BILANGAN KROMATIK TITIK
GRAF PEMBAGI NOL ATAS MODUL

SKRIPSI

OLEH
AISYAH DHIFA AZ-ZAHRA
NIM. 210601110035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025

BILANGAN KROMATIK TITIK
GRAF PEMBAGI NOL ATAS MODUL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM. 210601110035

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025

BILANGAN KROMATIK TITIK
GRAF PEMBAGI NOL ATAS MODUL

SKRIPSI

Oleh
Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM. 210601110035

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 12 Desember 2025

Dosen Pembimbing I

Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Dosen Pembimbing II

Juhari, M.Si.
NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

BILANGAN KROMATIK TITIK
GRAF PEMBAGI NOL ATAS MODUL

SKRIPSI

Oleh
Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM. 210601110035

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 17 Desember 2025

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Dr. Abdussakir, M.Pd.	....
Anggota Penguji 2	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Juhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrul Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM	: 210601110035
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Desember 2025

10000 METERAI TEMPEL 29014AMX051864071

Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM. 210601110035

MOTO

“Keberhasilan datang kepada siapapun yang berani mencoba”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang dengan kasih sayang-Nya telah memberikan kekuatan, keikhlasan, serta kelapangan hati dalam setiap langkah perjalanan penulisan skripsi ini. Dengan penuh rasa hormat dan cinta, penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

Abah Wakhid Nurhidayat, *Umi* Voni Kencanawati, Adik Musa Hamid Al-Arkan, *Uti* Kawit Rahayu dan *Akung* Sarmin yang telah senantiasa memberikan dukungan baik secara lisan maupun finansial.

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul" dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw., yang telah membawa umat manusia ke jalan yang benar. Semoga kita semua tergolong dalam orang-orang yang mendapat syafaatnya kelak di hari kiamat.

Skripsi ini disusun dan diajukan untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapat bimbingan, arahan, serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nurdiana, M.Si., CAHRM., CRMP., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M. Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, saran, dan kritik selama penyusunan skripsi ini.
5. Juhari, M. Si., selaku Dosen Pembimbing II yang berkenan memberikan bimbingan, arahan, saran, dan kritik selama penyusunan skripsi ini.
6. Evawati Alisah, M. Pd., selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi serta berbagai penyemangat selama masa perkuliahan.
7. Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si., Ph. D., selaku Ketua Penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan serta kritik yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini.

8. Dr. Abdussakir, M. Pd., selaku Anggota Penguji I dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan serta kritik yang membangun untuk menyempurnakan skripsi ini.
9. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang atas ilmu yang bermanfaat.
10. *Abah* Wahid Nur Hidayat dan *Umi* Voni Kencanawati, yang senantiasa memberikan dukungan, memanjatkan doa, dan berjuang untuk memenuhi kebutuhan penulis selama perkuliahan hingga penulis bisa berada di tahap penulisan skripsi ini.
11. *Uti* Kawit Rahayu dan *Akung* Sarmin yang senantiasa mendoakan penulis, memberikan banyak motivasi kepada penulis hingga penulis dapat diberikan kelancaran dalam penyusunan skripsi ini.
12. Adik penulis, Musa Hamid Al-Arkan, yang senantiasa memberikan dukungan kepada penulis.
13. Teman-teman kontrakan penulis yang bersedia mendengarkan keluh kesah penulis serta selalu memberikan kehangatan rumah selama di perantauan.
14. Teman-teman penulis tercinta yang berada dalam grup “Perintis”, yang telah memberikan warna dalam masa perkuliahan penulis serta menjadi tempat berkeluh kesah penulis selama perkuliahan.
15. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika Angkatan 2021.

Semoga Allah Swt senantiasa memberikan balasan yang lebih baik atas segala bentuk bantuan yang diberikan kepada penulis. Harapannya, skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang aljabar, serta menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya.

Malang, 17 Desember 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{Z}$	:	Bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	:	Bilangan bulat modulo n
M	:	Modul atas ring R
$ann(m)$	:	Annihilator dari elemen m
G	:	Graf
$V(G)$	:	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	:	Himpunan sisi pada graf G
K_n	:	Graf lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$	:	Graf bipartisi lengkap
$Z(M)$	:	Himpunan pembagi nol dari modul M
$\Gamma(M)$	:	Graf pembagi nol atas modul M
$\chi(G)$	:	Bilangan kromatik titik graf G

ABSTRAK

Az-Zahra, Aisyah Dhifa. 2025. **Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Titik, Graf Pembagi Nol, Modul.

Modul merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan perkalian skalar oleh elemen-elemen dari suatu ring. Pembagi nol pada suatu modul adalah seluruh elemen pada modul yang merupakan hasil perkalian annihilator dengan modul tersebut. Himpunan pembagi nol ini dapat direpresentasikan dalam bentuk graf, yang disebut sebagai graf pembagi nol atas modul, yaitu graf yang titik-titiknya merupakan pembagi nol dan dua titik saling terhubung langsung apabila keduanya dikalikan hasilnya adalah nol. Salah satu parameter penting dalam teori graf adalah bilangan kromatik titik, yaitu jumlah minimum warna yang digunakan untuk mewarnai seluruh titik pada graf. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan rumus umum graf pembagi nol atas modul. Pada penelitian ini, modul yang digunakan adalah modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2},$ dan $\mathbb{Z}_{4p}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dengan bilangan prima $p, q > 2$. Dengan memperhatikan sifat-sifat himpunan pembagi nol pada masing-masing modul, diperoleh gambaran hubungan antar elemen pembagi nol yang kemudian di nyatakan dalam bentuk graf. Pola graf yang muncul digunakan untuk mengidentifikasi bentuk graf dan menentukan bilangan kromatik titiknya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{4p}$ membentuk graf bipartisi, sedangkan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ membentuk graf lengkap. Melalui penerapan beberapa teorema, diperoleh bahwa bilangan kromatik titik pada modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2},$ dan $\mathbb{Z}_{4p}$ adalah sebagai berikut:

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 2$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = 2.$$

ABSTRACT

Az-Zahra, Aisyah Dhifa. 2025. **On The Chromatic Number of The Zero Divisor Graph Over A Module.** Thesis. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Keyword: Chromatic Number, Zero Divisor Graph, Module.

Module is a nonempty set equipped with scalar multiplication by elements of a ring. The zero divisors of a module are all elements of the module that arise from the multiplication of the module by its annihilator. This set of zero divisors can be represented in the form of a graph, referred to as the zero divisor graph over a module, in which the vertices correspond to zero divisors and two vertices are adjacent if the product of the corresponding elements is zero. The chromatic number is the minimum number of colors required to color all vertices of the graph. The aim of the study is to determine the general formula of the zero divisor graph of a module. In this research, the modules used are $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, and $\mathbb{Z}_{4p}$ over the ring $\mathbb{Z}$ where p and q are prime numbers over 2. By examining the properties of the set of zero divisors in each module, the relationships among zero divisor elements are identified and subsequently represented in the form of graphs. The resulting graph patterns are used to determine the structure of the graphs and to establish their vertex chromatic numbers. The results show that the zero divisor graphs over the modules $\mathbb{Z}_{pq}$ and $\mathbb{Z}_{4p}$ form bipartite graphs, whereas the zero divisor graph over the module $\mathbb{Z}_{p^2}$ forms a complete graph. Based on the application of several theorems, the vertex chromatic numbers of the modules $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, and $\mathbb{Z}_{4p}$are obtained as follows:

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 2$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = 2.$$

مستخلص البحث

الزهرء، عائشة ضيفة. ٢٠٢٥. **رسم بياني للعدد اللوني للرأس لمقسوم الصفر على *modul***. البحث العلمي. برنامج دراسة قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج. المشرف: (١) محمد نافع جوهري، الماجستير في العلوم. (٢) جوهري، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: الرقم اللوني النقطي، الرسم البياني للقاسم الصفري،*modul*.

modul هي مجموعة غير فارغة مجهزة بضرب قياسي بعناصر حلقة. القواسم الصفرية للوحدة هي جميع العناصر في الوحدة التي هي نتيجة ضرب المبيد في الوحدة. يمكن تمثيل مجموعة القواسم الصفرية في شكل رسم بياني يمكن تسميته رسم البياني للقسمة الصفرية على الوحدة، أي رسم البياني تكون رؤوسه قواسم صفرية ويتصل رأسان مباشرتان إذا كانت نتيجة الضرب صفرًا. العدد اللوني للرأس هو الحد الأدنى لعدد الألوان المستخدمة لتلوين جميع الرؤوس في الرسم البياني. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد الصيغة العامة لرسم بياني للقسمة الصفرية على وحدة. في هذه الدراسة، الوحدات المستخدمة هي وحدات $\mathbb{Z}_{pq}$ و $\mathbb{Z}_{p^2}$ و$\mathbb{Z}_{4p}$ مع الحلقة $\mathbb{Z}$ حي$p, q > 2$ أعداد أولية. من خلال ملاحظة خصائص مجموعة قواسم الصفر في كل وحدة، يتم الحصول على صورة للعلاقة بين عناصر قواسم الصفر، والتي تُعبَّر عنها بعد ذلك في شكل بياني. يُستخدم نمط الرسم البياني الناتج لتحديد شكل الرسم البياني وتحديد العدد اللوني لرؤوسه. تُظهر النتائج أن رسوم قواسم الصفر البيانية على الوحدتين $\mathbb{Z}_{pq}$ و $\mathbb{Z}_{4p}$ تُشكِّل رسمًا بيانيًا ثنائي التقسيم، بينما يُشكِّل رسم قواسم الصفر البياني على الوحدة $\mathbb{Z}_{p^2}$رسمًا بيانيًا كاملًا. من خلال تطبيق عدة نظريات، تم التوصل إلى أن العدد اللوني للرؤوس في الوحدات $\mathbb{Z}_{p^2}$ و $\mathbb{Z}_{p^2}$ و $\mathbb{Z}_{4p}$ هو كما يلي:

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 2$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1$$
$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = 2.$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang membahas tentang hubungan antar objek yang direpresentasikan dalam bentuk titik dan sisi. Teori graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang sains seperti jaringan komunikasi dalam bidang informatika, struktur molekul dalam bidang kimia, dan pengoptimalan rute dalam bidang transportasi dan navigasi (Abdussakir, dkk., 2009). Sampai saat ini, ilmu graf masih terus dikembangkan dengan teori yang baru dan pengaplikasiannya dalam bidang tertentu (Chartrand, dkk., 2011). Dalam perkembangannya, teori graf terus melahirkan konsep-konsep baru termasuk bilangan kromatik yang hingga kini masih terus dikembangkan (Welyyanti, 2018).

Landasan pengembangan ilmu pengetahuan, termasuk eksplorasi terhadap konsep-konsep matematika seperti ini, sejalan dengan nilai-nilai Islam. Menurut Khalid (2020), Islam mendorong umatnya untuk mempelajari ilmu pengetahuan dan mengembangkannya sebagai bentuk penghambaan kepada Allah. Ilmu graf merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang berkontribusi dalam kehidupan manusia. Sejauh ini ada banyak ilmuwan muslim yang memberikan kontribusi dalam pengembangan di berbagai bidang sains dan teknologi seperti al-Khawarizmi, ar-Razi, dan Ibnu Khaldun. Menurut pernyataan tokoh-tokoh ini, ilmu dalam Islam tidak terbatas pada aqidah dan syariah saja, namun juga mencakup ilmu-ilmu lain seperti matematika, kimia, dan lain sebagainya yang perlu dikaji lebih lanjut. Allah SWT akan mengangkat derajat orang yang berilmu seperti yang disebutkan dalam al-Quran surat al-Mujadalah ayat 11.

Allah Subhanahu wa Ta'ala berfirman:

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوْٓا اِذَا قِيْلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوْا فِى الْمَجٰلِسِ فَافْسَحُوْا يَفْسَحِ اللّٰهُ لَكُمْۚ وَاِذَا قِيْلَ انْشُزُوْا فَانْشُزُوْا يَرْفَعِ اللّٰهُ الَّذِيْنَ
اٰمَنُوْا مِنْكُمْۙ وَالَّذِيْنَ اُوْتُوا الْعِلْمَ دَرَجٰتٍۗ وَاللّٰهُ بِمَا تَعْمَلُوْنَ خَبِيْرٌ

(Kemenag, 2025a)

Al-Mujādalah [58]:11

Artinya: “*Wahai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu “Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis,” lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Apabila dikatakan, “Berdirilah,” (kamu) berdirilah. Allah niscaya akan mengangkat orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Allah Maha Teliti terhadap apa yang kamu kerjakan*” (al-Mujadalah :11).

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik dan sisi, secara matematis dapat dituliskan sebagai $G = (V(G), E(G))$. Himpunan titik dilambangkan dengan $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong yang berisi semua titik pada graf G, sedangkan himpunan sisi dilambangkan dengan $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari dua titik berbeda di $V(G)$ (Abdussakir, dkk., 2009).

Salah satu penelitian teori graf yang menarik untuk dikembangkan adalah bagaimana keterkaitannya dengan struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan himpunan yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma atau sifat tertentu. Ruang lingkup aljabar meliputi grup, ring, lapangan, daerah integral, ruang vektor, dan modul. Grup merupakan struktur paling dasar yang dapat membentuk struktur aljabar yang lebih kompleks. Grup dikatakan sebagai struktur paling sederhana karena hanya memiliki satu operasi biner yang memenuhi aksioma tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers (Andari, 2022). Struktur yang lebih kompleks dari grup adalah ring. Ring merupakan suatu himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian. Suatu himpunan dikatakan sebagai ring apabila terhadap operasi penjumlahan membentuk grup Abel sedangkan pada operasi perkalian bersifat asosiatif. Elemen yang paling menarik dalam ring adalah pembagi nol. Pembagi nol didefinisikan seluruh elemen pada ring yang jika dikalikan dengan elemen tak nol pada ring hasilnya adalah nol (Zaid, dkk., 2024).

Konsep graf yang berkaitan dengan struktur aljabar pertama kali diperkenalkan oleh Beck (1988) yang berfokus pada pewarnaan graf. Penelitian tersebut menghasilkan definisi graf pembagi nol atas ring komutatif. Penelitian pewarnaan pada ring komutatif kemudian dilanjutkan oleh Anderson dan Naseer (Anderson & Naseer, 1993). Kemudian Anderson menyempurnakan kembali konsep graf terhadap ring komutatif yang sisinya merupakan pembagi nol sehingga graf tersebut merupakan graf pembagi nol dari ring komutatif (Anderson & Livingston, 1999). Penelitian tentang graf atas ring komutatif ini menjadi ide bagi banyak peneliti untuk meneliti lebih lanjut keterkaitan graf dengan struktur aljabar khususnya pada modul.

Modul merupakan struktur aljabar yang dibangun atas ring (Dummit & Foot, 2004). Secara umum, suatu modul dapat dipandang sebagai himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan hingga membentuk grup abel, serta dilengkapi dengan perkalian skalar dari elemen-elemen ring (Roman, 2008). Jika ring yang digunakan adalah lapangan (*field*), maka struktur yang dihasilkan dikenal sebagai ruang vektor, sehingga ruang vektor adalah contoh khusus dari modul (Dummit & Foot, 2004). Berbeda dengan ruang vektor, modul dibangun oleh ring dengan elemen identitas sedangkan ruang vektor dibangun oleh suatu lapangan

(Yuwaningsih, 2020). Pada dasarnya modul merupakan himpunan dengan aksioma yang mirip dengan ruang vektor, tetapi dengan aturan yang lebih fleksibel sehingga dapat digunakan untuk memodelkan berbagai struktur matematika yang lebih kompleks.

Konsep graf pembagi nol dari ring komutatif yang telah didefinisikan kemudian diperluas menjadi graf pembagi nol atas modul. Pembagi nol pada modul berkaitan erat dengan konsep annihilator. Annihilator dari suatu elemen m yang dinotasikan dengan $ann(m)$ merupakan himpunan seluruh elemen dalam ring yang jika dikalikan dengan suatu elemen dalam modul hasilnya adalah nol. Graf pembagi nol atas modul M yang dinotasikan dengan $\Gamma(M)$ di definisikan sebagai graf yang titik-titiknya merupakan himpunan pembagi nol atas M selain elemen 0 atau $Z(M) - \{0\}$ dan dua titik berbeda $u \neq 0, v \neq 0 \in Z(M)$ akan saling terhubung langsung jika dan hanya jika $u \in ann(v)M$ atau $u \in ann(v)M$ (Naghipour, 2017). Penelitian terkait graf pembagi nol telah dilakukan oleh Naghipour (2017) dan Farhan (2018) yang keduanya membahas tentang karakteristik graf yang berfokus pada diameter dan *girth*.

Fokus pada penelitian ini adalah bilangan kromatik titik pada graf pembagi nol atas modul. Bilangan kromatik titik pada graf merupakan topik yang menarik karena masih banyak masalah yang belum terpecahkan serta aplikasinya yang beragam (Chartrand, dkk., 2011). Bilangan kromatik titik adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga titik pada G dapat diwarnai dengan k warna (Chartrand, dkk., 2011). Bilangan kromatik titik sangat erat hubungannya dengan pewarnaan graf. Menurut Abdy, dkk. (2021), pewarnaan pada graf adalah suatu cara untuk memberi label pada elemen-elemen dalam graf, seperti titik ataupun sisi dengan menggunakan warna sehingga dapat membantu dalam memahami dan menyelesaikan permasalahan yang memiliki batasan tertentu.

