

**MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN RESPON FUNGSIONAL
HOLLING TYPE II**

SKRIPSI

**OLEH
NUR FITRIA IRAWAN
NIM. 210601110054**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025**

**MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN RESPON FUNGSIONAL
HOLLING TYPE II**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Nur Fitria Irawan
NIM. 210601110054**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025**

MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN RESPON FUNGSIONAL HOLLING TYPE II


SKRIPSI

Oleh
Nur Fitria Irawan
NIM. 210601110054

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 08 Desember 2025

Dosen Pembimbing I


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Dosen Pembimbing II


Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN RESPON FUNGSIONAL HOLLING TYPE II

SKRIPSI

Oleh
Nur Fitria Irawan
NIM. 210601110054

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

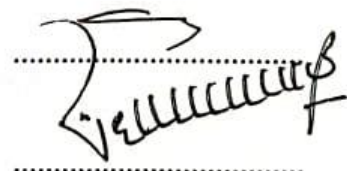
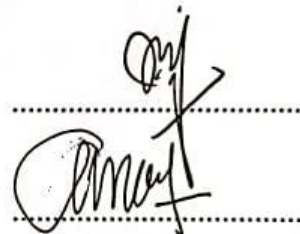
Tanggal 18 Desember 2025

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti M.Pd., M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Evawati Alisah, M.Pd.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Fitria Irawan

NIM : 210601110054

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Model *Predator-Prey* dengan Respon Fungsional Holling Type II

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya, kecuali informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan dari penulis lain yang telah disebutkan dalam naskah dan dicantumkan dalam daftar pustaka di bagian akhir skripsi. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Desember 2025

Yang membuat pernyataan



Nur Fitria Irawan

NIM. 210601110054

MOTO

“Setiap ujian pasti berlalu; doa ibu selalu menyertai langkah untuk bertahan dan bangkit”

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur dan hormat, karya ini saya persembahkan untuk:

1. Ibu tercinta, yang selalu ada dalam setiap langkah saya. Terima kasih atas doa, kasih dan kekuatan yang tak pernah berhenti mengalir dan atas segala dukungan dan pengorbanan yang telah diberikan. Mohon maaf jika proses ini memakan waktu yang cukup lama dari yang diharapkan.
2. Almarhum Ayah dan Kakek, yang pernah bermimpi melihat saya menjadi seorang sarjana. Semoga pencapaian ini menjadi bagian dari kebanggaan dan doa untuk kalian di alam sana.
3. Nenek tersayang, yang senantiasa memberi cinta, perhatian, dan dukungan dalam setiap proses hidup saya.
4. Adik saya tercinta yang kehadirannya menjadi alasan untuk tetap kuat, bertahan, bangkit dan terus melangkah maju.
5. Diri saya sendiri yang tetap bertahan di antara sakit, kehilangan, air mata, dan badai yang datang bertubi-tubi. Terima kasih telah bertahan dan terus melangkah maju hingga pada titik ini.
6. Sahabat saya Deby Safira Amelia dan Siti Holilah yang telah memberikan dukungan, perhatian, dan semangat, serta doa baiknya selama proses penyusunan skripsi ini
7. Teman-teman seperjuangan, Vina Tri Wahyu Sari, Destia Ayu Nanda, dan Rufayda Al Fatiya yang telah bersama-sama berjuang, selalu memberikan dukungan, membantu, dan memberi semangat, serta doa baiknya, selama proses penyusunan skripsi ini. Kehadiran kalian menjadi salah satu kekuatan terbesar saya dalam menyelesaikan skripsi ini

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Puja dan puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT. yang telah memberikan kenikmatan sehat lahir dan batin. Serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW., sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN RESPON FUNGSIONAL HOLLING TYPE II”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis sangat terbantu atas dukungan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nurdiana, M.Si., CAHRM., CRMP., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I, yang dengan sabar membantu, membimbing, serta memberikan saran dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan masukan pada skripsi ini sesuai dengan kajian agama Islam.
6. Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd., selaku Ketua Penguji dalam seminar proposal, yang telah memberikan kritik, saran, dan arahan untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
7. Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si., selaku Anggota Penguji I, yang telah memberikan masukan dan arahan yang sangat bermanfaat dalam penulisan skripsi ini.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan selama masa perkuliahan.
9. Kepada Ibu tercinta, Ibu Supiyani, yang senantiasa memberikan dukungan moral, spiritual, dan finansial tanpa lelah.
10. Kepada Almarhum Ayah, Bapak Agus Irawan, yang selama hidupnya selalu memberikan doa, dukungan dan kasih sayang tanpa henti.
11. Kepada adik tercinta yang menjadi penyemangat hidup penulis.
12. Kepada nenek yang selalu memberikan dukungan dan perhatian kepada penulis, serta kepada almarhum kakek tersayang yang menjadi inspirasi dan teladan.
13. Seluruh sahabat dekat yang selalu memberikan semangat dan motivasi.
14. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika Angkatan 2021.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca untuk perbaikan selanjutnya. Semoga tulisan ini dapat bermanfaat.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 18 Desember 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
ABSTRAK	xvii
ABSTRACT	xviii
مستخلص البحث	xix
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	6
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Definisi Istilah	7
BAB II KAJIAN TEORI	9
2.1 Teori Pendukung	9
2.1.1 Kajian Model Predator-Prey	9
2.1.2 Holling Type II.....	11
2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial.....	13
2.1.4 Titik Keseimbangan	14
2.1.5 Matriks Jacobian	15
2.1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	17
2.2 Grafik Fase	19
2.3 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran	26
2.4 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung.....	27
BAB III METODE PENELITIAN	29
3.1 Jenis Penelitian	29
3.2 Pra Penelitian.....	29
3.3 Tahapan Penelitian	29
3.3.1 Penskalaan Model Predator-Prey	29
3.3.2 Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Model.....	30
3.3.3 Simulasi Numerik dan Analisis Dinamika Model	30
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	32
4.1 Proses Penskalaan pada Model Predator-Prey	32

4.2 Analisis Dinamik Model Predator-Prey	36
4.3 Penentuan Titik Keseimbangan Model Predator-Prey	38
4.3.1 Pada Titik Keseimbangan Pertama	38
4.3.2 Pada Titik Keseimbangan Kedua	39
4.3.3 Pada Titik Keseimbangan Ketiga	40
4.3.4 Pada Titik Keseimbangan Keempat	42
4.4 Linierisasi Model	45
4.5 Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan	48
4.5.1 Titik Keseimbangan Pertama	49
4.5.2 Titik Keseimbangan Kedua	50
4.5.3 Titik Keseimbangan Ketiga	51
4.5.4 Titik Keseimbangan Keempat	54
4.6 Analisis Numerik dan Simulasi Model	57
4.6.1 Simulasi Pertama	59
4.6.2 Simulasi Kedua	65
4.7 Analisis Kajian Islam	70
BAB V PENUTUP	73
5.1 Kesimpulan	73
5.2 Saran	75
DAFTAR PUSTAKA	76
LAMPIRAN	78
RIWAYAT HIDUP	90

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik Fase dengan Grafik Fase dengan Lintasan Menuju Titik Asal yang Menunjukkan Bentuk <i>Node</i> Stabil dengan $r_1 < r_2 < 0$ (Boyce & DiPrima, 2012).....	20
Gambar 2.2	Grafik Fase untuk <i>Saddle Point</i> dengan Lintasan Mendekati Titik Kesetimbangan Di Satu Arah dan Menjauh Di Arah Lain dengan $r_1 > 0, r_2 < 0$ (Boyce & DiPrima, 2012).	21
Gambar 2.3	(a) Grafik Fase dengan Lintasan Membentuk Spiral yang Bersifat Stabil dengan $\lambda < 0$. (b) Grafik Fase dengan Lintasan Membentuk Spiral yang Bersifat Tidak Stabil dengan $\lambda > 0$ (Boyce dkk, 2017).	22
Gambar 2.4	(a) Grafik Fase Menunjukkan Lintasan Berbentuk Center Ketika Sistem Memiliki Nilai Eigen $\pm i\mu$. (b) Plot Komponen $x_1(t)$ Menunjukkan Gerak Periodik Sesuai Karakteristik Center (Boyce dkk, 2017).....	23
Gambar 2.5	Grafik Fase dengan Titik Kesetimbangan Bersifat Spiral Stabil dan Saddle Point (Boyce & DiPrima, 2012).	24
Gambar 2.6	Grafik Fase dengan Lintasan Persamaan Van der Pol ($\mu = 1$) yang Menunjukkan Kondisi Limit Cycle Stabil (Boyce dkk, 2017).	25
Gambar 4.1	Potret Fase Grafik Model Predator-Prey (I) dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $x(0), y(0), z(0) = 0.5, 0.5, 0.4$	61
Gambar 4.2	Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Mangsa $x(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $x(0), y(0), z(0) = 0.5, 0.5, 0.4$	62
Gambar 4.3	Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Predator $y(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $x(0), y(0), z(0) = 0.5, 0.5, 0.4$	63
Gambar 4.4	Grafik Perubahan Populasi Tritrofik Seiring Waktu dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $x(0), y(0), z(0) = 0.5, 0.5, 0.4$	64
Gambar 4.5	Potret Fase Grafik Model Predator-Prey (II) dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $x(t), y(t), z(t) = 0.5, 0.5, 4$	67
Gambar 4.6	Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Mangsa $x(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $x_t, y_t, z_t = 0.5, 0.5, 4$	68

Gambar 4.7	Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Predator $y(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $x_t, y_t, z_t = 0.5, 0.5, 4$	69
Gambar 4.8	Grafik Perubahan Populasi Tritrofik Seiring Waktu dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $x_t, y_t, z_t = 0.5, 0.5, 4$	69

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Eigen dan Kestabilan Sistem.....	18
Tabel 4.1	Deskripsi Nilai Variabel dan Nilai Parameter.....	37
Tabel 4.2	Syarat Kestabilan Model <i>Predator-Prey</i> dengan Respon Fungsional Holling Type II.....	57

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki makna sebagai berikut:

- $X(T)$: Populasi mangsa (*prey*)
- $Y(T)$: Populasi predator
- $Z(T)$: Populasi superpredator
- r : Laju pertumbuhan intrinsik spesies X
- K : Kapasitas daya dukung lingkungan untuk spesies X
- B_1 : Laju predasi atau interaksi antara spesies Y dan X
- B_2 : Laju predasi atau interaksi antara spesies Z dan Y
- A_1 : Konstanta setengah saturasi untuk interaksi X dan Y
- A_2 : Konstanta setengah saturasi untuk interaksi Y dan Z
- C_1 : Efisiensi konversi atau manfaat yang diperoleh Y dari memakan X
- C_2 : Efisiensi konversi atau manfaat yang diperoleh Z dari memakan Y
- D_1 : Laju kematian alami spesies Y
- D_2 : Laju kematian alami spesies Z
- c : Laju konsumsi maksimum predator terhadap mangsa
- m : Efisiensi konversi mangsa menjadi predator
- p : Laju konsumsi maksimum superpredator terhadap predator
- q : Efisiensi konversi predator menjadi superpredator
- a : Efek saturasi pada interaksi predator
- b : Efek saturasi pada interaksi superpredator
- d : Laju kematian alami predator
- μ : Laju kematian alami superpredator

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Perhitungan Maple Tanpa Nilai Parameter	78
Lampiran 2	Perhitungan Maple untuk Titik Kesetimbangan Model <i>Predator-Prey</i>	85
Lampiran 3	Program Maple Simulasi Pertama	88
Lampiran 4	Program Maple Simulasi Kedua.....	89

ABSTRAK

Irawan, Nur Fitria. 2025. **Model Predator-Prey dengan Respon Fungsional Holling Type II**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si., (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Model *Predator-Prey*, Holling Type II, Nondimensionalisasi, Kestabilan, Maple.

