")

# Plot Grafik Pengendali Max-MEWMA
plt.figure(figsize=(10,5))

```

```

# Buat indeks observasi 1-based
observation_indices = np.arange(1, len(Mi_df) + 1)

plt.plot(observation_indices, Mi_df["Mi"], marker='o', linestyle='-', label='Mi')
plt.axhline(UCL, color='red', linestyle='--', label='UCL')
plt.axhline(LCL, color='blue', linestyle='--', label='LCL')

# Tambahkan teks UCL pada grafik (disesuaikan posisinya)
plt.text(observation_indices[-1] + 1.9, UCL, f'UCL={UCL}', color='red', va='center', ha='left')

# Tandai titik di luar kendali
out_of_control = Mi_df[Mi_df["Mi"] > UCL]
plt.scatter(out_of_control.index + 1, out_of_control["Mi"], color='red', s=150, label='Out of
control') # Menggunakan indeks 1-based dan ukuran lebih besar

plt.title("Grafik Pengendali Max-MEWMA Fase I")
plt.xlabel("Pengamatan Hari Ke-") # Mengubah label sumbu X
plt.ylabel("Mi")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.xticks(observation_indices) # Set x-ticks explicitly for 1-based and remove rotation
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Lampiran 8. Perhitungan M_i Fase II

No	U_i	$ U_i $	V_i	$ V_i $	M_i
1	4,79928	4,79928	1,99849	1,99849	4,79928
2	2,56447	2,56447	1,31141	1,31141	2,56447
3	1,07927	1,07927	-1,37688	1,37688	1,37688
4	1,47011	1,47011	-1,96622	1,96622	1,96622
5	0,85435	0,85435	-1,78540	1,78540	1,78540
6	0,58102	0,58102	-1,77032	1,77032	1,77032
7	0,74659	0,74659	-0,98934	0,98934	0,98934
8	0,41752	0,41752	-1,14863	1,14863	1,14863
9	-0,15855	0,15855	-1,92079	1,92079	1,92079
10	0,16772	0,16772	-1,81103	1,81103	1,81103
11	0,35529	0,35529	-1,66682	1,66682	1,66682
12	0,64418	0,64418	-1,46820	1,46820	1,46820
13	0,75072	0,75072	-1,51668	1,51668	1,51668
14	0,89913	0,89913	-1,19777	1,19777	1,19777
15	-0,27287	0,27287	-2,00014	2,00014	2,00014
16	0,10455	0,10455	-1,71073	1,71073	1,71073
17	1,14134	1,14134	1,00318	1,00318	1,14134
18	0,38318	0,38318	1,04783	1,04783	1,04783
19	2,03014	2,03014	1,68090	1,68090	2,03014
20	4,11819	4,11819	2,26319	2,26319	4,11819
21	2,74074	2,74074	1,45971	1,45971	2,74074
22	1,39729	1,39729	3,11602	3,11602	3,11602
23	0,22281	0,22281	0,59085	0,59085	0,59085
24	-0,56667	0,56667	-0,55654	0,55654	0,56667
25	0,05598	0,05598	-0,43678	0,43678	0,43678
26	-1,51842	1,51842	0,41058	0,41058	1,51842
27	-2,36762	2,36762	0,23645	0,23645	2,36762
28	-0,88770	0,88770	-0,18718	0,18718	0,88770
29	-0,30689	0,30689	-0,46581	0,46581	0,46581
30	-1,13060	1,13060	-0,61733	0,61733	1,13060
31	-1,18633	1,18633	-0,85972	0,85972	1,18633
32	-0,45197	0,45197	-1,04364	1,04364	1,04364
33	0,37894	0,37894	-1,11868	1,11868	1,11868
34	0,77830	0,77830	-0,17701	0,17701	0,77830
35	1,46492	1,46492	-1,12673	1,12673	1,46492
36	1,48483	1,48483	-1,24503	1,24503	1,48483
37	1,61658	1,61658	-3,03470	3,03470	3,03470
38	2,01358	2,01358	-2,75490	2,75490	2,75490
39	1,34783	1,34783	-2,56998	2,56998	2,56998
40	1,38870	1,38870	-2,41477	2,41477	2,41477
41	1,34524	1,34524	-2,10809	2,10809	2,10809
42	1,93263	1,93263	-1,07101	1,07101	1,93263
43	1,19375	1,19375	-2,37587	2,37587	2,37587
44	1,22374	1,22374	-3,30250	3,30250	3,30250
45	1,25790	1,25790	-2,99326	2,99326	2,99326