Pada penelitian ini, modul yang digunakan adalah modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan p dan q adalah bilangan prima dan $p, q > 2$. Modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ memberikan variasi yang lebih luas dalam pola graf pembagi nol. Ketiga bentuk modul tersebut mempresentasikan struktur yang berbeda, yaitu hasil kali dua bilangan prima berbeda, pangkat dari satu bilangan prima, serta kombinasi bilangan genap dan bilangan prima. Modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ digunakan untuk menghindari adanya pola graf yang terlalu sederhana serta pola graf yang tidak beraturan. Sehingga, dengan menggunakan modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ pola graf yang terjadi menunjukkan adanya pola umum pada graf pembagi nol atas modul tersebut. Mempertimbangkan berbagai penelitian yang menyoroti hubungan antara graf dengan struktur aljabar khususnya pada suatu modul serta penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk meneliti bagaimana rumus umum bilangan kromatik titik graf pembagi nol yang dibangun atas suatu modul. Penelitian ini selanjutnya dijelaskan dalam skripsi berjudul "Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana rumus umum bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul?.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui rumus umum bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini berkontribusi dalam mengembangkan model matematika yang digunakan untuk menganalisis hubungan dan pola dalam struktur aljabar khususnya pada modul. Dengan mengembangkan model matematika tersebut, maka diharapkan penelitian ini dapat memberi manfaat untuk mengetahui karakteristik graf pembagi nol yang dibangun atas modul.

1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari pembahasan yang meluas, penulis membatasi modul yang digunakan pada penelitian ini adalah modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan p, q bilangan prima dan $p, q > 2$. Pembatasan $p, q > 2$ dipilih untuk menghindari kasus yang terlalu sederhana yang muncul ketika $p, q = 2$.

1.6 Daftar Istilah

1. Bilangan Kromatik

   Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga titik pada G dapat diwarnai dengan k warna dan dinotasikan dengan $\chi(G)$.

2. Kongruensi

   Misalkan n merupakan bilangan bulat positif lebih dari satu. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat, maka a dikatakan kongruen ke b modulo n jika dan hanya jika $n|(a-b)$, yang dinotasikan dengan $a \equiv b(mod\ n)$.

3. Annihilator

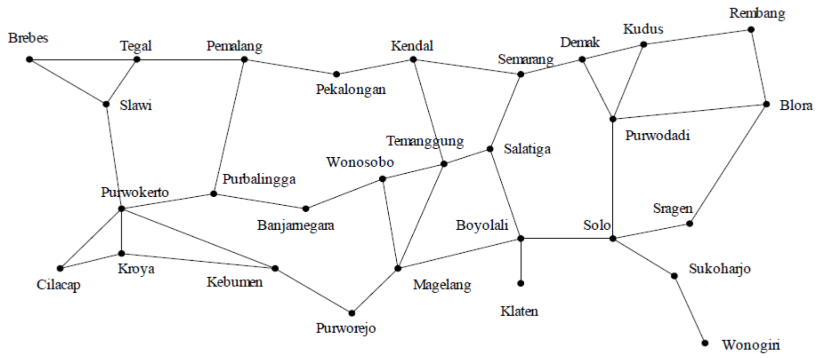
   Himpunan seluruh elemen dalam ring yang jika dikalikan dengan suatu elemen dalam modul hasilnya adalah nol. Annihilator dari suatu elemen m dinotasikan dengan $ann(m)$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

Graf adalah struktur matematika yang digunakan untuk mempresentasikan hubungan antara objek tertentu. Graf seringkali digunakan untuk merepresentasikan beberapa objek dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi graf dalam kehidupan sehari-hari dapat ditemukan pada peta penghubung jalan pada daerah tertentu.



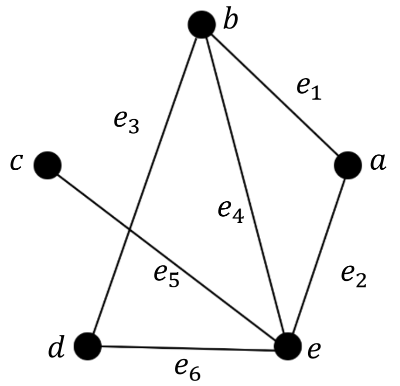
Gambar 2.1 Peta Penghubung Jalan di Provinsi Jawa Tengah

Gambar 2.1 merupakan contoh aplikasi graf yang digunakan untuk merepresentasikan jalanan yang menghubungkan kota-kota yang ada di Jawa Tengah. Setiap kota yang ada di peta tersebut merupakan objek-objek yang dihubungkan dengan sisi, yaitu jalan yang digunakan untuk menghubungkan antar kota. Menurut teori graf, objek-objek ini disebut titik dan hubungan antara titik-titik tersebut disebut di sebut sisi. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Suatu graf G adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan dinotasikan dengan V serta himpunan E yang mungkin kosong terdiri dari pasangan tak berurutan elemen berbeda dalam V yang disebut sisi, himpunan sisi dapat dinyatakan sebagai $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut dari himpunan V dan himpunan sisi E dan dapat dituliskan sebagai $G = (V, E)$. Untuk menegaskan bahwa V dan E merupakan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, maka V dapat dituliskan sebagai $V(G)$ dan E dapat dituliskan sebagai $E(G)$ (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.1



Gambar 2.2 Graf X

Gambar 2.2 menunjukkan graf yang dibangun atas titik dan sisi. Graf X merupakan graf dengan himpunan titik $V(X) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(X) = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$ atau dapat juga ditulis dengan $e_1 = \{a, b\}, e_2 = \{a, e\}, e_3 = \{b, d\}, e_4 = \{b, e\}, e_5 = \{c, e\}, e_6 = \{d, e\}$.

Definisi 2.2

Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf G, $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari graf G, maka titik u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan

e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e (Abdussakir, dkk., 2009).

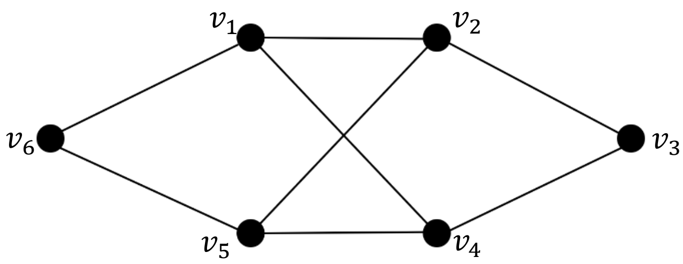
Contoh 2.2

Berdasarkan Gambar 2.2, sisi $e_1 = \{a, b\}$ menghubungkan titik a dan b dalam graf X, sehingga a dan b dikatakan terhubung langsung. Sedangkan titik a dengan sisi e_1 serta titik b dengan sisi e_1 dikatakan terkait langsung dengan titik a dan titik b merupakan ujung dari sisi e_1.

Definisi 2.3

Derajat titik v didefinisikan sebagai banyak titik yang terhubung langsung dengan titik v. Derajat titik v dinotasikan dengan deg (v) (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.3



Gambar 2.3 Graf Z

Berdasarkan Gambar 2.3 maka derajat titik dari setiap titik pada graf Z adalah $\deg\ (v_1) = 3;$ $\deg\ (v_2) = 3;$ $\deg\ (v_3) = 2;$ $\deg\ (v_4) = 3;$ $\deg\ (v_5) = 3;$ $\deg(v_6) = 2.$

Definisi 2.4

Misalkan G adalah suatu graf. Banyaknya titik pada G disebut orde dari G dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran dari G (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.4

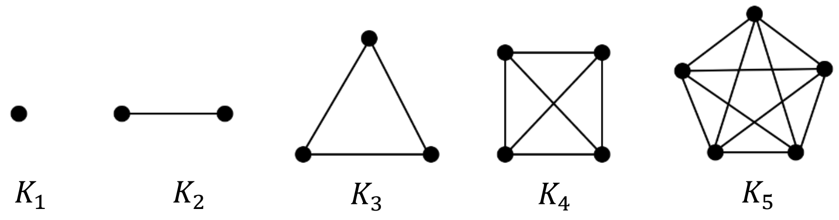
Pada Gambar 2.2, banyaknya titik pada graf X adalah 5 dan banyaknya sisi pada graf X adalah 6.

2.1.1 Graf-Graf Khusus

Definisi 2.5

Misalkan G adalah graf. Graf lengkap merupakan suatu graf yang setiap titiknya terhubung langsung dan dinotasikan dengan $K_n, n \geq 1$ dan n adalah bilangan asli (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.5

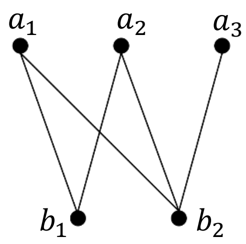


Gambar 2.4 Graf Lengkap

Definisi 2.6

Misalkan G adalah graf. G disebut graf bipartisi apabila himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu A dan B, sehingga setiap sisi pada graf G selalu menghubungkan titik di A dan titik di B (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.6



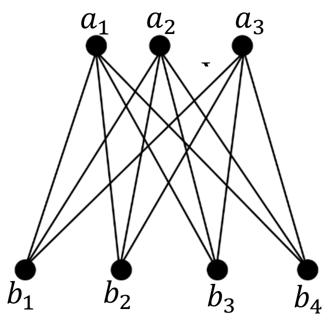
Gambar 2.5 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.4, terdapat partisi titik yaitu A dan B dengan $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $B = \{b_1, b_2\}$ sehingga graf tersebut merupakan graf bipartisi.

Definisi 2.7

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf G adalah graf bipartisi lengkap jika $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam dua himpunan yaitu A dan B sedemikian sehingga $\{a, b\}$ adalah sisi di G jika dan hanya jika $a \in A$ dan $b \in B$. Jika $|A| = s$ dan $|B| = t$, maka graf bipartisi lengkap ini memiliki order $s + t$ dan dilambangkan dengan $K_{s,t}$ atau $K_{t,s}$ (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.7



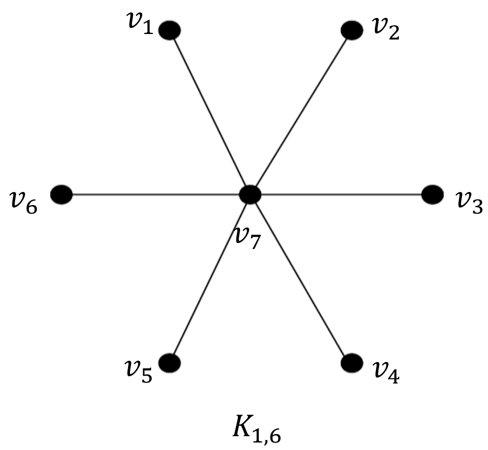
Gambar 2.6 Graf Bipartisi Lengkap

Pada Gambar 2.5 terdapat partisi titik, yaitu A dan B dengan $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Setiap titik di A terhubung langsung dengan setiap titik di B, sehingga graf tersebut merupakan graf bipartisi lengkap $K_{3,4}$.

Definisi 2.8

Graf bintang merupakan graf bipartisi lengkap yang berbentuk $K_{1,t}$ (Chartrand et al., 2011).

Contoh 2.8



Gambar 2.7 Graf Bintang

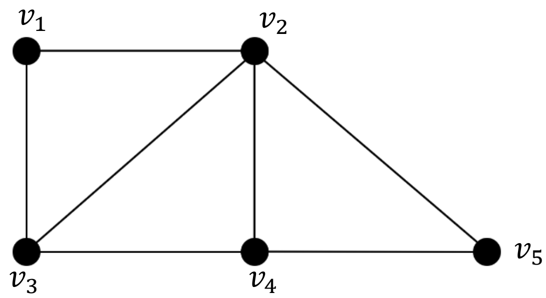
Definisi 2.9

Misalkan u dan v adalah titik-titik (tidak harus berbeda) dari graf G. Pada graf G jalan $W: u - v$ adalah barisan titik-titik yang dimulai dari titik u dan diakhiri di titik v sehingga titik-titik yang berurutan di W terhubung langsung di G. Jalan W di G dapat dituliskan sebagai

$$W = \{u = v_0, v_1, \dots, v_k = v\}$$

dengan $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ untuk $0 \leq i \leq k - 1$. Panjang jalan W adalah banyaknya sisi yang dilalui. Jalan yang tidak mengulang titik disebut lintasan dan dinotasikan dengan L (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.9



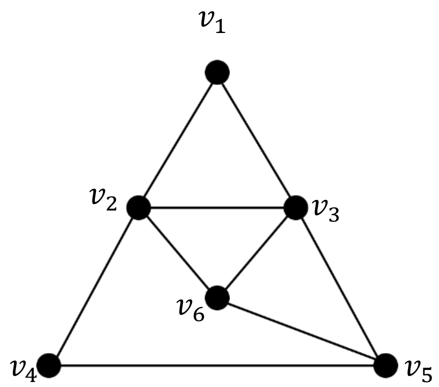
Gambar 2.8 Graf Y

Misalkan $W: u - v$ dengan $W = \{v_1, v_2, v_3, v_2, v_4, v_2, v_5\}$ maka W merupakan contoh dari jalan dengan panjang dari jalan W adalah 6. Sedangkan contoh dari lintasan adalah $L = \{v_2, v_5, v_4, v_3\}$ dengan panjang dari lintasan adalah 3.

Definisi 2.10

Misalkan G adalah graf dan u, v titik-titik di G. Graf G disebut graf terhubung apabila untuk setiap titik u dan v terdapat lintasan $u - v$ di G (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.10

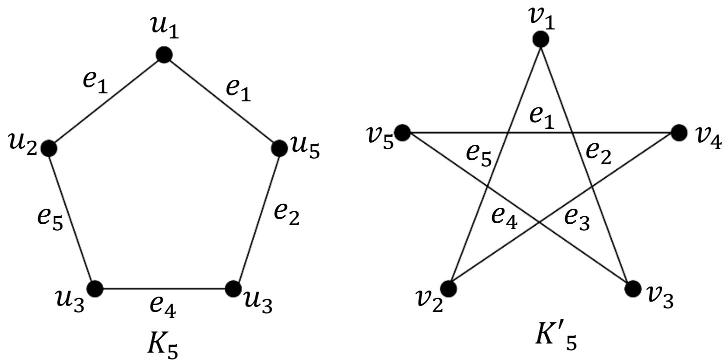


Gambar 2.9 Graf Terhubung

Definisi 2.11

Dua graf G dan G' adalah isomorfik jika terdapat fungsi bijektif $\phi :$ $V(G) \rightarrow V(G')$ sedemikian sehingga dua titik u dan v terhubung langsung di G jika dan hanya jika $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ terhubung langsung di G'. Fungsi ϕ dikatakan isomorfisma dari G ke G' dan notasi $G \cong G'$ menyatakan G isomorfik ke G'(Chartrand et al., 2011).

Contoh 2.11



Gambar 2.10 Graf Isomorfik

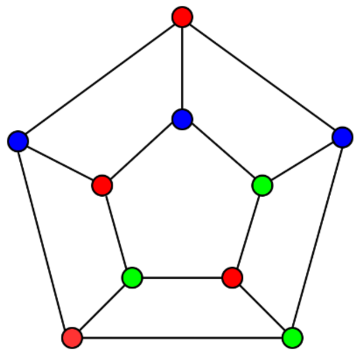
Graf K_5 dan K'_5 yang memiliki order 5 dan ukuran 5 adalah isomorfik dan fungsi $\phi : K_5 \rightarrow K'_5$ didefinisikan dengan $\phi(u_1) = v_1, \phi(u_2) = v_3, \phi(u_3) = v_5, \phi(u_4) = v_4, \phi(u_5) = v_2$.

2.1.2 Bilangan Kromatik Titik

Definisi 2.12

Pewarnaan titik pada graf adalah proses pemberian warna pada titik dengan aturan dua titik yang terhubung langsung tidak boleh memiliki warna yang sama (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.12



Gambar 2.11 Pewarnaan Titik Graf dengan Tiga Warna

Definisi 2.13

Misalkan G adalah graf. Bilangan kromatik titik dari G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga titik pada G dapat diwarnai dengan k warna (Chartrand, dkk., 2011).

Contoh 2.13

Berdasarkan Gambar 2.7 bilangan kromatik titik pada graf tersebut adalah tiga, karena titik dalam graf tersebut dapat diwarnai dengan minimal tiga warna.

Teorema 2.1

Misalkan G adalah graf tak kosong, graf G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$ (Abdy dkk., 2021).

Bukti:

($\Longrightarrow$) Jika G graf bipartisi, maka $\chi(G) = 2$.

Misalkan G adalah graf bipartisi, maka berdasarkan definisi graf bipartisi himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu A dan B. Karena setiap dua titik di A tidak terhubung langsung, maka semua titik di A dapat diwarnai dengan 1 warna, misal warna 1. Begitu juga dengan semua titik di B dapat diwarnai dengan 1 warna, misal warna 2. Jadi, graf G dapat diwarnai dengan 2 atau lebih warna. Karena graf G tak kosong, maka graf tersebut memiliki setidaknya satu sisi, sehingga tidak mungkin diwarnai hanya dengan 1 warna. Akibatnya,

$$\chi(G) = 2.$$

($\Longleftarrow$) Jika $\chi(G) = 2$, maka G adalah graf bipartisi.