Model *predator-prey* merupakan salah satu model matematika yang menggambarkan interaksi antarspesies dalam ekosistem yang sering digunakan dalam dinamika populasi. Pada penelitian ini digunakan model dengan respon fungsional Holling Type II, yaitu laju pemangsaan yang meningkat dan kemudian mengalami kejenuhan karena adanya waktu penanganan mangsa (*handling time*). Penelitian ini bertujuan menganalisis kestabilan model *predator-prey* tritrofik tanpa mempertimbangkan waktu tunda. Model dinondimensionalisasikan untuk memperoleh sistem yang lebih sederhana. Analisis kestabilan dilakukan menggunakan matriks Jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz, yang kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Maple. Pada simulasi pertama, sistem menunjukkan keadaan stabil dengan perilaku spiral menuju titik kesetimbangan, yang didukung oleh pemilihan nilai parameter m pada rentang kestabilan sistem. Namun, pada simulasi kedua ketika nilai parameter m diubah menjadi $m = 4.35$, sistem kehilangan kestabilannya dan menunjukkan osilasi periodik, sehingga perilaku dinamika menuju *limit cycle*. Hal ini menunjukkan bahwa perubahan parameter biologis tertentu mengakibatkan perubahan ekosistem dari kondisi stabil menuju ketidakstabilan, sehingga parameter m berperan penting dalam pengendalian kestabilan populasi dalam rantai makanan.

ABSTRACT

Irawan, Nur Fitria. 2025. **Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si., (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Predator-Prey Model, Holling Type II, Nondimensionalization, Stability, Maple.

The predator-prey model is a mathematical model that describes interspecies interactions in ecosystems and is often used in population dynamics. This research employs a predator-prey model with a Holling Type II functional response, in which the predation rate increases rapidly and then saturates due to the handling time. The aim of this study is to analyse the stability of a tritrophic predator-prey system without considering time delay. The model was nondimensionalized to obtain a simpler form. Stability analysis was conducted using the Jacobian matrix and the Routh-Hurwitz criteria, followed by numerical simulations using Maple software. In the first simulation, the system showed a stable state with spiral behaviour towards the equilibrium point, supported by the selection of the parameter value m within the stability range of the system. However, in the second simulation, when the parameter value m was changed to $m = 4.35$, the system lost its stability and exhibited periodic oscillations, indicating dynamic behavior toward a limit cycle. These findings demonstrate that variations in certain biological parameters can shift the ecosystem from a stable to an unstable state, thus highlighting the important role of parameter m in controlling population stability within the food chain.

مستخلص البحث

إبروان، نور فطريا. ٢٠٢٥. نموذج المفترس-الفريسة مع استجابة وظيفية من النوع الثاني هولنج. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج. المشرفون: (أ) الدكتور. عثمان باجالاي، الماجستير، (ب) إيفاواتي أليسا، الماجستير.

الكلمات الأساسية: نموذج المفترس-الفريسة، نوع هولنج الثاني، عدم الأبعاد، الاستقرار، القيقب.

نموذج المفترس والفريسة هو نموذج رياضي يصف التفاعلات بين الأنواع في النظم البيئية، ويُستخدم غالبًا في ديناميكيات السكان. استخدمت هذه الدراسة نموذجًا باستجابة وظيفية من نوع هولنج الثاني، أي معدل افتراس متزايد ثم تشبع نتيجةً لوجود وقت معالجة الفريسة. هدفت هذه الدراسة إلى تحليل استقرار نموذج المفترس والفريسة ثلاثي المستويات الغذائية دون مراعاة زمن التأخير. تم تبسيط النموذج ليصبح بلا أبعاد. أُجري تحليل الاستقرار باستخدام مصفوفة جاكوبي ومعيار راوث-هرويتز، ثم أُجريت محاكاة عددية باستخدام برنامج *Maple*. في المحاكاة الأولى، أظهر النظام حالة مستقرة مع سلوك حلزوني نحو نقطة التوازن، وهو ما تم تأكيده باختيار قيمة المعامل m ضمن نطاق استقرار النظام. مع ذلك، في المحاكاة الثانية، عندما تم تغيير قيمة المعامل m إلى $m = 4.35$ ، فقد النظام استقراره وأظهر تذبذبات دورية، مما أدى إلى سلوك ديناميكي نحو الدورة الحدية. يشير هذا إلى أن التغيرات في بعض المعايير البيولوجية تؤدي إلى تغيرات في النظام البيئي من حالة مستقرة إلى حالة غير مستقرة، بحيث يلعب المعامل m دورًا مهمًا في التحكم في استقرار السكان في السلسلة الغذائية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penelitian ini berawal dari kajian ekologi matematika yang menggunakan model *predator-prey*. Model ini menggambarkan interaksi antara dua atau lebih spesies dalam suatu ekosistem, yaitu mangsa (*prey*) dan predator. Model ini juga dapat menunjukkan bagaimana populasi berkembang dari waktu ke waktu. Salah satu model yang relevan dalam studi ini adalah model yang dikembangkan oleh Maiti dkk (2008). Pada penelitian tersebut model yang digunakan berupa sistem tiga spesies dalam rantai makanan tritrofik, yaitu mangsa $X(T)$, predator $Y(T)$, dan superpredator $Z(T)$, yang menerapkan respon fungsional Holling Type II dan mempertimbangkan waktu tunda dalam sistem. Pada model ini, populasi mangsa yaitu berupa tanaman jagung yang kemudian di mangsa oleh predator yaitu ulat pemakan daun, dan superpredator sebagai parasitoid. Model tersebut menggambarkan interaksi antar spesies yang dimodelkan secara nonlinier melalui sistem persamaan diferensial. Sistem pada model tersebut mencakup berbagai parameter biologis penting seperti laju pertumbuhan, laju kematian, tingkat konversi, serta konstanta kejenuhan. Parameter-parameter ini secara langsung mempengaruhi mekanisme interaksi antar populasi. Hal ini terlihat pada populasi mangsa (*prey*) yang tumbuh secara logistik dalam daya dukung tertentu dan mengalami tekanan pemangsaan dari predator, sedangkan predator sendiri menjadi mangsa dari superpredator. Sistem ini menunjukkan bahwa perubahan nilai parameter dapat menghasilkan perubahan pada titik kesetimbangan, batas kestabilan sehingga memunculkan fenomena bifurkasi.

Model dasar yang digunakan dalam menggambarkan interaksi *predator-prey* adalah model Lotka-Volterra. Namun, model Lotka-Volterra tidak realistis (Al Idrus et al., 2022). Di mana, terjadi interaksi antara *predator-prey* secara sederhana yang mengakibatkan adanya perilaku periodik populasi. Sehingga, diperlukannya penggunaan respon fungsional sebagai aspek paling penting dari model penelitian ini. Istilah respon fungsional pertama kali digunakan oleh Solomon pada tahun 1949, yang kemudian dikenal luas melalui Holling pada tahun 1959 yang mengklasifikasikan respon fungsional ke dalam 3 jenis yaitu Holling Type I, II, dan III (Al Idrus dkk, 2022). Pada penelitian ini respon fungsional yang digunakan adalah respon fungsional Holling Type II, yang memodelkan laju konsumsi mangsa oleh predator sebagai fungsi saturasi nonlinier terhadap kepadatan mangsa. Dimana meningkatnya kepadatan laju konsumsi mangsa yang akhirnya mengalami kejenuhan pada titik tertentu akibat waktu penanganan mangsa oleh predator (Dawes & Souza, 2013). Pada penelitian yang dilakukan oleh Maiti dkk (2008) model yang digunakan menggabungkan waktu tunda dalam interaksi model *predator-prey*, yang berfokus pada analisis sistem akibat waktu tunda terhadap kestabilan dan dinamika populasi dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II.

Penelitian ini difokuskan pada analisis dinamik model *predator-prey* dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II. Dimana penelitian ini bertujuan untuk menganalisis karakteristik dinamik dari model *predator-prey* tersebut, seperti titik tetap, kestabilan, serta *boundedness*. Analisis model ini berfokus pada adanya dampak dari bentuk respon fungsional terhadap dinamika populasi, tanpa mempertimbangkan faktor waktu tunda.

Adapun kaitannya dalam perspektif Islam, Al-Qur'an surah Al-Hijr ayat 19 yang menyatakan:

وَالْأَرْضَ مَدَدْنَاهَا وَأَلْقَيْنَا فِيهَا رَوَاسِيَ وَأَنْبَتْنَا فِيهَا مِنْ كُلِّ شَيْءٍ مَوْزُونٍ ﴿١٩﴾

Artinya: “Dan Kami telah menghamparkan bumi dan Kami pancangkan padanya gunung-gunung serta Kami tumbuhkan di sana segala sesuatu menurut ukuran.”