Lampiran 9. Koding Fase II

```

import pandas as pd
import numpy as np
from google.colab import files
from scipy.stats import chi2, norm
import matplotlib.pyplot as plt

# Upload Data Fase II
print("Upload data Fase II:")
uploaded = files.upload()
file_name = list(uploaded.keys())[0]

# Input & Cleaning Data
df = pd.read_excel(file_name)

cols = ["Kadar Air (%)", "Berat Jenis", "Warna Larutan"]
df = df[["Tanggal", "Jam"] + cols]

df["Tanggal"] = df["Tanggal"].ffill()

for c in cols:
    df[c] = pd.to_numeric(df[c], errors="coerce")

df = df.dropna(subset=cols)

# Parameter dari Fase I
sigma_0 = S_bar_matrix
mu_0 = grand_mean.values
sigma_inv = np.linalg.inv(sigma_0)

UCL = 2.9383
LCL = 0
lambda_ = 0.2
n = 2

mean_sub = df.groupby("Tanggal")[cols].mean()
m = len(mean_sub)
p = len(cols)

# Hitung Zi
X = mean_sub.values
Z = np.zeros((m, p))
Z_prev = np.zeros(p)

for i in range(m):
    dev = X[i] - mu_0
    Z[i] = lambda_ * dev + (1 - lambda_) * Z_prev
    Z_prev = Z[i]

# Hitung Ti → Ui
Ti = []

for i in range(m):
    zi = Z[i].reshape(-1,1)
    quad = (zi.T @ sigma_inv @ zi).item()

    num = n * (2 - lambda_) / lambda_
    den = 1 - (1 - lambda_)**(2*(i+1))

```

```

factor = num / den

Ti.append(factor * quad)

Ti = np.array(Ti)

Hp = chi2.cdf(Ti, df=p)
Hp = np.clip(Hp, 1e-10, 0.9999999)

Ui = norm.ppf(Hp)
Ui_abs = np.abs(Ui)

# Hitung Wi → Yi → Vi
Wi = []
df_chi = p * (n - 1)

for _, group in df.groupby("Tanggal"):
    Xi_bar = group[cols].mean().values.reshape(-1,1)
    w = 0

    for _, row in group.iterrows():
        xik = row[cols].values.reshape(-1,1)
        diff = xik - Xi_bar
        w += (diff.T @ sigma_inv @ diff).item()

    Wi.append(w)

Yi = []
Y_prev = 0

for w in Wi:
    prob = chi2.cdf(w, df=df_chi)
    prob = np.clip(prob, 1e-10, 0.9999999)

    z = norm.ppf(prob)
    y = (1 - lambda_) * Y_prev + lambda_ * z

    Yi.append(y)
    Y_prev = y

Vi = []
for i, y in enumerate(Yi, start=1):
    factor = np.sqrt((2 - lambda_) / (lambda_ * (1 - (1 - lambda_)**(2*i))))
    Vi.append(factor * y)

Vi_abs = np.abs(Vi)

# Hitung Mi
Mi = np.maximum(Ui_abs, Vi_abs)

hasil_df = pd.DataFrame({
    "Tanggal": mean_sub.index,
    "Z_KadarAir": Z[:,0],
    "Z_BeratJenis": Z[:,1],
    "Z_WarnaLarutan": Z[:,2],
    "Ti": Ti,
    "Ui": Ui,
    "|Ui|": Ui_abs,

```

```

    "Wi": Wi,
    "Yi": Yi,
    "Vi": Vi,
    "|Vi|": Vi_abs,
    "Mi": Mi,
    "Status": ["Out of Control" if x > UCL else "In Control" for x in Mi]
})

print("\n===== HASIL FASE II =====")
display(hasil_df)

# Plot Control Chart (FIXED)
plt.figure(figsize=(10,5))

# Generate 1-based observation numbers for the x-axis
observation_numbers = np.arange(1, len(Mi) + 1)

# Plot Mi
plt.plot(observation_numbers, Mi, marker='o', label='Mi')

# Garis kendali
plt.axhline(UCL, color='red', linestyle='--', linewidth=2, label='UCL')
plt.axhline(LCL, color='blue', linestyle='--', linewidth=2, label='LCL')

# Tambahkan teks UCL pada grafik
plt.text(observation_numbers[-1] + 2.5, UCL, f'UCL={UCL}', color='red', va='center', ha='left',
         fontsize=9)

# Titik out of control
out = hasil_df[hasil_df["Mi"] > UCL]
plt.scatter(out.index + 1, out["Mi"], s=120, color='red', label='Out of Control') # Set color to red,
adjust index to start from 1

# Tampilan
plt.title("Max-MEWMA Fase II")
plt.xlabel("Pengamatan Hari Ke-")
plt.ylabel("Mi")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.xticks(ticks=observation_numbers) # Explicitly set x-axis ticks, removed rotation
plt.tight_layout() # Adjust layout to prevent labels from being cut off
plt.show()

# Export Excel
hasil_df.to_excel("Hasil_Fase2.xlsx", index=False)
files.download("Hasil_Fase2.xlsx")