Misalkan $\chi(G) = 2$. Artinya, pewarnaan titik pada graf G menggunakan dua warna, misal warna 1 dan warna 2 sehingga tidak ada dua titik yang saling terhubung langsung memiliki warna yang sama. Misalkan A adalah himpunan semua titik yang diberi warna 1 dan B adalah himpunan semua titik yang diberi warna 2. Karena tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik di A dan tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik di B, maka setiap sisi di G pasti menghubungkan titik di A dengan titik di B. Dengan demikian, titik pada graf G dapat dipartisi menjadi dua. Jadi, graf G merupakan graf bipartisi.

Berdasarkan uraian di atas, maka terbukti bahwa graf G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$.

Teorema 2.2

Bilangan kromatik titik pada graf lengkap K_n adalah n (Behzad et al., 1967).

Bukti:

Pada graf lengkap K_n, setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Akibatnya, tidak ada dua titik yang dapat diberi warna yang sama, sehingga diperlukan n warna untuk mewarnai seluruh titik. Dengan demikian,

$$\chi(K_n) = n.$$

2.2 Kongruensi

Definisi 2.14

Misalkan a dan b adalah suatu bilangan bulat, dengan $a \neq 0$. Bilangan a dikatakan membagi b jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sedemikian sehingga $b = ak$ dan dinotasikan dengan $a|b$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.14

$5|20$ karena terdapat $4 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $20 = 5 \cdot 4$.

Definisi 2.15

Suatu bilangan bulat d merupakan pembagi persekutuan terbesar dari a dan b dan dinotasikan dengan $d = FPB(a, b)$ jika memenuhi

1. d merupakan bilangan bulat positif atau $d > 0$.
2. $d|a$ dan $d|b$.
3. Misalkan c adalah suatu bilangan bulat, jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c|d$

(Gilbert & Gilbert, 2009).

Definisi 2.16

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif lebih dari satu. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat, maka a dikatakan kongruen ke b modulo n jika dan hanya jika $n|(a - b)$, yang dinotasikan dengan $a \equiv b (mod\ n)$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.16

$42 \equiv 2\ (mod\ 5)$ karena $5 \mid (42 - 2)$.

$30 \not\equiv 4\ (mod\ 7)$ karena $7 \nmid (30 - 4)$.

Kelas kongruensi dari a yang dinyatakan dengan $\bar{a}$ adalah

$$\bar{a} = \{a + kn | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{a, a \pm n, a \pm 2n, a \pm 3n, \dots\}.$$

(Dummit & Foot, 2004).

Kelas kongruensi modulo n dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\bar{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2m, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2m + 1, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots, -2n + 2, -n + 2, 2, n + 2, 2m + 2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$\overline{n - 1} = \{\dots, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, 3n - 1, \dots\}$$

(Gilbert & Gilbert, 2009).

Teorema 2.3

Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ n)$ dapat diselesaikan jika dan hanya jika $d = FPB(a, n)$ membagi b atau dapat ditulis dengan $d|b$. Pada kasus ini, maka $ax \equiv b(mod\ n)$ memiliki d selesaian. Jika a dan n relatif prima atau $d = 1$, maka kongruensi tersebut memiliki satu selesaian (Irawan, dkk., 2014).

Bukti:

($\Longrightarrow$) Jika $ax \equiv b(mod\ n)$ dapat diselesaikan, maka $d|b$

Jika $ax \equiv b(mod\ n)$ dapat diselesaikan, maka berdasarkan definisi kongruensi berlaku $n \mid (ax - b)$. Artinya, terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$ax - b = kn$$

$$ax - kn = b$$

Misalkan $d = FPB(a, n)$. Karena $d \mid a$ dan $d \mid n$, maka $d \mid ax$ dan $d \mid kn$. Akibatnya, $d \mid (ax - kn)$. Karena $ax - kn = b$, maka diperoleh $d \mid b$. Dengan demikian, jika kongruensi $ax \equiv b(mod\ n)$ mempunyai solusi, maka $d \mid b$.

($\Longleftarrow$) Jika $d|b$, maka $ax \equiv b(mod\ n)$ dapat diselesaikan.

Misalkan $d = FPB(a, n)$ dan $d \mid b$, maka terdapat bilangan bulat b_1 sehingga $b = db_1$. Karena $d = FPB(a, n)$, maka dapat ditulis $a = da_1$ dan $n = dn_1$, dengan $FPB(a_1, n_1) = 1$. Substitusi ke dalam kongruensi $ax \equiv b\ (mod\ n)$ menghasilkan

$$da_1x \equiv db_1\ (mod\ dn_1),$$

dengan membagi kedua ruas dengan d, diperoleh

$$a_1x \equiv b_1\ (mod\ n_1).$$

Karena $FPB(a_1, n_1) = 1$, maka a_1 memiliki invers modulo n_1. Akibatnya, kongruensi $a_1x \equiv b_1\ (mod\ n_1)$ memiliki solusi. Dengan demikian, kongruensi $ax \equiv b(mod\ n)$ juga memiliki solusi.

Berdasarkan uraian di atas, maka terbukti bahwa Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ n)$ dapat diselesaikan jika dan hanya jika $d = FPB(a, n)$ membagi b atau dapat ditulis dengan $d|b$.

Definisi 2.17

Kumpulan kelas kongruensi modulo n yang berbeda membentuk suatu himpunan yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$ dan dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

(Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.17

Untuk $n = 6$, maka $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan

$$\bar{0} = \{\dots, -12, -6, 0, 6, 12, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -11, -5, 1, 7, 13, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots, -10, -4, 2, 8, 14, \dots\}$$

$$\bar{3} = \{\dots, -9, -3, 3, 9, 15, \dots\}$$

$$\bar{4} = \{\dots, -8, -2, 4, 10, 16, \dots\}$$

$$\bar{5} = \{\dots, -7, -1,5,11,17, \dots\}.$$

Pada himpunan $\mathbb{Z}_n$, elemen di dalamnya dapat dioperasikan dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Definisi operasi penjumlahan dan perkalian dalam himpunan ini secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut

$$+: \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}, \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$$

$$\times : \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}, \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$$

(Dummit & Foot, 2004).

2.3 Modul

2.4.1 Grup

Definisi 2.18

Misalkan K adalah suatu himpunan. Operasi biner $*$ pada K adalah pemetaan $*: K \times K \to K$. Untuk sebarang $a, b \in K$, $*(a, b)$ dapat ditulis sebagai $a * b$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.18

Contoh operasi biner pada $\mathbb{Z}$ adalah pemetaan dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. $*: (a, b) \longmapsto a + b - 1$, untuk $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $*: (a, b) \longmapsto 1 + a \times b$, untuk $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definisi 2.19

Grup adalah pasangan terurut $(H, *)$ dengan H adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di H yang memenuhi syarat berikut:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. Terdapat elemen identitas dalam himpunan H, yaitu terdapat $e \in H$ sehingga berlaku $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in H$.
3. Setiap elemen dalam himpunan H memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in H$ terdapat a^{-1} di H sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

(Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.19

Himpunan bilangan bulat modulo n yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan atau $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup.

Bukti:

Ambil sebarang bilangan bulat modulo n, yaitu $\overline{z_i}, \overline{z_j}, \overline{z_k} \in \mathbb{Z}_n$. Kemudian perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{z_i} + \overline{z_j}\right) + \overline{z_k} &= \overline{z_i + z_j} + \overline{z_k} \\
&= \overline{\left(z_i + z_j\right) + z_k} \\
&= \overline{z_i + (z_j + z_k)} \\
&= \overline{z_i} + \overline{z_j + z_k} \\
&= \overline{z_i} + (\overline{z_j} + \overline{z_k}).
\end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ memenuhi sifat asosiatif di $\mathbb{Z}_n$. Pilih $e = \overline{0} \in \mathbb{Z}_n$ dan ambil sebarang $\overline{z_i} \in \mathbb{Z}_n$ didapatkan $\overline{0} + \overline{z_i} = \overline{0 + z_i} = \overline{z_i}$ dan $\overline{z_i} + \overline{0} = \overline{z_i + 0} = \overline{0}$. Jadi, $\mathbb{Z}_n$ memiliki elemen identitas yaitu $\overline{0}$. Karena $\overline{z_i} \in \mathbb{Z}_n$, maka dapat dipilih $\overline{z_i}^{-1}$ yaitu $\overline{-z_i} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga didapatkan $\overline{z_i} + \overline{-z_i} = \overline{z_i + (-z_i)} = \overline{0}$ dan $\overline{-z_i} + \overline{z_i} = \overline{(-z_i) + z_i} = \overline{0}$. Jadi, $-z_i$ merupakan invers dari $\overline{z_i}$ dan untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_n$

dapat ditentukan inversnya. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka himpunan $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi biner $+$ merupakan suatu grup.

Definisi 2.20

Misalkan H adalah suatu grup dengan operasi biner $*$. Himpunan tak kosong W adalah subgrup dari G jika H tertutup terhadap operasi biner * dan invers, yaitu jika $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Jika W adalah subgrup dari R maka dapat dinotasikan dengan $W \leq H$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.20

Himpunan bilangan bulat genap merupakan suatu subgrup dari grup himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.

Definisi 2.21

Grup H dengan operasi biner $*$ merupakan grup abel jika operasi $*$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b = b * a$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.21

Himpunan bilangan bulat modulo n yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan atau $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abel.

Pada contoh 2.17, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan suatu grup, maka selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abel dengan membuktikan sifat komutatifnya. Ambil sebarang $\overline{z_\iota}, \overline{z_\jmath} \in \mathbb{Z}_n$ perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \overline{z_\iota} + \overline{z_\jmath} &= \overline{z_\iota + z_\jmath} \\ &= \overline{z_\jmath + z_\iota} \\ &= \overline{z_\jmath} + \overline{z_\iota}. \end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abel.

2.4.2 Ring

Definisi 2.22

Himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner misalkan $+$ dan $\times$ yang selanjutnya dinotasikan dengan $(R, +, \times)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +)$ merupakan grup abel.
2. Operasi $\times$ bersifat asosiatif, yaitu $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
3. Berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ dan untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

(Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.22

Himpunan bilangan bulat modulo n yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian atau $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ merupakan ring.

Bukti:

1. Pada contoh 2.19, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abel.
2. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_n$.

   Misalkan $\overline{z_\imath}, \overline{z_\jmath}, \overline{z_k} \in \mathbb{Z}_n$ maka

$$\begin{aligned}
\left(\overline{z_\imath} \times \overline{z_\jmath}\right) \times \overline{z_k} &= \left(\overline{z_\imath \times z_\jmath}\right) \times \overline{z_k} \\
&= \overline{(z_\imath \times z_\jmath) \times z_k} \\
&= \overline{z_\imath \times (z_\jmath \times z_k)} \\
&= \overline{z_\imath} \times \left(\overline{z_\jmath \times z_k}\right) \\
&= \overline{z_\imath} \times \left(\overline{z_\jmath} \times \overline{z_k}\right).
\end{aligned}$$

   Jadi, operasi $\times$ di $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif

3. Berlaku hukum distributif di $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

   Misalkan $\overline{z_\iota}, \overline{z_J}, \overline{z_k} \in \mathbb{Z}_n$ maka

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{z_\iota} + \overline{z_J}\right) \times \overline{z_k} &= \left(\overline{z_\iota + z_J}\right) \times \overline{z_k} \\
&= \overline{(z_\iota + z_J) \times z_k} \\
&= \overline{(z_\iota \times z_k) + (z_J \times z_k)} \\
&= \overline{(z_\iota \times z_k)} + \overline{(z_J \times z_k)} \\
&= (\overline{z_\iota} \times \overline{z_k}) + (\overline{z_J} \times \overline{z_k})
\end{aligned}
$$

   Jadi, $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memenuhi hukum distributif kanan. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memenuhi hukum distributif kiri. Misalkan $\overline{z_\iota}, \overline{z_J}, \overline{z_k} \in \mathbb{Z}_n$ maka

$$
\begin{aligned}
\overline{z_\iota} \times \left(\overline{z_J} + \overline{z_k}\right) &= \overline{z_\iota} \times \left(\overline{z_J + z_k}\right) \\
&= \overline{z_\iota \times (z_J + z_k)} \\
&= \overline{(z_\iota \times z_J) + (z_\iota \times z_k)} \\
&= \overline{(z_\iota \times z_J)} + \overline{(z_\iota \times z_k)} \\
&= \left(\overline{z_\iota} \times \overline{z_J}\right) + (\overline{z_\iota} \times \overline{z_k})
\end{aligned}
$$

   Jadi, $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memenuhi hukum distributif kiri. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ berlaku hukum distributif.

Berdasarkan poin 1,2, dan 3 terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ merupakan suatu ring.

Definisi 2.23

Suatu subring dari ring R adalah subgrup dari R yang tertutup terhadap operasi perkalian (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.23

$n\mathbb{Z}$ merupakan subring dari ring $\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$, dengan $n\mathbb{Z} \coloneqq \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Definisi 2.24

Ring $(R, +, \times)$ dikatakan ring komutatif jika operasi perkaliannya bersifat komutatif (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.24

Himpunan bilangan bulat modulo n yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian atau $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ merupakan ring komutatif karena terhadap $\times$, untuk setiap $\overline{z_i}, \overline{z_j} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\overline{z_i} \times \overline{z_j} = \overline{z_i} \times \overline{z_j}$.

Definisi 2.25

Ring $(R, +, \times)$ disebut sebagai ring dengan elemen identitas jika terdapat elemen $1 \in R$ sedemikian sehingga $1 \times a = a \times 1 = a$, untuk setiap $a \in R$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.25

$(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ merupakan ring dengan elemen identitas karena dapat diemukan $\overline{1} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga untuk setiap $\overline{z_i} \in \mathbb{Z}_n$ akan berlaku $\overline{z_i \times 1} = \overline{1 \times z_i} = \overline{z_i}$.

Definisi 2.26

Misalkan $(R, +, \times)$ memiliki elemen identitas yaitu 1. Elemen $u \in R$ merupakan unit jika terdapat suatu elemen $e \in R$ sedemikian sehingga $u \times e = e \times u = 1$. Himpunan seluruh unit di R dinotasikan dengan R^* (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.26

Diberikan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan dua operasi biner yaitu $+$ dan $\times$. Perhatikan bahwa,

1. Ambil $u = \bar{0}$, tidak ada $e \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $e \times \bar{0} = \bar{0} \times e = 1$.
2. Ambil $u = \bar{1}$, terdapat $e = \bar{1}$ sehingga
$$\bar{1} \times \bar{1} = \bar{1} \times \bar{1} = \bar{1}.$$
3. Ambil $u = \bar{2}$, terdapat $e = \bar{3}$ sehingga
$$\bar{2} \times \bar{3} = \bar{3} \times \bar{2} = \bar{1}.$$
4. Ambil $u = \bar{3}$, terdapat $e = \bar{2}$ sehingga
$$\bar{3} \times \bar{2} = \bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}.$$
5. Ambil $u = \bar{4}$, terdapat $e = \bar{4}$ sehingga
$$\bar{4} \times \bar{4} = \bar{4} \times \bar{4} = \bar{1}.$$

Sehingga diperoleh ${\mathbb{Z}_5}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

2.4.3 Ideal

Definisi 2.27

Misalkan R adalah ring dan I adalah subhimpunan dari ring, misalkan $r \in R$.

1. $rI = \{ra \mid a \in I\}$ dan $Ir = \{ar \mid a \in I\}$.
2. Suatu subhimpunan I dari R merupakan ideal kiri dari R jika,
   a) I adalah subring dari R
   b) I tertutup terhadap perkalian kiri oleh elemen-elemen di R, yaitu untuk setiap $r \in R$ berlaku $rI \subseteq I$.

Demikian pula, I disebut ideal kanan jika syarat a) terpenuhi dan sebagai pengganti b), maka

c) I tertutup terhadap perkalian kanan oleh elemen-elemen di R, yaitu untuk setiap $r \in R$ berlaku $Ir \subseteq I$.

3. Suatu subhimpunan I yang merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan disebut ideal (Sebagai penekanan bisa disebut sebagai ideal dua sisi) dari R.

(Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.27

$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$ merupakan ideal kiri dari ring $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Ambil sebarang $n \in \mathbb{Z}$. Jelas bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}$. Kemudian akan dibuktikan $n\mathbb{Z}$ tertutup terhadap perkalian kiri oleh elemen di R. Ambil sebarang $r \in R$ dan $a = nk \in n\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa, $ra = r(nk) = n(rk)$. Karena $rk \in \mathbb{Z}$, maka $ra \in \mathbb{Z}$. Sehingga, $n\mathbb{Z}$ merupakan ideal kiri dari ring.

Definisi 2.28

Misalkan I dan J adalah ideal dari ring R. Ideal quotient $(I : J)$ didefinisikan sebagai

$$(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

(Dummit & Foot, 2004). Pada kasus khusus, ketika $I = 0$ maka ideal quotient $(0 : J)$ didefinisikan sebagai

$$(0 : J) = \{r \in R \mid rJ = 0\} = \{r \in R \mid rj = 0 \text{ untuk setiap } j \in J\}$$

(Sharp, 1990).