Menurut Tafsir al-Munir, menjelaskan bahwa seluruh ciptaan Allah memiliki ketentuan ukuran dan batasan tertentu dalam setiap makhluk yang ada di bumi, sehingga tercipta keteraturan yang harmonis pada alam semesta (Az-Zuhaili, 2013). Secara ekologis, lingkungan sebagai suatu sistem terdiri atas komponen-komponen yang memiliki perannya masing-masing namun saling berkaitan satu sama lainnya (Muhammad, 2023). Prinsip ini ditegaskan dalam QS. AL-Hijr [15]: 19 yang dipahami sebagai ayat yang memuat prinsip keselarasan dan keseimbangan ekologis sebagai sunnatullah dalam alam semesta (Muttaqin, 2020). Pemahaman tersebut sejalan dengan analisis kestabilan, dan *boundedness* dalam model *predator-prey* dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II, yang menunjukkan bahwa makhluk hidup tidak tumbuh tanpa batas, melainkan bergerak menuju keseimbangan. Keseimbangan alami dalam ekosistem ini selaras dengan ketetapan Allah bahwa segala sesuatu diciptakan sesuai dengan ukurannya untuk menjaga stabilitas dan keberlangsungan kehidupan. Dengan demikian, konsep keseimbangan dalam Al-Qur'an selaras dengan model dengan respon fungsional Holling Type II yang juga menunjukkan keseimbangan yang terbentuk dalam interaksi ekologis.

Pada penelitian ini, pertama dilakukan dengan menyusun model dasar *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II yang berfokus pada tanpa waktu tunda. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik yang mencakup penentuan

titik tetap, analisis kestabilan, serta pembuktian sifat *boundedness* untuk memastikan model tetap realistis secara biologis. Kemudian, dilakukan interpretasi dari hasil analisis dan simulasi untuk melihat bagaimana kondisi keseimbangan dan keberlangsungan suatu populasi dalam ekosistem. Dengan demikian, tahapan ini mendapatkan tujuan yang telah ditetapkan, sesuai dengan alur yang dilalui dari penyusunan model hingga pada penarikan kesimpulan.

Penelitian ini penting karena membantu dalam memahami peran respon fungsional Holling Type II dalam model *predator-prey* yang dikaji. Dalam model tersebut merepresentasikan keterbatasan kemampuan predator dalam menangani mangsa dan menghasilkan peningkatan laju predasi pada saat populasi mangsa rendah hingga mengalami kejenuhan. Mekanisme kejenuhan ini menyebabkan hubungan antara predator dan mangsa yang mempengaruhi kestabilan, dan dinamika ekosistem, seperti terbentuknya titik kesetimbangan dan potensi munculnya osilasi pada populasi. Secara umum, hasil penelitian ini dapat digunakan dalam pengambilan keputusan dalam bidang-bidang yang berkaitan dengan pengelolaan sumber daya alam, konservasi lingkungan, serta pembelajaran matematika terapan dalam bidang biologi, khususnya yang berkaitan mengenai analisis model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II. Selain itu, penelitian ini juga memperkuat pemahaman bahwa penggunaan model matematika dalam studi ekologi tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga memiliki dampak praktis. Sehingga, dapat memberikan gambaran mengenai dinamika ekosistem, dimana hal ini dapat menjadi acuan dalam memahami mekanisme keseimbangan dan keberlangsungan pada populasi dalam lingkungan yang kompleks.

Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini menerapkan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II. Harapannya penelitian ini memberikan pemahaman yang lebih baik mengenai dinamika *predator-prey* dan dapat membantu menjaga keseimbangan ekosistem sekaligus mendukung keberlangsungan kehidupan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat ditarik rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana formulasi model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II?
3. Bagaimana pengaruh variasi parameter tertentu terhadap dinamika model *predator-prey* berdasarkan simulasi numerik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, dapat ditarik kesimpulan penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui proses konstruksi atau penyederhanaan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II untuk analisis yang lebih praktis.
2. Mengetahui eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II.

3. Mengetahui pengaruh variasi parameter tertentu terhadap dinamika model *predator-prey* berdasarkan hasil simulasi numerik.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, maka penelitian ini memiliki manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan acuan dalam formulasi dan penyederhanaan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II, sehingga diperoleh model yang lebih praktis untuk analisis.
2. Memberikan kontribusi teoritis dalam memahami kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II.
3. Memberikan gambaran mengenai pengaruh variasi parameter tertentu terhadap dinamika populasi pada model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II melalui simulasi numerik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini model *predator-prey* yang digunakan merujuk pada jurnal terdahulu Maiti dkk (2008):

$$\frac{dX(T)}{dT} = rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K} \right) - \frac{B_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)}, \quad X(0) > 0$$

$$\frac{dY(T)}{dT} = \frac{C_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)} - D_1 Y(T) - \frac{B_2 Y(T) Z(T)}{A_2 + Y(T)}, \quad Y(0) > 0$$

$$\frac{dZ(T)}{dT} = \frac{C_2 Y(T) Z(T)}{A_2 + Y(T)} - D_2 Z(T), \quad Z(0) > 0$$

Kemudian, model tersebut ditransformasikan melalui proses penskalaan sebelum dilakukan analisis kestabilan dan simulasi numerik.

2. Penelitian ini berfokus pada model *predator-prey* tanpa waktu tunda.
3. Nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini sepenuhnya mengacu pada penelitian Maiti dkk, (2008), dengan memodifikasi satu parameter yang disesuaikan dengan tujuan penelitian ini.
4. Analisis dinamik dibatasi pada penentuan titik tetap (titik kesetimbangan), linierisasi, nilai eigen, dan vektor eigen, serta interpretasi grafik.

1.6 Definisi Istilah

1. Model *predator-prey* adalah salah satu model matematika yang menggambarkan interaksi antarspesies dalam ekosistem yang banyak dibahas dalam literatur dan sering digunakan sebagai contoh dasar dalam dinamika populasi. Model ini menggambarkan interaksi antarspesies yaitu mangsa (*prey*) dan predator dalam suatu populasi (Ndii, 2018).
2. Fungsi trofik yaitu fungsi yang menggambarkan jumlah mangsa yang dimakan oleh setiap predator persatuan waktu berdasarkan ketersediaan mangsa dan predator (Maiti dkk, 2008).
3. Respon fungsional adalah istilah yang digunakan dalam ekologi yang menggambarkan hubungan antara kepadatan mangsa dan tingkat konsumsi per predator (Papanikolaou dkk, 2020).
4. Holling Type II adalah bentuk dari respon fungsional di mana tingkat konsumsi predator meningkat seiring dengan kepadatan mangsa (*prey*), namun laju peningkatannya melambat dan akhirnya mencapai titik jenuh

karena adanya waktu penanganan mangsa (*handling time*) yang dibutuhkan dalam proses pemangsaan (Papanikolaou dkk, 2020).

5. Tritrofik adalah interaksi yang melibatkan tiga tingkat trofik dalam suatu rantai makanan yang melibatkan hubungan antara mangsa (*prey*), predator, dan superpredator (Maiti dkk, 2008).
6. Predasi adalah interaksi biologis di mana satu organisme (predator) memburu, menangkap, dan memakan organisme lain (mangsa) untuk memperoleh energi, di mana hal ini menentukan kekuatan interaksi dalam ekologi (Miller dkk, 2006).
7. Osilasi adalah fluktuasi populasi predator dan mangsa secara periodik dalam suatu ekosistem, di mana kenaikan populasi satu memengaruhi penurunan dan sebaliknya, yang sering terjadi secara berulang akibat interaksi biologis antarspesies dan dinamika internal sistem ekologi (Morita & Tainaka, 2006).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Kajian Model Predator-Prey

Model *predator-prey* yaitu salah satu model matematika sederhana yang menggambarkan interaksi dari dua spesies atau lebih yaitu mangsa (*prey*) dan predator. Model ini diperkenalkan pertama kali oleh Alfred Lotka seorang ahli biofisika Amerika dan Vito Volterra seorang matematikawan Italia pada tahun 1926 (Afiyah, 2015). Model ini menjadi dasar dalam analisis dinamik, prediksi siklus populasi, maupun stabilitas ekologi. Penggunaan model ini dapat memberikan wawasan mengenai interaksi antara predator dengan mangsa yang dapat menciptakan perilaku dinamis yang lebih kompleks. Di mana hal ini akan mengakibatkan terjadinya osilasi populasi. Model ini juga dapat dimodifikasi dengan menambahkan beberapa faktor lain seperti, respon fungsional, efek alle, migrasi, ataupun waktu tunda, sehingga model persamaan menjadi lebih kompleks.

Pada penelitian ini model *predator-prey* yang digunakan adalah model tiga kompartemen $X(T)$, $Y(T)$, dan $Z(T)$ yaitu mangsa (*prey*), predator, dan superpredator dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II. Model tersebut dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\frac{dX(T)}{dT} = rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K}\right) - \frac{B_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)}$$

$$\begin{aligned}\frac{dY(T)}{dT} &= \frac{C_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)} - D_1 Y(T) - \frac{B_2 Y(T) Z(T)}{A_2 + Y(T)} \\ \frac{dZ(T)}{dT} &= \frac{C_2 Y(T) Z(T)}{A_2 + Y(T)} - D_2 Z(T)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Pada model tersebut, Parameter A_1 dan A_2 adalah konstanta setengah saturasi yang menggambarkan tingkat kejenuhan predasi, B_1 dan B_2 adalah tingkat pertumbuhan maksimal masing-masing predator dan superpredator, C_1 dan C_2 adalah tingkat konversi mangsa menjadi predator dan predator menjadi superpredator. Sedangkan, D_1 dan D_2 adalah tingkat kematian predator dan superpredator.

