

**DIMENSI DARI HASIL KALI DUA SUBGRUP NORMAL
DALAM GRUP DIHEDRAL D_{2n}**

SKRIPSI

**OLEH
AHMAD RIZAL AFANDI
NIM. 220601110019**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**DIMENSI DARI HASIL KALI DUA SUBGRUP NORMAL
DALAM GRUP DIHEDRAL D_{2n}**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Ahmad Rizal Afandi
NIM. 220601110019**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2026**

**DIMENSI DARI HASIL KALI DUA SUBGRUP NORMAL
DALAM GRUP DIHEDRAL D_{2n}**

SKRIPSI

Oleh
Ahmad Rizal Afandi
NIM. 220601110019

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 6 Mei 2026

Dosen Pembimbing I



Intan Nisfulaila, M.Si.
NIP. 19900215 201903 2 015

Dosen Pembimbing II



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

**DIMENSI DARI HASIL KALI DUA SUBGRUP NORMAL
DALAM GRUP DIHEDRAL D_{2n}**

SKRIPSI

**Oleh
Ahmad Rizal Afandi
NIM. 220601110019**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 4 Juni 2026

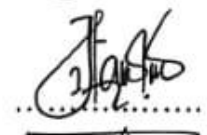
Ketua Penguji : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D.

Anggota Penguji 1 : Dewi Ismiarti, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Intan Nisfulaila, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.


.....

.....

.....

.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 198005272008011012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama : Ahmad Rizal Afandi

NIM : 220601110019

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Juni 2026



Ahmad Rizal Afandi
NIM. 220601110019

MOTO

“Hiduplah seolah kamu mati besok. Belajarlah seolah kamu hidup selamanya.”

(Mahatma Gandhi)

“Tidak perlu membenarkan diri kesana kemari agar engkau dikagumi, jika perilaku dan perbuatanmu benar dari hati, maka diammu pun akan dihormati dan disegani”

(KH. Maimoen Zubair)

PERSEMBAHAN

Puji syukur peneliti panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga peneliti dapat menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Dengan penuh rasa hormat dan ketulusan, penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

1. Kedua orang tua tercinta, Bapak Syafilin dan Ibu Mujiati, yang telah memberikan kasih sayang, rela bertarung di sepertiga malam untuk selalu mendoakan penulis, serta perjuangan tiada lelah agar penulis mampu mengejar pendidikan setinggi-tingginya. Terima kasih atas keteladanan, kerja keras, dan pengorbanan yang tak ternilai selama ini.
2. Ibu Intan Nisfulaila M.Si., dan Bapak Dr. Fachrur Rozi, M.Si., yang telah memberikan bimbingan, bantuan, serta semangat yang berarti dalam proses penyusunan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan, nikmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n} ”. Skripsi ini merupakan syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selawat dan salam senantiasa disampaikan kepada Nabi besar Muhammad SAW, yang telah memberikan petunjuk kepada umat manusia dari masa kegelapan (jahiliyah) menuju masa yang terang, yaitu era agama Islam. Semoga kita semua nantinya mendapatkan syafaatnya di hari kiamat. *Aamiin, yaa rabbal, ‘aalamiin.*

Dalam proses penulisan skripsi ini, tidak dapat dipisahkan dari kontribusi dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengungkapkan rasa terima kasih kepada semua pihak terkait:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan arahan dan masukan dalam bidang integrasi kepada penulis dalam menentukan integrasi pada skripsi ini.
4. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah bersedia memberikan ilmu dan arahan serta masukan kepada penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini.
5. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D., selaku Ketua Penguji dalam Ujian Skripsi.
6. Dewi Ismiarti, M.Si., selaku Anggota Penguji I dalam Ujian Skripsi.
7. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu, mendoakan dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi.

8. Kedua orang tua tercinta, Bapak Syafilin dan Ibu Mujiati, yang tidak pernah putus dalam memanjatkan do'a dan memberikan restu serta nasihat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman angkatan 2022 yang telah meluangkan waktu membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi,
10. Pihak-pihak di luar yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah ikut serta berperan dalam membantu penulis menyelesaikan skripsi.

Dengan mengharap rahmat dan karunia Allah SWT, penulis menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa karya ilmiah ini masih jauh dari kesempurnaan dan terbuka untuk perbaikan. Meski demikian, penulis berharap skripsi ini mampu memberikan sumbangsih pemikiran serta manfaat, baik bagi penulis maupun bagi kalangan pembaca. Aamiin ya rabbal aalamiin.

Malang, 4 Juni 2026

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
ABSTRAK.....	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Definisi Istilah	6
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung.....	8
2.1.1 Grup.....	8
2.1.2 Subgrup.....	10
2.1.3 Grup Dihedral	13
2.1.4 Grup yang Dibangun oleh Subhimpunan	16
2.1.5 Subgrup Normal	17
2.1.6 Kelas Konjugasi	23
2.1.7 Dimensi dari Grup	26
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an	31
2.3 Kajian Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}	33
BAB III METODE PENELITIAN	39
3.1 Jenis Penelitian	39
3.2 Pra Penelitian.....	39
3.3 Tahapan Penelitian.....	39
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	42
4.1 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{2n}	42
4.1.1 Dimensi dari Subgrup Normal di D_6	42
4.1.2 Dimensi dari Subgrup Normal di D_8	43
4.1.3 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{10}	46
4.1.4 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{12}	47
4.1.5 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{14}	50
4.1.6 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{16}	51
4.1.7 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{2n}	55

4.2 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dalam Grup Dihedral D_{2n}	57
4.2.1 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_6	57
4.2.2 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{10}	64
4.2.3 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{14}	70
4.2.4 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Ganjil	78
4.2.5 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_8	79
4.2.6 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{12}	82
4.2.7 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{16}	85
4.2.8 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Genap	88
4.3 Kajian Integrasi Nilai-Nilai Islam pada Konsep Dimensi dari Hasil Kali Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}	90
BAB V PENUTUP	94
5.1 Kesimpulan	94
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan	94
DAFTAR PUSTAKA	96
RIWAYAT HIDUP	97

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Cayley Dari D_6	15
---	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Pelabelan Pada Segi- n Beraturan	13
---	----

ABSTRAK

Afandi, Ahmad Rizal. 2026. **Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}** . Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Intan Nisfulaila, M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: Dimensi Grup, Dimensi Subgrup Normal, Grup Dihedral, Hasil Kali Subgrup normal.

Penelitian ini membahas hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, jumlah dimensi subgrup normal, dan dimensi irisan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} . Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Tahapan penelitian dilakukan dengan mengklasifikasikan subgrup normal, menentukan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal, kemudian menghitung dimensi setiap subgrup normal, selanjutnya menentukan dimensi dari hasil kali dan irisan dua subgrup normal, selanjutnya menentukan hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal dengan jumlah dimensi subgrup normal, dan dimensi irisan subgrup normal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap subgrup normal pada grup dihedral dengan n ganjil memiliki dimensi satu, sedangkan pada n genap terdapat subgrup normal yang berdimensi satu dan dua bergantung pada struktur kelas konjugasinya. Selain itu, diperoleh hubungan antara dimensi subgrup normal N_1 dan N_2 pada grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil berlaku hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$. Hal ini disebabkan seluruh subgrup normal pada kasus n ganjil memiliki nilai dimensi satu. Sementara itu, pada kasus n genap ditemukan pasangan subgrup normal yang tidak memenuhi hubungan tersebut sehingga hubungan tersebut tidak dapat di generalisasi untuk seluruh grup dihedral D_{2n} dengan n genap. Ditemukannya pasangan yang tidak memenuhi hubungan tersebut dipengaruhi oleh struktur kelas konjugasi yang lebih kompleks, khususnya karena elemen refleksi terbagi ke dalam dua kelas konjugasi berbeda sehingga terdapat subgrup normal yang memiliki dimensi lebih dari satu.

ABSTRACT

Afandi, Ahmad Rizal. 2026. **Dimensions of the Product of Two Normal Subgroups in the Dihedral Group D_{2n}** . Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (1) Intan Nisfulaila, M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Group dimension, dimension of a normal subgroup, dihedral group, product of normal subgroups.

This study examines the relationship between the dimensions of the product of two normal subgroups, the number of dimensions of normal subgroups, and the dimensions of the intersection of normal subgroups in the dihedral group D_{2n} . This is a qualitative study using a literature review approach. The research stages were carried out by classifying normal subgroups, determining the conjugacy class of each normal subgroup, then calculating the dimension of each normal subgroup, subsequently determining the dimension of the product and intersection of two normal subgroups, and finally determining the relationship between the dimension of the product of two normal subgroups and the number of dimensions of the normal subgroups, as well as the dimension of the intersection of normal subgroups. The results show that every normal subgroup in a dihedral group with an odd n has dimension one, whereas for even n , there are normal subgroups with dimensions one and two depending on the structure of their conjugacy classes. In addition, a relationship between the dimensions of the normal subgroups is obtained N_1 and N_2 in the dihedral group D_{2n} with odd n holds: $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$. This is because all normal subgroups in the case of odd n have dimension one. Meanwhile, for even n , pairs of normal subgroups were found that do not satisfy this relation, so the relation cannot be generalized to all dihedral groups D_{2n} with even n . The discovery of pairs that do not satisfy this relationship is influenced by a more complex conjugation class structure, particularly because the reflexive elements are divided into two different conjugation classes, resulting in a normal subgroup with more than one dimension.

مستخلص البحث

أفندي، أحمد ريزال. ٢٠٢٦. أبعاد حاصل ضرب مجموعتين فرعيتين عاديتين في المجموعة الثنائية الأوجه D_{2n} . البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج. المشرفان: (1) إينتان نصف الليل، الماجستير في العلوم. (2) د. فخر الرازي، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: أبعاد المجموعة، أبعاد المجموعة الفرعية العادية، المجموعة الثنائية السطوح، حاصل ضرب المجموعات الفرعية العادية.

تتناول هذه الدراسة العلاقة بين أبعاد حاصل ضرب مجموعتين فرعيتين عاديتين، وعدد أبعاد المجموعات الفرعية العادية، وأبعاد تقاطع المجموعات الفرعية العادية في المجموعة الثنائية السطوح D_{2n} . وتعد هذه الدراسة بحثًا نوعيًا يعتمد على نهج دراسة الأدبيات. تم تنفيذ مراحل البحث من خلال تصنيف المجموعات الفرعية العادية، وتحديد فئة الاقتران لكل مجموعة فرعية عادية، ثم حساب أبعاد كل مجموعة فرعية عادية، ثم تحديد أبعاد حاصل ضرب وتقاطع مجموعتين فرعيتين عاديتين، ثم تحديد العلاقة بين أبعاد حاصل ضرب مجموعتين فرعيتين عاديتين وعدد أبعاد المجموعات الفرعية العادية، وأبعاد تقاطع المجموعات الفرعية العادية. أظهرت نتائج البحث أن كل مجموعة فرعية عادية في المجموعة الثنائية الأوجه ذات n فردي لها بُعد واحد، بينما في حالة n زوجي توجد مجموعات فرعية عادية ذات بُعد واحد وبُعدين اعتمادًا على بنية فئة التزاوج الخاصة بها. بالإضافة إلى ذلك، تم التوصل إلى علاقة بين أبعاد المجموعات الفرعية الطبيعية N_1 و N_2 في المجموعة الثنائية الأوجه D_{2n} حيث n فردي، حيث تنطبق العلاقة $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$. ويرجع ذلك إلى أن جميع المجموعات الفرعية العادية في حالة n الفردي لها قيمة أبعاد تساوي واحد. وفي الوقت نفسه، في حالة n الزوجي، تم العثور على أزواج من المجموعات الفرعية العادية التي لا تستوفي هذه العلاقة، وبالتالي لا يمكن تعميم هذه العلاقة على جميع المجموعات الثنائية الأوجه D_{2n} ذات n الزوجي. ويُعزى العثور على أزواج لا تستوفي هذه العلاقة إلى بنية فئات التناظر الأكثر تعقيدًا، لا سيما أن عناصر الانعكاس تنقسم إلى فئتين مختلفتين من فئات التناظر، مما يؤدي إلى وجود مجموعات فرعية عادية ذات أبعاد تزيد عن واحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan bagian penting dalam matematika modern karena menjadi landasan bagi berbagai bidang seperti teori bilangan, geometri, kriptografi dan komputasi (Dummit & Foote, 2004). Dalam teori bilangan, struktur aljabar digunakan untuk mempelajari sifat bilangan bulat dan sistem bilangan. Di geometri, konsep grup transformasi membantu memahami simetri objek geometris. Dalam kriptografi, medan hingga dan teori grup menjadi fondasi algoritma pengamanan data seperti Rivest Shamir Adleman (RSA). Sementara dalam komputasi, struktur aljabar berperan dalam teori koding dan pengembangan algoritma. Dengan demikian, struktur aljabar tidak hanya fundamental dalam matematika, tetapi juga aplikatif dalam teknologi modern.

Dalam cabang aljabar linear, konsep dimensi menjadi salah satu ide utama yang digunakan untuk mengukur banyaknya derajat kebebasan suatu ruang vektor. Ruang vektor sendiri adalah struktur aljabar fundamental yang terdiri dari sebuah himpunan vektor dan operasi penjumlahan serta perkalian skalar. Operasi-operasi ini harus memenuhi aksioma tertentu, seperti sifat komutatif, asosiatif, dan distributif, serta menjamin keberadaan unsur identitas dan invers penjumlahan. Dua konsep kunci dalam ruang vektor adalah basis dan dimensi. Basis didefinisikan sebagai himpunan vektor yang bersifat bebas linear dan merentang ruang vektor tersebut, sementara dimensi didefinisikan sebagai banyaknya vektor dalam sebuah basis dan dinotasikan sebagai $\dim V$. Ruang vektor yang basisnya memiliki vektor takhingga dikatakan berdimensi takhingga, sedangkan ruang vektor nol, yang tidak

memiliki basis, didefinisikan berdimensi nol (Roman, 2008).

Konsep dimensi tidak hanya berlaku untuk ruang vektor, tetapi juga untuk subruang vektor, yaitu himpunan bagian dari suatu ruang vektor yang juga merupakan ruang vektor dengan operasi yang sama. Dalam konteks subruang, terdapat sebuah hubungan fundamental yang menghubungkan dimensi dari dua subruang U dan W dengan jumlah dan irisan mereka, yaitu:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

berlaku bagi semua subruang vektor (Axler, 2024). Tian (Tian, 2019) kemudian memperluas teori ini dengan menyediakan ekspresi rank-matrix untuk menghitung dimensi jumlah dan irisan beberapa subruang linear secara serentak, termasuk perumusan proyektor ortogonal ke hasil irisan dan penjumlahan subruang melalui Moore–Penrose inverse. Hasil tersebut menunjukkan bahwa hubungan antar-dimensi dapat dirumuskan secara eksak apabila struktur yang dianalisis adalah ruang vektor dengan operasi linear yang jelas.