Contoh 2.28

Diberikan $I = \{\bar{0}, \bar{4}\}$, $J = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, dan $R = \mathbb{Z}_8$. Akan di cari ideal quotient $(I : J)$ yaitu elemen $r \in R$ sedemikian sehingga $rJ \subseteq I$. Perhatikan bahwa,

1. Elemen $\bar{0}$, diperoleh $\bar{0} \times \bar{2} = \bar{0} \subseteq I$.
2. Elemen $\bar{1}$, diperoleh $\bar{1} \times \bar{4} = \bar{4} \subseteq I$.
3. Elemen $\bar{2}$, diperoleh $\bar{2} \times \bar{2} = \bar{4} \subseteq I$.
4. Elemen $\bar{3}$, tidak ada j sedemikian sehingga $rJ \subseteq I$.
5. Elemen $\bar{4}$, diperoleh $\bar{4} \times \bar{2} = \bar{0} \subseteq I$.
6. Elemen $\bar{5}$, tidak ada j sedemikian sehingga $rJ \subseteq I$.
7. Elemen $\bar{6}$, diperoleh $\bar{6} \times \bar{4} = \bar{0} \subseteq I$.

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka $(I : J) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

2.4.4 Modul Atas Ring

Definisi 2.29

Misalkan $(R, +, \times)$ merupakan ring (tidak harus komutatif dan tidak harus memiliki elemen identitas). Suatu R-modul kiri atau modul kiri atas R adalah suatu himpunan M yang memenuhi aksioma berikut:

1. Operasi biner $+$ pada M membentuk grup abel.
2. Pemetaan $R \times M \to M$ dinotasikan dengan $r \times m$ dan untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ memenuhi:
   a. $(r + s) \times m = r \times m + s \times m$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$
   b. $(r \times s) \times m = r \times (s \times m)$, untuk setiap $r, s \in R$, $m \in M$
   c. $r \times (m + n) = r \times m + r \times n$, untuk setiap $r \in R$, $m, n \in M$
   d. $1 \times m = m$, untuk setiap $m \in M$

(Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.29

Himpunan bilangan bulat modulo n yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian atau $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ atas ring $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan perkalian skalar adalah suatu modul. Perkalian skalar tersebut didefinisikan dengan

$$\diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,$$

perkalian tersebut kemudian didefinisikan dengan perkalian sebarang skalar pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dimisalkan dengan r dengan sebarang elemen pada modul yang dimisalkan dengan $\overline{m}$. Secara matematis dapat ditulis sebagai,

$$\diamond\, (r, \overline{m}) = \overline{r \times m}.$$

Bukti:

Pada contoh 2.18 telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup abel. Kemudian, akan dibuktikan $\mathbb{Z}_n$ memenuhi aksioma-aksioma pada modul. Ambil sebarang $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $\overline{m}, \overline{n} \in \mathbb{Z}_n$. Untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $\overline{m}, \overline{n} \in \mathbb{Z}_n$

1. Distributif terhadap penjumlahan dalam ring. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} (r + s) \times \overline{m} &= \overline{(r + s) \times m} \\ &= \overline{r \times m + s \times m} \\ &= \overline{r \times m} + \overline{s \times m} \\ &= r \times \overline{m} + s \times \overline{m} \end{aligned}$$

2. Asosiatif terhadap perkalian skalar. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} (r \times s) \times \overline{m} &= \overline{(r \times s) \times m} \\ &= \overline{r \times (s \times m)} \\ &= r \times \overline{(s \times m)} \\ &= r \times (s \times \overline{m}) \end{aligned}$$

3. Distributif terhadap penjumlahan dalam modul. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} r \times (\bar{m} + \bar{n}) &= r \times (\overline{m + n}) \\ &= \overline{r \times (m + n)} \\ &= \overline{r \times m + r \times n} \\ &= \overline{r \times m} + \overline{r \times n} \\ &= r \times \bar{m} + r \times \bar{n} \end{aligned}$$

4. Elemen identitas skalar. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 1 \times \bar{m} &= \overline{1 \times m} \\ &= \bar{m} \end{aligned}$$

Karena $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup abel dan memenuhi aksioma pada modul, maka $\mathbb{Z}_n$ merupakan suatu modul yang dibangun atas $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.30

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah suatu ring dan M adalah suatu R-modul. R-submodul dari M adalah subgrup N dari M yang tertutup terhadap aksioma ring, yaitu untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$ berlaku $r \times n \in N$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.30

Himpunan $4\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ merupakan submodul dari modul $\mathbb{Z}_8$.

Definisi 2.31

Misalkan M adalah modul atas ring R. M disebut sebagai modul multiplikasi jika untuk setiap submodul N dari M, terdapat suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $N = IM$ (Naghipour, 2017).

Contoh 2.31

$\mathbb{Z}_n$ adalah modul multiplikasi atas ring $\mathbb{Z}$, karena untuk setiap submodul $N = n\mathbb{Z}_n$ di modul $\mathbb{Z}_n$, terdapat ideal $I = n\mathbb{Z}$ di ring $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berlaku $N = I\mathbb{Z}_n$ atau $n\mathbb{Z}_n = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}_n$.

Teorema 2.4

Misalkan N dan K adalah dua submodul dari suatu modul M atas ring R, maka

$$(N : K) = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}$$

merupakan ideal quotient dari R (Naghipour, 2017).

Bukti:

Diketahui bahwa N dan K adalah submodul dari modul M. Akan ditunjukkan bahwa $(N : K)$ memenuhi sifat ideal.

1. $(N : K)$ tak kosong

   Karena N adalah submodul dari M, maka $0 \in N$. Untuk setiap $k \in K$ berlaku $0 \cdot k = 0 \in N$, sehingga $0 \cdot K \subseteq N$. Akibatnya, $0 \in (N : K)$. Jadi, $(N : K)$ bukan merupakan himpunan kosong.

2. Tertutup terhadap pengurangan

   Ambil sebarang $r_1, r_2 \in (N : K)$. Maka $r_1 \cdot K \in N$ dan $r_2 \cdot K \in N$. Untuk setiap $k \in K$ diperoleh

   $$(r_1 - r_2)k = r_1k - r_2k.$$

   Karena $r_1k, r_2k \in N$ dan N adalah submodul maka $r_1k - r_2k \in N$. Dengan demikian $(r_1 - r_2)K \subseteq N$, sehingga

   $$r_1 - r_2 \in (N : K).$$

3. Tertutup terhadap perkalian dengan elemen ring

Ambil sebarang $r \in (N : K)$ dan $a \in R$. Untuk setiap $k \in K$, $(ar)k = a(rk)$. Karena $rk \in N$ dan N adalah submodul, maka $a(rk) \in N$. Akibatnya, $(ar)K \subseteq N$, sehingga $ar \in (N : K)$.

Berdasarkan poin 1-3 diperoleh bahwa $(N : K)$ merupakan ideal. Oleh karena itu, $(N : K) = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}$ disebut ideal quotient.

Definisi 2.32

Misalkan M adalah modul atas ring R, maka annihilator dari elemen $m \in M$ dapat dituliskan sebagai

$$ann(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

(Dummit & Foot, 2004). Annihilator juga dapat dituliskan sebagai ideal quotient $(I : J)$ dengan $I = 0$ dan $J = M$ (Naghipour, 2017).

Contoh 2.32

Diberikan modul $\mathbb{Z}_8$ atas ring $\mathbb{Z}$. Elemen $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, tentukan annihilator dari tiap elemen di $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_8$. Perhatikan bahwa,

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$ann(\bar{1}) = 8\mathbb{Z} = \{\dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots\}$.

$ann(\bar{2}) = 4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$.

$ann(\bar{3}) = 8\mathbb{Z} = \{\dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots\}$.

$ann(\bar{4}) = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

$ann(\bar{5}) = 8\mathbb{Z} = \{\dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots\}$.

$ann(\bar{6}) = 4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$.

$ann(\bar{7}) = 8\mathbb{Z} = \{\dots, -16, -8, 0, 8, 16, \dots\}$.

Definisi 2.33

Misalkan M adalah modul atas ring R. Himpunan pembagi nol dari M adalah

$$Z(M) = \{m \in M | m \in ann(n)M \text{ atau } n \in ann(m)M, \text{ untuk suatu } n \neq 0 \in M\}$$

(Naghipour, 2017).

Contoh 2.33

Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ yang merupakan modul multiplikasi. Pada contoh 2.27 telah ditentukan annihilator dari tiap elemen di $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_8$. Karena $\mathbb{Z}_8$ merupakan modul multiplikasi atas ring $\mathbb{Z}$, maka setiap submodul dari $\mathbb{Z}_8$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali antara suatu ideal $(0 : M)$ dengan modul $\mathbb{Z}_8$ seperti pada contoh berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{1}) = 8\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$

$ann(\bar{3}) = 8\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 2\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$

$ann(\bar{5}) = 8\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$

$ann(\bar{7}) = 8\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\ \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}\}$

berdasarkan definisi pembagi nol atas modul diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_8$, $\bar{2} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_8$, $\bar{4} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_8$, dan $\bar{6} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_8$, sehingga himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_8$ adalah $Z(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

2.4 Graf Pembagi Nol Atas Modul

Definisi 2.35

Misalkan M adalah modul atas ring R. Graf pembagi nol atas M yang dinotasikan dengan $\Gamma(M)$ adalah graf dengan himpunan titik $Z(M) - \{\bar{0}\}$ dengan dua titik berbeda u dan v terhubung langsung jika dan hanya jika $u \in ann(v)M$ atau $v \in ann(u)M$ (Naghipour, 2017).

Contoh 2.34

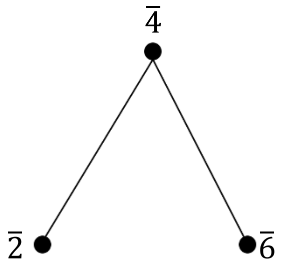
Berdasarkan contoh 2.29 diperoleh pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_8$ atas ring $\mathbb{Z}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Maka himpunan titik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ adalah $V\big(\Gamma(\mathbb{Z}_8)\big) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan titik-titik yang terhubung langsung adalah sebagai berikut,

$\bar{2} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_8$, maka $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_8$, maka $\bar{4}$ dan $\bar{2}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_8$, maka $\bar{6}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung

Berdasarkan pernyataan tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_8$ sebagai berikut,



Gambar 2.12 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_8$

2.5 Kajian Integrasi Topik dengan al-Quran

Penelitian ini bertujuan untuk mencari karakteristik graf pembagi nol atas modul. Konsep pembagi nol atas graf yang mulai dikenalkan pada tahun 2017 masih menjadi ilmu baru yang terus dikembangkan. Sebagai seorang *ulul albab*, kita harus terus mencari ilmu dan menjadikannya bermanfaat. Sejalan dengan hal ini, Allah SWT menjanjikan kepada orang yang berilmu dengan derajat yang tinggi dalam al-Quran surat al-Mujadalah ayat 11. Salah satu pengembangan ilmu yang akan dilakukan dalam penelitian ini yaitu menganalisis pola yang terjadi dalam graf pembagi nol atas modul.

Graf pembagi nol atas modul memiliki pola tertentu ketika aturan dalam pembagi nol atas modul berinteraksi dengan aturan dalam graf yang telah ditentukan. Pada al-Quran pola bilangan telah di sebutkan dalam surat al-Baqarah ayat 261 yang membahas tentang ganjaran bagi orang yang menginfakkan hartanya di jalan Allah. Allah SWT berfirman:

مَثَلُ الَّذِيْنَ يُنْفِقُوْنَ اَمْوَالَهُمْ فِيْ سَبِيْلِ اللّٰهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ اَنْۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِيْ كُلِّ سُنْۢبُلَةٍ مِّائَةُ حَبَّةٍ ۗ وَاللّٰهُ يُضٰعِفُ لِمَنْ يَّشَاۤءُ ۗ وَاللّٰهُ وَاسِعٌ عَلِيْمٌ

(Kemenag, 2025b)

Artinya: *"Perumpamaan orang-orang yang menginfakkan hartanya di jalan Allah adalah seperti (orang-orang yang menabur) sebutir biji (benih) yang menumbuhkan tujuh tangkai, pada setiap tangkai ada seratus biji. Allah melipatgandakan (pahala) bagi siapa yang Dia kehendaki. Allah Maha Luas lagi Maha Mengetahui"*. (Al-Baqarah: 261).

Menurut tafsir ath-Thabari, ayat ini merupakan perumpamaan pahala yang Allah berikan kepada hamba-Nya yang menginfakkan hartanya di jalan Allah (Al-Bakri, dkk., 2007). Pahala yang didapatkan berupa penggandaan kebaikan yang dilakukan sebanyak 10 kali sampai 700 kali dalam satu kebaikan. Syabib bin Bisyr menceritakan dari Ikrimah dari Ibnu Abbas bahwasannya "Dirham (mata uang kala itu) yang digunakan untuk berjihad dan ibadah haji akan dilipat gandakan sampai 700 kali lipat". Pada hadits ini, maksud dari harta yang digunakan di jalan Allah merupakan harta yang dikeluarkan untuk kebaikan umat muslim di kala penyerangan kaum Quraisy atau harta yang dikeluarkan untuk keperluan ibadah haji.

Dalam hadits lain, harta yang digunakan tidak hanya sebatas dirham, namun harta benda yang berbentuk hewan juga termasuk harta yang akan dibalas oleh Allah dengan penggandaan pahala. Imam Ahmad meriwayatkan dari Ibnu Mas'ud, bahwasannya ada seorang laki-laki yang menginfakkan seekor unta, lalu Rasulullah SAW bersabda bahwasannya "Engkau pasti akan datang pada hari kiamat kelak dengan tujuh ratus unta yang telah ditali di hidungnya" Hadits ini juga diriwayatkan oleh Muslim An-Nasa'i.

Abu Ja'far berkata bahwasannya penakwilan firman Allah SWT yang artinya "Allah melipat gandakan ganjaran bagi siapa saja yang dikehendaki" yang tepat adalah Allah SWT akan melipat gandakan ganjaran yang tidak terhingga bagi siapa saja yang dikehendaki yaitu orang-orang yang menginfakkan hartanya di jalan Allah. Namun, karena Allah SWT tidak menyebutkan kelipatan ganjaran bagi orang-orang yang tidak menginfakkan di jalan Allah, maka kelipatan ganjaran yang Allah SWT janjikan ini juga diperuntukkan oleh orang-orang yang bukan menginfakkan hartanya di jalan Allah. Sebagaimana dalam firman-Nya yang artinya "Dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui" bahwasannya Allah Maha Luas karunia-Nya sehingga dapat menambahkan ganjaran bagi siapa saja yang Dia kehendaki.

Ayat dan hadits di atas menunjukkan bahwa penggandaan pahala memiliki pola yaitu ketika seseorang menginfakkan hartanya setiap 1 harta yang diinfakkan pasti akan di lipat gandakan. Secara matematis hal ini dapat dituliskan sebagai $700n$, dengan n merupakan tiap satu harta yang diinfakkan. Pada penelitian ini, pola yang terjadi dalam graf pembagi nol atas modul menjadi hal dasar untuk mengetahui karakteristik graf tersebut. Dengan memahami pola yang terjadi dalam graf pembagi nol atas modul kita dapat mendalami bagaimana hubungan antar elemen dari graf yang dibangun.

Surat al-Baqarah ayat 261 juga ditafsirkan dalam tafsir ath-thabari bahwa perumpamaan nafkah dari orang-orang yang menginfakkan harta mereka di jalan Allah bagaikan sebutir biji yang menumbuhkan tujuh buah tangkai dan di setiap tangkainya terdapat seratus biji (Al-Bakri, dkk., 2007). Jika dianalogikan dengan graf, perumpamaan ganjaran yang didapatkan seseorang yang menginfakkan hartanya dijalan Allah seperti graf bintang yang memiliki satu titik di tengah dengan 7 titik lain berupa penggandaan ganjaran yang didapatkan.

Berdasarkan penjelasan di atas, dapat dipahami bahwa pola pada graf sudah tercantum sebelumnya dalam Al-Qur'an yaitu pada surat Al-Baqarah ayat 261. Sehingga pola dalam graf pembagi nol atas modul sangat erat hubungannya dalam Islam. Dengan memahami pola tersebut nantinya dapat diteliti lebih jauh bagaimana karakteristik-karakteristik yang ada pada graf tersebut. Representasi ganjaran pahala yang bermula dari sebutir biji menjadi tujuh tangkai menunjukkan bahwa setiap amal baik yang dilakukan memiliki efek yang berkesinambungan. Oleh karena itu, penelitian graf pembagi nol atas modul tidak hanya sebatas penelitian matematis, namun juga memberikan nilai-nilai agamis yang menyadarkan seorang muslim bahwa menginfakkan harta mendatangkan ganjaran yang lebih banyak.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini digunakan metode studi literatur untuk menganalisis dan memahami konsep-konsep matematika yang berkaitan dengan graf dan struktur aljabar khususnya pada grup, ring, dan teori modul. Studi literatur yang dilakukan yaitu dengan mengumpulkan, mengevaluasi dan mengkaji berbagai sumber ilmiah yang relevan seperti jurnal baik nasional maupun internasional serta buku-buku yang berkaitan dengan topik yang diambil.