Berdasarkan model persamaan (2.1) dinamika populasi mangsa $X(T)$ mengalami pertumbuhan logistik dengan laju intrinsik r yang dibatasi oleh kapasitas dukung lingkungan K yang membatasi jumlah maksimum mangsa. Kemudian, populasi mangsa mengalami pengurangan akibat predasi oleh predator $Y(T)$, dengan laju predasi yang mengikuti respon fungsional Holling Type II. Sehingga, ketika jumlah mangsa meningkat laju predasi melambat mengakibatkan predator mengalami keterbatasan kapasitas untuk menangkap atau mencerna mangsa. Parameter B_1 menunjukkan tingkat interaksi antara mangsa dan predator, sedangkan A_1 menunjukkan tingkat saturasi predasi, yang membatasi seberapa banyak mangsa dapat dimangsa. Oleh karena itu, bisa diketahui populasi mangsa akan mengalami kenaikan secara alami dan pengurangan akibat interaksi dengan predator $Y(T)$ sebagai berikut:

$$\frac{dX(T)}{dT} = rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K}\right) - \frac{B_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)}$$

Populasi predator $Y(T)$ mengalami peningkatan populasi akibat memangsa mangsa (*prey*). Namun, predator juga mengalami penurunan populasi yang diakibatkan kematian secara alami dengan laju $D_1Y(T)$. Kemudian, terjadi interaksi antara predator dengan superpredator $Z(T)$, di mana superpredator memangsa predator, sehingga mengalami penambahan penurunan populasi sebagai berikut:

$$\frac{dY(T)}{dT} = \frac{C_1X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)} - D_1Y(T) - \frac{B_2Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)}$$

Populasi superpredator $Z(T)$ mengalami peningkatan akibat konsumsi predator dengan laju predasi yang mengikuti respon fungsional Holling Type II. Kemudian, superpredator mengalami pengurangan akibat tingkat kematian alami sebesar $D_2Z(T)$. Oleh karena itu, laju perubahan populasi superpredator adalah

$$\frac{dZ(T)}{dT} = \frac{C_2Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)} - D_2Z(T)$$

Dengan demikian, model *predator-prey* yang digunakan mampu menggambarkan interaksi antarspesies dengan mempertimbangkan keterbatasan predasi melalui respon fungsional Holling Type II.

2.1.2 Holling Type II

Holling Type II adalah salah satu dari tiga model respon fungsional yang menggambarkan interaksi *predator-prey*. Pada model ini, predator tidak dapat terus meningkatkan laju konsumsi dengan bertambahnya jumlah mangsa. Hal ini terjadi karena predator membutuhkan waktu penanganan untuk menangkap dan memproses setiap mangsa. Secara matematis, laju pemangsaan Holling type II dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P(x) = \frac{cx}{m+x} \quad (2.2)$$

di mana x adalah kepadatan populasi mangsa predator. c adalah tingkat konsumsi maksimal predator perkapita. m adalah konstanta setengah saturasi penangkapan, yaitu jumlah untuk mencapai setengah dari kecepatan maksimum c . Jadi, dapat dikatakan bahwa ketika jumlah mangsa rendah, predator dapat dengan cepat memakannya. Namun, dikarenakan adanya keterbatasan waktu penanganan, maka ketika jumlah mangsa tinggi, predator tidak dapat memproses semuanya secepat itu. Hal ini menunjukkan bahwa Holling Type II menggambarkan situasi keterbatasan kemampuan fisik predator dalam menangani mangsa, sehingga menyebabkan hubungan nonlinier antara predator dan mangsa.

Pada model *predator-prey* yang digunakan pada penelitian ini, respon fungsional Holling Type II muncul dalam interaksi antara mangsa dan predator, yaitu

$$\frac{B_1 X(T) Y(T)}{A_1 + X(T)}$$

Kemudian, pada model yang menggambarkan interaksi antara predator dan superpredator sebagai berikut.

$$\frac{B_2 Y(T) Z(T)}{A_2 + Y(T)}$$

Suku-suku tersebut secara sederhana menggambarkan laju kejenuhan mangsa, di mana tingkat konsumsi predator tidak meningkat secara linier terhadap jumlah mangsa. Sementara parameter B_1 dan B_2 menunjukkan tingkat konsumsi maksimum, sedangkan parameter A_1 dan A_2 menunjukkan konstanta setengah saturasi tingkat kejenuhan. Dengan demikian, penggunaan respon fungsional Holling Type II dalam model *Predator-prey* mengurangi perbedaan waktu antara

serangan predator dan superpredator, sehingga menghasilkan interaksi populasi yang nonlinier.

2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang membahas setidaknya satu turunan dari fungsi yang belum teridentifikasi atau diketahui. Secara umum, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang hanya memiliki satu variabel bebas (independen). Bentuk umum persamaan diferensial biasa secara umum dinyatakan sebagai berikut:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

di mana F adalah fungsi yang dapat bersifat linier atau nonlinier. Sedangkan persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n sebagai variabel-variabel bebas (independen) dan z variabel terikat (dependen) (Maidah dkk, 2022).

Selain itu, persamaan diferensial juga dapat diklasifikasikan menurut sifat linieritas yaitu persamaan diferensial linier dan nonlinier. Sistem persamaan diferensial linier merupakan sistem persamaan variabel terikat dan turunannya dalam bentuk linier (pangkat satu) dan tidak ada perkalian atau fungsi nonlinier

dari variabel dependen atau turunannya. Sedangkan persamaan diferensial nonlinier adalah persamaan yang memenuhi salah satu kriteria berikut:

1. Terdapat variabel dependen dan turunannya dengan pangkat lebih dari satu,

$$\text{misalnya } \frac{dx}{dt} = x^2 + t$$

2. Terdapat perkalian antara variabel dependen dan/atau turunannya.

$$\text{Contoh: } \frac{dX}{dT} = \frac{B_1XY}{A_1+X}.$$

3. Mengandung fungsi yang lebih kompleks yang melibatkan variabel terikat serta turunannya.

$$\text{Contoh: } \frac{dZ}{dT} = \frac{C_2YZ}{A_2+Y}$$

Pada penelitian ini, model persamaan yang digunakan mengacu pada model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II termasuk kedalam persamaan diferensial biasa (PDB) nonlinier.

2.1.4 Titik Keseimbangan

Titik Keseimbangan merupakan titik di mana keadaan laju perubahan sistem sama dengan nol. Dalam konteks model interaksi, titik keseimbangan dapat terpecahkan jika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Dalam hal ini kita dapat mempertimbangkan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.3}$$

dimana $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, dan $f_3(x, y, z)$ menggambarkan masing-masing fungsi dari interaksi populasi mangsa (x), predator (y), dan superpredator (z). Titik tetap dapat diperoleh jika nilai x , y , dan z memenuhi berikut ini:

$$f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0, \text{ dan } f_3(x, y, z) = 0$$

titik-titik ini disebut titik kesetimbangan, di mana laju perubahan untuk masing-masing populasi tidak berubah atau sama dengan nol (Glass L. & Murray J. D., 2002).

2.1.5 Matriks Jacobian

Matriks dapat didefinisikan sebagai susunan segi empat yang berasal dari bilangan riil atau kompleks, yang tersusun secara sistematis dalam baris dan kolom. Berdasarkan penelitian Aryani & Maisyitah (2015), matriks memiliki berbagai macam jenis yang diklasifikasikan berdasarkan susunan elemen dan karakteristik dari operasi matriksnya, diantaranya yaitu matriks bujur sangkar ($n \times n$), matriks diagonal, matriks singular, dan nonsingular. Matriks tersebut memiliki peranan penting sesuai dengan kegunaanya masing-masing. Salah satu matriks utama yang dapat digunakan dalam sistem dinamika nonlinier yaitu matriks Jacobian, dimana matriks ini digunakan untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem. Secara matematis, matriks Jacobian dibentuk dengan menghitung turunan parsial dari setiap fungsi vektor variabel. Secara umum, bentuk matriks Jacobian dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

dimana $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ adalah vektor variabel, sehingga matriks Jacobian J dapat

didefinisikan sebagai:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matriks ini digunakan pada model ekosistem salah satunya yaitu model *predator-prey* untuk mendapatkan informasi mengenai perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan dengan mengukur laju perubahan variabel terhadap perubahan kecil dalam variabel lainnya (Strogatz, 2018). Matriks pada (2.4) untuk model *predator-prey* tritrofik dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dimana $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, dan $f_3(x, y, z)$ adalah fungsi laju perubahan x , y , dan z .

Pada model *predator-prey*, nilai eigen dari matriks ini dapat memberikan informasi mengenai arah dan kecepatan perubahan sistem di sekitar titik tersebut. Menurut Kuznetsov, (1998), apabila nilai eigen memiliki bagian riil negatif, maka titik kesetimbangan dianggap stabil. Berbeda halnya dengan matriks Jacobian jika

terdapat satu nilai eigen dengan bagian riil yang positif maka titik kesetimbangan menjadi tidak stabil.

Selain itu, stabilitas sistem dalam matriks Jacobian dapat dianalisis menggunakan metode Routh-Hurwitz. Metode ini melibatkan matriks Routh-Hurwitz berdasarkan koefisien persamaan karakteristik sistem. Persamaan karakteristik tersebut dinyatakan sebagai:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.6)$$

dimana a_i merupakan koefisien riil untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (Ndii, 2018). Analisis ini memungkinkan untuk memastikan bahwa semua akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif, tanpa perlu menghitung akar-akar tersebut secara langsung. Kemudian, sistem dapat dikatakan stabil, jika memenuhi syarat Routh-Hurwitz berikut:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0$$

Sehingga sistem berada dalam kondisi stabil asimtotik (Ogata, 2010).

2.1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen diperoleh dari analisis matriks Jacobian yang digunakan untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan. Misalkan terdapat matriks J berukuran $n \times n$. Apabila sebuah vektor tak nol x disebut sebagai vektor eigen dari J , maka suatu skalar λ yang memenuhi persamaan

$$Jx = \lambda x \quad (2.7)$$

disebut sebagai nilai eigen dari matriks J , dan x merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut (Ogata, 2010).

Menentukan nilai eigen dari matriks J , maka persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(J - \lambda I)x = 0 \quad (2.8)$$

dimana I merupakan matriks identitas berukuran $n \times n$. Persamaan (2.8) mempunyai solusi tak nol yang jika hanya jika $\det(J - \lambda I) = 0$ disebut persamaan karakteristik dari matriks J yang menjadi dasar dalam menghitung nilai eigen dan vektor eigen (Ukaely, 2021). Kemudian, sifat kestabilan titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan nilai eigen yang didapat dari matriks Jacobian tersebut. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh klasifikasi kestabilan ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Nilai Eigen dan Kestabilan Sistem

Nilai Eigen	Jenis Titik Kritik	Kestabilan Sistem
$r_1 > r_2 > 0$	<i>Node</i>	Tidak stabil
$r_1 < r_2 < 0$	<i>Node</i>	Stabil asimtotik
$r_2 < 0 < r_1$	<i>Saddle point</i>	Tidak stabil
$r_1 = r_2 > 0$	<i>Proper/improper node</i>	Tidak stabil
$r_1 = r_2 < 0$	<i>Proper/improper node</i>	Stabil asimtotik
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$		
$\lambda > 0$	<i>Spiral point</i>	Tidak stabil
$\lambda < 0$	<i>Spiral point</i>	Stabil asimtotik
$\lambda = 0$	<i>Center</i>	Stabil

Berdasarkan Tabel 2.1 untuk setiap nilai eigen dapat menentukan jenis dan stabilitas titik kesetimbangan. Jika terdapat nilai eigen yang bernilai negatif, maka

titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik. Jika terdapat nilai eigen bernilai positif, maka kestabilan sistem menjadi tidak stabil.