Dalam teori grup, dimensi tidak muncul secara otomatis karena grup tidak memiliki struktur ruang vektor secara umum. Namun berbagai penelitian telah mencoba memformalkan ukuran yang bertindak seperti dimensi untuk grup hingga. Misalnya Robinson (1996) yang rujuk oleh Kaplan & Lev (2003) menjelaskan bahwa menurut Teorema Basis Burnside, untuk p -grup G dengan p merupakan bilangan prima, maka dimensi dari grup tersebut adalah dimensi dari ruang vektor $G/\phi(G)$ atas lapangan F^p . Namun, prinsip ini tidak berlaku untuk grup secara keseluruhan, melainkan hanya berlaku untuk p -grup. Kaplan dan Lev sendiri memberikan pendekatan lain tentang dimensi grup, ia memperkenalkan ukuran grup berbasis banyaknya minimum kelas konjugasi yang mampu membangun suatu

grup. Pendekatan ini memperlihatkan bahwa meskipun grup bukan objek linear seperti ruang vektor, terdapat upaya serius untuk mentransfer gagasan ukuran ala ruang vektor ke konteks struktur grup. Upaya-upaya semacam ini, pada dasarnya adalah wujud dari pencarian akan prinsip keseimbangan dan keteraturan yang melekat dengan sistem aljabar.

Prinsip mendasar dalam paragraf sebelumnya yang kemudian sejalan dengan pandangan Islam. Al-Qur'an menegaskan bahwa seluruh alam ciptaan Allah berjalan dalam keteraturan dan keseimbangan yang tepat, sesuai dengan yang disebutkan dalam Al-Qur'an pada surat Ar-Rahman ayat 7-9 yang berbunyi

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ۖ
أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ۚ وَأَقِيمُوا
الْوِزْنَ بِالْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ ۚ

“Langit telah Dia tinggikan dan Dia telah menciptakan timbangan (keadilan dan keseimbangan). agar kamu tidak melampaui batas dalam timbangan itu. Tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi timbangan itu.”.

Ayat ini menjelaskan penciptaan langit yang meninggi tanpa tiang dan penetapan *al-mizan* oleh Allah SWT, serta perintah agar manusia berlaku adil dan tidak curang dalam menimbang (NU Online, 2025). Kata *al-mizan* yang memiliki arti alat menimbang. Kata ini biasa juga dipahami dalam arti keadilan, baik dalam arti menempatkan sesuatu pada tempatnya maupun dalam arti keseimbangan. Thahir Ibn ‘Asyur memahami kata *al-mizan* pada ayat ini dalam arti keadilan. Menurutnya, Allah menyandingkan kata langit dengan timbangan (keadilan) untuk mengisyaratkan betapa penting dan agung keadilan itu dengan menisbarkannya ke arah alam yang tinggi, yang juga merupakan alam kebenaran dan keutamaan, dan bahwa keadilan itu turun dari langit ke bumi atas perintah Allah SWT (Shihab, 2022). Konsep *al-mīzān* ini menunjukkan bahwa setiap sistem memiliki ukuran dan

struktur yang proporsional. Secara analogis, konsep dimensi dalam ruang vektor maupun dalam grup merupakan bentuk matematis dari upaya memahami keteraturan dan ukuran dalam sebuah struktur, sehingga matematika dan nilai keislaman berjalan harmonis pada prinsip keteraturan dan keseimbangan.

Salah satu objek grup yang menarik sebagai studi kasus yakni grup dihedral D_{2n} . Grup ini merupakan salah satu grup non-Abelian yang memiliki struktur subgrup normal dan kelas konjugasi yang dapat dikaji secara eksplisit. Grup dihedral juga merepresentasikan simetri geometris melalui kombinasi rotasi dan refleksi sehingga sering digunakan sebagai contoh penting dalam teori grup (Dummit & Foote, 2004). Selain itu, klasifikasi subgrup normal pada grup dihedral telah diketahui dengan baik melalui hasil Tarnauceanu (2015), sehingga memungkinkan dilakukan analisis lebih lanjut mengenai dimensi hasil kali dua subgrup normal. Salah satu studi yang secara eksplisit menghitung dimensi grup serta dimensi subgrup normalnya adalah skripsi “Dimensi dari Grup Dihedral” oleh Kholilurrohman (2022). Dalam skripsi tersebut ditunjukkan bahwa dimensi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dimensinya satu dan dimensi grup dihedral D_{2n} dengan n genap dimensinya dua serta

$$\dim(N) \leq \dim(D_{2n})$$

dengan $n \geq 3$ dan N merupakan subgrup normal. Seluruh hasil tersebut diperoleh berdasarkan perhitungan kelas konjugasi yang ada dalam grup dihedral (Kholilurrohman, 2022).

Berbagai penelitian mengenai dimensi grup dihedral telah membahas dimensi grup maupun dimensi subgrup normal. Namun, kajian mengenai hubungan dimensi antara dua subgrup normal, khususnya pada hasil kali subgrup normal, masih belum

ada yang meneliti. Pemilihan hasil kali subgrup normal didasarkan pada sifatnya yang tetap menghasilkan subgrup normal ketika kedua subgrup yang dikalikan bersifat normal (Dummit & Foote, 2004). Berdasarkan konsep dimensi grup yang diperkenalkan oleh Kaplan dan Lev (2003), muncul pertanyaan mengenai hubungan dimensi dari dua subgrup normal N_1 dan N_2 pada grup dihedral D_{2n} , khususnya ditinjau dari struktur hasil kali kedua subgrup normal tersebut.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini diarahkan untuk menganalisis dimensi pada hasil kali dua subgrup normal dalam grup dihedral melalui hubungannya dengan hasil penjumlahan dimensi dua subgrup normal dan dimensi irisan subgrup normal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pertanyaan yang diajukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan dimensi dari subgrup normal dalam D_{2n} ?
2. Bagaimana hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal (N_1, N_2) , penjumlahan dimensi (N_1) dan dimensi (N_2) serta dimensi dari irisan $(N_1 \cap N_2)$ dalam D_{2n} ?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengacu pada rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi dari subgrup normal dalam grup dihedral D_{2n}
2. Mendeskripsikan hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal

(N_1, N_2) , penjumlahan dimensi (N_1) dan dimensi (N_2) serta dimensi dari irisan $(N_1 \cap N_2)$ dalam D_{2n} .

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi pada pengembangan teori grup, khususnya dalam pemahaman konsep dimensi grup dan perilakunya pada subgrup normal.
2. Menjadi landasan bagi penelitian lanjutan tentang dimensi grup pada struktur aljabar lainnya.

1.5 Batasan Masalah

Agar tetap fokus pada topik pembahasan, penelitian ini memiliki batasan masalah sebagai berikut:

1. Grup yang dikaji adalah grup dihedral D_{2n} .
2. Konsep dimensi yang digunakan adalah dimensi grup menurut Kaplan dan Lev (2003).
3. Penelitian tidak mencakup grup non-dihedral, grup tak hingga, atau struktur lain seperti ring atau ruang vektor.

1.6 Definisi Istilah

Untuk menghindari kesalah pahaman dalam penafsiran istilah yang digunakan, berikut penjelasan beberapa istilah penting yang terkait dengan penelitian ini:

1. Grup

Misalkan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi

biner di G . Himpunan $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi empat aksioma berikut yakni tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan memiliki invers.

2. Subgrup Normal

Subgrup N dari grup G disebut normal jika berlaku $aga^{-1} \in N$ untuk setiap $a \in G$ dan $n \in N$.

3. Hasil Kali Dua Subgrup Normal

Untuk dua subgrup normal N_1 dan N_2 , hasil kali N_1, N_2 didefinisikan sebagai N_1N_2 . Dalam penelitian ini, notasi N_1N_2 digunakan sebagai analogi dari penjumlahan subruang pada ruang vektor.

4. Irisan Dua Subgrup Normal

Irisan $N_1 \cap N_2$ adalah himpunan semua elemen yang berada di N_1 dan N_2 .

5. Grup Dihedral

Grup simetri dari segi- n beraturan yang memuat n transformasi rotasi dan n transformasi refleksi dengan $n \geq 3$ dan dilengkapi operasi komposisi.

6. Dimensi Grup

Dimensi dari suatu grup G , dinotasikan $\dim(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya minimal kelas konjugasi dalam G yang dapat membangun G secara keseluruhan.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Grup

Definisi 2.1

Misalkan S merupakan suatu himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S merupakan suatu pemetaan dari $S \times S$ ke S dengan $(a, b) \in S \times S$ dikawankan dengan $c \in S$, untuk setiap $a, b, c \in S$ dengan $c = a + b$. Secara matematis, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$*: (a, b) \rightarrow c$$

(Andari, 2015).

Contoh

Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+). Akan ditunjukkan bahwa operasi + merupakan operasi biner di $\mathbb{Z}$. Untuk menunjukkan bahwa operasi + adalah operasi biner, harus ditunjukkan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi + dan operasi +, *well-defined*. Perhatikan bahwa

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(a, b) \mapsto c = a + b$$

Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$, maka $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi +. Selanjutnya akan ditunjukkan operasi penjumlahan +, memenuhi *well-defined*. Ambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $(a, b) = (c, d)$. Ini berarti $a = c$ dan $b = d$. karena $a = c$ dan $b = d$, maka berlaku

$$a + b = c + d$$

Jadi, jika $(a, b) = (c, d)$, maka $a + b = c + d$, yaitu operasi penjumlahan $+$, *well-defined*.

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi penjumlahan $+$ merupakan operasi biner.

Berdasarkan konsep operasi biner tersebut, kita dapat mendefinisikan struktur grup secara formal.

Definisi 2.2

Diberikan G merupakan suatu himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G . Himpunan $(G, *)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut

1. Himpunan G tertutup terhadap operasi $*$, yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Himpunan G memiliki elemen identitas, yaitu $\exists e \in G, \forall a \in G$ sehingga berlaku $e * a = a * e = a$
4. Setiap elemen di G memiliki invers di G juga, yaitu

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ sehingga berlaku } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Suatu grup disebut grup komutatif jika berlaku hukum komutatif yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$. (Andari, 2015).

Contoh

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan merupakan suatu grup, karena himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ memenuhi empat aksioma di atas yakni himpunan tertutup terhadap operasi penjumlahan, operasi penjumlahan bersifat asosiatif, himpunan $\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas dan setiap elemen $\mathbb{Z}$ memiliki

invers di $\mathbb{Z}$ juga.

2.1.2 Subgrup

Definisi 2.3

Diberikan $(G,*)$ merupakan suatu grup, $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Himpunan H disebut subgrup dari G , jika $(H,*)$ merupakan grup. Himpunan H subgrup dari grup G diberi notasi $H \leq G$. Setiap grup G mempunyai dua subgrup taksejati yaitu subgrup yang pasti ada dalam suatu grup yakni $H = G$ dan $H = \{e\}$. Suatu subgrup H yang selain $H = G$ dan $H = \{e\}$ disebut subgrup sejati (Andari, 2015).

Contoh

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Himpunan $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup. Himpunan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Himpunan $(\mathbb{Z}, +)$ juga merupakan grup, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari grup $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{R}$.

Untuk memudahkan dalam pengecekan subgrup dari suatu grup terdapat teorema untuk membuktikan suatu himpunan bisa dibilang subgrup dari suatu grup sebagai berikut.

Teorema 2.1

Diberikan $(G,*)$ merupakan suatu grup dan H himpunan bagian dari G dengan H merupakan himpunan tak kosong. Himpunan H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

1. Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$.
2. Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

(Andari, 2015).

Bukti

Pembuktian dilakukan dengan menunjukkan implikasi dua arah. Misalkan $(G,*)$ grup dan $H \subseteq G$ dengan $H \neq \emptyset$.

$(\Rightarrow)$ Jika $H \leq G$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$.

Karena H adalah subgrup dari G maka H seluruh aksioma grup. Akibatnya, untuk setiap $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Hal ini menunjukkan bahwa H tertutup terhadap operasi grup dan setiap elemennya memiliki invers di H , sehingga kedua kondisi yang dimaksud terpenuhi.

$(\Leftarrow)$ Sebaliknya, andaikan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$, maka $H \leq G$.

Karena $H \subseteq G$, maka sifat asosiatif pada G juga berlaku pada H . Selain itu, karena $H \neq \emptyset$ terdapat suatu elemen $a \in H$. Berdasarkan asumsi, elemen invers $a^{-1} \in H$, sehingga diperoleh elemen $e = a * a^{-1} \in H$. Dengan demikian, H memuat elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers di H , serta tertutup terhadap operasi tersebut. Oleh karena itu, H memenuhi seluruh aksioma subgrup dan dapat disimpulkan bahwa $H \leq G$.

Dengan demikian, teorema tersebut terbukti.

Definisi 2.4

Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G . Hasil kali H dan K , dinotasikan HK , didefinisikan sebagai himpunan

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

(Dummit & Foote, 2004).

Contoh

Misalkan terdapat grup dihedral $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, dengan $r^3 = e, s^2 =$

e dan $sr = r^{-1}s$.

Misalkan H, K merupakan subgrup dari D_6 dengan $H = \{e, r, r^2\}$ dan $K = \{e, s\}$. Maka hasil kali HK yakni

1. Untuk $h = e$

$$e \cdot e = e \text{ dan } e \cdot s = s$$

2. Untuk $h = r$

$$r \cdot e = r \text{ dan } r \cdot s = rs = sr^2$$

3. Untuk $h = r^2$

$$r^2 \cdot e = r^2 \text{ dan } r^2 \cdot s = sr$$

Berdasarkan perhitungan didapat $HK = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

Teorema 2.2

Jika H dan K merupakan subgrup dari grup G , HK merupakan sebuah subgrup dari G jika dan hanya jika $HK = KH$ (Dummit & Foote, 2004).

Bukti

Pertama, asumsikan bahwa $HK = KH$ dan misalkan $a, b \in HK$. Kita buktikan $ab^{-1} \in HK$ sehingga HK adalah subgrup. Misalkan $a = h_1k_1$ dan $b = h_2k_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$. Maka $b^{-1} = k_2^{-1}h_2^{-1}$, sehingga $ab^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$. Misalkan $k_3 = k_1k_2^{-1} \in K$ dan $h_3 = h_2^{-1}$. Jadi $ab^{-1} = h_1k_3h_3$. Karena $HK = KH$, maka diperoleh $k_3h_3 = h_4k_4$ untuk suatu $h_4 \in H, k_4 \in K$. Dengan demikian $ab^{-1} = h_1h_4k_4$ dan karena $h_1h_4 \in H, k_4 \in K$, kita peroleh $ab^{-1} \in HK$.

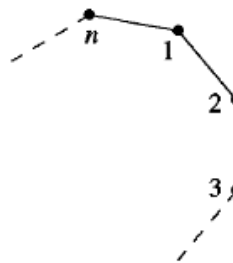
Sebaliknya, asumsikan bahwa HK adalah subgrup dari G . karena $K \leq HK$ dan $H \leq HK$, berdasarkan sifat ketertutupan subgrup, $KH \subseteq HK$. Untuk menunjukkan kebalikannya, misalkan $hk \in HK$. Karena HK diasumsikan

sebagai subgrup, tuliskan $hk = a^{-1}$, untuk suatu $a \in HK$. Jika $a = h_1k_1$, maka $hk = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH$.

Jadi teorema terbukti.

2.1.3 Grup Dihedral

Misalkan terdapat suatu segi- n beraturan yang berpusat di titik asal pada bidang- xy dan setiap sudutnya diberi label secara berurutan searah jarum jam dari 1 sampai n seperti pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Pelabelan Pada Segi- n Beraturan

Untuk suatu segi- n beraturan, seluruh transformasi yang mempertahankan bentuk bangun tersebut, yaitu rotasi dan refleksi, membentuk sebuah grup dengan operasi komposisi. Grup ini disebut grup dihedral orde $2n$ dan dinotasikan dengan D_{2n} (Dummit & Foote, 2004). Sebagaimana didefinisikan oleh Dummit dan Foote (2004).