```

Lampiran 10. Koding grafik simbol Fase II

```

import pandas as pd
import numpy as np
from google.colab import files
from scipy.stats import chi2, norm
import matplotlib.pyplot as plt

# Upload Data Fase II
print("Upload data Fase II:")
uploaded = files.upload()
file_name = list(uploaded.keys())[0]

# Input & Cleaning Data
df = pd.read_excel(file_name)

cols = ["Kadar Air (%)", "Berat Jenis", "Warna Larutan"]
df = df[["Tanggal", "Jam"] + cols]

df["Tanggal"] = df["Tanggal"].ffill()

for c in cols:
    df[c] = pd.to_numeric(df[c], errors="coerce")

df = df.dropna(subset=cols)

# Parameter dari Fase I
sigma_0 = S_bar_matrix
mu_0 = grand_mean.values
sigma_inv = np.linalg.inv(sigma_0)

UCL = 2.9383
LCL = 0
lambda_ = 0.2
n = 2

mean_sub = df.groupby("Tanggal")[cols].mean()
m = len(mean_sub)
p = len(cols)

# Hitung Zi
X = mean_sub.values
Z = np.zeros((m, p))
Z_prev = np.zeros(p)

for i in range(m):
    dev = X[i] - mu_0
    Z[i] = lambda_ * dev + (1 - lambda_) * Z_prev
    Z_prev = Z[i]

# Hitung Ti → Ui
Ti = []

for i in range(m):
    zi = Z[i].reshape(-1,1)
    quad = (zi.T @ sigma_inv @ zi).item()

    num = n * (2 - lambda_) / lambda_
    den = 1 - (1 - lambda_)**(2*(i+1))

```

```

factor = num / den

Ti.append(factor * quad)

Ti = np.array(Ti)

Hp = chi2.cdf(Ti, df=p)
Hp = np.clip(Hp, 1e-10, 0.9999999)

Ui = norm.ppf(Hp)
Ui_abs = np.abs(Ui)

# Hitung Wi → Yi → Vi
Wi = []
df_chi = p * (n - 1)

for _, group in df.groupby("Tanggal"):
    Xi_bar = group[cols].mean().values.reshape(-1,1)
    w = 0

    for _, row in group.iterrows():
        xik = row[cols].values.reshape(-1,1)
        diff = xik - Xi_bar
        w += (diff.T @ sigma_inv @ diff).item()

    Wi.append(w)

Yi = []
Y_prev = 0

for w in Wi:
    prob = chi2.cdf(w, df=df_chi)
    prob = np.clip(prob, 1e-10, 0.9999999)

    z = norm.ppf(prob)
    y = (1 - lambda_) * Y_prev + lambda_ * z

    Yi.append(y)
    Y_prev = y

Vi = []
for i, y in enumerate(Yi, start=1):
    factor = np.sqrt((2 - lambda_) / (lambda_ * (1 - (1 - lambda_)**(2*i))))
    Vi.append(factor * y)

Vi_abs = np.abs(Vi)

# Hitung Mi
Mi = np.maximum(Ui_abs, Vi_abs)

hasil_df = pd.DataFrame({
    "Tanggal": mean_sub.index,
    "Z_KadarAir": Z[:,0],
    "Z_BeratJenis": Z[:,1],
    "Z_WarnaLarutan": Z[:,2],
    "Ti": Ti,
    "Ui": Ui,
    "|Ui|": Ui_abs,