2.2 Grafik Fase

Grafik fase merupakan representasi visual berupa lintasan solusi sistem persamaan diferensial dalam ruang fase (*phase space*). Setiap titik dalam ruang fase menyatakan keadaan sistem pada suatu waktu dan perubahan keadaan pada sistem tersebut ditunjukkan dalam bentuk kurva atau lintasan (Boyce dkk, 2017). Artinya, grafik fase digunakan untuk memvisualisasikan bagaimana variabel-variabel dalam suatu sistem berubah secara dinamis terhadap waktu. Sistem dengan dua variabel dapat divisualisasikan dengan grafik fase dua dimensi yang disebut *phase plane*. Kemudian, ketika suatu sistem memiliki tiga variabel, maka grafik fase dapat divisualisasikan dengan bentuk tiga dimensi. Misalnya, pada model predator-prey tritrofik yang memiliki tiga variabel yaitu mangsa (x), predator (y), dan superpredator (z), di mana pada grafik fase populasi masing-masing spesies yang terlibat direpresentasikan oleh salah satu sumbu. Selanjutnya, interaksi setiap spesies pada grafik digambarkan dalam bentuk lintasan, sehingga grafik menunjukkan bagaimana setiap populasi seiring waktu saling mempengaruhi satu sama lain.

Analisis grafik fase sangat berkaitan dengan titik kesetimbangan. Di mana untuk mengetahui bentuk grafik fase perlu dilakukannya linierisasi di sekitar titik kesetimbangan. Kemudian, dilakukannya perhitungan nilai eigen dari matriks Jacobian untuk menentukan karakteristik kestabilan sistem. Secara umum, terdapat berbagai bentuk perilaku sistem dalam grafik fase sebagai berikut:

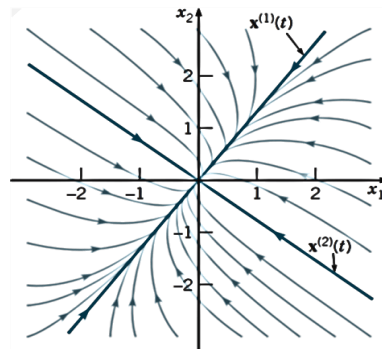
1. *Node* Stabil

Grafik fase suatu sistem dikatakan *node* stabil apabila semua nilai eigen bernilai negatif, sehingga menyebabkan lintasan sistem pada grafik bergerak menuju titik kesetimbangan. Kondisi ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bersifat stabil. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial linier dua dimensi

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

yang memiliki dua nilai eigen riil negatif, yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -4$, maka titik kesetimbangan di $(0,0)$ bersifat *node* stabil (Boyce & DiPrima, 2012). Grafik fase dari *node* stabil ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Grafik Fase dengan Grafik Fase dengan Lintasan Menuju Titik Asal yang Menunjukkan Bentuk *Node* Stabil dengan $r_1 < r_2 < 0$ (Boyce & DiPrima, 2012).

Grafik tersebut menggambarkan kondisi di mana setiap lintasan yang berasal dari kondisi awal berbeda akan tetap konvergen ke titik kesetimbangan seiring waktu.

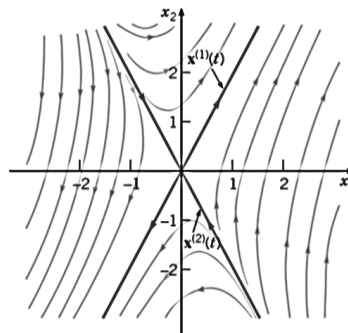
Sedangkan, grafik fase suatu sistem dikatakan *node* tidak stabil apabila seluruh nilai eigen bernilai positif dengan $r_1 > 0$ dan $r_2 > 0$. Sehingga lintasan bergerak menjauh dari titik kesetimbangan yang mengakibatkan grafik fase menunjukkan arah berlawanan dengan Gambar 2.1. Akibatnya sistem dikatakan tidak stabil.

2. *Saddle Point* (Titik Pelana)

Apabila suatu sistem memiliki salah satu nilai eigennya bernilai positif dan terdapat salah satu yang bernilai negatif, maka sistem memiliki titik kesetimbangan bersifat *saddle point*. Kestabilan sistem ini bergantung pada arah lintasan terhadap titik kesetimbangan. Misalkan, diberikan sistem persamaan diferensial linier dua dimensi, yaitu

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \end{cases}$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$. Dikarenakan nilai eigen yang diperoleh bernilai negatif dan positif, maka titik kesetimbangan di $(0,0)$ diklasifikasikan sebagai *saddle point* (Boyce & DiPrima, 2012). Berikut grafik fase dari *saddle point*.



Gambar 2.2 Grafik Fase untuk *Saddle Point* dengan Lintasan Mendekati Titik Kesetimbangan Di Satu Arah dan Menjauh Di Arah Lain dengan $r_1 > 0, r_2 < 0$ (Boyce & DiPrima, 2012).

Grafik fase tersebut menunjukkan bahwa pada nilai eigen negatif lintasan hanya menuju titik kesetimbangan, sedangkan pada nilai eigen positif arah lintasan menjauhi titik tersebut

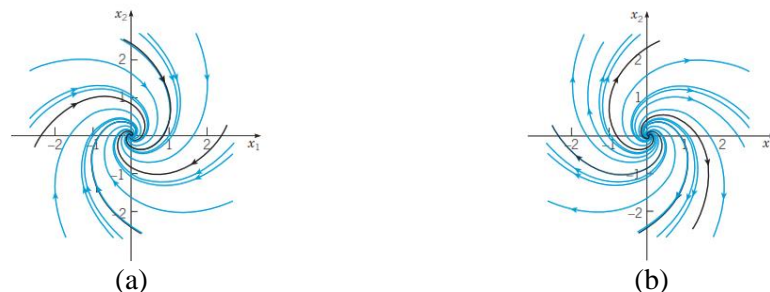
3. Spiral Stabil dan Spiral Tak Stabil

Pada jenis ini, sistem dikatakan spiral stabil apabila nilai eigen kompleks dengan bagian riil tidak nol. Misalkan, terdapat sistem persamaan diferensial linier.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - y$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - y$$

dimana sistem tersebut memiliki nilai eigen kompleks yaitu $\lambda = -1 \pm i$ dengan bagian riil bernilai negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan di $(0,0)$ dikatakan spiral stabil. Namun, jika nilai eigen bernilai positif, maka dapat dikatakan grafik spiral tidak stabil (Boyce dkk, 2017). Grafik fase menunjukkan bahwa lintasan solusi membentuk spiral bergerak menuju titik kesetimbangan seiring waktu, yang menunjukkan osilasi yang meredam. Contoh grafik fase spiral stabil ditunjukkan pada gambar berikut.



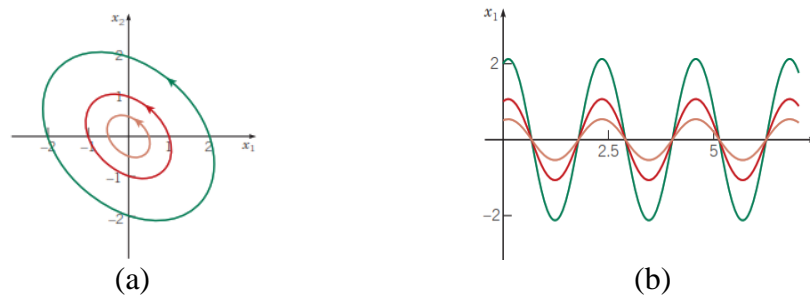
Gambar 2.3 (a) Grafik Fase dengan Lintasan Membentuk Spiral yang Bersifat Stabil dengan $\lambda < 0$. (b) Grafik Fase dengan Lintasan Membentuk Spiral yang Bersifat Tidak Stabil dengan $\lambda > 0$ (Boyce dkk, 2017).

4. Center

Apabila nilai eigen bersifat imajiner murni, lintasan pada bidang fase berbentuk lingkaran tertutup, maka kondisi ini dikatakan *center*. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$$

dengan nilai eigen $\lambda = \pm i$ merupakan nilai eigen imajiner murni. Oleh karena itu, titik kesetimbangan di $(0,0)$ bersifat *center*. Grafik fase ini menunjukkan osilasi periodik tanpa redaman. Sistem ini dikatakan stabil netral karena lintasan tidak menuju ataupun menjauh dari titik kesetimbangan (Boyce dkk, 2017). Berikut adalah contoh grafik fase center.



Gambar 2.4 (a) Grafik Fase Menunjukkan Lintasan Berbentuk Center Ketika Sistem Memiliki Nilai Eigen $\pm i\mu$. (b) Plot Komponen $x_1(t)$ Menunjukkan Gerak Periodik Sesuai Karakteristik Center (Boyce dkk, 2017).

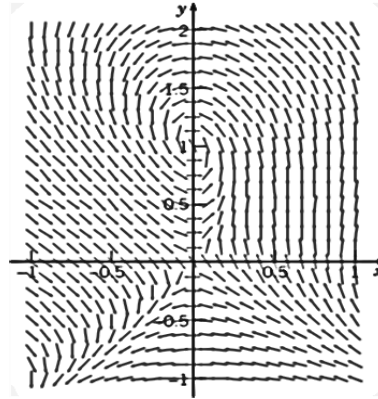
5. Spiral dan *Saddle*

Pada sistem nonlinier tertentu, pada grafik fase dapat juga dijumpai beberapa jenis kestabilan yang berbeda dari satu titik kesetimbangan. Misalnya, titik kesetimbangan yang membentuk spiral dan bersifat stabil, di mana lintasan berputar menuju titik tersebut. Selain itu, juga terdapat titik kesetimbangan lain berupa *saddle point*, di mana lintasan mendekati titik kesetimbangan pada arah dan menjauh dari arah lainnya. Kombinasi dari kedua perilaku ini sering muncul pada sistem seperti pendulum teredam. Hal ini ditunjukkan pada sistem persamaan diferensial nonlinier berikut.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha\omega - \sin\theta$$

yang merupakan model pendulum teredam, dengan $\alpha > 0$ (Boyce & DiPrima, 2012). Persamaan tersebut memiliki titik kesetimbangan dengan sifat kestabilan yang berbeda. Kombinasi perilaku tersebut ditunjukkan pada grafik fase berikut:



Gambar 2.5 Grafik Fase dengan Titik Kesetimbangan Bersifat Spiral Stabil dan Saddle Point (Boyce & DiPrima, 2012).

di mana titik kesetimbangan tengah bawah bersifat spiral stabil, dimana lintasan berputar dan bergerak menuju titik tersebut. Sedangkan titik tengah atas arah panah menyilang dengan lintasan mendekati satu sisi dan menjauhi sisi lainnya sehingga bersifat *saddle point*.