Secara lebih rinci, grup dihedral D_{2n} dibangun oleh dua jenis transformasi, yaitu rotasi dan refleksi. Rotasi dilambangkan dengan r , yaitu perputaran sebesar $\frac{2\pi}{n}$ radian dengan pusat di titik asal dan arah putaran searah jarum jam. Jika titik-titik sudut segi- n beraturan diberi label $1, 2, \dots, n$, maka rotasi r dapat direpresentasikan sebagai permutasi yang memetakan titik i ke titik $i + 1$

untuk $1 \leq i \leq n - 1$, dan titik n ke titik 1. Dengan demikian, penerapan rotasi berulang menghasilkan elemen-elemen $e, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ dengan e menyatakan transformasi identitas.

Selain rotasi, terdapat refleksi yang dilambangkan dengan s , yaitu pencerminan terhadap salah satu sumbu simetri segi- n beraturan. Refleksi ini mempertahankan titik-titik yang berada pada sumbu simetri dan memetakan titik lainnya secara simetris terhadap sumbu tersebut. Dengan mengombinasikan refleksi dengan rotasi, diperoleh transformasi-transformasi lain berbentuk $s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$. Akibatnya, seluruh elemen pada grup dihedral dapat dituliskan sebagai

$$D_{2n} = e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$$

Sebagaimana dijelaskan pada definisi 2.4 (Dummit & Foote, 2004).

Definisi 2.5

Misalkan n adalah bilangan bulat dengan $n \geq 3$. Grup dihedral D_{2n} adalah grup yang terdiri atas seluruh simetri segi- n beraturan dengan operasi komposisi transformasi (Dummit & Foote, 2004).

Untuk mempermudah analisis dan perhitungan dalam mengkaji grup dihedral D_{2n} , dapat digunakan sejumlah notasi dan penyederhanaan. Misalnya, elemen identitas pada D_{2n} dinotasikan dengan e . Secara umum, grup dihedral ini memiliki karakteristik atau sifat-sifat dasar sebagai berikut:

1. $e, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ merupakan elemen-elemen yang berbeda dan $r^n = e$.

Oleh karena itu, orde dari r dilambangkan dengan $|r| = n$

2. Elemen s memenuhi $s^2 = e$, sehingga orde dari s dilambangkan dengan $|s| = 2$.

3. $s \neq r^i$ untuk setiap i .

4. $sr^i \neq sr^j$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$ maka

$$D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\},$$

yaitu setiap elemen dapat dinyatakan secara individu dalam bentuk $s^j r^i$

untuk $j \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq n - 1$

5. $rs = sr^{-1}$, hal ini menunjukkan bahwa D_{2n} bukan merupakan grup komutatif.

6. $r^i s = sr^{-i}$, untuk setiap $0 \leq i \leq n$. (Dummit & Foote, 2004).

Contoh

Misalkan $n = 3$, Grup dihedral D_6 merepresentasikan grup simetri dari sebuah segitiga sama sisi. Grup ini terdiri dari 6 elemen yang mencakup 3 rotasi ($\{e, r, r^2\}$) dan 3 refleksi ($\{s, sr, sr^2\}$), sehingga diperoleh $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Apabila elemen-elemen di D_6 dioperasikan dengan operasi komposisi " $\circ$ " maka terbentuklah grup dihedral D_6 . Kemudian, hasil operasi komposisi tersebut ditampilkan pada tabel Cayley di bawah ini:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Dari D_6

$\circ$	e	r	r^2	s	sr	sr^2
e	e	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	e	sr^2	s	sr
r^2	r^2	e	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	e	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	e	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	e

2.1.4 Grup yang Dibangun oleh Subhimpunan

Dalam konteks penelitian ini, kita perlu memahami bagaimana suatu grup atau subgrup dapat dibangun dari himpunan bagiannya. Konsep ini akan digunakan untuk mendefinisikan dimensi grup.

Definisi 2.6

Misalkan G adalah grup dan Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah subhimpunan dari G maka subgrup yang dibangun oleh X adalah

$$H = \langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \mid x_i \in X, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

(Dummit & Foote, 2004).

Pada grup dihedral $D_{2n} = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, grup dihedral (D_{2n}) dibangun oleh elemen rotasi (r) dan refleksi (s) sehingga $D_{2n} = \langle r, s \rangle$. Hal ini karena setiap elemen pada D_{2n} dapat dinyatakan dalam bentuk r^i atau sr^i , dengan $0 \leq i < n$. Sebagai ilustrasi, perhatikan bahwa $r^i \in \langle r, s \rangle$ untuk setiap i dan $sr^i = s \circ r^i \in \langle r, s \rangle$. Dengan demikian seluruh elemen pada grup dihedral D_{2n} dapat dibangun oleh himpunan (r, s) , sehingga diperoleh $D_{2n} = \langle r, s \rangle$.

Contoh

Diberikan grup dihedral $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Selain itu, $X = \{r^2, sr\}$ merupakan subhimpunan dari D_6 . Subgrup yang dibangun oleh subhimpunan X dapat diidentifikasi melalui operasi komposisi dibawah ini:

1. $(r^2)^2 \circ (sr)^2 = r$
2. $(r^2)^5 \circ (sr)^1 = s$

Karena $\langle r, s \rangle \subseteq \langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle X \rangle$, maka subgrup yang dibangun oleh X yakni $\{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = D_6$.

2.1.5 Subgrup Normal

Setelah membahas konsep subgrup dalam suatu grup, selanjutnya akan diperkenalkan konsep koset dan subgrup normal yang memiliki peranan penting dalam memahami struktur grup.

Definisi 2.7

Misalkan $(G,*)$ adalah grup, $a \in G$ dan himpunan $H = \{b, c, d\}$ merupakan subgrup di G . Suatu himpunan H disebut koset kiri dari G jika memenuhi

$$a * H = \{a * b, a * c, a * d\}$$

Dan suatu himpunan H disebut koset kanan dari G jika memenuhi

$$H * a = \{b * a, c * a, d * a, \}$$

(Andari, 2015).

Berikut merupakan contoh dari koset kiri dan kanan suatu grup.

Misalkan D_6 merupakan grup dan $H = \{e, s\}$ merupakan subgrup dari D_6 .

Koset kiri dari H di D_6 adalah

1. $He = Hs = H$.
2. $Hr = Hsr = \{r, sr\}$.
3. $Hr^2 = Hsr^2 = \{r^2, sr^2\}$.

Namun koset kanan dari H di D_6 yakni

1. $eH = sH = H$.
2. $rH = sr^2H = \{r, sr^2\}$.
3. $r^2H = Hsr^2 = \{r^2, sr^2\}$.

jadi, koset kanan dari H di D_6 adalah $H, \{r, sr\}$ dan $\{r^2, sr^2\}$ dan koset kiri dari

H di D_6 adalah $H, \{r, sr^2\}$ dan $\{r^2, sr\}$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai definisi dari subgrup normal.

Definisi 2.8

Misalkan G merupakan grup dan N merupakan subgrup di G . subgrup N disebut subgrup normal dari G jika berlaku $ana^{-1} \in N$, untuk setiap $a \in G$ dan $n \in N$. Himpunan N subgrup normal dari grup G biasanya di definisikan dengan notasi $N \trianglelefteq G$ (Andari, 2015).

Akibat 2.7.1

Misalkan N adalah subgrup dari G . Himpunan N merupakan subgrup normal jika dan hanya jika $aN = Na$, untuk setiap $a \in G$ (Andari, 2015).

Bukti

($\Rightarrow$) Diketahui: N subgrup normal dari grup G .

Akan dibuktikan: $aN = Na$. Karena N subgrup normal, maka berlaku $aNa^{-1} = N$.

$$aNa^{-1} = N$$

$$aNa^{-1}a = Na$$

$$aN = Na$$

Jadi, jika N subgrup normal G , maka $aN = Na$.

($\Leftarrow$) Diketahui: $aN = Na$.

Akan dibuktikan: N subgrup normal di G . Jika $aN = Na$, maka $aNa^{-1} = Na a^{-1} = Ne = N$, dimana e merupakan elemen identitas di G . Jadi $aN = Na$, maka N subgrup normal.

Dari uraian diatas, terbukti N subgrup normal G , bila dan hanya bila $aN = Na$.

Contoh

Diberikan grup D_6 dan $H = \{e, r, r^2\}$ adalah subgrup dari D_6 .

Koset kanan dari H di D_6 adalah

1. $He = Hr = Hr^2 = \{e, r, r^2\} = H.$
2. $Hs = Hsr = Hsr^2 = \{s, sr, sr^2\}.$

Sedangkan koset kiri dari H di D_6 adalah

1. $eH = rH = r^2H = \{e, r, r^2\} = H.$
2. $sH = srH = sr^2H = \{s, sr, sr^2\}.$

Karena $aH = Ha$ untuk setiap $a \in D_6$ maka H adalah subgrup normal dari D_6 .

Selanjutnya, berdasarkan Tarnauceanu (2015), semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil berbentuk

1. $\langle r^d \rangle = \{e, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan d merupakan pembagi dari n ,
2. $D_{2n}.$

Sementara itu, semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

1. $\langle r^d \rangle = \{e, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan $d|n$,
2. $\{e, r^{\frac{n}{2}}\}$
3. $\{e, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$
4. $\{e, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\},$
5. $\{e, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\},$
6. D_{2n}

Contoh

Diberikan grup dihedral $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Semua subgrup normal dari D_6 adalah

1. $\{e, r, r^2\}.$
2. $\{e\}.$

3. D_6 .

Diberikan grup dihedral $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Semua subgrup normal dari D_8 adalah

1. $\{e, r, r^2, r^3\}$.
2. $\{e, r^2\}$.
3. $\{e\}$.
4. $\{e, r^2, s, sr^2\}$.
5. $\{e, r^2, sr, sr^3\}$.
6. D_8 .

Subgrup normal memiliki sifat-sifat penting terhadap operasi himpunan yang relevan dengan penelitian. Berikut teorema yang membahas tentang sifat irisan pada subgrup normal.

Teorema 2.3

Misalkan $(G, *)$ merupakan grup. Jika himpunan N_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah subgrup normal di G , maka $\bigcap_{i=1}^n N_i$ juga merupakan subgrup normal di G (Andari, 2015).

Bukti

Perhatikan $\bigcap_{i=1}^n N_i = N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n$.

Ambil sebarang $a, b \in \bigcap_{i=1}^n N_i$ maka $a, b \in N_i$ untuk setiap i . Karena N_i merupakan subgrup normal dan $a, b \in N_i$ untuk setiap i , maka berlaku $ab^{-1} \in N_i$ untuk setiap i . Karena berlaku $ab^{-1} \in N_i$ untuk setiap i , maka $ab^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n N_i$. Karena untuk setiap $a, b \in \bigcap_{i=1}^n N_i$ berlaku $ab^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n N_i$, maka terbukti $\bigcap_{i=1}^n N_i$ merupakan subgrup dari grup G .

Selanjutnya yakni membuktikan $\bigcap_{i=1}^n N_i$ normal. Jika diambil $x \in \bigcap_{i=1}^n N_i$,

maka $x \in N_i$, untuk setiap i . Karena $x \in N_i$ dan N_i subgrup normal untuk setiap i , maka untuk setiap $a \in G$ berlaku $axa^{-1} \in N_i$ untuk setiap i . Jadi untuk setiap $x \in \bigcap_{i=1}^n N_i$ dan untuk setiap $a \in G$ berlaku $axa^{-1} \in \bigcap_{i=1}^n N_i$. Terbukti $\bigcap_{i=1}^n N_i$ merupakan subgrup normal.

Teorema 2.4

Misalkan N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal digrup G , maka N_1N_2 merupakan subgrup normal di G .

Bukti

Untuk membuktikan N_1N_2 merupakan subgrup normal, kita buktikan bahwa N_1N_2 merupakan subgrup dan uji kenormalan.

Untuk membuktikan N_1N_2 merupakan subgrup kita gunakan teorema 2.2 yakni suatu subgrup HK dikatakan subgrup jika dan hanya jika $HK = KH$.

Membuktikan $N_1N_2 \subseteq N_2N_1$

Ambil sebarang $x \in N_1N_2$ dengan $x = n_1n_2$ untuk suatu $n_1 \in N_1$ dan $n_2 \in N_2$. Karena N_1 merupakan subgrup normal di G maka untuk setiap $g \in G$ berlaku $gN_1g^{-1} = N_1$. Pilih $g = n_2$, maka $n_2N_1n_2^{-1} = N_1$ dengan mengalikan kedua ruas dengan n_2 diperoleh $n_2N_1 = N_1n_2$. Karena $n_1 \in N_1$, maka elemen n_1n_2 berada dalam himpunan N_1n_2 . Karena $N_1n_2 = n_2N_1$, maka $n_1n_2 \in n_2N_1$. Oleh karena itu $n_1n_2 = n'_2n'_1$ untuk suatu $n'_2 \in N_2$ dan $n'_1 \in N_1$. Ini menunjukkan $x \in N_2N_1$, sehingga $N_1N_2 \subseteq N_2N_1$.

Membuktikan $N_2N_1 \subseteq N_1N_2$

Ambil sebarang $y \in N_2N_1$ dengan $y = n_2n_1$ untuk suatu $n_1 \in N_1$ dan $n_2 \in N_2$. Karena N_2 merupakan subgrup normal di G maka untuk setiap $g \in G$ berlaku $gN_2g^{-1} = N_2$. Pilih $g = n_1$, maka $n_1N_2n_1^{-1} = N_2$ dengan mengalikan kedua

ruas dengan n_1 diperoleh $n_1N_2 = N_2n_1$. Karena $n_2 \in N_2$, maka elemen n_2n_1 berada dalam himpunan N_2n_1 . Karena $N_2n_1 = n_1N_2$, maka $n_2n_1 \in n_1N_2$. Oleh karena itu $n_2n_1 = n_2''n_1''$ untuk suatu $n_1'' \in N_1$ dan $n_2'' \in N_2$. Ini menunjukkan $y \in N_2N_1$, sehingga $N_2N_1 \subseteq N_1N_2$.

Jadi, karena $N_1N_2 \subseteq N_2N_1$ dan $N_2N_1 \subseteq N_1N_2$ maka dapat disimpulkan $N_1N_2 = N_2N_1$. Berdasarkan Teorema 2.2 maka N_1N_2 merupakan subgrup.

Uji kenormalan

Untuk membuktikan N_1N_2 normal, kita harus menunjukkan untuk setiap elemen $g \in G$.

$$g(N_1N_2)g^{-1} \subseteq N_1N_2$$

Ambil sebarang $z \in g(N_1N_2)g^{-1}$ sehingga $z = g(n_1n_2)g^{-1}$ untuk suatu $n_1 \in N_1$ dan $n_2 \in N_2$. Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal maka $gn_1g^{-1} \in N_1$ sebut, $n'_1 = gn_1g^{-1}$ dan $gn_2g^{-1} \in N_2$ sebut $n'_2 = gn_2g^{-1}$ sehingga diperoleh

$$z = g(n_1n_2)g^{-1}$$

$$z = g(gn_1g^{-1}gn_2g^{-1})g^{-1}$$

$$z = g(gn_1)(n_2g^{-1})g^{-1}$$

$$z = (gn_1g^{-1})(gn_2g^{-1})$$

$$z = n'_1n'_2$$

Berdasarkan definisi himpunan N_1N_2 , maka $z \in N_1N_2$. Karena $g(N_1N_2)g^{-1} \subseteq N_1N_2$ berlaku untuk semua $g \in G$, maka terbukti bahwa N_1N_2 merupakan subgrup normal.