3.2 Pra Penelitian

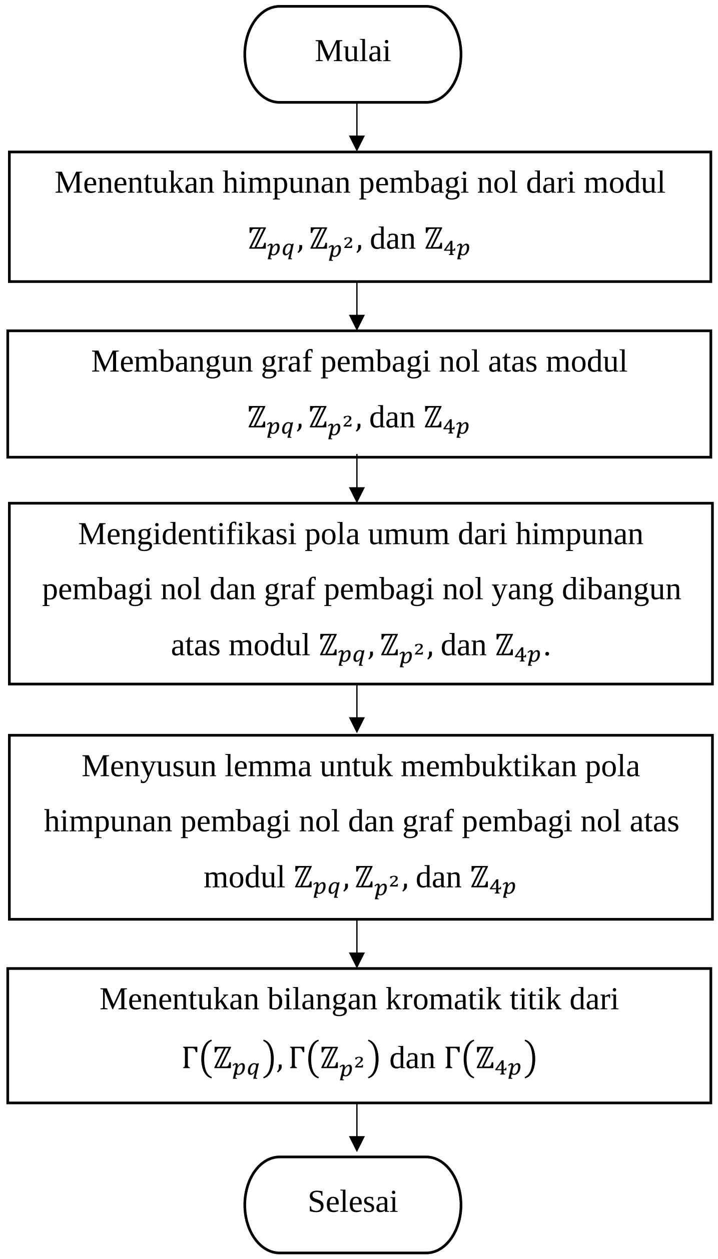
Penelitian ini diawali dengan mengumpulkan berbagai referensi yang membahas tentang graf dan struktur aljabar seperti grup, ring, dan modul. Referensi yang digunakan berupa jurnal ilmiah dan buku-buku cetak baik nasional maupun internasional. Sumber-sumber tersebut kemudian dianalisis dan difokuskan pada keterkaitan antara teori graf dengan modul. Analisis dilakukan dengan memahami bagaimana elemen pada modul dapat mempengaruhi sifat graf yang dihasilkan. Hasil analisis disusun secara teoritis dan dikategorikan ke dalam tema-tema yang lebih spesifik untuk mempermudah penyampaian hasil penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ untuk setiap bilangan prima $p, q > 2$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$.
2. Membangun graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$.
3. Mengidentifikasi pola umum dari himpunan pembagi nol dan graf pembagi nol yang dibangun atas modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$.
4. Menyusun lemma untuk membuktikan pola himpunan pembagi nol dan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$.
5. Menentukan bilangan kromatik titik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}), \Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dan $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$.

Langkah-langkah tersebut diilustrasikan dalam diagram alir sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alur Langkah-Langkah Analisis

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{pq}$

Pada sub bab ini akan dibahas bilangan kromatik titik graf pembagi nol yang dibangun dari modul multiplikasi $\mathbb{Z}_{pq}$ atas ring $\mathbb{Z}$, dengan bilangan prima $p, q > 2$ dan $p \neq q$ yang dinotasikan dengan $\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)$. Untuk mengetahui bilangan kromatik $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ akan ditentukan pola umum $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$, sehingga perlu diketahui titik dari graf tersebut, yaitu pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$. Akan dibangun beberapa graf untuk menganalisis pola $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ dengan $p, q \in \{3,5,7,11\}$.

1. **Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{15}$**

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 3$ dan $q = 5$, yaitu $\mathbb{Z}_{15}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{15}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{15}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$

$ann(\bar{1}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$ann(\bar{4}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$ann(\bar{6}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$ann(\bar{7}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$ann(\overline{10}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$ann(\overline{11}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$ann(\overline{13}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 15\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{15}$, $\bar{3} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, $\bar{5} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{15}$, $\bar{6} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, $\bar{9} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, $\overline{10} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{15}$, dan $\overline{12} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{15})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$, yaitu $V\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{15})\big) = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{3} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{3}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{6}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\bar{9} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{9}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann\big(\bar{5}\big)\mathbb{Z}_{15}$, maka $\overline{12}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

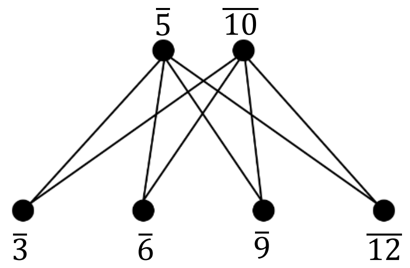
$\bar{3} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{3}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{6}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{9} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\bar{9}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{15}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{15}$ sebagai berikut



Gambar 4.1 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{15}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{2,4}$.

2. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{21}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 3$ dan $q = 7$, yaitu $\mathbb{Z}_{21}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{21}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{21}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13},$
$\overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$

$ann(\bar{1}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$

$ann(\bar{4}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{7}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{8}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{9}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{9})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{10}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{11}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{13}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$

$ann\left(\overline{15}\right) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{16}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{19}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{21} = \{\overline{0}\}$

Diperoleh $\overline{0} \in ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{3} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{6} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{7} \in ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{9} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{12} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{14} \in ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{21}$, $\overline{15} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, dan $\overline{18} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{21}) = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{21})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$, yaitu $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{21})\right) = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{3} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{3}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{9} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{18} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{18}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{3} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{3}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

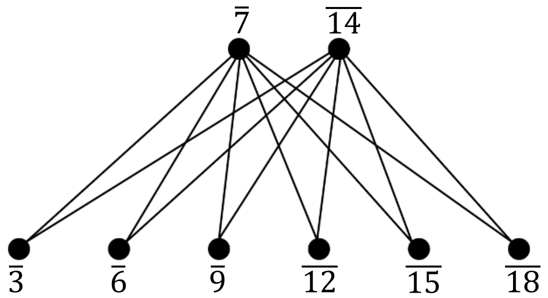
$\overline{9} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{18} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{21}$, maka $\overline{18}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{21}$ sebagai berikut



Gambar 4.2 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{21}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{2,6}$.

3. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{33}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 3$ dan $q = 11$, yaitu $\mathbb{Z}_{33}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{33}$ adalah $\mathbb{Z}_{33} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23},$

$\overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{33}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{33}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13},$

$\overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24},$

$\overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}\}$

$ann(\bar{1}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\bar{4}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\bar{7}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{10}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$

$ann(\overline{12}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{13}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(15) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{16}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{19}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{21}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{22}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$

$ann(\overline{23}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{25}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{26}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{28}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{29}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 21\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{31}) = 33\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{33}$, $\bar{3} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\bar{6} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\bar{9} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{11} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{12} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{15} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{18} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{21} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{22} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{24} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, $\overline{27} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, dan $\overline{30} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{33}$, yaitu $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{33})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{33})) = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{3} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\bar{3}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\bar{6}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{9} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{18} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{18}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{24} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{24}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{27} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{27}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{30} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{30}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\overline{3} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{3}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{9} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{18} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{18}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

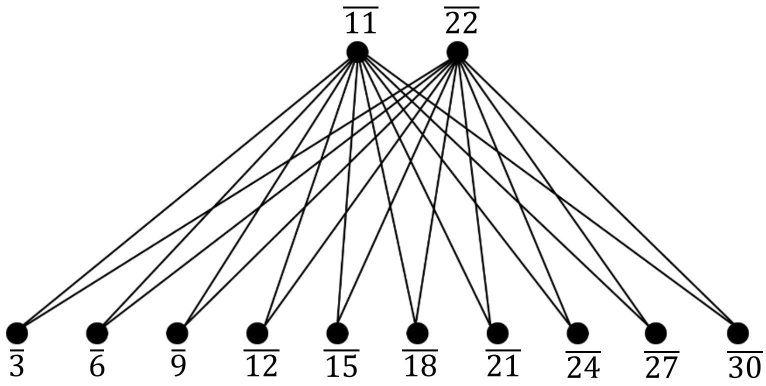
$\overline{21} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{24} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{24}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{27} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{27}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{30} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{33}$, maka $\overline{30}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh pola graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{33}$ sebagai berikut



Gambar 4.3 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{33}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{2,10}$.

4. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{35}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 5$ dan $q = 7$, yaitu $\mathbb{Z}_{35}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{35}$ adalah $\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{35}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{35}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13},$
$\overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24},$
$\overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}\}$

$ann(\bar{1}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\bar{6}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{7}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}\}$

$ann(\bar{8}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\overline{11}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}\}$

$ann(15) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\overline{16}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\overline{21}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}\}$

$ann(\overline{22}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{23}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{25}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\overline{26}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{35} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}\}$

$ann(\overline{29}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}\}$

$ann(\overline{31}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{33}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{34}) = 35\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}\}$

Diperoleh $\overline{0} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{5} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{7} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{10} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{14} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{15} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{20} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{21} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{25} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$, $\overline{28} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, dan $\overline{30} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{35}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{35}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{35}) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{30}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{35})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{35})) = \{\overline{5}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{30}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{7} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{5}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

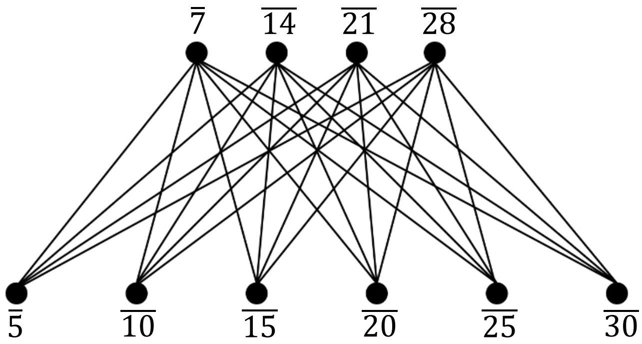
$\overline{7} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{35}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{35}$ sebagai berikut



Gambar 4.4 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{35}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{4,6}$.

5. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{55}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 5$ dan $q = 11$, yaitu $\mathbb{Z}_{55}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{55}$ adalah $\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{53}, \overline{54}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{55}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{55}$ sebagai berikut

$ann(\overline{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{0})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{53}, \overline{54}\}$

$ann(\overline{1}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{1})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{2}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{3}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{4}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{5}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{6}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{7}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{8}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{9}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{9})\mathbb{Z}_{55} = \{\overline{0}\}$

–

$ann(\overline{10}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{11}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \ \overline{50}\}$

$ann(\overline{12}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(15) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{16}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{21}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{22}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}\}$

$ann(\overline{23}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann\left(\overline{25}\right) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{25}\right)\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(26) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{29}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{31}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{33}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(33)\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}\}$

$ann(\overline{34}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{35}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{36}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{37}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{37})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{38}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{39}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{39})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{40}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{41}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{41})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{42}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{43}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(43)\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{44}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}\}$

$ann(\overline{45}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{46}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{46})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{47}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{47})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{48}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{48})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{49}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{50}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}\}$

$ann(\overline{51}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{51})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{52}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{52})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{53}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{53})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{54}) = 55\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{54})\mathbb{Z}_{55} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, $\bar{5} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{10} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{11} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{15} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{20} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{22} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{25} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{30} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{33} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{35} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{40} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{44} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, $\overline{45} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$, dan $\overline{50} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{55}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{55}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{55}) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{50}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{55})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{55})) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{50}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{11} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{25}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{45}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{45}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{45}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{45}$ terhubung langsung

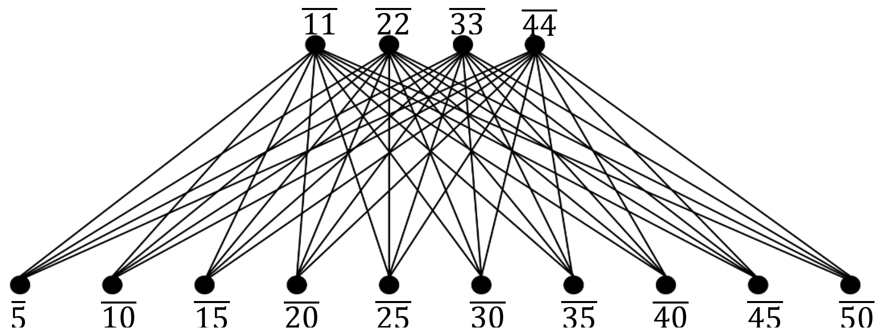
$\overline{11} \in ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{50}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{50}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{50}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{55}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{50}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{55}$ sebagai berikut



Gambar 4.5 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{55}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{4,10}$.

6. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{77}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan $p = 7$ dan $q = 11$, yaitu $\mathbb{Z}_{77}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{77}$ adalah $\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{75}, \overline{76}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{77}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{77}$ sebagai berikut

$ann(\overline{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{0})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{75}, \overline{76}\}$

$ann(\overline{1}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{1})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{2}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{3}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{4}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{7}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\bar{8}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{12}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(15) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{21}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{22}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{23}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{25}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(26) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{29}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{31}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{33}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(33)\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{34}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{35}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{36}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{37}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{37})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{38}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{39}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{39})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{40}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{41}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{41})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{42}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{43}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(43)\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{44}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{45}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{45})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{46}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{46})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{47}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{47})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{48}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{48})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{49}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{50}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{51}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{51})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{52}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{52})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{53}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{53})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{54}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{54})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{55}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{56}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{57}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{57})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{58}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{58})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{59}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{59})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{60}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{60})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{61}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{61})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{62}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{62})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{63}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{64}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{64})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{65}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{65})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{66}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{70}\}$

$ann(\overline{67}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{67})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{68}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{68})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{69}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{69})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{70}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}\}$

$ann(\overline{71}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{71})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{72}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{72})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{73}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{73})\mathbb{Z}_{77} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{74}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{74})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{75}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{75})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{76}) = 77\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{76})\mathbb{Z}_{77} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\bar{7} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{11} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{14} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{21} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{22} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{28} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{33} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{35} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{42} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{44} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{49} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{55} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{56} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{63} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{66} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, $\overline{70} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{77}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{77}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{77}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{28}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{49}, \overline{55}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{66}, \overline{70}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{77})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{77})) = \{\bar{7}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{28}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{49}, \overline{55}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{66}, \overline{70}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{11} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{49}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{56}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{63}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

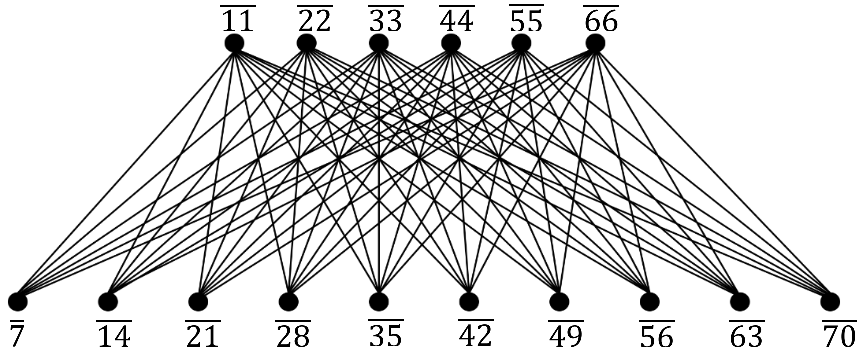
$\overline{33} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{77}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{70}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{77}$ sebagai berikut



Gambar 4.6 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{77}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ adalah graf bipartisi lengkap $K_{6,10}$.