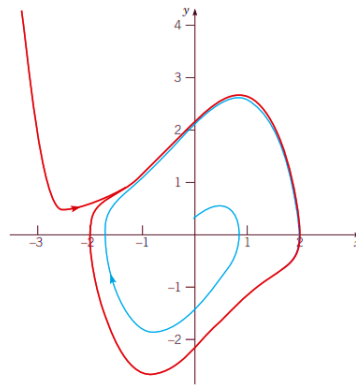
6. Limit Cycle

Pada sistem nonlinier, lintasan pada grafik fase tidak selalu menuju atau menjauhi titik kesetimbangan, dapat juga membentuk lintasan tertutup yang stabil yang disebut sebagai *limit cycle*. Misalkan, diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x, \quad \mu > 0$$

Sistem tersebut bersifat *limit cycle* yang menggambarkan lintasan berosilasi secara periodik dengan amplitudo tetap terhadap waktu (Boyce dkk, 2017). Grafik fase dari sistem tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.6 Grafik Fase dengan Lintasan Persamaan Van der Pol ($\mu = 1$) yang Menunjukkan Kondisi Limit Cycle Stabil (Boyce dkk, 2017).

Pada grafik tersebut lintasan dimulai dari kondisi awal dalam *limit cycle* bergerak keluar, sedangkan lintasan dari luar bergerak masuk. Sehingga, semua lintasan mencapai lintasan tertutup yang stabil

Dengan demikian, berbagai bentuk perilaku sistem dalam grafik fase tersebut bergantung pada nilai parameter dan titik kesetimbangan, sehingga grafik fase dapat memvisualisasikan kemungkinan perilaku yang terjadi pada sistem terhadap perubahan nilai parameter dan kestabilan titik kesetimbangan.

2.3 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran

Hubungan antara predator dan mangsa menjadi mekanisme untuk menjaga keseimbangan populasi makhluk hidup. Model *predator-prey* merupakan salah satu contoh bagaimana predator memangsa mangsanya hingga mencapai tingkat maksimum dengan efektif. Hal ini menunjukkan bahwa dalam ekosistem Allah SWT

telah merencanakan secara sempurna agar alam semesta dapat berfungsi dengan baik sesuai dengan kehendak-Nya. Dalam Al-Qur'an, Allah SWT menyatakan bahwa segala sesuatu di alam diciptakan secara berpasangan untuk menciptakan harmoni dan keseimbangan. Hal ini disebutkan dalam Surah Adz-Dzariyat [51]: 49 sebagai berikut.

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: “Dan Segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan agar kamu mengingat (kebesaran Allah).”

Ayat tersebut menunjukkan bahwa setiap ciptaan Allah memiliki fungsi yang saling melengkapi. Berdasarkan Tafsir Jalalain, ayat ini menegaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu secara berpasang pasangan, seperti langit dan bumi, siang dan malam, panas dan dingin, matahari dan bulan. Hal ini menggambarkan interaksi dua komponen yang saling melengkapi dan membentuk keseimbangan (Az-Zuhaili, 2013). Dalam ekologi, hubungan antara predator dan mangsa termasuk dalam interaksi dua komponen yang meskipun saling bertentangan, namun dapat berfungsi dalam menjaga stabilitas ekosistem. Hal ini menunjukkan bagaimana mekanisme alam telah diatur sedemikian mungkin oleh Allah untuk menjaga keseimbangan tanpa merusak komponen lain dalam ekosistem. Sama halnya dengan hidup dan mati, surga dan neraka, hubungan predator dan mangsa merupakan bentuk keseimbangan yang diciptakan Allah untuk menjaga keseimbangan ekosistem alam.

2.4 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Model *predator-prey* merupakan salah satu pendekatan yang sering digunakan dalam kajian ekologi, dimana interaksi antar predator dan mangsa

mempengaruhi keseimbangan ekosistem. Pada artikel Maiti dkk (2008) membahas mengenai model *predator-prey* tritrofik yang melibatkan tiga spesies yaitu mangsa $x(t)$, predator $y(t)$, dan superpredator $z(t)$. Model yang digunakan dalam penelitian ini bersifat nonlinier. Penelitian ini menganalisis tentang kestabilan populasi ketiga spesies yang didasarkan pada respon fungsional Holling Type II. Penggunaan respon fungsional Holling Type II dapat menunjukkan tingkat konsumsi predator meningkat pada saat populasi mangsa rendah, dan melambat akibat mencapai saturasi. Pendekatan ini dapat menginterpretasikan keseimbangan antara populasi spesies dan menemukan kondisi stabil atau tidak stabil pada sistem.

Selain itu, pengaruh eksternal gangguan lingkungan dan variasi parameter terhadap stabilitas ekologi menjadi hal penting dalam penelitian ini. Pada Maiti dkk (2008) juga menunjukan bahwa terjadi dinamika periodik, di mana perubahan parameter tertentu mengakibatkan osilasi populasi atau bahkan kepunahan. Penggunaan model ini juga dapat menggambarkan prediksi sistem ekologi yang nyata. Selain itu, juga dapat membantu menganalisis kestabilan populasi mangsa dan predator untuk menentukan kondisi tetap berada dalam keseimbangan. Stabilitas ekosistem dipengaruhi oleh rasio tingkat pertumbuhan mangsa dan kemampuan predator dalam menyesuaikan laju konsumsi terhadap mangsa. Jika rasio tidak seimbang, maka ekosistem akan mengalami gangguan, seperti ledakan populasi mangsa atau penurunan populasi predator.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode pendekatan kualitatif. Metode tersebut merupakan bentuk pendekatan yang berfokus pada studi literatur atau *library research*, dimana sumber informasi utamanya berasal dari artikel ilmiah, buku, dan dokumen relevan lainnya. Jenis penelitian ini digunakan untuk memahami bagaimana dinamika model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II berdasarkan teori-teori sebelumnya.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan sebelum memulai penelitian meliputi perencanaan yang terdiri dari mengkaji penelitian dari Maiti dkk (2008) untuk memperoleh pemahaman mengenai model *predator-prey*. Selanjutnya, memahami lebih dalam tentang isi dari penelitian tersebut. Kemudian, melakukan analisis untuk setiap variabel model untuk memahami bagaimana parameter biologis, seperti laju konsumsi, tingkat kematian, dan saturasi mempengaruhi pola interaksi dalam sistem.

3.3 Tahapan Penelitian

3.3.1 Penskalaan Model Predator-Prey

Tahapan yang dilakukan penulis dalam memformulasikan model *predator-prey* meliputi:

1. Mengkaji model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II dari penelitian Maiti dkk (2008).
2. Menetapkan variabel dan parameter dari model *predator-prey* tersebut.
3. Menyusun model sistem persamaan diferensial berdimensi
4. Melakukan penskalaan model *predator-prey* ke dalam bentuk tak berdimensi.
5. Menyusun model *predator-prey* dalam bentuk sistem persamaan diferensial tak berdimensi.

3.3.2 Analisis Titik Keseimbangan dan Kestabilan Model

Adapun tahapan untuk melakukan analisis dinamik pada model *predator-prey* yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan titik keseimbangan.
2. Melakukan linierisasi model untuk mendapatkan matriks Jacobian.
3. Mensubstitusikan nilai titik keseimbangan kedalam matriks Jacobian.
4. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Jacobian tersebut.
5. Mengidentifikasi jenis kestabilan titik keseimbangan berdasarkan nilai eigen dan vektor eigen.

3.3.3 Simulasi Numerik dan Analisis Dinamika Model

Adapun tahapan untuk melakukan simulasi numerik pada model *predator-prey* dengan menggunakan *software* Maple sebagai berikut:

1. Menginisialisasi model.

2. Memasukkan persamaan, nilai parameter dan kondisi awal ke dalam *software* Maple dalam bentuk sistem persamaan diferensial.
3. Menjalankan simulasi dengan memvariasikan nilai parameter, dan nilai awal populasi mangsa (prey), predator, dan superpredator.
4. Menampilkan hasil simulasi dalam bentuk grafik.
5. Menganalisis hasil simulasi.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Proses Penskalaan pada Model Predator-Prey

Model *predator-prey* yang dianalisis pada penelitian ini terdiri dari tiga kompartemen, yaitu populasi mangsa $X(T)$, populasi predator $Y(T)$, dan populasi superpredator $Z(T)$ dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II.

$$\begin{aligned}\frac{dX(T)}{dT} &= rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K}\right) - \frac{B_1 X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)}, \quad X(0) > 0 \\ \frac{dY(T)}{dT} &= \frac{C_1 X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)} - D_1 Y(T) - \frac{B_2 Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)}, \quad Y(0) > 0 \\ \frac{dZ(T)}{dT} &= \frac{C_2 Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)} - D_2 Z(T), \quad Z(0) > 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Model yang dianalisis pada (4.1) melibatkan sejumlah besar parameter, sehingga sulit untuk dilakukan analisis. Oleh karena itu, pengurangan parameter dan penentuan kombinasi parameter yang sesuai perlu dilakukan untuk mengontrol perilaku sistem.