2.1.6 Kelas Konjugasi

Untuk mendefinisikan dimensi grup menurut Kaplan & Lev (2003), kita perlu memahami konsep kelas konjugasi. Kelas konjugasi memainkan peran sentral karena dimensi grup didefinisikan berdasarkan minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun grup tersebut.

Definisi 2.9

Misalkan G merupakan suatu grup dan $a \in G$. Suatu elemen $b \in G$ disebut sebagai konjugat dari a apabila terdapat $g \in G$ sehingga $b = gag^{-1}$. Dalam hal ini, elemen b dan a dikatakan saling konjugat (James & Liebeck, 2001).

Contoh

Diberikan grup $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Akan ditunjukkan elemen r merupakan konjugat dari elemen r^2 . Menurut Definisi 2.8 sebagai berikut:

Pilih $g = sr^2$

$$r = sr^2 \circ r^2 \circ (sr^2)^{-1} = sr^2 \circ r^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr = r^2$$

Dengan demikian, r merupakan konjugat dari r^2 .

Teorema 2.5

Misalkan G adalah suatu grup dan $a, b \in G$. Didefinisikan suatu relasi konjugasi $\mathcal{R}$ pada G dengan ketentuan $b\mathcal{R}a$ apabila terdapat elemen $g \in G$ sehingga $b = gag^{-1}$. Relasi konjugasi tersebut merupakan relasi ekuivalen pada G (Galian, 2012).

Bukti

1. Ambil sebarang $a \in G$ jelas bahwa $a\mathcal{R}a$ karena terdapat elemen identitas

$e \in G$ sehingga $ea e^{-1} = eae = a$. Oleh karena itu, relasi $\mathcal{R}$ bersifat

refleksif.

2. Ambil sebarang $a, b \in G$ dengan $b\mathcal{R}a$, maka terdapat suatu elemen $g \in G$ sehingga $b = gag^{-1}$. Dengan mengalikan kedua ruas oleh g^{-1} dikiri dan g di kanan diperoleh $g^{-1}bg = a$.

hal ini menunjukkan bahwa $a\mathcal{R}b$, sehingga relasi $\mathcal{R}$ bersifat simetris.

3. Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $b\mathcal{R}a$ dan $a\mathcal{R}c$ maka terdapat elemen $g, l \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$ dan $a = lcl^{-1}$.

dengan mensubstitusi $a = lcl^{-1}$ ke dalam persamaan $b = gag^{-1}$, didapat

$$\begin{aligned}
 b &= gag^{-1} \\
 &= g(lcl^{-1})g^{-1} && \text{[Substitusi } a = lcl^{-1}] \\
 &= (gl)c(l^{-1}g^{-1}) && \text{[Sifat asosiatif]} \\
 &= (gl)c(gl)^{-1} && \text{[Sifat invers]} \\
 &= pcp^{-1}, p \in G && \text{[sifat tertutupan]}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $b = pcp^{-1}$, untuk suatu $p \in G$. Dengan demikian $b\mathcal{R}c$, sehingga relasi $\mathcal{R}$ bersifat transitif.

Karena relasi $\mathcal{R}$ bersifat reflektif, simetris dan transitif, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{R}$ adalah suatu relasi ekuivalen pada grup G .

Definisi 2.10

Kelas ekuivalen yang terbentuk dari relasi konjugasi pada suatu grup disebut sebagai kelas konjugasi. Jika G merupakan suatu grup dan $a \in G$ kelas konjugasi dari a didefinisikan sebagai

$$[a] = \{gag^{-1} | g \in G\}$$

(James & Liebeck, 2001).

Contoh

Diberikan grup dihedral $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kelas konjugasi dari $s \in D_6$

dapat ditentukan dengan memperhatikan semua hasil konjugasi $g \circ s \circ g^{-1}$, untuk setiap $g \in G$ sebagai berikut:

1. $e \circ s \circ e^{-1} = e \circ s \circ e = s$
2. $r \circ s \circ r^{-1} = r \circ s \circ r^2 = sr$
3. $r^2 \circ s \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ s \circ r = sr^2$
4. $s \circ s \circ s^{-1} = s \circ s \circ s = s$
5. $sr \circ s \circ sr^{-1} = sr \circ s \circ sr = sr^2$
6. $sr^2 \circ s \circ (sr^2)^{-1} = sr^2 \circ s \circ sr^2 = sr$

Jadi, diperoleh $[s] = \{s, sr, sr^2\}$.

Kemudian, berdasarkan James & Liebeck (2001), seluruh kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} sebagai berikut:

1. Jika $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil, diperoleh
 - a. $[e] = \{e\}$
 - b. $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$
 - c. $[s] = \{sr^i \mid 0 \leq i \leq n-1\} = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$
2. Jika $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, diperoleh
 - a. $[e] = \{e\}$
 - b. $\left[r^{\frac{n}{2}}\right] = \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$
 - c. $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$
 - d. $[s] = \{sr^{2i} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\} = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$
 - e. $[sr] = \{sr^{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\} = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$

Contoh

1. Kelas konjugasi dari $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ adalah

- a. $[e] = \{e\}$
- b. $[r] = \{r, r^2\} = [r^2]$
- c. $[s] = \{s, sr, sr^2\}$

2. Kelas konjugasi $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ adalah

- a. $[e] = \{e\}$
- b. $[r] = \{r, r^3\} = [r^3]$
- c. $[r^2] = \{r^2\}$
- d. $[s] = \{s, sr^2\}$
- e. $[sr] = \{sr, sr^3\}$

2.1.7 Dimensi dari Grup

Dengan pemahaman tentang kelas konjugasi, kita sekarang dapat mendefinisikan konsep dimensi grup yang menjadi fokus utama penelitian ini. Konsep ini merupakan analogi dari dimensi ruang vektor yang diterapkan dalam konteks teori grup.

Definisi 2.11

Misalkan G merupakan suatu grup berhingga. Dimensi dari G , dinotasikan dengan $\dim(G)$, didefinisikan sebagai minimal banyaknya kelas konjugasi di G yang dapat membangun grup tersebut (Kaplan & Lev, 2003).

Contoh

Misalkan $n = 3$ sehingga diperoleh grup dihedral $D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Akan dibuktikan bahwa dimensi dari grup D_6 yaitu 1. Untuk keperluan ini, pilih kelas konjugasi dari elemen s dari D_6 yakni $[s] = \{s, sr, sr^2\}$. Himpunan yang dihasilkan oleh kelas konjugasi tersebut adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, sr^2 \rangle.$$

Dari hasil operasi grup diperoleh bahwa $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$, sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle$.

Akibatnya, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_6 = \langle r, s \rangle$. Hal ini menunjukkan bahwa satu kelas konjugasi, yaitu $[s]$, sudah cukup untuk membangun grup D_6 . Oleh karena itu, karena jumlah minimum kelas konjugasi yang membangun D_6 adalah satu maka diperoleh $\dim(D_6) = 1$.

Selanjutnya dalam mendefinisikan dimensi dari subgrup normal Kholilurrohman (2022) mendefinisikan sebagai jumlah minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N .

Contoh

Misal $N = \{e, r, r^2\}$ merupakan subgrup normal didapat kelas konjugasi dari N yakni $[e], [r], [r^2]$ kemudian akan ditentukan jumlah minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N . Sebagai langkah awal, akan ditunjukkan himpunan yang dibangun oleh satu kelas konjugasi. Misalkan pilih Himpunan yang dibangun oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle.$$

Perhatikan bahwa

$$\langle r \rangle = \{e, r, r^2\} = N.$$

Dapat disimpulkan bahwa $[r]$ sendiri sudah membangun N . Oleh karena itu, N memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, dimensi dari N adalah 1, atau ditulis $\dim(N) = 1$.

Dalam konteks grup dihedral, dimensi telah dihitung secara lengkap dalam penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Kholilurohman pada tahun 2022, yang mene dalam penelitiannya merumuskan beberapa teorema.

Teorema 2.6

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n ganjil adalah satu (Kholilurrohman, 2022).

Bukti

Misalkan $n \geq 3$ dan n ganjil perhatikan grup dihedral

$$D_{2n} = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Untuk menentukan dimensi dari D_{2n} , terlebih dahulu akan ditentukan seluruh kelas konjugasi dari D_{2n} . Kelas-kelas konjugasi pada D_{2n} adalah sebagai berikut:

1. $[e] = \{e\}$
2. $[r^k] = \{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$
3. $[s] = \{sr^i \mid 0 \leq i \leq n-1\} = \{s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$

Langkah selanjutnya adalah menentukan jumlah minimal kelas konjugasi yang mampu membangun D_{2n} . Untuk keperluan tersebut, pertama akan dikaji himpunan yang dihasilkan oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibentuk oleh $[s]$ adalah

$$\langle [s] \rangle = \langle s, sr, \dots, sr^{n-1} \rangle.$$

Perhatikan bahwa elemen $r = s \circ sr \in \langle [s] \rangle$ sehingga diperoleh $r, s \in \langle [s] \rangle$.

Dengan demikian, $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq D_{2n} = \langle r, s \rangle$. Hal ini menunjukkan bahwa $[s]$ membangun D_{2n} . Karena untuk n ganjil, grup dihedral D_{2n} dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi saja, maka dimensi dari D_{2n} adalah 1, ditulis $\dim(D_{2n}) =$

1. Sehingga, teorema tersebut terbukti.

Teorema 2.7

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap adalah 2 (Kholilurrohman, 2022).

Bukti

Misalkan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dan n genap, perhatikan grup dihedral

$$D_{2n} = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}.$$

Untuk mencari dimensi dari D_{2n} , terlebih dahulu akan ditentukan seluruh kelas konjugasi dari D_{2n} . Kelas-kelas konjugasi pada D_{2n} adalah sebagai berikut:

1. $[e] = \{e\}$
2. $\left[r^{\frac{n}{2}}\right] = \left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$
3. $[r] = \{r, r^{n-1}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$
4. $[s] = \left\{sr^{2i} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\right\} = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$
5. $[sr] = \{sr^{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\} = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$

Langkah selanjutnya adalah menentukan jumlah minimal kelas konjugasi yang dapat membangun D_{2n} . Untuk keperluan tersebut, pertama akan dikaji himpunan yang dibentuk oleh satu kelas konjugasi. Misalkan D_{2n} dibentuk oleh satu kelas konjugasi maka r dan s terdapat dalam satu kelas konjugasi. Ini berarti terdapat suatu elemen $g \in D_{2n}$ sedemikian sehingga $r = gsg^{-1}$. Misalkan $g = s^i r^j$ dengan $i \in \{0,1\}$ dan $0 \leq j \leq n-1$. Diperoleh

$$rr^{-1} = gsg^{-1}r^{-1}$$

Karena r^{-1} adalah invers dari r dan $g = s^i r^j$ maka

$$e = (s^i r^j)s(s^i r^j)^{-1}r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s^i r^j s r^{-j} s^{-i} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s^i s r^{-j} r^{-j} s^{-i} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s^i s r^{-2j} s^{-i} r^{n-1}$$

Jika $i = 0$ maka

$$e = s r^{-2j} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s r^{n-2j-1}$$

Jika $i = 1$ maka

$$e = s s r^{-2j} s r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s r^{2j} r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow e = s r^{n+2j-1}$$

Di lain sisi, berdasarkan sifat grup dihedral $s \neq ri$ untuk sebarang i maka $s r^{n-2j-1} \neq s^2 = e$ dan $s r^{n+2j-1} \neq s^2 = e$. Oleh karena itu, hasil ini bertentangan dengan asumsi awal yang mensyaratkan r dan s berada dalam satu kelas konjugasi. Dengan demikian r dan s tidak mungkin termuat dalam satu kelas konjugasi. Sehingga, D_{2n} tidak dapat dibangun hanya oleh satu kelas konjugasi. Jadi, $\dim(D_{2n}) > 1$.

Langkah selanjutnya, akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r]$ dan $[s]$ adalah

$$\langle [r], [s] \rangle = \langle r, r^{n-1}, s, s r^2, s r^4, \dots, s r^{n-2} \rangle.$$

Karena $r, s \in \langle [r], [s] \rangle$ maka $\langle r, s \rangle \subseteq \langle [r], [s] \rangle \subseteq D_{2n} = \langle r, s \rangle$. Dengan demikian, $[r]$ dan $[s]$ membangun D_{2n} . Karena telah ditunjukkan bahwa $\dim(D_{2n}) > 1$ dan D_{2n} dapat dibangun oleh dua kelas konjugasi, maka dapat disimpulkan dimensi dari D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan n genap adalah 2, dapat ditulis $\dim(D_{2n}) = 2$.

Dengan ini, teorema tersebut terbukti.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Kajian mengenai dimensi dua subgrup normal dalam grup dihedral pada dasarnya berkaitan dengan struktur, keteraturan, keseimbangan, dan kesetaraan dalam sistem aljabar (Dummit & Foote, 2004). Nilai-nilai ini sejalan dengan prinsip-prinsip yang digambarkan dalam Al-Qur'an, dimana alam semesta beserta segala isinya diciptakan berdasarkan ukuran, aturan dan keseimbangan yang sangat teliti. Hal ini ditegaskan dalam QS. Al Qamar ayat 49 yang berbunyi

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ۝٤٩

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran.*”.

Kata *qadar* dalam ayat ini, sebagaimana dijelaskan oleh Ibnu Katsir, mengandung makna “dengan ketentuan dan ukuran tertentu” (Ibnu Katsir, 1999). Al-Baghawi dalam tafsirnya menambahkan bahwa penciptaan dengan *qadar* berarti sesuai dengan hikmah dan ilmu-Nya, tidak ada yang sia-sia atau serampangan (Al-Baghawi, 1997).

Lebih lanjut, prinsip keteraturan ini dikaitkan dengan larangan untuk menyimpang dari keseimbangan yang telah ditetapkan, sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Ar-Rahman ayat 7-9 yang berbunyi:

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ۝٧ أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ۝٨ وَأَقِيمُوا الْوَزْنَ بِالْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ ۝٩

“*Langit telah Dia tinggikan dan Dia telah menciptakan timbangan (keadilan dan keseimbangan). agar kamu tidak melampaui batas dalam timbangan itu. Tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi timbangan itu.*”.

M. Quraish Shihab dalam tafsir Al-Misbah menjelaskan kata *al-mizan* sebagai

“alat untuk menimbang dan mengukur yang menghasilkan keadilan dan keseimbangan” (Sihab, 2002). Beliau juga menambahkan bahwa keadilan pada hakikatnya adalah “menempatkan sesuatu pada tempatnya yang tepat”, yang wujud konkret dari keseimbangan. Dalam matematika, konsep struktur aljabar seperti grup, subgrup normal, dan kelas konjugasi mewakili sebuah "tempat" atau "relasi" yang tepat bagi setiap elemennya. Penelitian yang meneliti apakah hubungan dua dimensi subgrup normal dapat membentuk suatu hubungan pada dasarnya adalah penyelidikan untuk menemukan "keseimbangan" dan "keadilan" (konsistensi logis) dalam struktur matematika tersebut.

Prinsip ini diperkuat dengan perintah untuk mengamati alam tanpa menemukan cacat, seperti halnya firman Allah SWT pada QS. Al-Mulk ayat 3 yang berbunyi:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَوُّتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُتُورٍ ﴿٣﴾

“(Dia juga) yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih ketidakseimbangan sedikit pun. Maka, lihatlah sekali lagi! Adakah kamu melihat suatu cela?”.