```

```

    "Wi": Wi,
    "Yi": Yi,
    "Vi": Vi,
    "|Vi|": Vi_abs,
    "Mi": Mi,
    "Status": ["Out of Control" if x > UCL else "In Control" for x in Mi]
})

print("\n===== HASIL FASE II =====")
display(hasil_df)

# Plot Control Chart (FIXED)
plt.figure(figsize=(10,5))

# Generate 1-based observation numbers for the x-axis
observation_numbers = np.arange(1, len(Mi) + 1)

# Plot Mi
plt.plot(observation_numbers, Mi, marker='o', label='Mi')

# Garis kendali
plt.axhline(UCL, color='red', linestyle='--', linewidth=2, label='UCL')
plt.axhline(LCL, color='blue', linestyle='--', linewidth=2, label='LCL')

# Tambahkan teks UCL pada grafik
plt.text(observation_numbers[-1] + 2.5, UCL, f'UCL={UCL}', color='red', va='center', ha='left',
         fontsize=9)

# Tambahkan teks untuk pengamatan tertentu
plt.text(observation_numbers[0], Mi[0] + 0.3, "m+", color='black', ha='center', va='bottom') #
Pengamatan ke-1
plt.text(observation_numbers[19], Mi[19] + 0.1, "m+", color='black', ha='center', va='bottom') #
Pengamatan ke-20
plt.text(observation_numbers[21], Mi[21] + 0.1, "v+", color='black', ha='center', va='bottom') #
Pengamatan ke-22
plt.text(observation_numbers[36], Mi[36] + 0.2, "V -", color='black', ha='center', va='bottom',
         fontsize=10) # Pengamatan ke-37
plt.text(observation_numbers[43], Mi[43] + 0.1, "V -", color='black', ha='center', va='bottom',
         fontsize=12) # Pengamatan ke-44 (Fontsize increased)
plt.text(observation_numbers[44] + 1.0, Mi[44] + 0.2, "V -", color='black', ha='center',
         va='bottom', fontsize=10) # Pengamatan ke-45 (X-coordinate adjusted)

# Titik out of control
out = hasil_df[hasil_df["Mi"] > UCL]
plt.scatter(out.index + 1, out["Mi"], s=120, color='red', label='Out of Control') # Set color to red,
adjust index to start from 1

# Tampilan
plt.title("Max-MEWMA Fase II")
plt.xlabel("Pengamatan Hari Ke-")
plt.ylabel("Mi")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.xticks(ticks=observation_numbers) # Explicitly set x-axis ticks, removed rotation
plt.tight_layout() # Adjust layout to prevent labels from being cut off
plt.show()

# Export Excel

```

```
hasil_df.to_excel("Hasil_Fase2.xlsx", index=False)  
files.download("Hasil_Fase2.xlsx")
```

Lampiran 11. Surat Keterangan Izin Penelitian





No : 142/SDM/PKN/X/2025

Perihal : Ijin Penelitian

Kepada Y'th
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Gajayana No. 50
Malang 65144

Dengan hormat,
Menjawab surat Saudara Nomor B-52.O/FST.01/TL.00/10/2025 perihal diatas, dengan ini kami bertahukan bahwa kami dapat menerima Mahasiswa/Siswa sebagai berikut:

No	Nama	NIS / NPM	Jurusan
1.	Mutlimali Fadlilah	220601110038	Matematika

Untuk melaksanakan Penelitian di PG Krebet Baru Bagian Quality Assurance dimulai tanggal 30 Oktober 2025 s/d 30 November 2025 dengan ketentuan sebagai berikut:

1. PG Krebet Baru tidak menyediakan tempat penginapan, sehingga yang bersangkutan harus menyediakan sendiri.
2. PG Krebet Baru tidak memberikan bantuan/tunjangan, baik itu akomodasi, konsumsi dan sebagainya dalam bentuk apapun kepada yang bersangkutan.
3. Peserta wajib memiliki asuransi Jaminan Kecelakaan (JKK) dan asuransi Jaminan Kematian (JKM) untuk melakukan Praktek Kerja Lapangan (PKL) / Praktek Kerja Industri (Prakerin) sesuai dengan ketentuan yang berlaku.
4. Selama kerja praktek/penelitian/survey/observasi yang bersangkutan wajib mentaati semua Peraturan Perusahaan dan petunjuk-petunjuk yang diberikan para pembimbing / pejabat yang berwenang.
5. Selama kerja praktek/penelitian/survey/observasi yang bersangkutan wajib mentaati semua Peraturan Perusahaan dan petunjuk-petunjuk yang diberikan para pembimbing / pejabat yang berwenang. Termasuk yang terkait dengan peraturan kedisiplinan perusahaan, semua peserta prakerin harus melakukan absensi harian pada pintu revolving (sebelah utara, di belakang BPU). Sehingga untuk akses keluar masuk area pabrik selama pelaksanaan kegiatan prakerin tidak diperkenankan lagi melewati area utama kantor / loby tamu.
6. Setelah selesai kerja praktek/penelitian/survey/observasi yang bersangkutan wajib menyerahkan 1 (satu) buku laporan hasil praktek/penelitian.