Pada tahapan ini di tentukan skala karakteristik untuk masing-masing variabel. Skala populasi dipilih berdasarkan kapasitas lingkungan K , sedangkan skala waktu berdasarkan laju pertumbuhan intrinsik *prey* r . Kemudian, sistem dinondimensionalkan menggunakan persamaan berikut.

$$x(t) = \frac{X(T)}{K}, \quad y(t) = \frac{Y(T)}{K}, \quad z(t) = \frac{Z(T)}{K} \quad \text{dan} \quad t = rT$$

Maka, sistem diferensial yang semula dalam bentuk

$$\frac{dX(T)}{dT} = rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K}\right) - \frac{B_1 X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)}$$

Untuk mempermudah proses nondimensionalisasi, pada tahap ini dilakukan pemisalan notasi

$$X(T) \equiv X, Y(T) \equiv Y, Z(T) \equiv Z, x(t) \equiv x, y(t) \equiv y, z(t) \equiv z$$

Sehingga dapat disubstitusikan $X = xK$, $Y = yK$, dan $T = \frac{t}{r}$ ke dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{B_1XY}{A_1 + X} \\ \frac{d(xK)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} &= rxK \left(1 - \frac{xK}{K}\right) - \frac{B_1xKyK}{A_1 + xK} \\ rK \frac{dx}{dt} &= rKx(1 - x) - \frac{B_1K^2xy}{A_1 + xK}\end{aligned}$$

bagi kedua ruas dengan rK , sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{B_1Kxy}{r(A_1 + xK)}$$

Kemudian penyebut difaktorkan untuk memperoleh bentuk tak berdimensi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{B_1K}{r} \cdot \frac{xy}{A_1 + xK} \\ \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{B_1K}{r} \cdot \frac{xy}{A_1 \left(1 + \frac{K}{A_1}x\right)} \\ \frac{dx}{dt} &= x(1 - x) - \frac{B_1K}{rA_1} \cdot \frac{xy}{1 + \frac{K}{A_1}x}\end{aligned}$$

Sehingga didapat parameter baru, yaitu

$$a = \frac{K}{A_1}, \quad c = \frac{B_1K}{rA_1}$$

Kemudian, mensubstitusikan parameter a dan c , diperoleh persamaan menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{cxy}{1 + ax} \quad (4.2)$$

Transformasi serupa dilakukan pada persamaan kedua, yaitu:

$$\frac{dY}{dT} = \frac{C_1XY}{A_1 + X} - D_1Y - \frac{B_2YZ}{A_2 + Y}$$

Substitusikan $X = xK$, $Y = yK$, $Z = zK$ dan $T = \frac{t}{r}$ ke dalam persamaan tersebut:

$$\frac{d(yK)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} = \frac{C_1xKyK}{A_1 + xK} - D_1yK - \frac{B_2yKzK}{A_2 + yK}$$

$$rK \frac{dy}{dt} = \frac{C_1K^2xy}{A_1 + xK} - D_1y - \frac{B_2K^2yz}{A_2 + yK}$$

Bagi kedua ruas dengan rK , sehingga

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1K}{r} \cdot \frac{xy}{A_1 + xK} - \frac{D_1y}{r} - \frac{B_2K}{r} \cdot \frac{yz}{A_2 + yK}$$

Kemudian faktorkan penyebut

$$A_1 + xK = A_1 \left(1 + \frac{K}{A_1}x\right), \quad A_2 + yK = A_2 \left(1 + \frac{yK}{A_2}\right)$$

sehingga menjadi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1K}{r} \cdot \frac{xy}{A_1 \left(1 + \frac{K}{A_1}x\right)} - \frac{D_1y}{r} - \frac{B_2K}{r} \cdot \frac{yz}{A_2 \left(1 + \frac{K}{A_2}y\right)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1K}{rA_1} \cdot \frac{xy}{1 + \frac{K}{A_1}x} - \frac{D_1y}{r} - \frac{B_2K}{rA_2} \cdot \frac{yz}{1 + \frac{K}{A_2}y}$$

Sehingga didapat parameter baru, yaitu

$$m = \frac{C_1K}{rA_1}, \quad d = \frac{D_1}{r}, \quad p = \frac{B_2K}{rA_2}, \quad b = \frac{K}{A_2}$$

Kemudian, mensubstitusikan parameter m , a , d , p dan b , diperoleh persamaan menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mxy}{1+ax} - dy - \frac{pyz}{1+by} \quad (4.3)$$

Selanjutnya, dengan pendekatan yang sama pada persamaan ketiga pada model berikut:

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{C_2YZ}{A_2 + Y} - D_2Z$$

Kemudian substitusikan $Y = yK$, $Z = zK$ dan $T = \frac{t}{r}$, sehingga:

$$\frac{d(zK)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} = \frac{C_2yK \cdot zK}{A_2 + yK} - D_2zK$$

$$rK \frac{dz}{d} = \frac{C_2K^2yz}{A_2 + yK} - D_2zK$$

Bagi kedua ruas dengan rK , diperoleh:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_2K}{r} \cdot \frac{yz}{A_2 + yK} - \frac{D_2z}{r}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_2K}{r} \cdot \frac{yz}{A_2 \left(1 + \frac{K}{A_2}y\right)} - \frac{D_2z}{r}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_2K}{rA_2} \cdot \frac{yz}{1 + \frac{K}{A_2}y} - \frac{D_2z}{r}$$

Sehingga didapat parameter baru, yaitu

$$q = \frac{C_2K}{rA_2}, \quad \mu = \frac{D_2}{r}$$

Kemudian, mensubstitusikan parameter q , b , dan μ , diperoleh persamaan menjadi:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{qyz}{1+by} - \mu z \quad (4.4)$$

Pemisalan notasi (t) hanya digunakan pada tahap nondimensionalisasi, untuk selanjutnya untuk menjaga konsistensi penulisan model notasi (t) akan digunakan

kembali. Dengan demikian, seluruh sistem model telah berhasil ditransformasikan ke bentuk nondimensional, sehingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} = xF(x, y), \quad x(0) > 0, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1 + by(t)} = yG(x, y, z), \quad y(0) > 0, \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{qy(t)z(t)}{1 + by(t)} - \mu z(t) = zH(y), \quad z(0) > 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Model ini merepresentasikan interaksi antarspesies secara lebih sederhana dan tidak merubah dinamika biologisnya. Sistem ini akan digunakan sebagai dasar dalam analisis selanjutnya.

4.2 Analisis Dinamik Model Predator-Prey

Dalam penelitian ini, penulis akan menganalisis model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II berdasarkan pada artikel Maiti dkk, 2008 dengan model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1 + by(t)} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{qy(t)z(t)}{1 + by(t)} - \mu z(t)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Nilai parameter yang digunakan pada sistem persamaan diferensial dari model *predator-prey* tersebut seluruhnya mengacu pada Maiti dkk, (2008). Selain itu, untuk memperluas cakupan analisis, khususnya pada analisis sensitivitas, maka pada simulasi kedua dilakukan modifikasi nilai parameter yaitu pada variabel m . Perubahan nilai parameter m ini dilakukan bertujuan untuk melihat pengaruh

perubahan laju konversi predator terhadap dinamika sistem. Dengan demikian, berikut rincian nilai parameter yang digunakan pada model *predator-prey* tersebut yaitu:

Tabel 4.1 Deskripsi Nilai Variabel dan Nilai Parameter

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber	Nilai Modifikasi
$x(0)$	Populasi mangsa (Prey)	0.5	(Maiti dkk, 2008)	0.5
$y(0)$	Populasi predator	0.5	(Maiti dkk, 2008)	0.5
$z(0)$	Populasi superpredator	4	(Maiti dkk, 2008)	4
c	Laju konsumsi maksimum predator terhadap mangsa	1.5	(Maiti dkk, 2008)	1.5
m	Efisiensi konversi mangsa menjadi predator	2.5	(Maiti dkk, 2008)	4.35
p	Laju konsumsi maksimum superpredator terhadap predator	0.05	(Maiti dkk, 2008)	0.05
q	Efisiensi konversi predator menjadi superpredator	0.3	(Maiti dkk, 2008)	0.3
a	Efek saturasi pada interaksi predator	3	(Maiti dkk, 2008)	3
b	Efek saturasi pada interaksi superpredator	0.4	(Maiti dkk, 2008)	0.4

d	Laju kematian alami predator	0.4	(Maiti dkk, 2008)	0.4
μ	Laju kematian alami superpredator	0.075	(Maiti dkk, 2008)	0.075

4.3 Penentuan Titik Keseimbangan Model Predator-Prey

4.3.1 Pada Titik Keseimbangan Pertama

Pada titik keseimbangan awal, untuk mencari titiknya langkah pertama maka perlu dilakukannya $\frac{dx(t)}{dt} = 0$, $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ dan $\frac{dz(t)}{dt} = 0$ pada persamaan (4.6) sehingga diperoleh:

$$x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} = 0 \quad (4.7a)$$

$$\frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1 + by(t)} = 0 \quad (4.7b)$$

$$\frac{qy(t)z(t)}{1 + by(t)} - \mu z(t) = 0 \quad (4.7c)$$

Jika menetapkan turunan persamaan (4.7a), maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} &= 0 \\ x(t) \left((1 - x(t)) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} \right) &= 0 \\ x(t) = 0 \quad \text{atau} \quad (1 - x(t)) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dengan mengambil langkah lebih lanjut dari persamaan (4.7b) dengan mendefinisikan $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ dengan $x(t) = 0$ sesuai dengan persamaan (4.8), maka persamaan tersebut berubah menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{mx(t)y(t)}{1+ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1+by(t)} = 0 \\
& y(t) \left(\frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d - \frac{pz(t)}{1+by(t)} \right) = 0 \\
& y(t) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d - \frac{pz(t)}{1+by(t)} = 0 \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.7c) didefinisikan sebagai $\frac{dz(t)}{dt} = 0$ dengan $x(t) =$

0 dan $y(t) = 0$, maka persamaan tersebut berubah menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{qy(t)z(t)}{1+by(t)} - \mu z(t) = 0 \\
& z(t) \left(\frac{qy(t)z(t)}{1+by(t)} - \mu \right) = 0 \\
& z(t) = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{qy(t)}{1+by(t)} - \mu = 0 \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan titik kesetimbangan yang pertama yang memenuhi persamaan (4.5) adalah $E_0 = (0,0,0)$. Pernyataan ini membuktikan bahwa ketika tidak ada populasi mangsa, maka proses rantai makanan terputus menandakan populasi predator dan superpredator tidak bisa bertahan hidup.