Menurut Kementerian Agama Republik Indonesia (2022), kata *tafawut* bermakna ketidakseimbangan, kegagalan, atau ketidaksempurnaan. Ayat ini mendorong observasi mendalam dan berulang terhadap ciptaan untuk memastikan konsistensi dan keharmonisan (Kementerian Agama Republik Indonesia, 2022).

Dengan demikian, penelitian tentang hubungan dimensi subgrup normal dalam grup dihedral bukan sekadar aktivitas logika formal, tetapi juga merupakan bagian dari proses *tafaqquh* (pendalaman) terhadap ayat-ayat *kauniyah* (tanda-tanda alam) Allah. Menyelidiki apakah suatu dimensi subgrup normal dalam grup dihedral dapat membentuk suatu hubungan, adalah upaya untuk memahami batasan dan keberlakuan berbagai bentuk "keteraturan". Hasilnya apakah hubungan itu selalu,

kadang, atau tidak pernah terbentuk akan mengungkap lebih banyak tentang karakter "*qadar*" dan "*mizan*" yang Allah tetapkan dalam hukum-hukum matematika. Dengan cara ini, aktivitas intelektual dalam matematika murni berjalan harmonis dengan semangat keislaman yang menjunjung tinggi pencarian kebenaran, keteraturan, dan keindahan dalam segala ciptaan-Nya.

2.3 Kajian Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan teori yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya khususnya definisi dimensi grup menurut Kaplan dan Lev (2003) dan klasifikasi D_{2n} . Penelitian ini akan menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal. Subbab ini bertujuan untuk mengaplikasikan teori guna melakukan analisis awal terhadap struktur subgrup normal D_{2n} dan mengidentifikasi pola atau masalah yang akan menjadi fokus pembahasan.

Tahap pertama yaitu mengklasifikasi subgrup normal D_{2n} dan dimensinya. Dari apa yang disampaikan oleh Tarnauceanu (2015), subgrup normal D_{2n} dapat diklasifikasikan berdasarkan paritas n :

untuk n ganjil berbentuk

1. $\langle r^d \rangle = \{e, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan d merupakan pembagi dari n ,
2. D_{2n} .

Sementara itu, semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap adalah sebagai berikut:

1. $\langle r^d \rangle = \{e, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan $d|n$,
2. $\{e, r^{\frac{n}{2}}\}$
3. $\{e, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$
4. $\{e, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\},$
5. $\{e, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\},$
6. D_{2n}

Tahap yang kedua yakni analisis awal dimensi untuk beberapa kasus kecil untuk melihat kemungkinan terjadinya hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal

Contoh: $D_6(n = 3)$

Subgrup normal dari D_6 yakni

$$N_1 = \{e\}$$

$$N_2 = \{e, r, r^2\} \text{ dan}$$

$$N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$$

Selanjutnya mencari kelas konjugasi dan dimensi dari setiap subgrup normal

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

kelas konjugasi yang dibentuk oleh H_1 Hanya $[e] = e$.

Selanjut nya akan mencari minimal banyak nya kelas konjugasi yang membangun subgrup normalnya karena konjugasi dalam H_1 hanya $[e] = \{e\}$. Maka $\langle [e] \rangle = \{e\} = N_1$ jadi $\dim(H_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r, r^2\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni

$$[e] = \{e\} \text{ dan } [r] = \{r, r^2\}.$$

Selanjutnya, akan ditentukan jumlah minimal kelas konjugasi yang dapat

membangun N_2 . Oleh karena itu, terlebih dahulu akan dikaji himpunan yang dibentuk oleh satu kelas konjugasi. Himpunan yang dibentuk oleh $[r]$ adalah

$$\langle [r] \rangle = \langle r \rangle$$

perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2\} = N_2$

hal ini menunjukkan bahwa $[r]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja.

Jadi, $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $\dim(D_6) = 1$.

Langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal. Untuk setiap subgrup normal. Diperoleh sebagai berikut:

Untuk kasus N_1 dan N_1

Untuk hasil kali dua subgrup normal

$$\dim(N_1 N_1) = \{e\}\{e\} = \{e\} = N_1 \text{ jadi } \dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) = 1.$$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya

$$\dim(N_1) + \dim(N_2) = 1 + 1 = 2 \text{ dan untuk irisannya yakni } \dim(N_1 \cap N_2) =$$

$$\dim(\{e\} \cap \{e\}) = \dim(\{e\}) = \dim(N_1) = 1$$

Dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Untuk kasus N_1 dan N_2

Untuk hasil kali dua subgrup normal, perhatikan bahwa $N_1 N_2$ sebagai berikut

$$N_1 N_2 = \{e\}\{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\} = N_2 \text{ jadi } \dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisan subgrup normal

perhatikan bahwa $\dim(N_1) + \dim(N_2) = 1 + 1 = 2$

perhatikan bahwa $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r, r^2\} = \{e\} = N_1$, jadi $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$

dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Untuk kasus N_2 dan N_2

Untuk hasil kali dua subgrup normal

perhatikan bahwa $N_1 N_2$ sebagai berikut

$$N_2 N_2 = \{e, r, r^2\} \{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\} = N_2 \text{ jadi } \dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) = 1$$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisan subgrup normal

perhatikan bahwa $\dim(N_2) + \dim(N_2) = 1 + 1 = 2$

perhatikan bahwa $N_2 \cap N_2 = \{e, r, r^2\} \cap \{e, r, r^2\} = \{e\} = N_1$, jadi $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_2) = 1$

dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Untuk kasus N_1 dan N_3

Untuk hasil kali dua subgrup normal

Perhatikan bahwa $N_1 N_3$ didefinisikan sebagai $N_1 N_3 = \{e\} \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3$ jadi $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_3) = 1$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisan subgrup normal

perhatikan bahwa $\dim(N_1) + \dim(N_3) = 1 + 1 = 2$

perhatikan bahwa $N_1 \cap N_3 = \{e\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e\} = N_1$, jadi

$$\dim(N_1 \cap N_3) = \dim(N_1) = 1$$

maka $\dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3) = 2 - \dim(N_1) = 2 - 1 = 1$

dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_1 N_3) = \dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Untuk kasus N_2 dan N_3

Untuk hasil kali dua subgrup normal

Perhatikan bahwa $N_2 N_3$ didefinisikan sebagai

$$N_2 N_3 = \{e, r, r^2\} \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3 \text{ jadi}$$

$$\dim(N_2 N_3) = \dim(N_3) = 1$$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisan subgrup normal

perhatikan bahwa $\dim(N_2) + \dim(N_3) = 1 + 1 = 2$

perhatikan bahwa $N_2 \cap N_3 = \{e, r, r^2\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e\} = N_2$, jadi

$$\dim(N_2 \cap N_3) = \dim(N_2) = 1$$

dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_2 N_3) = \dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Untuk kasus N_3 dan N_3

Untuk hasil kali dua subgrup normal

Perhatikan bahwa N_3N_3 didefinisikan sebagai

$$N_3N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}\{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3 \text{ jadi}$$

$$\dim(N_3N_3) = \dim(N_3) = 1$$

Untuk penjumlahan dimensi dan dimensi irisan subgrup normal

$$\text{perhatikan bahwa } \dim(N_3) + \dim(N_3) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{perhatikan bahwa } N_3 \cap N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3, \text{ jadi}$$

$$\dim(N_3 \cap N_3) = \dim(N_3) = 1$$

dengan demikian diperoleh hubungan

$$\dim(N_3N_3) = \dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3)$$

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$1 = 1$$

Berdasarkan kasus $N_1N_1, N_1N_2, N_2N_2, N_1N_2, N_2N_3$ dan N_3N_3 dapat disimpulkan bahwa hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya

$$\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

berlaku secara umum pada subgrup normal di D_6 .

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Pendekatan ini dipilih karena objek kajian berupa konsep-konsep teoretis dalam aljabar abstrak, khususnya teori grup, yang dianalisis melalui penalaran matematis dan pembuktian formal. Seluruh data dan argumen dalam penelitian diperoleh dari sumber tertulis yang relevan, tanpa melibatkan eksperimen atau pengumpulan data empiris. Sumber-sumber tersebut meliputi jurnal ilmiah, buku teks, dan referensi terkait lainnya yang membahas konsep dimensi dalam grup dihedral serta keterkaitan dengan dimensi pada subruang vektor.

3.2 Pra Penelitian

Tahap pra-penelitian dilakukan sebagai langkah awal untuk memastikan fokus dan arah penelitian. Kegiatan pada tahap ini meliputi penelusuran dan pemilihan referensi yang relevan, pemahaman mendalam terhadap konsep dimensi grup dan subgrup normal, serta mengkaji hubungan dimensi pada ruang vektor sebagai analogi konseptual. Tahap ini bertujuan untuk membangun kerangka teori yang kokoh sebelum analisis lebih lanjut dilakukan.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang ditempuh dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dimensi subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$ dengan memisahkan antara n genap dan ganjil

- a. Mendaftar semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
 - b. Menentukan kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
 - c. Menentukan minimal kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
 - d. Mendaftar semua subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
 - e. Menentukan kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
 - f. Menentukan minimal kelas konjugasi yang membangun subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
2. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal dengan cara:
- a. Menentukan pasangan subgrup normal (N_1, N_2) dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
 - b. Menghitung nilai dimensi dari hasil kali dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$ dengan cara mencari hasil kali dua subgrup normal terlebih dahulu, kemudian mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal sesuai definisi dimensi Kaplan dan Lev.
 - c. Menentukan nilai dimensi dari irisan dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$ dengan cara mencari irisannya terlebih dahulu, kemudian mencari dimensi dari irisannya sesuai definisi dimensi Kaplan dan Lev.

- d. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 3, 5, 7$.
- e. Membuat dugaan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil kemudian membuktikannya.
- f. Menentukan pasangan subgrup normal (N_1, N_2) dari grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
- g. Menghitung nilai dimensi dari hasil kali dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$ dengan cara mencari hasil kali dua subgrup normal terlebih dahulu, kemudian mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal sesuai definisi dimensi Kaplan dan Lev.
- h. Menentukan nilai dimensi dari irisan dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$ dengan cara mencari irisannya terlebih dahulu, kemudian mencari dimensi dari irisannya sesuai definisi dimensi Kaplan dan Lev.
- i. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk $n = 4, 6, 8$.
- j. Membuat dugaan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk n genap kemudian membuktikannya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Dimensi Subgrup Normal dari Grup Dihedral D_{2n}

4.1.1 Dimensi dari Subgrup Normal di D_6

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_6 , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_6 . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_6 yakni $N_1 = \{e\}$, $N_2 = \{e, r, r^2\}$ dan $N_3 = D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_6 :

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi, dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r, r^2\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$ dan $[r] = \{r, r^2\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_2 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk kelas konjugasi $[r]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r]$ adalah $\langle [r] \rangle = \langle \{r, r^2\} \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2\} = N_2$, artinya $[r]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu

kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $N_3 = D_6$

Berdasarkan teorema 2.6 untuk dimensi dari D_6 adalah satu.

4.1.2 Dimensi dari Subgrup Normal di D_8

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_8 , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_8 . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_8 yakni:

1. $N_1 = \{e\}$
2. $N_2 = \{e, r^2\}$
3. $N_3 = \{e, r, r^2, r^3\}$
4. $N_4 = \{e, r^2, s, sr^2\}$
5. $N_5 = \{e, r^2, sr, sr^3\}$
6. $N_6 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_8 :

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi, dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r^2\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$ dan $[r^2] = \{r^2\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun

N_2 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r^2]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r^2]$ adalah $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{e, r^2\} = N_2$, artinya $[r^2]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $N_3 = \{e, r, r^2, r^3\}$

Kelas konjugasi dari N_3 terdiri dari $[e] = \{e\}, [r] = \{r\}, [r^2] = \{r^2\}$ dan $[r^3] = \{r^3\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_3 . Terlebih dahulu akan di tinjau untuk satu kelas konjugas. Kelas konjugasi yang di pilih $[r]$. Himpunan yang dibangun oleh $[r] = \langle [r] \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3\} = N_3$. Artinya $[r]$ membangun N_3 . Oleh karena itu, N_3 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, dimensi dari N_3 dapat ditulis $\dim(N_3) = 1$.

4. Untuk $N_4 = \{e, r^2, s, sr^2\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk dari N_4 yakni $[e] = \{e\}, [r^2] = \{r^2\}, [s] = \{s\}$ dan $[sr^2] = \{sr^2\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_4 . Terlebih dahulu akan ditinjau untuk satu kelas konjugasi.

a. Himpunan yang dibangun oleh $[e]$

Perhatikan bahwa $\langle [e] \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$. Artinya, disini $[e]$ tidak membangun N_4 .

b. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle = \{e, r^2\}$. Artinya, disini $[r^2]$ tidak

membangun N_4 .

c. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$

Perhatikan bahwa $\langle [s] \rangle = \langle s \rangle = \{e, s\}$. Artinya, disini $[s]$ tidak membangun N_4 .

d. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr^2] \rangle = \langle sr^2 \rangle = \{e, sr^2\}$. Artinya, disini $[sr^2]$ tidak membangun N_4

Karena N_4 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka dimensi dari N_4 lebih dari satu. Selanjutnya akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[s]$ adalah $\langle [r^2], [s] \rangle = \langle r^2, s \rangle$. Karena $r^2, s \in \langle [r^2], [s] \rangle$ maka $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [r^2], [s] \rangle \subseteq N_4 = \langle r^2, s \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[s]$ membangun N_4 maka dimensi dari N_4 adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_4) = 2$.

5. Untuk $N_5 = \{e, r^2, sr, sr^3\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk dari N_4 yakni $[e] = \{e\}$, $[r^2] = \{r^2\}$, $[sr] = \{sr\}$ dan $[sr^3] = \{sr^3\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_5 . Terlebih dahulu akan ditinjau untuk satu kelas konjugasi.

a. Himpunan yang dibangun oleh $[e]$

Perhatikan bahwa $\langle [e] \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$. Artinya, disini $[e]$ tidak membangun N_5 .

b. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle = \{e, r^2\}$. Artinya, disini $[r^2]$ tidak

membangun N_5 .

c. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr] \rangle = \langle sr \rangle = \{e, sr\}$. Artinya, disini $[s]$ tidak membangun N_5 .

d. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^3]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr^3] \rangle = \langle sr^3 \rangle = \{e, sr^3\}$. Artinya, disini $[sr^3]$ tidak membangun N_5

Karena N_5 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka dimensi dari N_5 lebih dari satu. Selanjutnya akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[sr]$ adalah $\langle [r^2], [sr] \rangle = \langle r^2, sr \rangle$. Karena $r^2, sr \in \langle [r^2], [sr] \rangle$ maka $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [r^2], [sr] \rangle \subseteq N_5 = \langle r^2, sr \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[sr]$ membangun N_5 maka dimensi dari N_5 adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_5) = 2$.

6. Untuk $N_6 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} = D_8$

Berdasarkan teorema 2.7 untuk dimensi dari D_6 adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_6) = 2$.

4.1.3 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{10}

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_{10} , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_{10} . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_{10} yakni $N_1 = \{e\}$, $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $N_3 = D_{10} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi

yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_{10} :

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi, dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4\}$

Kelas konjugasi dari N_2 terdiri dari $[e] = \{e\}$, $[r] = \{r\}$, $[r^2] = \{r^2\}$, $[r^3] = \{r^3\}$ dan $[r^4] = \{r^4\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_2 . Terlebih dahulu akan di tinjau untuk satu kelas konjugas. Kelas konjugasi yang di pilih $[r]$. Himpunan yang dibangun oleh $[r] = \langle [r] \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3, r^4\} = N_2$. Artinya $[r]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, dimensi dari N_2 dapat ditulis $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $N_3 = D_{10} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Berdasarkan teorema 2.6 untuk dimensi dari D_{10} adalah satu, dapat ditulis $\dim(N_{10}) = 1$.