Setelah melakukan perhitungan pada tiap himpunan, kemudian akan dianalisis pola umum himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$, dengan $p, q \in \{3,5,7,11\}$ dan $p \neq q$. Diperoleh himpunan pembagi nol untuk masing-masing modul sebagai berikut,

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{3\cdot 5}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{15}) = \left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\right\}$$

$$= \left\{\overline{0},\ \overline{3}\cdot 1,\ \overline{5}\cdot 1,\ \overline{3}\cdot 2,\ \overline{3}\cdot 3,\ \overline{5}\cdot 2,\ \overline{3}\cdot 4\right\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{3\cdot 7}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{21}) = \left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18}\right\}$$

$$= \{\overline{0},\ \overline{3}\cdot 1,\ \overline{3}\cdot 2,\ \overline{7}\cdot 1,\ \overline{3}\cdot 3,\ \overline{3}\cdot 4,\ \overline{7}\cdot 2,\ \overline{3}\cdot 5,\ \overline{3}\cdot 6\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{3\cdot 11}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{33}) = \left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\right\}$$

$$= \{\overline{0},\ \overline{3}\cdot 1,\ \overline{3}\cdot 2,\ \overline{3}\cdot 3,\ \overline{11}\cdot 1,\ \overline{3}\cdot 4,\ \overline{3}\cdot 5,\ \overline{3}\cdot 6,\ \overline{3}\cdot 7,\ \overline{11}\cdot 2,\ \overline{3}\cdot 8,\ \overline{3}\cdot 9,\ \overline{3}\cdot 10\ \}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{5\cdot 7}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{35}) = \left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{30}\right\}$$

$$= \left\{\overline{0},\ \overline{5}\cdot 1,\ \overline{7}\cdot 1,\ \overline{5}\cdot 2,\ \overline{7}\cdot 2,\ \overline{5}\cdot 3,\ \overline{5}\cdot 4,\ \overline{7}\cdot 3,\ \overline{5}\cdot 5,\ \overline{7}\cdot 4,\ \overline{5}\cdot 6\right\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{5\cdot 11}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{55}) = \left\{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{50}\right\}$$

$$= \left\{\overline{0},\ \overline{5}\cdot 1,\ \overline{5}\cdot 2,\ \overline{11}\cdot 1,\ \overline{5}\cdot 3,\ \overline{5}\cdot 4,\ \overline{11}\cdot 2,\ \overline{5}\cdot 5,\ \overline{5}\cdot 6,\ \overline{11}\cdot 3,\ \overline{5}\cdot 7,\ \overline{5}\cdot 8,\ \overline{11}\cdot 4,\ \overline{5}\cdot 9,\ \overline{5}\cdot 10\right\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{5\cdot 7}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{77}) = \left\{\overline{0}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{28}, \overline{33}, \overline{35},\ \overline{42}, \overline{44}, \overline{49},\ \overline{55}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{66}, \overline{70}\right\}$$

$$= \{\overline{0},\ \overline{7}\cdot 1,\ \overline{11}\cdot 1,\ \overline{7}\cdot 2,\ \overline{7}\cdot 3,\ \overline{11}\cdot 2,\ \overline{7}\cdot 4,\ \overline{11}\cdot 3,\ \overline{7}\cdot 5,\ \overline{7}\cdot 6,\ \overline{11}\cdot 4,\ \overline{7}\cdot 7,\ \overline{11}\cdot 5,\ \overline{7}\cdot 8,\ \overline{7}\cdot 9,\ \overline{11}\cdot 6,\ \overline{7}\cdot 10\}$$

Dari seluruh hasil tersebut terlihat bahwa pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{pq}$ selalu terdiri dari kelipatan p dan kelipatan q. Dengan demikian, diperoleh lemma berikut,

Lemma 1

Misalkan $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$, dengan p dan q adalah bilangan prima dan $p \neq q$. Maka, himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah

$$\mathbb{Z}\left(\mathbb{Z}_{pq}\right) = \{\overline{0}, \overline{p}, \dots, \overline{p}(q-1), \overline{q}, \dots, \overline{q}(p-1)\}.$$

Bukti

Diketahui $\mathbb{Z}_{pq}$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ dengan p, q adalah bilangan prima dan $p \neq q$. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in \mathbb{Z}_{pq}$ merupakan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{pq}$ jika terdapat $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{pq}$ sedemikian sehingga $x \in ann(y)M$ atau $y \in ann(x)M$, hal ini ekivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehinggga $xy \equiv 0(mod\ pq)$. Jelas bahwa $\overline{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{pq}$ berlaku $\overline{0}\cdot y \equiv 0(mod\ pq)$. Berdasarkan Teorema 2.3, $xy \equiv 0(mod\ pq)$ akan memiliki solusi tak nol apabila $FPB(x, pq) > 1$. Sehingga, haruslah x merupakan kelipatan dari p atau kelipatan dari q. Dengan demikian,

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{pq}) = \{\bar{0}, \bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1), \bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}$$

Lemma 2

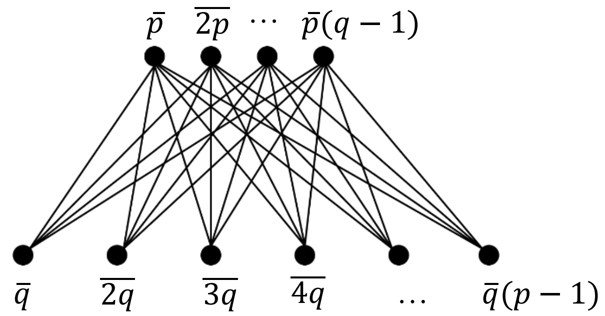
Misalkan p, q adalah bilangan prima dan $p \neq q$, maka $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf bipartisi lengkap dengan partisi titik $A = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1)\}$ dan $B = \{\bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}$.

Bukti

Berdasarkan lemma 1, maka himpunan titik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1), \bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}$. Akan ditunjukkan bahwa setiap titik di A akan saling terhubung langsung dengan semua titik di B. Misal $a = mp$ dan $b = nq$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$ dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Perhatikan bahwa $ab = (mp)(nq) = (mn)(pq) \equiv 0 \ (mod\ pq)$ sehingga $mp \in ann(nq)M$ dan $nq \in ann(mp)M$. Oleh karena itu, seluruh elemen di himpunan A saling terhubung langsung dengan seluruh elemen di himpunan B. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\{a, a'\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right), \forall a, a' \in A$. Misalkan $a = mp$ dan $a' = np$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan $aa' \not\equiv 0 (mod\ pq)$. Perhatikan bahwa $aa' = (mp)(np) = mnp^2$. Andaikan $aa' \equiv 0 \ (mod\ pq)$ maka terdapat $t \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $aa' = tpq$. Diperoleh $mnp^2 = tpq \Leftrightarrow mnp = tq$. Agar persamaan tersebut benar, maka ruas kiri harus habis dibagi q. Namun, karena p dan q adalah bilangan prima yang berbeda, maka p tidak mengandung faktor prima q. Maka satu-satunya cara agar mnp habis dibagi q adalah jika mn dibagi q. Dalam hal ini, $mn \in \{1,2, \dots, q-1\}$ sehingga tidak ada m maupun n yang merupakan kelipatan q.

Akibatnya, mn juga tidak habis dibagi q. Dengan demikian, mnp tidak habis dibagi q, sehingga tidak ada bilangan bulat t yang memenuhi $mnp = tq$. Sehingga $mnp^2 \neq tpq$ atau ekuivalen dengan $aa' \not\equiv 0 (mod\ pq)$. Jadi, pasangan titik dari himpunan yang sama tidak terhubung langsung.

Berdasarkan lemma 2, struktur graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.7 Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{pq}$

Karena graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf bipartisi lengkap, maka berdasarkan Teorema 2.1 bilangan kromatik titik graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah,

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 2.$$

4.2 Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{p^2}$

Pada sub bab ini akan dibahas bilangan kromatik titik graf pembagi nol yang dibangun dari modul multiplikasi $\mathbb{Z}_{p^2}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dengan bilangan prima $p > 2$, yang dinotasikan dengan $\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$. Untuk mengetahui bilangan kromatik $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ akan ditentukan pola umum $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$, sehingga perlu diketahui titik dari graf tersebut, yaitu pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$. Akan dibangun beberapa graf untuk menganalisis pola $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dengan $p \in \{3,5,7,11\}$.

1. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_9$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p = 3$, yaitu $\mathbb{Z}_9$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_9$ adalah $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_9$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_9$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

$ann(\bar{1}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$

$ann(\bar{4}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$

$ann(\bar{7}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

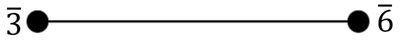
$ann(\bar{9}) = 9\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_9$, $\bar{3} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_9$, dan $\bar{6} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_9$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_9$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_9)$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = \{\bar{3}, \bar{6}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{3} \in ann(\bar{6})\mathbb{Z}_9$, maka $\bar{3}$ dan $\bar{6}$

$\bar{6} \in ann(\bar{3})\mathbb{Z}_9$, maka $\bar{6}$ dan $\bar{3}$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_9$ sebagai berikut



Gambar 4.8 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_9$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ adalah graf lengkap K_2.

2. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{25}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p = 5$, yaitu $\mathbb{Z}_{25}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{25}$ adalah $\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{25}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{25}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{23}, \overline{24}\}$

$ann(\bar{1}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$

$ann(\bar{6}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{7}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$

$ann(\overline{11}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(15) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$

$ann(\overline{16}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$

$ann(\overline{21}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{22}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{23}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 25\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{25}$, $\bar{5} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{25}$, $\overline{10} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{25}$, $\overline{15} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{25}$, dan $\overline{20} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{25}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{25}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{25}) = \left\{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\right\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{25})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$, yaitu $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{25})\right) = \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{5} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\bar{5}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{5} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\bar{5}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

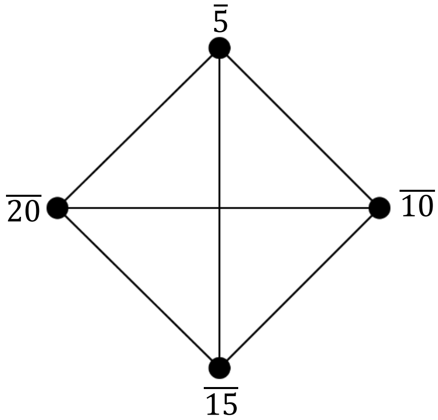
$\bar{5} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\bar{5}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{25}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{25}$ sebagai berikut



Gambar 4.9 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{25}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ adalah graf lengkap K_4.

3. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{49}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p = 7$, yaitu $\mathbb{Z}_{49}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{49}$ adalah $\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{47}, \overline{48}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{49}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{49}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{47}, \overline{48}\}$

$ann(\bar{1}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{3}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{5}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{7}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(\bar{8}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(15) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{21}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(\overline{22}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{23}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann\left(\overline{25}\right) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{25}\right)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(26) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(\overline{29}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{31}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{33}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(33)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{34}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann\left(\overline{35}\right) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{35}\right)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(\overline{36}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{37}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{37})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{38}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{39}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{39})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{40}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{41}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{41})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{42}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$

$ann(\overline{43}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(43)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{44}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann\left(\overline{45}\right) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{45}\right)\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{46}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{46})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{47}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{47})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{48}) = 49\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{48})\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$, $\bar{7} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{49}$, $\overline{14} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$, $\overline{21} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$, $\overline{28} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$, $\overline{35} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$, $\overline{42} \in ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{49}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{49}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{49}) =$

$\{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{49})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{7} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

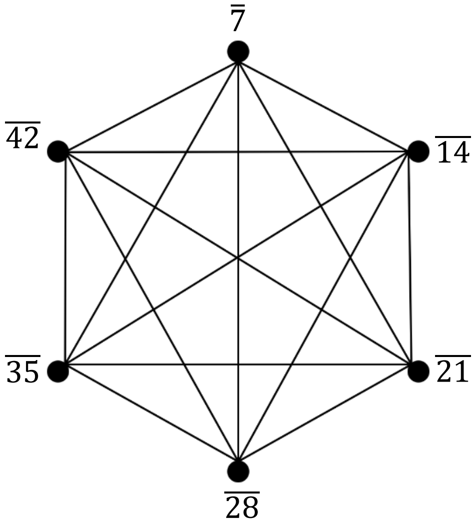
$\overline{21} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{35})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{35}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{35} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{49}$, maka $\overline{35}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{49}$ sebagai berikut



Gambar 4.10 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{49}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ adalah graf lengkap K_6.

4. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{121}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p = 11$, yaitu $\mathbb{Z}_{121}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{121}$ adalah $\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{119}, \overline{120}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{121}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{121}$ sebagai berikut

$ann(\overline{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{0})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{119}, \overline{120}\}$

$ann(\overline{1}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{1})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{2}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{3}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{4}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{5}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{5})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{6}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{7}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{121} = \{\overline{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{9}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99},$

$\overline{110}\}$

$ann(\overline{12}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{13}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(15) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{17}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{19}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{21}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{22}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99},$

$\overline{110}\}$

$ann(\overline{23}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{25}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{25})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(26) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{27}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{29}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{31}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{33}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(33)\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99},$

$\overline{110}\}$

$ann(\overline{34}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann\left(\overline{35}\right) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{35}\right)\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{36}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{37}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{37})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{38}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{39}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{39})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{40}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{41}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{41})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{42}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{43}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(43)\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{44}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99},$

$\overline{110}\}$

$ann\left(\overline{45}\right) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{45}\right)\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{46}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{46})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{47}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{47})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{48}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{48})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{49}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{49})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{50}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{50})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{51}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{51})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{52}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{52})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{53}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{53})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{54}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{54})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{55}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$

$ann(\overline{56}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{56})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{57}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{57})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{58}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{58})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{59}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{59})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{60}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{60})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{61}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{61})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{62}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{62})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{63}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{63})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{64}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{64})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{65}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{65})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{66}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$

$ann(\overline{67}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{67})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{68}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{68})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{69}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{69})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{70}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{70})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{71}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{71})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{72}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{72})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{73}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{73})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{74}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{74})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{75}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{75})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{76}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{76})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{77}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{78}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{78})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{79}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{79})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{80}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{80})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{81}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{81})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{82}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{82})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{83}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{83})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{84}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{84})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{85}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{85})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{86}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{86})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{87}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{87})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{88}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$

$ann(\overline{89}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{89})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{90}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{90})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{91}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{91})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{92}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{92})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{93}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{93})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{94}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{94})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{95}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{95})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{96}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{96})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{97}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{97})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{98}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{98})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{99}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$

$ann(\overline{100}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{100})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{101}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{101})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{102}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{102})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{103}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{103})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{104}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{104})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{105}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{105})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{106}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{106})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{107}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{107})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{108}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{108})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{109}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{109})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{110}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{100})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$

$ann(\overline{111}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{111})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{112}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{112})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{113}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{113})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{114}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{114})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{115}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{115})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{116}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{116})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{117}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{117})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{118}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{118})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{119}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{119})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{120}) = 121\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{120})\mathbb{Z}_{121} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{11} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{22} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{33} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{44} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{55} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{66} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{77} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{88} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, $\overline{99} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$, dan $\overline{110} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{121}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{121}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{121}) = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{121})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{121})) = \{\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{11} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{44}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{55}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{66}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{44}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{55}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{66}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{44})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{44}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{55}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{66}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{55})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{55}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{66}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{44} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{44}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{66})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{55}$ dan $\overline{66}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{55}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{55}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{55}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{55} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{55}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{77})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{66}$ dan $\overline{77}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{66}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{66}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{66} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{66}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{77} \in ann(\overline{88})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{77}$ dan $\overline{88}$ terhubung langsung

$\overline{77} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{77}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

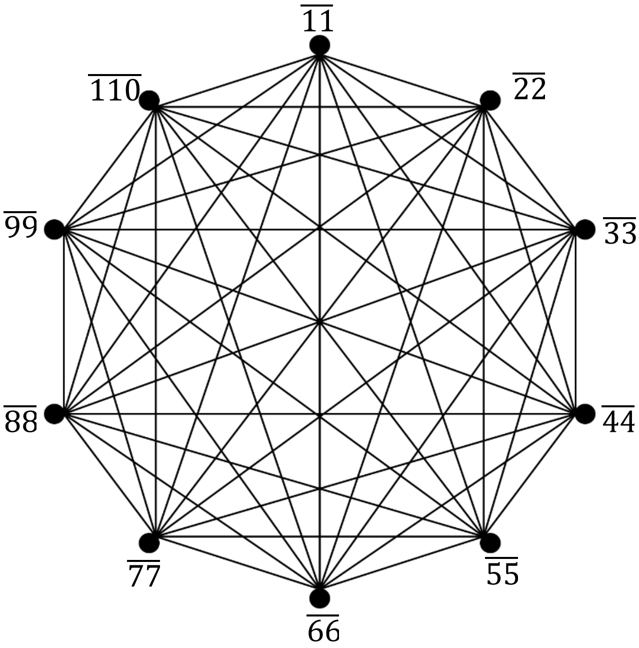
$\overline{77} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{77}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{88} \in ann(\overline{99})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{88}$ dan $\overline{99}$ terhubung langsung

$\overline{88} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{88}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

$\overline{99} \in ann(\overline{110})\mathbb{Z}_{121}$, maka $\overline{99}$ dan $\overline{110}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{121}$ sebagai berikut



Gambar 4.11 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{121}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ adalah graf lengkap K_{10}.