Apabila yang bersangkutan dapat menyetujui syarat-syarat diatas, diminta untuk menghadap ke Bagian SDM & Umum PG Krebet Baru dengan membawa:

1. Surat Ijin Kerja Praktek / Penelitian ini.
2. Fotocopy Kartu Tanda Pengenal, misal: KTP, Kartu Pelajar/Mahasiswa dsb.

Demikian harap maklum, atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Malang, 30 Oktober 2025

PG. Rajawali I
Member of ID FOOD
Unit PG Krebet Baru

Mohammad Anis
General Manager

Cc :
- Bagian Quality Assurance
- Site KI

Unit PG Krebet Baru
Jl. Raya Krebet No.10
Budiawan - Malang 65171

Telp : 0341-833176, 833185
Fax : 0341-833179, 833006
email : pdk@pgkrebetbaru.com

RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Mutimatul Fadlilah, lahir di Kediri pada tanggal 26 Juni 2003. Penulis berasal dari Desa Silir, Kecamatan Wates, Kabupaten Kediri. Saat menempuh pendidikan perguruan tinggi, penulis berdomisili di PP Daruzzahra Arrifa'i 1, Jalan Mertojoyo No. 80, Kelurahan Merjosari, Kecamatan Lowokwaru, Kota Malang, Jawa Timur.

Penulis merupakan putri dari pasangan Bapak Muhamad Ngalim dan Ibu Dewi Quroisyin. Riwayat pendidikan penulis dimulai di RA Miftahul Huda Silir pada tahun 2008–2010, kemudian melanjutkan pendidikan di MI Miftahul Huda Silir pada tahun 2010–2016. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan di MTsN 9 Kediri pada tahun 2016–2019 dan MAN 1 Kota Kediri pada tahun 2019–2022. Pada tahun 2022, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selain menempuh pendidikan formal, penulis juga aktif dalam kegiatan organisasi. Penulis pernah menjabat sebagai CO Kaderisasi PMII Pencerahan Galileo priode terakhir pada tahun 2025, Kepala Divisi di HMPS “Integral” Matematika pada priode terakhir tahun 2024/2025, Ketua Departemen DEMA Fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2025/2026, serta Kepala Divisi Kaderisasi dan Internal IKAHIMATIKA Wilayah V tahun 2025/2027 pada periode kepengurusan terakhir. Di sela kegiatan akademik dan organisasi, penulis juga bekerja sebagai guru les privat sejak semester tujuh hingga sekarang. Melalui pengalaman tersebut, penulis tidak hanya belajar tentang proses mengajar, tetapi juga memperoleh banyak pelajaran mengenai parenting dan cara memahami karakter anak.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mutimatul Fadlilah
NIM : 220601110038
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Implementasi Grafik Pengendali *Maximum Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* Pada Pengendalian Kualitas Proses Produksi Gula (Studi Kasus: PT PG Rajawali I Kabupaten Malang)
Pembimbing I : Dr. Fachrur Rozi, M.Si
Pembimbing II : Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	26 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	10 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	17 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	22 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	30 Oktober 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	5 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	7 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	8.
9.	7 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	18 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	19 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	11.
12.	21 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	12.
13.	24 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	13.
14.	25 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	14.
15.	26 November 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	15.
16.	27 November 2025	ACC Bab I, II, dan III	16.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Doyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	28 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	17. <i>Am</i>
18.	1 Desember 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	18. <i>Am</i>
19.	1 Desember 2025	ACC Seminar Proposal	19. <i>hp</i>
20.	13 Januari 2026	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	20. <i>hp</i>
21.	15 Januari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	21. <i>hp</i>
22.	28 Januari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	22. <i>hp</i>
23.	9 Februari 2026	Konsultasi Bab IV dan V	23. <i>hp</i>
24.	2 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	24. <i>hp</i>
25.	15 April 2026	Konsultasi Bab IV dan V	25. <i>hp</i>
26.	15 April 2026	ACC Kajian Agama Bab IV	26. <i>Am</i>
27.	23 April 2026	ACC Bab IV dan V	27. <i>hp</i>
28.	23 April 2026	ACC Seminar Hasil	28. <i>hp</i>
29.	13 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	29. <i>hp</i>
30.	14 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	30. <i>hp</i>
31.	19 Mei 2026	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	31. <i>hp</i>
32.	19 Mei 2026	ACC Sidang Skripsi	32. <i>hp</i>
33.	9 Juni 2026	ACC Keseluruhan	33. <i>hp</i>

Malang, 9 Juni 2026

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si

NIP. 19800527 200801 1 012