4.1.4 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{12}

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_{12} , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_{12} . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_{12} yakni:

1. $N_1 = \{e\}$
2. $N_2 = \{e, r^3\}$

3. $N_3 = \{e, r^2, r^4\}$
4. $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$
5. $N_5 = \{e, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$
6. $N_6 = \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$
7. $N_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_{12}

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi, dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r^3\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$ dan $[r^3] = \{r^3\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_2 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r^3]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r^3]$ adalah $\langle [r^3] \rangle = \langle r^3 \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r^3 \rangle = \{e, r^3\} = N_2$, artinya $[r^3]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $N_3 = \{e, r^2, r^4\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$, $[r^2] = \{r^2\}$ dan $[r^4] = \{r^4\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat

membangun N_3 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r^2]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r^2]$ adalah $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{e, r^2, r^4\} = N_3$, artinya $[r^2]$ membangun N_3 . Oleh karena itu, N_3 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_3) = 1$.

4. Untuk $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}, [r] = \{r\}, [r^2] = \{r^2\}, [r^3] = \{r^3\}, [r^4] = \{r^4\}$ dan $[r^5] = \{r^5\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_4 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r]$ adalah $\langle [r] \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = N_4$, artinya $[r]$ membangun N_4 . Oleh karena itu, N_4 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_4) = 1$.

5. Untuk $N_5 = \{e, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}, [r^2] = \{r^2, r^4\}$, dan $[s] = \{s, sr^2, sr^4\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_5 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[s]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[s]$ adalah $\langle [s] \rangle = \langle s, sr^2, sr^4 \rangle$. Perhatikan bahwa $r^2 = s \circ sr^2 \in \langle [s] \rangle$, jadi, $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [s] \rangle \subseteq N_5 = \langle r^2, s \rangle$. Artinya $[s]$ membangun N_5 . Oleh karena itu, N_5 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_5) = 1$.

6. Untuk $N_6 = \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$, $[r^2] = \{r^2, r^4\}$, dan $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_6 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[sr]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[sr]$ adalah $\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^3, sr^5 \rangle$. Perhatikan bahwa $r^2 = sr \circ sr^3 \in \langle [sr] \rangle$, jadi $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [sr] \rangle \subseteq N_6$, artinya $[sr]$ membangun N_6 . Oleh karena itu, N_6 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_6) = 1$.

7. Untuk $N_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\} = D_{12}$

Berdasarkan teorema 2.7 untuk dimensi dari D_{12} adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_{12}) = 2$.

4.1.5 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{14}

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_{14} , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_{14} . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_{14} yakni $N_1 = \{e\}$, $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $N_3 = D_{14} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_{14} :

1. Untuk $N_1 = \{e\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi,

dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

2. Untuk $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

Kelas konjugasi dari N_2 terdiri dari $[e] = \{e\}, [r] = \{r\}, [r^2] = \{r^2\}, [r^3] = \{r^3\}, [r^4] = \{r^4\}, [r^5] = \{r^5\}$ dan $[r^6] = \{r^6\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_2 . Terlebih dahulu akan di tinjau untuk satu kelas konjugas. Kelas konjugasi yang di pilih $[r]$. Himpunan yang dibangun oleh $[r] = \langle [r] \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = N_2$. Artinya $[r]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi saja. Dengan demikian, dimensi dari N_2 dapat ditulis $\dim(N_2) = 1$.

3. Untuk $N_3 = D_{14} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Berdasarkan teorema 2.6 untuk dimensi dari D_{14} adalah satu, dapat ditulis $\dim(N_{14}) = 1$.

4.1.6 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{16}

Dalam menentukan dimensi dari subgrup normal dari D_{16} , terlebih dahulu akan dicari subgrup normal dari D_{16} . Menurut Tarnauceanu (2015) untuk subgrup normal dari D_{16} yakni:

1. $N_1 = \{e\}$
2. $N_2 = \{e, r^4\}$
3. $N_3 = \{e, r^2, r^4, r^6\}$
4. $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$
5. $N_5 = \{e, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$
6. $N_6 = \{e, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$

$$7. N_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\} = D_{16}$$

Selanjutnya akan dicari kelas konjugasi dari subgrup normal tersebut dan menentukan dimensi dari masing-masing subgrup normal dengan definisi minimal banyaknya kelas konjugasi yang dapat membangun N . Berikut merupakan kelas konjugasi dari masing-masing subgrup normal dari D_{16} :

$$1. \text{ Untuk } N_1 = \{e\}$$

Kelas konjugasi yang terbentuk di N_1 hanya satu yakni $[e] = \{e\}$, karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya satu maka berdasarkan definisi, dimensi dari N_1 yakni 1 dapat ditulis $\dim(N_1) = 1$.

$$2. \text{ Untuk } N_2 = \{e, r^4\}$$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$ dan $[r^4] = \{r^4\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_2 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r^4]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r^4]$ adalah $\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r^4 \rangle = \{e, r^4\} = N_2$, artinya $[r^4]$ membangun N_2 . Oleh karena itu, N_2 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_2) = 1$.

$$3. \text{ Untuk } N_3 = \{e, r^2, r^4, r^6\}$$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$, $[r^2] = \{r^2\}$, $[r^4] = \{r^4\}$ dan $[r^6] = \{r^6\}$. Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_3 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r^2]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r^2]$ adalah $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r^2 \rangle = \{e, r^2, r^4, r^6\} = N_3$, artinya $[r^2]$ membangun N_3 . Oleh karena itu, N_3 memiliki himpunan

pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_3) = 1$.

4. Untuk $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}, [r] = \{r\}, [r^2] = \{r^2\}, [r^3] = \{r^3\}, [r^4] = \{r^4\}, [r^5] = \{r^5\}, [r^6] = \{r^6\}$ dan $[r^7] = \{r^7\}$.

Selanjutnya, akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_4 . Oleh karena itu, akan ditinjau terlebih dahulu untuk satu kelas konjugasi $[r]$. Himpunan yang dapat dibangun oleh $[r]$ adalah $\langle [r] \rangle = \langle r \rangle$. Perhatikan bahwa $\langle r \rangle = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\} = N_4$, artinya $[r]$ membangun N_4 . Oleh karena itu, N_4 memiliki himpunan pembangun yang terdiri dari satu kelas konjugasi. Dengan demikian, $\dim(N_4) = 1$.

5. Untuk $N_5 = \{e, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}, [r^2] = \{r^2, r^6\}, [r^4] = \{r^4\}, [s] = \{s, sr^4\}$ dan $[sr^2] = \{sr^2, sr^6\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_5 . Terlebih dahulu akan ditinjau untuk satu kelas konjugasi.

a. Himpunan yang dibangun oleh $[e]$

Perhatikan bahwa $\langle [e] \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$. Artinya, disini $[e]$ tidak membangun N_5 .

b. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2, r^6 \rangle = \{e, r^2, r^4, r^6\}$. Artinya, disini $[r^2]$ tidak membangun N_5 .

c. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle = \{r^4\}$. Artinya, disini $[r^4]$ tidak

membangun N_5 .

d. Himpunan yang dibangun oleh $[s]$

Perhatikan bahwa $\langle [s] \rangle = \langle s, sr^4 \rangle = \{e, s, sr^4\}$. Artinya, disini $[s]$ tidak membangun N_5

e. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr^2] \rangle = \langle sr^2, sr^6 \rangle = \{e, sr^2, sr^6\}$. Artinya, disini $[sr^2]$ tidak membangun N_5

Karena N_5 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka dimensi dari N_5 lebih dari satu. Selanjutnya akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[s]$ adalah $\langle [r^2], [s] \rangle = \langle r^2, s, sr^4 \rangle$. Karena $r^2, s \in \langle [r^2], [s] \rangle$ maka $\langle r^2, s \rangle \subseteq \langle [r^2], [s] \rangle \subseteq N_5 = \langle r^2, s \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[s]$ membangun N_5 maka dimensi dari N_5 adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_5) = 2$.

6. Untuk $N_6 = \{e, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$

Kelas konjugasi yang terbentuk yakni $[e] = \{e\}$, $[r^2] = \{r^2, r^6\}$, $[r^4] = \{r^4\}$, $[sr] = \{sr, sr^5\}$ dan $[sr^3] = \{sr^3, sr^7\}$. Selanjutnya akan dicari minimal kelas konjugasi yang dapat membangun N_6 . Terlebih dahulu akan ditinjau untuk satu kelas konjugasi.

a. Himpunan yang dibangun oleh $[e]$

Perhatikan bahwa $\langle [e] \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$. Artinya, disini $[e]$ tidak membangun N_6 .

b. Himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^2] \rangle = \langle r^2, r^6 \rangle = \{e, r^2, r^4, r^6\}$. Artinya, disini

$[r^2]$ tidak membangun N_6 .

c. Himpunan yang dibangun oleh $[r^4]$

Perhatikan bahwa $\langle [r^4] \rangle = \langle r^4 \rangle = \{r^4\}$. Artinya, disini $[r^4]$ tidak membangun N_6 .

d. Himpunan yang dibangun oleh $[sr]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr] \rangle = \langle sr, sr^5 \rangle = \{e, sr, sr^5\}$. Artinya, disini $[sr]$ tidak membangun N_6

e. Himpunan yang dibangun oleh $[sr^3]$

Perhatikan bahwa $\langle [sr^3] \rangle = \langle sr^3, sr^7 \rangle = \{e, sr^3, sr^7\}$. Artinya, disini $[sr^3]$ tidak membangun N_6

Karena N_6 tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi maka dimensi dari N_6 lebih dari satu. Selanjutnya akan ditinjau himpunan yang dibangun oleh dua kelas konjugasi. Perhatikan bahwa himpunan yang dibangun oleh $[r^2]$ dan $[sr]$ adalah $\langle [r^2], [sr] \rangle = \langle r^2, r^6, sr, sr^5 \rangle$. Karena $r^2, sr \in \langle [r^2], [sr] \rangle$ maka $\langle r^2, sr \rangle \subseteq \langle [r^2], [sr] \rangle \subseteq N_6 = \langle r^2, sr \rangle$. Oleh karena itu, $[r^2]$ dan $[sr]$ membangun N_6 maka dimensi dari N_6 adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_6) = 2$.

7. Untuk $N_7 = D_{16}$

Berdasarkan teorema 2.7 untuk dimensi dari D_{16} adalah dua, dapat ditulis $\dim(N_{16}) = 2$.

4.1.7 Dimensi dari Subgrup Normal di D_{2n}

Berdasarkan hasil pada subbab 4.1.1 sampai 4.1.6, dapat dirumuskan teorema untuk kasus dimensi dari subgrup normal pada grup dihedral D_{2n}

dengan n ganjil, namun tidak untuk kasus dimensi subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} dengan n genap sebagai berikut:

Teorema 4.1

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral. Untuk n ganjil, setiap subgrup normal N dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi, sehingga $\dim(N) = 1$.

Bukti

Berdasarkan Tarnauceanu (2015) subgrup normal pada D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan n merupakan bilangan ganjil maka subgrup normalnya sebagai berikut:

1. $N_1 = \{e\}$
2. $N_2 = \langle r^d \rangle = \{e, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d \geq 1$ dan d merupakan pembagi dari n
3. $N_3 = D_{2n}$

Dalam tiga kasus ini jelas bahwa $\dim(N_1) = 1$ karena kelas konjugasi yang terbentuk hanya $[e]$ dan $\langle e \rangle = \{e\} = N_1$, maka $\dim(N_1) = 1$.

Untuk kasus N_2 pilih kelas konjugasi $[r^d] = \{r^d, r^{n-d}\}$. Perhatikan bahwa untuk n ganjil, r^d dan r^{n-d} berbeda. Kita klaim bahwa $[r^d] = \langle r^d \rangle$. Karena $r^d \in [r^d]$, maka $\langle r^d \rangle \subseteq \langle [r^d] \rangle$. Sebaliknya, $\langle [r^d] \rangle$ adalah subgrup yang dibangkitkan oleh r^d dan r^{n-d} . karena $r^{n-d} \in \langle r^d \rangle$, sehingga $\langle [r^d] \rangle \subseteq \langle r^d \rangle$. Dengan demikian, $\langle [r^d] \rangle = \langle r^d \rangle = N_2$. Jadi N_2 dapat dibangkitkan oleh satu kelas konjugasi $[r^d]$, sehingga $\dim(N_2) = 1$.

Untuk kasus N_3 berdasarkan Teorema 2.6, maka dimensi dari $\dim(N_3) = \dim(D_{2n}) = 1$. Dengan demikian, terbukti bahwa untuk n ganjil, setiap subgrup normal N memenuhi $\dim(N) = 1$.

Pada grup dihedral D_{2n} dengan n genap, dimensi subgrup normal ditentukan

oleh minimal kelas konjugasi yang membangunnya. Subgrup rotasi ($\langle r^d \rangle$) selalu berdimensi 1, sedangkan subgrup yang mengandung refleksi dapat berdimensi 1 atau 2 tergantung pada struktur kelas konjugasinya.

4.2 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dalam Grup Dihedral D_{2n}

4.2.1 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_6

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_6 langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_6 :

1. $N_1 = \{e\}$ dan $\dim(N_1) = 1$.
2. $N_2 = \{e, r, r^2\}$ dan $\dim(N_2) = 1$.
3. $N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dan $\dim(N_3) = 1$.

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_6 dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_1
 - a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 N_1)$)

Karena N_1 dan N_1 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_1 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_1 = \{e\}\{e\} = \{e\} = N_1$, maka $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) = 1$.

b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 \cap N_1)$)

Berdasarkan teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_1 = \{e\} \cap \{e\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_1) = \dim(N_1) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_1) = 1$ dan $\dim(N_1 N_1) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_1)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_1 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1)$.

2. Untuk kasus N_1 dan N_2

a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 N_2)$)

Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_2 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\} = N_2$, maka $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r, r^2\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

3. Untuk kasus N_1 dan N_3

a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 N_3)$)

Karena N_1 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_3 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_1 N_3 = \{e\}\{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3$, maka $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_3) = 1$.

b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 \cap N_3)$)

Berdasarkan teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_3 = \{e\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_3) = \dim(N_1) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_1 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3)$.

4. Untuk kasus N_2 dan N_2

a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 N_2)$)

Karena N_2 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_2 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_2 N_2 = \{e, r, r^2\}\{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\} = N_2$,

maka $\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_2 = \{e, r, r^2\} \cap \{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\}$. Sehingga dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_2) = \dim(N_2) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_2 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2)$.

5. Untuk kasus N_2 dan N_3

a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 N_3)$)

Karena N_2 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_3 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_2 N_3 = \{e, r, r^2\}\{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3$. Dengan demikian, $N_2 N_3 = D_6 = N_3$. Maka,

$$\dim(N_2 N_3) = \dim(N_3) = 1.$$

- b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_3 = \{e, r, r^2\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2\} = N_2$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_3) = \dim(N_2) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_2 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_3) = \dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3)$.