Setelah melakukan perhitungan pada tiap himpunan, kemudian akan dianalisis pola umum himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$, dengan $p \in \{3,5,7,11\}$. Diperoleh himpunan pembagi nol untuk masing-masing modul sebagai berikut,

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{3^2}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$$
$$= \{\bar{0}, \bar{3} \cdot 1, \bar{6} \cdot 2\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{5^2}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{25}) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$$
$$= \{\bar{0},\ \bar{5} \cdot 1,\ \overline{10} \cdot 2,\ \overline{15} \cdot 3,\ \overline{20} \cdot 4\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{7^2}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{49}) = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$$
$$= \{\bar{0},\ \bar{7} \cdot 1,\ \bar{7} \cdot 2,\ \bar{7} \cdot 3,\ \bar{7} \cdot 4,\ \bar{7} \cdot 5, \bar{7} \cdot 6\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{11^2}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{121}) = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$$
$$= \{\bar{0}, \overline{11}\cdot 1,\ \overline{11}\cdot 2,\ \overline{11}\cdot 3,\ \overline{11}\cdot 4,\ \overline{11}\cdot 5,\ \overline{11}\cdot 6,\ \overline{11}\cdot 7,$$
$$\overline{11}\cdot 8,\ \overline{11}\cdot 9,\ \overline{11}\cdot 10\}$$

Dari seluruh hasil tersebut terlihat bahwa pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{p^2}$ selalu terdiri dari kelipatan p. Dengan demikian, diperoleh lemma berikut

Lemma 3

Misalkan $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Maka, himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{p^2}) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

Bukti

Diketahui $\mathbb{Z}_{p^2}$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in \mathbb{Z}_{p^2}$ merupakan pembagi nol jika terdapat $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{p^2}$ sedemikian sehingga $x \in ann(y)M$ atau $y \in ann(x)M$, hal ini ekivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{p^2}$ apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehinggga $xy = 0$. Misal $x \in \mathbb{Z}_{p^2}$ adalah suatu pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{p^2}$, maka terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 (mod\ p^2)$. Jelas bahwa $\bar{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{p^2}$ berlaku $\bar{0} \cdot y \equiv 0 (mod\ pq)$. Berdasarkan Teorema 2.3, maka $xy \equiv 0 (mod\ p^2)$ memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika $FPB(x, p^2) > 1$ dan kondisi tersebut terpenuhi apabila x merupakan kelipatan dari p. Oleh karena itu,

$$Z(\mathbb{Z}_{p^2}) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

Akibat 1

Himpunan titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah

$$V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

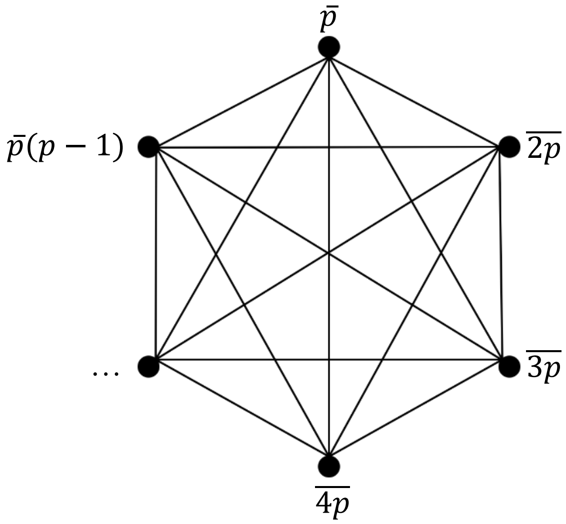
Lemma 4

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$.

Bukti

Berdasarkan akibat 1, diperoleh titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\{u, v\} \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right), \forall\, u, v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ dan $u \neq v$. Misalkan $u = mp$ dan $v = np$ dengan $u \neq v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $uv = (mp)(np) = (mn)p^2 \equiv 0 \ (mod\ p^2)$ sehingga $mp \in ann(np)M$ dan $(np) \in ann(mp)M$. Oleh karena itu, $\{u, v\} \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$. Jadi, seluruh titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ saling terhubung langsung. Dengan demikian, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah graf lengkap yang berorde $p - 1$.

Berdasarkan lemma 4, struktur graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 4.12 Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{p^2}$

Berdasarkan Teorema 2.2, karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$ maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah $p-1$ atau dapat dituliskan sebagai,

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1.$$

4.3 Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{4p}$

Pada sub bab ini akan dibahas bilangan kromatik titik graf pembagi nol yang dibangun dari modul multiplikasi $\mathbb{Z}_{4p}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dengan bilangan prima $p > 2$, yang dinotasikan dengan $\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$. Untuk mengetahui bilangan kromatik $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ akan ditentukan pola umum $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$, sehingga perlu diketahui titik dari graf tersebut, yaitu pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$. Akan dibangun beberapa graf untuk menganalisis pola $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan $p \in \{3,5,7,11\}$.

1. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{12}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan $p = 3$, yaitu $\mathbb{Z}_{12}$. Himpunan modul$\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{12}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{1}) = 12\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 6\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

$ann(\bar{3}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$ann(\bar{4}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$

$ann(\bar{5}) = 12\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 2\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$

$ann(\bar{7}) = 12\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 3\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$

$ann(\bar{9}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$ann(\overline{10}) = 6\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

$ann(\overline{11}) = 12\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{2} \in ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{3} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{4} \in ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{6} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{8} \in ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{12}$, $\bar{9} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{12}$, dan $\overline{10} \in ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{12}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{12})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$, yaitu $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{2} \in ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{2}$ dan $\overline{6}$ terhubung langsung

$\overline{3} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{3}$ dan $\overline{4}$ terhubung langsung

$\overline{3} \in ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{3}$ dan $\overline{8}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{3}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{6}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{9})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{9}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{2}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{4}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{8}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{8} \in ann(\overline{3})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{3}$ terhubung langsung

$\overline{8} \in ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{6}$ terhubung langsung

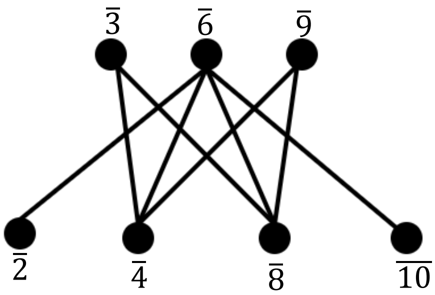
$\overline{8} \in ann(\overline{9})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{9}$ terhubung langsung

$\overline{9} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{4}$ terhubung langsung

$\overline{9} \in ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{9}$ dan $\overline{8}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{6})\mathbb{Z}_{12}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{6}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai berikut



Gambar 4.13 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{12}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ adalah graf bipartisi $K_{3,4}$

2. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{20}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan $p = 5$, yaitu $\mathbb{Z}_{20}$. Himpunan modu$\mathbb{Z}_{20}$ adalah $\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{20}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{20}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}\}$

$ann(\bar{1}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 10\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \overline{10}\}$

$ann(\bar{3}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$

$ann(\bar{5}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}\}$

$ann(\bar{6}) = 10\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \overline{10}\}$

$ann(\bar{7}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$

$ann(\bar{9}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 2\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}\}$

$ann(\overline{11}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$

$ann(\overline{13}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 10\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \overline{10}\}$

$ann(15) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}\}$

$ann(\overline{16}) = 5\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$

$ann(\overline{17}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 10\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \overline{10}\}$

$ann(\overline{19}) = 20\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{20}$, $\bar{2} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, $\bar{4} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{20}$, $\bar{5} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{20}$, $\bar{6} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, $\bar{8} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{20}$, $\overline{10} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{20}$, $\overline{12} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{20}$, $\overline{14} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, $\overline{15} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{20}$, $\overline{16} \in ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{20}$, dan $\overline{18} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{20}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{20}) = \left\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\right\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{20})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$, yaitu $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\right) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{2} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{2}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{4}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{4}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{4}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\bar{5} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{5}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung

$\bar{5} \in ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{5}$ dan $\bar{8}$ terhubung langsung

$\bar{5} \in ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{5}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung

$\bar{5} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{5}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{6}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\bar{8} \in ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\bar{8}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung

$\overline{8} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

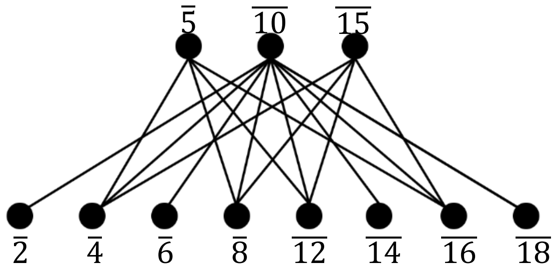
$\overline{10} \in ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{18}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{15})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{15}$ terhubung langsung

$\overline{15} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{20}$, maka $\overline{15}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{20}$ sebagai berikut,



Gambar 4.14 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{20}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{20})$ adalah graf bipartisi $K_{3,8}$.

3. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{28}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan $p = 7$, yaitu $\mathbb{Z}_{28}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{28}$ adalah $\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{26}, \overline{27}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{28}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{28}$ sebagai berikut

$ann(\overline{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{0})\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{26}, \overline{27}\}$

$ann(\bar{1}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 14\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \overline{14}\}$

$ann(\bar{3}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann\left(\bar{5}\right) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\bar{5}\right)\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 14\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \overline{14}\}$

$ann(\bar{7}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}$

$ann(\bar{8}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann(\bar{9}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 14\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{11}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann(\overline{13}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 2\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{12},$

$\overline{14}, \overline{16}, \overline{18}\}$

$ann(15) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann(\overline{17}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 14\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{19}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann(\overline{21}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}$

$ann(\overline{22}) = 14\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{23}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 7\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}, \overline{21}\}$

$ann\left(\overline{25}\right) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{25}\right)\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}\}$

$ann(26) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}, \overline{14}\}$

$ann(\overline{27}) = 28\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{28} = \{\overline{0}\}$

Diperoleh $\overline{0} \in ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{2} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{4} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{2} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{7} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{8} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{10} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{12} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{14} \in ann(\overline{2})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{16} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{18} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{20} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{21} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{22} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, $\overline{24} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, dan $\overline{26} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{28}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{28}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{28})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$, yaitu $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{28})\right) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\overline{2} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{2}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{7})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{7}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{4} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{4}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{6} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{6}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{4})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{4}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{8})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{8}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{7} \in ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{7}$ dan $\overline{24}$ terhubung langsung

$\overline{8} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{8} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{8}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{18}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{24}$ terhubung langsung

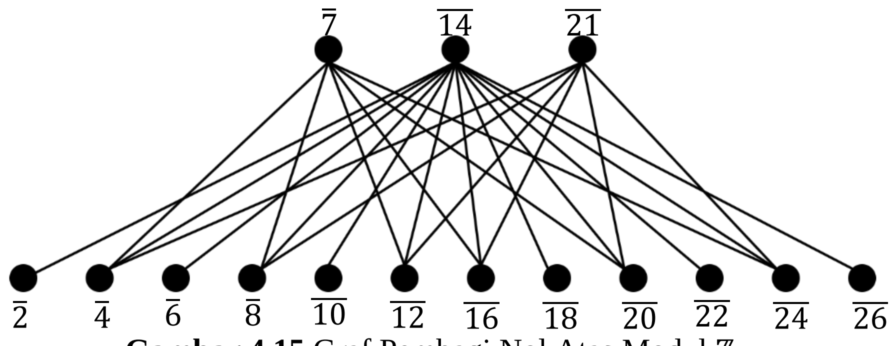
$\overline{14} \in ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{26}$ terhubung langsung

$\overline{16} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{16}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{20} \in ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{20}$ dan $\overline{21}$ terhubung langsung

$\overline{21} \in ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{28}$, maka $\overline{21}$ dan $\overline{24}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{28}$ sebagai berikut,



Gambar 4.15 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{28}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{28})$ adalah graf bipartisi $K_{3,12}$.

4. Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{44}$

Akan di cari pola graf pembagi nol atas $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan $p = 11$, yaitu $\mathbb{Z}_{44}$. Himpunan modul $\mathbb{Z}_{44}$ adalah $\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{42}, \overline{43}\}$ untuk setiap elemen di $\mathbb{Z}_{44}$ ditentukan annihilatornya dan hasil kali annihilator dengan $\mathbb{Z}_{44}$ sebagai berikut

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{0})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{43}, \overline{43}\}$

$ann(\bar{1}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{1})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\bar{3}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{3})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\bar{5}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{5})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{6})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\bar{7}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{7})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\bar{9}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\bar{9})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{10})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{11}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}, \overline{28}, \overline{32}, \overline{36}, \overline{40}\}$

$ann(\overline{12}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{13}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{13})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{14})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(15) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{15}\right)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(16)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{17}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{17})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{18})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{19}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{19})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{21}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{21})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{22}) = 2\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{12},$

$\overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32},$

$\overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{46}\}$

$ann(\overline{23}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{23})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{24}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann\left(\overline{25}\right) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{25}\right)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(26) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{27}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{27})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{28}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{29}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{29})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{30}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{31}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{31})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{32}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{33}) = 4\mathbb{Z}$, maka $ann(33)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}, \overline{28}, \overline{32}, \overline{36}, \overline{40}\}$

$ann(\overline{34}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann\left(\overline{35}\right) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann\left(\overline{35}\right)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{36}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{37}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{37})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{38}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{39}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{39})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{40}) = 11\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}, \overline{33}\}$

$ann(\overline{41}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{41})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{42}) = 22\mathbb{Z}$, maka $ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \overline{22}\}$

$ann(\overline{43}) = 44\mathbb{Z}$, maka $ann(43)\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}\}$

Diperoleh $\bar{0} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{44}$, $\bar{2} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\bar{4} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\bar{6} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\bar{8} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{10} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{11} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{12} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{14} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{16} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{18} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{20} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{22} \in ann(\bar{2})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{24} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{26} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{28} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{30} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{32} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{33} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{36} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{38} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, $\overline{40} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, dan $\overline{42} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$. Sehingga, himpunan pembagi nol dari modul $\mathbb{Z}_{44}$ adalah $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{44}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}\}$. Kemudian, dari himpunan $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{44})$ diperoleh himpunan titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$ adalah $V\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{44})\big) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}\}$ dengan kriteria keterhubungan sebagai berikut

$\bar{2} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{2}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{4}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{4}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\bar{4} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{4}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\bar{6} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{6}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\bar{8} \in ann(\overline{11})\mathbb{Z}_{44}$maka $\bar{8}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung

$\bar{8} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\bar{8}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\bar{8} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$maka $\bar{8}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{10} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{10}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\bar{4})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\bar{8})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\bar{8}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{12})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{16})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{20})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{24}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{32}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{36}$ terhubung langsung

$\overline{11} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{11}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{12} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{12}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{14} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{14}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{16} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{16}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{16} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{16}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{18} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{18}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{20} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{20}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{20} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{20}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{24})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{24}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{26})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{26}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{28})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{28}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{30})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{30}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{32})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{32}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{34})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{34}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{36}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{38})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{38}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

$\overline{22} \in ann(\overline{42})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{22}$ dan $\overline{42}$ terhubung langsung

$\overline{24} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{24}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{24} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{24}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{28} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{28}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

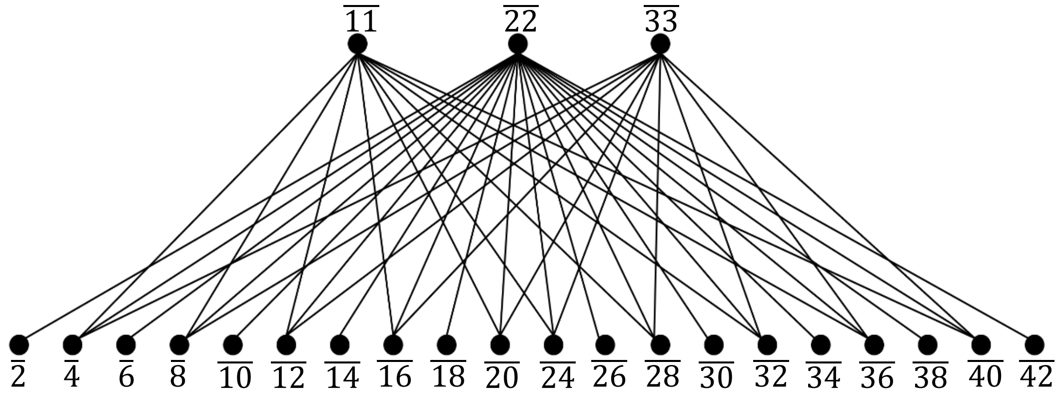
$\overline{32} \in ann(\overline{22})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{32}$ dan $\overline{22}$ terhubung langsung

$\overline{32} \in ann(\overline{33})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{32}$ dan $\overline{33}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{36})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{36}$ terhubung langsung

$\overline{33} \in ann(\overline{40})\mathbb{Z}_{44}$, maka $\overline{33}$ dan $\overline{40}$ terhubung langsung

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{44}$ sebagai berikut



Gambar 4.16 Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{44}$

Jadi, diperoleh bahwa $\Gamma(\mathbb{Z}_{44})$ adalah graf bipartisi $K_{3,20}$.