6. Untuk kasus N_3 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 N_3)$)

Karena N_3 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_3 dan N_3 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_3 N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3$. Dengan demikian, $N_3 N_3 = D_6 = N_3$. Maka, $\dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_3 \cap N_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} \cap \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\} = N_3$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_3 \cap N_3) = \dim(N_3) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_3 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_3 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_3 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_3 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3)$.

Dengan demikian, berdasarkan perhitungan diatas dapat disimpulkan bahwa hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya ini berlaku di semua subgrup normal pada grup dihedral D_6 .

4.2.2 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{10}

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_{10} langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_{10} :

1. $N_1 = \{e\}$ dan $\dim(N_1) = 1$.
2. $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $\dim(N_2) = 1$.
3. $N_3 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dan $\dim(N_3) = 1$.

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi dua subrup normal, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_{10} dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_1
 - a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 N_1)$)

Karena N_1 dan N_1 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_1 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_1 = \{e\}\{e\} = \{e\} = N_1$, maka $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 \cap N_1)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga

merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_1 = \{e\} \cap \{e\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_1) = \dim(N_1) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_1) = 1$ dan $\dim(N_1 N_1) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_1)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_1 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1)$.

2. Untuk kasus N_1 dan N_2

- a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 N_2)$)

Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_2 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r, r^2, r^3, r^4\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4\} = N_2$, maka $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap$

$\{e, r, r^2, r^3, r^4\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

3. Untuk kasus N_1 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 N_3)$)

Karena N_1 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_3 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_3 = \{e\}\{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} = N_3$, maka $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_3) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_3 = \{e\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari

$$\dim(N_1 \cap N_3) = \dim(N_1) = 1.$$

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_1 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3)$.

4. Untuk kasus N_2 dan N_2

- a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 N_2)$)

Karena N_2 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_2 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_2 N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4\} \{e, r, r^2, r^3, r^4\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4\} = N_2$, maka $\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4\}$. Sehingga dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_2 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2)$.

5. Untuk kasus N_2 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 N_3)$)

Karena N_2 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_3 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_2 N_3 =$

$$\{e, r, r^2, r^3, r^4\} \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} =$$

$$\{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} = N_3. \text{ Dengan demikian, } N_2 N_3 =$$

$$D_{10} = N_3. \text{ Maka, } \dim(N_2 N_3) = \dim(N_3) = 1.$$

- b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_3 =$

$$\{e, r, r^2, r^3, r^4\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} =$$

$\{e, r, r^2, r^3, r^4\} = N_2$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_3) = \dim(N_2) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_2 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_3) = \dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3)$.

6. Untuk kasus N_3 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 N_3)$)

Karena N_3 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_3 dan N_3 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_3 N_3 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} = N_3$. Dengan demikian, $N_3 N_3 = D_6 = N_3$. Maka, $\dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga

merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_3 \cap N_3 = N_3$ karena anggota himpunannya sama. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_3 \cap N_3) = \dim(N_3) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_3 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_3 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_3 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_3 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3)$.

Dengan demikian, berdasarkan perhitungan diatas dapat disimpulkan bahwa hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya ini berlaku di semua subgrup normal pada grup dihedral D_{10} .

4.2.3 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal,

Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral

D_{14}

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_{14} langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari

hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_{14} :

1. $N_1 = \{e\}$ dan $\dim(N_1) = 1$.
2. $N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dan $\dim(N_2) = 1$.
3. $N_3 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$ dan $\dim(N_3) = 1$.

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_{14} dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_1
 - a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 N_1)$)

Karena N_1 dan N_1 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_1 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_1 = \{e\}\{e\} = \{e\} = N_1$, maka $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_1 ($\dim(N_1 \cap N_1)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_1 = \{e\} \cap \{e\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_1) = \dim(N_1) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_1) = 1$ dan $\dim(N_1 N_1) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_1)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_1 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_1) = \dim(N_1) + \dim(N_1) - \dim(N_1 \cap N_1)$.

2. Untuk kasus N_1 dan N_2

- a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 N_2)$)

Karena N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_2 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = N_2$, maka $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_2 ($\dim(N_1 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = \{e\} = N_1$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

3. Untuk kasus N_1 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 N_3)$)

Karena N_1 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_1 dan N_3 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} N_1 N_3 &= \{e\}\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = \\ &\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = N_3, \\ &\text{maka } \dim(N_1 N_3) = \dim(N_3) = 1. \end{aligned}$$

- b. Dimensi irisan dari N_1 dan N_3 ($\dim(N_1 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_1 \cap N_3 = \{e\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = \{e\} = N_1$.

Sehingga, dimensi dari $\dim(N_1 \cap N_3) = \dim(N_1) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_1 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_3) = \dim(N_1) + \dim(N_3) - \dim(N_1 \cap N_3)$.

4. Untuk kasus N_2 dan N_2

- a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 N_2)$)

Karena N_2 dan N_2 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_2 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa

$$N_2 N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} =$$

$$\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = N_2, \text{ maka } \dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) = 1.$$

- b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_2 ($\dim(N_2 \cap N_2)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_2 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} =$

$\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Sehingga dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_2 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_2) = \dim(N_2) + \dim(N_2) - \dim(N_2 \cap N_2)$.

5. Untuk kasus N_2 dan N_3

- a. Dimensi hasil kali N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 N_3)$)

Karena N_2 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_2 dan N_3 juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $N_2 N_3 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$
 $\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} =$
 $\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = N_3$.

Dengan demikian, $N_2 N_3 = D_{14} = N_3$. Maka, $\dim(N_2 N_3) = \dim(N_3) = 1$.

b. Dimensi irisan dari N_2 dan N_3 ($\dim(N_2 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal.

Oleh karena itu, untuk $N_2 \cap N_3 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} \cap \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\} = N_2$. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_2 \cap N_3) = \dim(N_2) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_2 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_2 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_2 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_2 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_2 N_3) = \dim(N_2) + \dim(N_3) - \dim(N_2 \cap N_3)$.

6. Untuk kasus N_3 dan N_3

a. Dimensi hasil kali N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 N_3)$)

Karena N_3 dan N_3 merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari N_3 dan N_3 juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
N_3 N_3 &= \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} \\
&\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} \\
&= \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\} = N_3. \text{ Dengan} \\
&\text{demikian, } N_3 N_3 = D_{14} = N_3. \text{ Maka, } \dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) = 1.
\end{aligned}$$

b. Dimensi irisan dari N_3 dan N_3 ($\dim(N_3 \cap N_3)$)

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, untuk $N_3 \cap N_3 = N_3$ karena anggota himpunannya sama. Sehingga, dimensi dari $\dim(N_3 \cap N_3) = \dim(N_3) = 1$.

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_3) = 1$, $\dim(N_3 \cap N_3) = 1$ dan $\dim(N_3 N_3) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_3 N_3)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3) = 1 + 1 - 1 = 1$$

Dengan demikian, pada kasus N_3 dan N_3 diperoleh hubungan $\dim(N_3 N_3) = \dim(N_3) + \dim(N_3) - \dim(N_3 \cap N_3)$.

Dengan demikian, berdasarkan perhitungan diatas dapat disimpulkan bahwa hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan

dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya ini berlaku di semua subgrup normal pada grup dihedral D_{14} .

4.2.4 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Ganjil

Berdasarkan hasil perhitungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisan subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3, 5, 7$ diperoleh dugaan bahwa hubungan

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

berlaku secara keseluruhan untuk subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n merupakan bilangan ganjil. Selanjutnya, hasil ini akan dinyatakan dalam Teorema 4.2.

Teorema 4.2

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n \geq 3$ dan n ganjil. Jika N_1, N_2 merupakan subgrup normal di D_{2n} , maka berlaku:

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 2.3 dan Teorema 2.4, hasil irisan dan hasil kali dua subgrup normal hasilnya akan tetap normal. Berdasarkan Teorema 4.1 dimensi dari semua subgrup normal D_{2n} dengan n ganjil adalah satu.

Akan ditunjukkan bahwa

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

sebelum itu akan di cari terlebih dahulu dimensi dari hasil kali dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil. Berdasarkan Teorema 2.4 bahwasannya hasil kali dua subgrup normal hasilnya akan selalu normal maka dari itu $\dim(N_1 N_2) = 1$.

Kemudian cari dimensi irisan dari dua subgrup normal. Berdasarkan Teorema 2.3 bahwasannya hasil irisan dari dua subgrup normal akan tetap subgrup normal dan berdasarkan Teorema 4.1 dapat disimpulkan bahwa $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$.

Setelah itu cari nilai dari $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$. Dengan cara substitusi maka diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$. Dengan demikian, diperoleh

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

Jadi hubungan tersebut berlaku untuk setiap pasangan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan n bilangan ganjil. Dengan demikian, Teorema 4.2 terbukti.

4.2.5 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_8

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_8 langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_8 :

1. $N_1 = \{e\}$, $\dim(N_1) = 1$

2. $N_2 = \{e, r^2\}$, $\dim(N_2) = 1$
3. $N_3 = \{e, r, r^2, r^3\}$, $\dim(N_3) = 1$
4. $N_4 = \{e, r^2, s, sr^2\}$, $\dim(N_4) = 2$
5. $N_5 = \{e, r^2, sr, sr^3\}$, $\dim(N_5) = 2$
6. $N_6 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, $\dim(N_6) = 2$

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_8 dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_2

- a. Hasil kali $N_1 N_2$

$N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^2\}$ karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_1 N_2$ juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^2\} = \{e, r^2\} = N_2$. Dengan demikian, $N_1 N_1 = N_2$. Maka, $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- b. Irisan $N_1 \cap N_2$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r^2\} = \{e\} = N_1$. Maka, dimensi dari $N_1 \cap N_2 = \dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh

$$\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

2. Untuk kasus N_4 dan N_5

a. Hasil kali $N_4 N_5$

$N_4 N_5 = \{e, r^2, s, sr^2\} \{e, r^2, sr, sr^3\}$ karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_4 N_5$ juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $s \in N_4$ dan $sr \in N_5$, maka $s \cdot sr = r \in N_4 N_5$. Karena $r \in N_4 N_5$ dan $s \in N_4 N_5$, maka subgrup yang dibangun oleh r dan s , yaitu $\langle r, s \rangle = D_8$. Dengan demikian, $N_4 N_5 = N_6$. Maka, $\dim(N_4 N_5) = \dim(N_6) = 2$.

b. Irisan $N_4 \cap N_5$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_4 \cap N_5 = \{e, r^2, s, sr^2\} \cap \{e, r^2, sr, sr^3\} = \{e, r^2\} = N_2$. Maka, dimensi dari $N_4 \cap N_5 = \dim(N_4 \cap N_5) = \dim(N_2) = 1$

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi

irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_4) = 2$, $\dim(N_5) = 2$, $\dim(N_4 \cap N_5) = 1$ dan $\dim(N_4 N_5) = 2$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_4 N_5)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_4) + \dim(N_5) - \dim(N_4 \cap N_5) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Dengan demikian, pada kasus N_4 dan N_5 diperoleh $\dim(N_4 N_5) \neq \dim(N_4) + \dim(N_5) - \dim(N_4 \cap N_5)$.

Karena terdapat pasangan subgrup normal yang tidak membentuk hubungan, maka untuk setiap pasangan subgrup normal dari grup dihedral D_8 tidak membentuk hubungan tersebut.

4.2.6 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{12}

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_{12} langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_{12} :

1. $N_1 = \{e\}$, $\dim(N_1) = 1$
2. $N_2 = \{e, r^3\}$, $\dim(N_2) = 1$
3. $N_3 = \{e, r^2, r^4\}$, $\dim(N_3) = 1$

4. $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$, $\dim(N_4) = 1$
5. $N_5 = \{e, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$, $\dim(N_5) = 1$
6. $N_6 = \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$, $\dim(N_6) = 1$
7. $N_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$, $\dim(N_7) = 2$

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_{12} dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_2

- a. Hasil kali $N_1 N_2$

$N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^3\}$ karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_1 N_2$ juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^3\} = \{e, r^3\} = N_2$. Dengan demikian, $N_1 N_1 = N_2$. Maka, $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

- b. Irisan $N_1 \cap N_2$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r^3\} = \{e\} = N_1$. Maka, dimensi dari $N_1 \cap N_2 = \dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$,

$\dim(N_2) = 1, \dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

2. Untuk kasus N_5 dan N_6

a. Hasil kali $N_5 N_6$

$N_5 N_6 = \{e, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\} \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$ karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_5 N_6$ juga merupakan subgrup normal. Berdasarkan subbab 4.1.4, $N_5 = \langle r^2, s \rangle$ dan $N_6 = \langle r^2, sr \rangle$. Perhatikan bahwa $s \in N_5$ dan $sr \in N_6$ maka $s \cdot sr = r \in N_5 N_6$. Karena $r \in N_5 N_6$ dan $s \in N_5 N_6$, maka subgrup yang dibangun oleh r dan s , yaitu $\langle r, s \rangle = D_{12}$. Dengan demikian, $N_5 N_6 = D_{12} = N_7$. Maka, $\dim(N_5 N_6) = \dim(N_7) = 2$.

b. Irisan $N_5 \cap N_6$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_5 \cap N_6 = \{e, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\} \cap \{e, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\} = \{e, r^2, r^4\} = N_3$.

Maka, dimensi dari $N_5 \cap N_6 = \dim(N_5 \cap N_6) = \dim(N_3) = 1$

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi

irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_5) = 1$, $\dim(N_6) = 1$, $\dim(N_5 \cap N_6) = 1$ dan $\dim(N_5 N_6) = 2$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_5 N_6)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_5) + \dim(N_6) - \dim(N_5 \cap N_6) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_5 dan N_6 diperoleh $\dim(N_5 N_6) \neq \dim(N_5) + \dim(N_6) - \dim(N_5 \cap N_6)$.

Karena terdapat pasangan subgrup normal yang tidak membentuk hubungan, maka untuk setiap pasangan subgrup normal dari grup dihedral D_{12} tidak membentuk hubungan tersebut.

4.2.7 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{16}

Setelah mendapatkan nilai dimensi dari masing-masing subgrup normal pada D_{16} langkah selanjutnya yakni menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya. Sebelum itu, berikut merupakan dimensi dari masing-masing subgrup normal dari D_{16} :

1. $N_1 = \{e\}$, $\dim(N_1) = 1$
2. $N_2 = \{e, r^4\}$, $\dim(N_2) = 1$
3. $N_3 = \{e, r^2, r^4, r^6\}$, $\dim(N_3) = 1$

4. $N_4 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$, $\dim(N_4) = 1$
5. $N_5 = \{e, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$, $\dim(N_5) = 2$
6. $N_6 = \{e, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$, $\dim(N_6) = 2$
7. $N_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\} = D_{16}$,
 $\dim(N_7) = 2$

Langkah selanjutnya yakni mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Dilanjut menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya untuk semua subgrup normal pada D_{16} dengan langkah sebagai berikut:

1. Untuk kasus N_1 dan N_2

a. Hasil kali $N_1 N_2$

$N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^4\}$ karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_1 N_2$ juga merupakan subgrup normal. Perhatikan bahwa $N_1 N_2 = \{e\}\{e, r^4\} = \{e, r^4\} = N_2$. Dengan demikian, $N_1 N_1 = N_2$. Maka, $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_2) = 1$.

b. Irisan $N_1 \cap N_2$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_1 \cap N_2 = \{e\} \cap \{e, r^4\} = \{e\} = N_1$. Maka, dimensi dari $N_1 \cap N_2 = \dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$

c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup

normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_1) = 1$, $\dim(N_2) = 1$, $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$ dan $\dim(N_1 N_2) = 1$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_1 N_2)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Dengan demikian, pada kasus N_1 dan N_2 diperoleh hubungan $\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$.

2. Untuk kasus N_5 dan N_6

a. Hasil kali $N_5 N_6$

$$N_5 N_6 = \{e, r^2, r^4, r^6 s, sr^2, sr^4, sr^6\} \{e, r^2, r^4, r^6 sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$$

karena keduanya merupakan subgrup normal, maka berdasarkan Teorema 2.4 hasil kali dari $N_5 N_6$ juga merupakan subgrup normal.

Perhatikan bahwa $s \in N_5$ dan $sr \in N_6$ maka $s \cdot sr = r \in N_5 N_6$.

Karena $r \in N_5 N_6$ dan $s \in N_5 N_6$, maka subgrup yang dibangun oleh r dan s , yaitu $\langle r, s \rangle = D_{16}$. Dengan demikian, $N_5 N_6 = D_{16} = N_7$.

Maka, $\dim(N_5 N_6) = \dim(N_7) = 2$.

b. Irisan $N_5 \cap N_6$

Berdasarkan Teorema 2.3 hasil dari irisan dari dua subgrup normal juga merupakan subgrup normal. Oleh karena itu, $N_5 \cap N_6 =$

$$\{e, r^2, r^4, r^6 s, sr^2, sr^4, sr^6\} \cap \{e, r^2, r^4, r^6 sr, sr^3, sr^5, sr^7\} =$$

$$\{e, r^2, r^4, r^6\} = N_3. \text{ Maka, dimensi dari } N_5 \cap N_6 = \dim(N_5 \cap N_6) =$$

$$\dim(N_3) = 1$$

- c. Menentukan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, hasil penjumlahan dimensi subgrup normal, dan dimensi irisannya.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya diperoleh $\dim(N_5) = 2$, $\dim(N_6) = 2$, $\dim(N_5 \cap N_6) = 1$ dan $\dim(N_5 N_6) = 2$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara dimensi dari hasil kali subgrup normal dengan penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya, dilakukan perbandingan antara $\dim(N_5 N_6)$ dan nilai yang diperoleh dari kombinasi penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya. Diperoleh $\dim(N_5) + \dim(N_6) - \dim(N_5 \cap N_6) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Dengan demikian, pada kasus N_5 dan N_6 diperoleh $\dim(N_5 N_6) \neq \dim(N_5) + \dim(N_6) - \dim(N_5 \cap N_6)$.

Karena terdapat pasangan subgrup normal yang tidak membentuk hubungan, maka untuk setiap pasangan subgrup normal dari grup dihedral D_{16} tidak membentuk hubungan tersebut.

4.2.8 Hubungan antara Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal, Penjumlahan Dimensi dan Dimensi Irisannya dari Grup Dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n Genap

Berdasarkan hasil perhitungan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisan subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} dengan $n = 4, 6, 8$ diperoleh dugaan bahwa terdapat

$$\dim(N_1 N_2) \neq \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

Sehingga untuk setiap pasangan subgrup normal tidak dapat membentuk hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisan subgrup normal grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dan n merupakan bilangan genap. Selanjutnya, hasil ini akan dinyatakan dalam Teorema 4.3.

Teorema 4.3

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n \geq 4$ dengan n genap. Maka terdapat subgrup normal N_1, N_2 sedemikian sehingga

$$\dim(N_1 N_2) \neq \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

Bukti

Untuk membuktikan teorema ini, perhatikan dua subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n = 4m$. Berdasarkan Tarnauceanu (2015) pilih subgrup normal yang mengandung elemen refleksi selain grup itu sendiri sebagai berikut:

1. $N_1 = \{e, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$
2. $N_2 = \{e, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Untuk membuktikan

$$\dim(N_1 N_2) \neq \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

terlebih dahulu menentukan $\dim(N_1)$ dan $\dim(N_2)$. Pada grup dihedral D_{2n} dengan n genap, kelas konjugasi dari elemen refleksi terbagi menjadi dua kelas, yaitu kelas yang memuat s dan kelas yang memuat sr . Perhatikan pada N_1 memuat seluruh rotasi genap serta refleksi dari bentuk sr^{2k} , sehingga tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi. Diperlukan satu kelas konjugasi dari rotasi dan satu kelas konjugasi dari refleksi. Dengan demikian, $\dim(N_1) = 2$.

Dengan cara yang sama, N_2 memuat refleksi dari bentuk sr^{2k-1} sehingga $\dim(N_2) = 2$.

Selanjutnya yakni menentukan N_1N_2 , perhatikan bahwa $s \in N_1$ dan $sr \in N_2$, maka $s \cdot sr = r \in N_1N_2$. Karena r dan s membangun D_{2n} , maka $N_1N_2 = D_{2n}$. Akibatnya $\dim(N_1N_2) = \dim(D_{2n}) = 2$ berdasarkan teorema 2.7. Kemudian akan dicari $N_1 \cap N_2$, irisan N_1 dan N_2 adalah subgrup rotasi $\langle r^2 \rangle = \{e, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$, yang berdimensi 1. Langkah terakhir yakni menentukan hubungan

$$\dim(N_1N_2) \neq \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

berdasarkan perhitungan diatas didapat ruas kiri = 2 dan ruas kanan = $2 + 2 - 1 = 3$. Karena $2 \neq 3$ maka hubungan ini terbukti.

Karena terdapat subgrup normal N_1 dan N_2 yang tidak memenuhi hubungan

$$\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

maka teorema ini terbukti.

4.3 Kajian Integrasi Nilai-Nilai Islam pada Konsep Dimensi dari Hasil Kali Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh pada bab pembahasan, yaitu mengenai dimensi hasil kali dua subgrup normal dalam grup dihedral D_{2n} , dapat dikaji keterkaitannya dengan nilai keislaman. Secara khusus, penelitian ini mengkaji hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi subgrup normal dan dimensi irisannya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa semua pasangan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil hubungan tersebut selalu terbentuk, hubungan hasil kali pada pasangan subgrup

normal pada grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil membentuk suatu pola keberlakuan, namun hubungan tersebut tidak terbentuk untuk setiap pasangan subgrup normal pada grup dihedral D_{2n} dengan n genap yang disebabkan karena terdapat pasangan tertentu yang tidak membentuk hubungan tersebut. Dari hasil perhitungan pada subbab sebelumnya diperoleh bahwa keberadaan elemen refleksi pada pasangan subgrup normal berperan dalam pembentukan hubungan dimensi. Secara khusus, pasangan subgrup normal yang mengandung elemen refleksi selain grup dihedral itu sendiri menunjukkan pola hubungan dimensi yang berbeda dengan pasangan subgrup normal yang tidak mengandung elemen refleksi. Pada n genap pasangan tersebut selalu menjadi salah satu penghambat untuk pembentukan hubungan dimensi. Fenomena ini mencerminkan adanya keteraturan dan keseimbangan (*al-mizan*) dalam struktur aljabar. Keteraturan tersebut merupakan cerminan dari ayat-ayat kauniah yang terhampar di alam semesta.

Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Qamar ayat 49:



“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran.”

Kata *qadar* dalam ayat ini mengandung makna "dengan ketentuan dan ukuran tertentu" (Ibnu Katsir, 1999). Dalam konteks matematika, konsep dimensi dalam grup dihedral merupakan salah satu bentuk *qadar* (ukuran) yang menunjukkan bahwa setiap struktur aljabar memiliki ukuran dan keteraturan tersendiri. Tidak ada elemen yang tercipta sia-sia; setiap kelas konjugasi memiliki peran dalam membangun grup secara keseluruhan.

Allah SWT berfirman dalam QS. Ar-Rahman ayat 7-9:

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ۖ أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ۚ وَأَقِيمُوا الْوَزْنَ بِالْقِسْطِ

وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ ۚ

“Langit telah Dia tinggikan dan Dia telah menciptakan timbangan (keadilan dan keseimbangan). agar kamu tidak melampaui batas dalam timbangan itu. Tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi timbangan itu.”.

Kata *al-mīzān* dalam ayat ini dimaknai sebagai timbangan, keadilan, atau keseimbangan (Shihab, 2002). Dalam konteks matematika, setiap struktur aljabar memiliki "timbangan" atau ukuran tersendiri yang menggambarkan keteraturannya. Konsep dimensi dalam grup dihedral merupakan salah satu bentuk ukuran tersebut. Ketika penelitian ini menemukan bahwa hubungan dimensi dari hasil kali subgrup normal tidak selalu terbentuk untuk kasus n genap, hal ini justru menunjukkan bahwa setiap sistem memiliki keseimbangan yang unik dan sesuai dengan karakteristiknya masing-masing. Tidak ada sistem yang dapat dipaksakan untuk mengikuti pola sistem lain tanpa mempertimbangkan kekhususan strukturnya.

Lebih lanjut, Allah SWT berfirman dalam QS. Al-mulk ayat 3:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ ۖ هَلْ

تَرَىٰ مِن فُتُورٍ ۚ

“(Dia juga) yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih ketidakseimbangan sedikit pun. Maka, lihatlah sekali lagi! Adakah kamu melihat suatu cela?”.

Ayat ini menegaskan bahwa dalam ciptaan Allah tidak terdapat ketidakseimbangan (*tafāwut*). Yang ada adalah keteraturan dengan tingkat kompleksitas yang berbeda-beda. Dalam penelitian ini, terdapat kegagalan hubungan hasil kali

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

pada kasus n genap tidak berarti bahwa sistem tersebut tidak teratur atau tidak seimbang. Sebaliknya, ia memiliki keteraturan yang lebih kompleks, yang tercermin dari pembagian kelas konjugasi refleksi menjadi dua kelas berbeda dan munculnya subgrup normal berdimensi 2 pada subgrup normal yang mengandung elemen refleksi serta pasangan subgrup normal inilah yang selalu menjadi penyebab tidak terbentuknya hubungan tersebut. Hal ini sejalan dengan firman Allah bahwa setiap ciptaan-Nya memiliki keteraturan dan keseimbangan yang sempurna, meskipun terkadang manusia perlu melakukan pengamatan berulang (sebagaimana perintah "lihatlah sekali lagi") untuk memahami kompleksitas tersebut.

Dengan demikian, penelitian ini menunjukkan bahwa aktivitas intelektual dalam matematika, khususnya dalam mengkaji struktur aljabar seperti grup dihedral, merupakan bagian dari upaya manusia untuk memahami ayat-ayat *kauniyah* (tanda-tanda kebesaran Allah di alam semesta). Konsep *al-mīzān* dan *qadar* (ukuran) yang disebutkan dalam Al-Qur'an tercermin dalam setiap keteraturan matematika yang ditemukan, baik yang sederhana (seperti pada kasus n ganjil) maupun yang kompleks (seperti pada kasus n genap). Matematika tidak hanya sekadar aktivitas logika formal, tetapi juga sarana untuk mendekatkan diri kepada Allah dengan merenungkan keteraturan ciptaan-Nya. *Wallahu a'lam bish-shawab*.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan mengenai dimensi dari hasil kali dua subgrup normal dalam grup dihedral D_{2n} , diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dimensi subgrup normal ditentukan berdasarkan jumlah minimal kelas konjugasi yang dapat membangun subgrup normal tersebut. Untuk grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil, setiap subgrup normal memiliki dimensi satu. Sementara itu, untuk grup dihedral D_{2n} dengan n genap, terdapat subgrup normal yang berdimensi satu dan terdapat pula subgrup normal yang berdimensi dua.
2. Hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi dan dimensi irisannya bergantung pada paritas n . Untuk grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil diperoleh hubungan

$$\dim(N_1 N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

hubungan tersebut berlaku untuk setiap pasangan subgrup normal N_1 dan N_2 . Namun, untuk grup dihedral D_{2n} dengan n genap ditemukan pasangan subgrup normal yang tidak memenuhi hubungan tersebut.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Berdasarkan keterbatasan dan hasil penelitian yang telah diperoleh, terdapat beberapa arah penelitian lanjutan yang dapat dikembangkan sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya membahas dimensi subgrup normal pada grup dihedral

oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat mengkaji konsep dimensi pada jenis grup lain, seperti grup simetri atau grup hingga lainnya.

2. Konsep dimensi yang digunakan dalam penelitian ini didasarkan pada kelas konjugasi. Penelitian lanjutan dapat mengeksplorasi definisi lain dalam teori grup dan membandingkan sifat-sifatnya.
3. Dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai kondisi yang diperlukan dan cukup agar pernyataan hasil kali dimensi berlaku pada suatu grup, tidak hanya terbatas pada grup dihedral saja.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Baghawi, A. M. (1997). *Ma'ālim al-Tanzīl fī Tafsīr al-Qur'ān* (Jilid 4). Riyadh: Dār Ṭayyibah.
- Andari, A. (2015). *Teori Grup* (Edisi pertama). UB Press.
- Axler, S. (2024). *Linear Algebra Done Right* (Fourth Edition). Springer.
- Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra*, Third Edition. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.
- Gallian, J. A. (2012). *Contemporary Abstract Algebra*, 8th Edition. Canada: Cengage Learning.
- Ibn Katsir. (2000). *Tafsir al-Qur'an al-'Azhim*. Dar al-Kutub al-'Ilmiyyah.
- Ibnu Katsir, I. (1999). *Tafsīr al-Qur'ān al-'Aẓīm* (Jilid 7). Riyadh: Dār Ṭayyibah.
- James, G., & Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Groups*.
- Kaplan, G., & Lev, A. (2003). On the dimension and basis concepts in finite groups. *Communications in Algebra*, 31(6), 2707–2717. <https://doi.org/10.1081/AGB-120021888>
- Kementerian Agama Republik Indonesia. (2022). *Al-Qur'an dan terjemahannya*. <https://quran.kemenag.go.id>
- Kholilurrohman, M. A. (2022). *Dimensi Grup Dihedral* [Thesis]. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- NU Online. (2025). *Surah Ar-Rahman ayat 7-9*. NU Online. <https://quran.nu.or.id/ar-rahman>
- Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra*.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Tarnauceanu, M. (2015). Classifying fuzzy normal subgroups of finite groups. *Iranian Journal of Fuzzy System*, 107-115
- Tian, Y. (2019). Formulas for calculating the dimensions of the sums and the intersections of a family of linear subspaces with applications. *Beitrage Zur Algebra Und Geometrie*, 60(3), 471–485. <https://doi.org/10.1007/s13366-018-00432-9>

RIWAYAT HIDUP



Ahmad Rizal Afandi, lahir di Kabupaten Jombang pada 20 Oktober 2003. Biasa disapa dengan Rizal, merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Syafilin dan Ibu Mujiati yang bertempat tinggal di Dusun Gempol, Desa Japanan, Kecamatan Mojowarno, Kabupaten Jombang.

Penulis telah menempuh Pendidikan formal dimulai dari TK Dahlia Japanan dan lulus pada tahun 2009. Selanjutnya menempuh pendidikan dasar di SDN II Japanan. Setelah itu melanjutkan sekolah menengah pertama di SMP 3 Peterongan di Pondok Pesantren Darul Ulum Jombang dan lulus pada Tahun 2019. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah atas di MAN 2 Jombang di Pondok Pesantren Darul Ulum dan lulus pada tahun 2022. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan Pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh Pendidikan tinggi, penulis juga bergabung organisasi HMPS “Integral” Matematika selama dua periode sebagai anggota Divisi Penalaran pada periode pertama dan Keagamaan dan Wakil Ketua HMPS “Integral” Matematika pada periode kedua.