Setelah melakukan perhitungan pada tiap himpunan, kemudian akan dianalisis pola umum himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$, dengan $p \in \{3,5,7,11\}$. Diperoleh himpunan pembagi nol untuk masing-masing modul sebagai berikut,

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{4\cdot 3}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$$
$$= \{\bar{0},\ \bar{2}\cdot 1,\ \bar{p}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 2,\ \bar{2}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 4,\ \bar{p}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 5\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{4\cdot 5}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{20}) = \left\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\right\}$$
$$= \{\bar{0},\ \bar{2}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 2,\ \bar{p}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 4,\ \bar{2}\cdot 5,\ \bar{2}\cdot 6,\ \bar{2}\cdot 7,\ \bar{p}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 8,\ \bar{2}\cdot 9\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{4\cdot 7}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{28}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$$
$$= \{\bar{0},\ \bar{2}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 2,\ \bar{2}\cdot 3,\ \bar{p}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 4,\ \bar{2}\cdot 5,\ \bar{2}\cdot 6,\ \bar{2}\cdot 7,\ \bar{2}\cdot 8,\ \bar{2}\cdot 9,\ \bar{2}\cdot 10,\ \bar{p}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 11,\ \bar{2}\cdot 12,\ \bar{2}\cdot 13\}$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{4\cdot 11}) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_{44}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{2}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 2,\ \bar{2}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 4,\ \bar{2}\cdot 5,\ \bar{p}\cdot 1,\ \bar{2}\cdot 6,\ \bar{2}\cdot 7,\ \bar{2}\cdot 8,\ \bar{2}\cdot 9,\ \bar{2}\cdot 10,\ \bar{2}\cdot 11,\ \bar{2}\cdot 12,\ \bar{2}\cdot 13,\ \bar{2}\cdot 14,\ \bar{2}\cdot 15,\ \bar{2}\cdot 16,\ \bar{p}\cdot 3,\ \bar{2}\cdot 17,\ \bar{2}\cdot 18,\ \bar{2}\cdot 19,\ \bar{2}\cdot 20,\ \bar{2}\cdot 21\}$$

Dari seluruh hasil tersebut terlihat bahwa pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{4p}$ selalu terdiri dari $\bar{0}$, $\bar{p}$, $\overline{3p}$, dan kelipatan 2. Dengan demikian, diperoleh lemma berikut

Lemma 5

Misalkan $\mathbb{Z}_{4p}$ adalah modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Maka, himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1), \bar{p}, \overline{3p}\}.$$

Bukti

Diketahui $\mathbb{Z}_{4p}$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ dengan p adalah bilangan prima. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in \mathbb{Z}_{4p}$ merupakan pembagi nol jika terdapat $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{4p}$ sedemikian sehingga $x \in ann(y)M$ atau $y \in ann(x)M$, hal ini ekivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{4p}$ apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehinggga $xy = 0$. Misalkan $x \in \mathbb{Z}_{4p}$ adalah suatu pembagi nol, maka terdapat $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{4p}$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0\ (mod\ 4p)$. Jelas bahwa $\bar{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_{4p}$ berlaku $\bar{0} \cdot y \equiv 0 (mod\ pq)$. Berdasarkan Teorema 2.3, maka $xy \equiv 0\ (mod\ 4p)$ akan memiliki solusi tak nol apabila $FPB(x, 4p) > 1$. Perhatikan bahwa,

1. Untuk $x \in \{p, 3p\}$, terdapat $y = 4n$ dengan $n = 1,2, \dots, p-1$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0\ (mod\ 4p)$, maka $p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$.

2. Untuk $x = 2p$, terdapat $y = 2$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0\ (mod\ 4p)$, maka $2p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$.
3. Untuk $x \in \{2,4,\dots,2(p-1)\}/\{2p\}$, terdapat $y = 2p$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0\ (mod\ 4p)$, oleh karena itu $\{2,4,\dots,2(p-1)\}/\{2p\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{4p})$.
4. Untuk setiap x lainnya, diperoleh $FPB(x, 4p) = 1$ karena hanya memiliki solusi tunggal $y = 0$. Dengan demikian, x bukan merupakan pembagi nol.

Berdasarkan poin 1 sampai 4 diperoleh

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1), \bar{p}, \overline{3p}\}$$

Lemma 6

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah graf bipartisi dengan partisi titik $A = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}\}$ dan $B = \{\bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1)\}$.

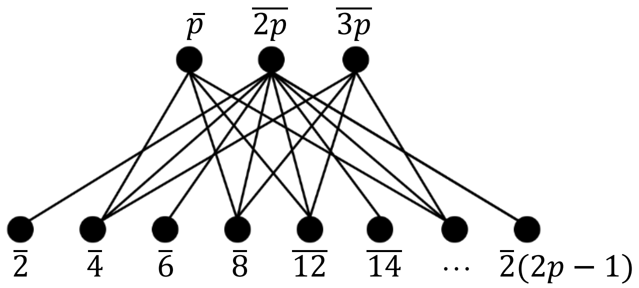
Bukti

Untuk membuktikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ merupakan graf bipartisi, maka akan ditunjukkan bahwa $\{a, a'\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right), \forall\, a \in A, a' \in A$ dan $\{b, b'\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right), \forall\, b \in B, b' \in B$. Andaikan $\{a, a'\} \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$, maka $aa' \equiv 0(mod\ 4p)$. Artinya, terdapat bilangan bulat s sedemikian sehingga $aa' = 4ps$ Perhatikan bahwa, $(2p)(p) = 4ps \Leftrightarrow 2p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = 2s$. Karena p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka tidak ada yang memenuhi s sedemikian sehingga $p = 2s$. Oleh karena itu, $(2p)(p) \not\equiv 0(mod\ 4p)$. Perhatikan bahwa, $(3p)(p) = 4ps \Leftrightarrow 3p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}s$. Karena p adalah bilangan bulat, maka $\frac{4}{3}s$ juga harus bilangan bulat, sehingga s yang memenuhi adalah $3r$ dengan $r \in \mathbb{Z}$, sehingga $p = \frac{4}{3}s \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}3r \Leftrightarrow p = 4r$. Karena p adalah bilangan prima, maka tidak ada r yang memenuhi sedemikian sehingga $p = 4r$. Oleh karena itu, $(3p)(p) \not\equiv$

$0(mod\ 4p)$. Perhatikan bahwa, $(2p)(3p) = 4ps \Leftrightarrow 6p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}s$. Karena p adalah bilangan bulat, maka $\frac{2}{3}s$ juga harus bilangan bulat, sehingga s yang memenuhi adalah $3r$ dengan $r \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $p = \frac{2}{3}s \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}3r \Leftrightarrow p = 2r$. Karena p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka tidak ada r yang memenuhi sedemikian sehingga $p = 2r$. Oleh karena itu, $(3p)(p) \not\equiv 0(mod\ 4p)$. Berdasarkan analisis tersebut, karena tidak ada $a \in A$ dan $a' \in A$ sedemikian sehingga $aa' \equiv 0(mod\ 4p)$ maka tidak ada titik dalam A yang terhubung langsung.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\{b, b'\} \notin E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right), \forall\, b \in B, b' \in B$. Misalkan $b = 2k$ dan $b' = 2l$ dengan $k, l \in \{1,2, \ldots, 2p-1\}$ dan $k, l \neq p$. Andaikan $\{b, b'\} \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$, maka $bb' \equiv 0(mod\ 4p)$ sehingga terdapat $t \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $4kl = 4pt \Leftrightarrow kl = pt$. Agar persamaan tersebut benar, maka ruas kiri harus habis dibagi p. Namun, karena p adalah bilangan prima dan $k, l \in \{1,2, \ldots, 2p-1\}$ dengan $kl \neq p$ maka tidak ada faktor p pada k maupun l. Akibatnya, hasil kali kl juga tidak habis dibagi p. Dengan demikian, tidak ada bilangan bulat t yang memenuhi $kl = tp$. Oleh karena itu, $bb' \not\equiv 0(mod\ 4p)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada dua titik berbeda dalam himpunan B yang saling terhubung langsung.

Berdasarkan lemma 6, struktur graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$ dapat digambarkan sebagai berikut,



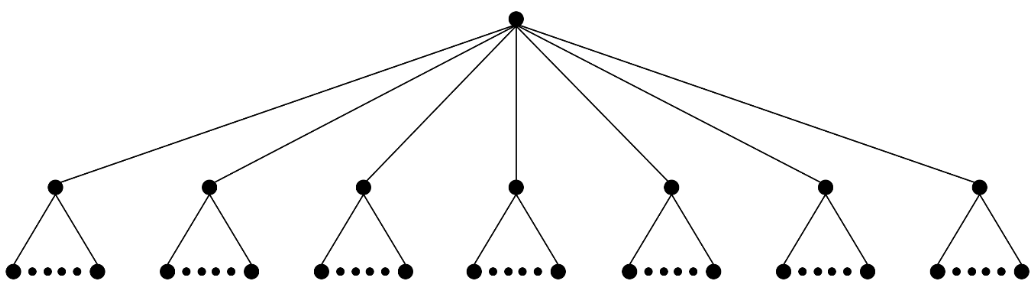
Gambar 4.17 Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul $\mathbb{Z}_{4p}$

Karena pola graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ merupakan graf bipartisi, maka berdasarkan Teorema 2.1 bilangan kromatik titik graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah,

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = 2.$$

4.4 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam

Pada al-Quran surat al-Baqarah ayat 261 telah dijelaskan bahwa perumpamaan orang yang menginfaqkan hartanya dijalan Allah seperti menanam satu biji yang kemudian tumbuh 7 tangkai dan di setiap tangkai akan tumbuh 100 biji. Menurut tafsir Ath-Thabari, yang dimaksud dengan biji di sini merupakan pahala dari kebaikan yang diberikan oleh orang yang berinfaq. Jika divisualisasikan dalam graf, perumpamaan tersebut dapat membentuk graf sebagai berikut



Gambar 4.18 Representasi Pahala dalam Bentuk Graf

Representasi perumpamaan pahala yang didapat ketika menginfaqkan harta di jalan Allah digambarkan dalam bentuk graf dengan satu akar utama. Satu akar tersebut merupakan satu biji yang ditanam oleh orang yang berinfaq. Dari titik akar ini, muncul tujuh cabang utama yang masing-masing mewakili satu tangkai. Setiap tangkai kemudian bercabang lagi menjadi seratus cabang kecil, yang merepresentasikan serratus biji yang tumbuh pada setiap tangkai tersebut. Dengan demikian, graf ini memiliki satu titik akar, tujuh titik pada tingkat pertama, dan 700 titik pada tingkat ke dua.

Struktur graf yang terbentuk dari perumpamaan orang yang menginfaqkan harta di jalan Allah menyerupai graf bertingkat atau pohon (*tree*). Jika diperhatikan, pola graf pada perumpamaan ini seperti pola yang terjadi pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$. Pada graf tersebut, elemen-elemen pembagi nol tidak berdiri sebagai titik yang terisolasi, namun membentuk hubungan dengan banyak elemen lain dalam himpunan pembagi nol. Pola graf perumpamaan pahala orang yang berinfaq di jalan Allah juga dapat menyerupai graf bintang di mana satu titik terhubung dengan titik lainnya.

Hasil penelitian graf pembagi nol atas modul memiliki keterhubungan pola dengan konsep pelipatgandaan pahala orang yang berinfaq di jalan Allah. Makna filososfis dari keterhubungan ini mengindikasi bahwa setiap tindakan yang didasarkan dengan niat baik akan membawa manfaat yang besar bagi kehidupan baik di dunia maupun di akhirat. Dengan demikian, perumpamaan dalam surat al-Baqarah ayat 261 tidak hanya memperluas pemahaman terkait konsep matematika, tetapi juga memberikan pemahaman tentang betapa pentingnya menyisihkan sebagian harta untuk kehidupan akhirat.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan hasil analisis pada beberapa himpunan modul, dapat disimpulkan bahwa rumus umum bilangan kromatik titik pada graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah 2 karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ merupakan graf bipartisi lengkap. Begitu juga dengan graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{4p}$ yang memiliki bilangan kromatik titik 2 karena termasuk dalam kategori graf bipartisi. Pada graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ rumus umum bilangan kromatiknya adalah $p-1$ karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$. Secara matematis, rumus umum bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}, \mathbb{Z}_{p^2}$ dan $\mathbb{Z}_{4p}$ dapat dinyatakan berikut:

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 2$$

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p-1$$

$$\chi\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right) = 2.$$

5.2 Saran

Pada skripsi ini dilakukan penelitian mengenai bilangan kromatik titik pada graf pembagi nol atas modul. Himpunan modul yang digunakan pada penelitian ini adalah himpunan modul yang memiliki pola-pola unik yaitu himpunan pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$. Pada penelitian selanjutnya diharapkan peneliti dapat meneliti berbagai macam karakteristik graf pada graf pembagi nol atas modul menggunakan himpunan yang lebih bervariasi sehingga dapat ditemukan lebih banyak sifat-sifat baru yang dapat diaplikasikan dalam bidang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, A., Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar Untuk Tugas Akhir / Skripsi*. Uin-Maliki Press.

Abdy, M., Syam, R., & Tina, T. (2021). Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik Pada Graf Dual Dari Graf Roda. *Journal Of Mathematics Computations And Statistics*, *4*(2), 95. https://doi.org/10.35580/jmathcos.V4i2.24443

Al-Bakri, A. A., Muhammad, M. A., Khalaf, M. A. L., & Hamid, M. M. A. (2007). *Tafsir Ath-Thabari*. Pustaka Azzam.

Andari, A. (2022). *Teori Grup*. Ub Press.

Anderson, D. D., & Naseer, M. (1993). Beck′S Coloring Of A Commutative Ring. *Journal Of Algebra*, *159*(2), 500–514. https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1171

Anderson, D. F., & Livingston, P. S. (1999). The Zero-Divisor Graph Of A Commutative Ring. *Journal Of Algebra*, *217*(2), 434–447. https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7840

Beck, I. (1988). Coloring Of Commutative Rings. *Journal Of Algebra*, *116*(1), 208–226. https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90202-5

Behzad, M., Chartrand, G., & Cooper, J. K. (1967). The Colour Numbers Of Complete Graphs. *Journal Of The London Mathematical Society*, *S1-42*(1), 226–228. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-42.1.226

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2011). *Graphs & Digraphs: Fifth Edition*. Crc Taylor & Francis Group.

Dummit, D. S., & Foot, R. M. (2004). *Abstract Algebra Third Edition*. John Wiley & Sons.

Farhan, R. (2018). *Graf Pembagi Nol Atas Modul* [Skripsi tidak diterbitkan, Program Studi Matematika, UIN Syarif HIdayatullah jakarta]. *In UIN Syarif Hidayatullah Jakarta.*

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2009). *Elements Of Modern Algebra* (7th Ed). Cengage Brooks Cole.

Irawan, W. H., Hijriyah, N., & Habibi, A. R. (2014). *Pengantar Teori Bilangan*. Uin-Maliki Press.

Kemenag. (2025a). *Qur'an Kemenag*. Https://Quran.Kemenag.Go.Id/Quran/Per-Ayat/Surah/58?From=1&To=22

Kemenag. (2025b). *Qur'an Kemenag*. Https://Quran.Kemenag.Go.Id/Quran/Per-Ayat/Surah/2?From=261&To=261

Khalid, A. S. B. (2020). Konsep Dan Klasifikasi Ilmu Pengetahuan Dalam Islam. *Wardah : Jurnal Dakwah Dan Kemasyarakatan*, *21*(2), 1–13. https://doi.org/10.19109/wardah.v21i2.7270

Naghipour, A. R. (2017). The Zero-Divisor Graph Of A Module. *Journal Of Algebraic Systems*, *4*(2), 155–171. https://doi.org/10.22044/jas.2017.858

Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra: Third Edition* (3rd Ed.). Springer.

Sharp, R. Y. (1990). *Steps In Commutative Algebra*. Cambridge University Press.

Welyyanti, D. (2018). Beberapa Syarat Cukup Untuk Bilangan Kromatik Lokasi Hingga Pada Graf Tak Terhubung. *Eksakta: Berkala Ilmiah Bidang Mipa*, *19*(1), 76–82. https://doi.org/10.24036/eksakta/vol19-iss1/130

Yuwaningsih, D. A. (2020). Hasil Tambah Langsung Suatu (R,S)-Modul. *Journal Of Fundamental Mathematics And Applications (Jfma)*, *3*(2), 98–106. https://doi.org/10.14710/jfma.v3i2.8758

Zaid, N., Sarmin, N. H., & Khasraw, S. M. S. (2024). The Applications Of Zero Divisors Of Some Finite Rings Of Matrices In Probability And Graph Theory. *Researchgate*, *83*(1), 127–132. https://doi.org/10.11113/jurnalteknologi.v83.14936

RIWAYAT HIDUP

Aisyah Dhifa Az-Zahra lahir di Klaten pada tanggal 23 Juni 2003. Penulis merupakan putri dari Bapak Wakhid Nur Hidayat dan Ibu Voni Kencanawati. Pendidikan formal dimulai dari Play Group BIAS Klaten kemudian melanjutkan TK di TKIT BIAS Klaten dan SD di SDIT BIAS Klaten pula. Lulus pada tahun 2015, penulis melanjutkan pendidikan di pondok pesantren Muwahidun Pati mulai dari *madrasah tsanawiyah* hingga *madrasah aliyah*. Pada tahun 2021, penulis melanjutkan studi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama masa perkuliahan penulis aktif dalam berbagai kegiatan baik akademik maupun non-akademik. Penulis aktif dalam *Mathematics English Club* dan pernah menjadi *leader* pada tahun 2023. Penulis juga aktif dalam organisasi luar kampus, yaitu Ikatan Mahasiswa Muhammadiyah. Pada tahun 2023 penulis mengikuti lomba nasional dan mendapatkan medali silver. Selain itu, penulis juga mendapatkan kesempatan untuk mengikuti program *student exchange* di Prancis yang diselenggarakan oleh PMU UIN Malang. Dengan berbagai pengalaman ini penulis berharap di masa mendatang ilmu dan pengalaman yang didapatkan dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun orang di sekitar penulis.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Aisyah Dhifa Az-Zahra
NIM	:	210601110035
Fakultas / Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	:	Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul
Pembimbing I	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
Pembimbing II	:	Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 Februari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	24 Februari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	27 Februari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	3 Maret 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	6 Maret 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	10 Maret 2025	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	12 Maret 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	13 Maret 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	13 Maret 2025	ACC Seminar Proposal	9.
10.	26 Agustus 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	29 Agustus 2025	Konsultasi Bab IV	11.
12.	2 September 2025	Konsultasi Bab IV	12.
13.	8 September 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	11 September 2025	ACC Bab IV dan V	14.
15.	15 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.
16.	19 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	23 September 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	28 Oktober 2025	ACC Seminar Hasil	18.
19.	12 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	24 November 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	12 Desember 2025	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	17 Desember 2025	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 17 Desember 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012