4.3.2 Pada Titik Kesetimbangan Kedua

Pada titik ini, menentukan titik kesetimbangan dengan menggunakan persamaan (4.7c) dengan mensubstitusikan $y(t) = 0$ sesuai dengan persamaan (4.9), maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{(qy(t)z(t))}{(1+by(t))} - \mu z(t) = 0 \\
& \frac{(q(0)z(t))}{(1+by(t))} - \mu z(t) = 0
\end{aligned}$$

$$-\mu z(t) = 0$$

$$z(t) = 0$$

Selanjutnya, persamaan (4.7a) dengan mendefinisikan $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ dan dengan menetapkan $y(t) = 0$ berdasarkan persamaan (4.9), maka

$$x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)(0)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$x(t)(1 - x(t)) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \text{dan} \quad 1 - x(t) = 0$$

$$x(t) = 1$$

Sehingga ditetapkan titik kesetimbangan kedua yang memenuhi persamaan (4.5) adalah $E_1 = (1,0,0)$.

4.3.3 Pada Titik Kesetimbangan Ketiga

Pada titik ini, langkah pertama mendefinisikan $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ pada persamaan (4.7b), maka persamaan menjadi:

$$\frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1 + by(t)} = 0$$

$$\frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) = 0$$

$$y(t) \left(\frac{mx(t)}{1 + ax(t)} - d \right) = 0$$

$$y(t) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{mx(t)}{1 + ax(t)} - d = 0$$

$$\frac{mx(t)}{1+ax(t)} = d$$

$$mx(t) = d + ax(t)d$$

Sehingga diperoleh

$$x(t)(m - ad) = d \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{d}{m - ad} \quad (4.11)$$

Pada persamaan (4.7a) didefinisikan $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ dengan $x(t) = \frac{d}{m-ad}$ sesuai

dengan persamaan (4.11), maka persamaan tersebut menjadi

$$x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$x(t) \left((1 - x(t)) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} \right) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \text{atau} \quad 1 - x(t) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$1 - x(t) = \frac{cy(t)}{1 + ax(t)}$$

Kemudian substitusikan $x(t) = \frac{d}{m-ad}$:

$$1 - \frac{d}{m - ad} = \frac{cy(t)}{1 + \frac{ad}{m - ad}}$$

$$\frac{m - ad - d}{m - ad} = \frac{cy(t)}{\frac{m - ad + ad}{m - ad}}$$

$$\left(\frac{m - ad - d}{m - ad} \right) \left(\frac{m}{m - ad} \right) = cy(t)$$

$$\frac{m(m - ad - d)}{(m - ad)^2} = cy(t)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{m(m - ad - d)}{c(m - ad)^2} = y(t) \quad (4.12)$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan ketiga diperoleh $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ dimana

$$\hat{x} = \frac{d}{m-ad} \text{ dan } \hat{y} = \frac{m(m-ad-d)}{c(m-ad)^2}.$$

4.3.4 Pada Titik Kesetimbangan Keempat

Pada titik kesetimbangan keempat, langkah awal dengan menggunakan persamaan (4.7a) sampai (4.7c) tersebut yang didefinisikan dengan $\frac{dx(t)}{dt} =$

$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt} = 0$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{qy(t)z(t)}{1 + by(t)} - \mu z(t) = 0$$

$$z(t) \left(\frac{qy(t)}{1 + by(t)} - \mu \right) = 0$$

$$z(t) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{qy(t)}{1 + by(t)} - \mu = 0$$

$$\frac{qy(t)}{1 + by(t)} = \mu$$

$$qy(t) = \mu(1 + by(t))$$

$$qy(t) = \mu + \mu by(t)$$

$$qy(t) - \mu by(t) = \mu$$

$$y(t)(q - \mu b) = \mu$$

Maka diperoleh nilai $y(t)$ dari persamaan (4.7c)

$$y(t) = \frac{\mu}{(q - \mu b)} \quad (4.13a)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.13a) ke persamaan (4.7a)

$$x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$x(t) \left((1 - x(t)) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} \right) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \text{atau} \quad (1 - x(t)) - \frac{cy(t)}{1 + ax(t)} = 0$$

$$(1 - x(t)) = \frac{cy(t)}{1 + ax(t)}$$

$$(1 - x(t))(1 + ax(t)) = cy(t)$$

$$(1 - x(t))(1 + ax(t)) = \frac{c\mu}{(q - b\mu)}$$

$$1 + ax(t) - x(t) - a(x(t))^2 = \frac{c\mu}{(q - b\mu)}$$

$$-a(x(t))^2 + (a - 1)x(t) + \left(1 - \frac{c\mu}{(q - b\mu)}\right) = 0$$

Selanjutnya, gunakan rumus kuadrat untuk menyelesaikan persamaan tersebut untuk mendapatkan nilai x^* dengan melakukan pemisalan sebagai berikut:

$$A = -a$$

$$B = a - 1$$

$$C = 1 - \frac{c\mu}{(q - b\mu)}$$

Sehingga,

$$x(t) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$x(t) = \frac{-(a - 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 - 4(-a) \left(1 - \frac{c\mu}{q - b\mu}\right)}}{2(-a)}$$

$$x(t) = \frac{-(a - 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 + 4a \left(\frac{q - \mu(b + c)}{q - b\mu}\right)}}{-2a}$$

Misalkan $A = \sqrt{(a-1)^2 + 4a \left(\frac{q-\mu(b+c)}{q-b\mu} \right)}$, maka diperoleh

$$x(t) = \frac{A + a - 1}{2a} \quad (4.13b)$$

Kemudian untuk mencari nilai z^* , gunakan persamaan (4.7b)

$$\begin{aligned} \frac{mx(t)y(t)}{1+ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1+by(t)} &= 0 \\ y(t) \left(\frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d - \frac{pz(t)}{1+by(t)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$y(t) = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d - \frac{pz(t)}{1+by(t)} = 0$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.13a) dan persamaan (4.13b) ke dalam persamaan di atas, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d - \frac{pz(t)}{1+by(t)} &= 0 \\ \frac{mx(t)}{1+ax(t)} - d &= \frac{pz(t)}{1+by(t)} \\ \frac{m \left(\frac{A+a-1}{2a} \right)}{1+a \left(\frac{A+a-1}{2a} \right)} - d &= \frac{pz(t)}{1+b \left(\frac{\mu}{q-b\mu} \right)} \\ \frac{m \left(\frac{A+a-1}{2a} \right)}{1+\frac{A+a-1}{2}} - d &= \frac{pz(t)}{\frac{q-b\mu+b\mu}{q-b\mu}} \\ \frac{m \left(\frac{A+a-1}{2a} \right)}{\frac{A+a+1}{2}} - d &= \frac{pz(t)}{\frac{q}{q-b\mu}} \\ m \left(\frac{A+a-1}{2a} \right) \left(\frac{2}{A+a+1} \right) - d &= \frac{pz(t)(q-b\mu)}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m(A+a-1)}{a(A+a+1)} - d &= \frac{pz(t)(q-bu)}{q} \\
\frac{m(A+a-1) - d(A+a+1)}{a(A+a+1)} &= \frac{pz(t)(q-bu)}{q} \\
\frac{q\{(A+a)(m-ad) + d - m\}}{ap(q-b\mu)(A+a+1)} &= z(t)
\end{aligned} \tag{4.13c}$$

Dengan demikian titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*, z^*)$ dari persamaan (4.7a) sampai (4.7c) adalah sebagai berikut:

$$x^* = \frac{A+a-1}{2a}, \quad y^* = \frac{\mu}{q-b\mu}, \quad z^* = \frac{q\{(A+a)(m-ad) + d - m\}}{ap(q-b\mu)(A+a+1)}$$

4.4 Linierisasi Model

Linierisasi model merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengubah persamaan diferensial nonlinier menjadi bentuk linier untuk mempermudah analisis. Hal ini dilakukan dengan melakukan ekspansi deret Tylor dan menghilangkan suku nonlinier di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan persamaan pada persamaan (4.6) berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{cxy}{1+ax} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{mxy}{1+ax} - dy - \frac{pyz}{1+by} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{qyz}{1+by} - \mu z
\end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan sebagai

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= x(1-x) - \frac{cxy}{1+ax} \\
f_2(x, y, z) &= \frac{mxy}{1+ax} - dy - \frac{pyz}{1+by}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{qyz}{1 + by} - \mu z$$

Sehingga persamaan (4.6) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x, y, z) \\ \dot{y}(t) &= f_2(x, y, z) \\ \dot{z}(t) &= f_3(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.15}$$

Selanjutnya, dilakukan linierisasi dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &\approx f_1(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y(t) - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z(t) - z^*)\end{aligned}\tag{4.16a}$$

$$\begin{aligned}f_2(x, y, z) &\approx f_2(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y(t) - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z(t) - z^*)\end{aligned}\tag{4.16b}$$

$$\begin{aligned}f_3(x, y, z) &\approx f_3(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f_3}{\partial x}(x^*, y^*, z^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial y}(x^*, y^*, z^*)(y(t) - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)(z(t) - z^*)\end{aligned}\tag{4.16c}$$

dimana,

$$f_1(x^*, y^*, z^*) = x^*(1 - x^*) - \frac{cx^*y^*}{1 + ax^*}\tag{4.17a}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) = 1 - 2x^* - \frac{cy^*}{1 + ax^*} + \frac{cax^*y^*}{(1 + ax^*)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) = -\frac{cx^*}{1 + ax^*}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) = 0$$

$$f_2(x^*, y^*, z^*) = \frac{mx^*y^*}{1 + ax^*} - dy^* - \frac{py^*z^*}{1 + by^*} \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) = \frac{my^*}{1 + ax^*} - \frac{max^*y^*}{(1 + ax^*)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) = \frac{mx^*}{1 + ax^*} - d - \frac{pz^*}{1 + by^*} + \frac{pby^*z^*}{(1 + by^*)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) = -\frac{py^*}{1 + by^*}$$

$$f_3(x^*, y^*, z^*) = \frac{qy^*z^*}{1 + by^*} - \mu z^* \quad (4.17c)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x^*, y^*, z^*) = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) = \frac{qz^*}{1 + by^*} - \frac{qby^*z^*}{(1 + by^*)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x^*, y^*, z^*) = \frac{qy^*}{1 + by^*} - \mu$$

Maka diperoleh hasil linierisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \approx & x^*(1 - x^*) - \frac{cx^*y^*}{1 + ax^*} \\ & + \left(1 - 2x^* - \frac{cy^*}{1 + ax^*} + \frac{cax^*y^*}{(1 + ax^*)^2}\right)(x(t) - x^*) \\ & - \left(\frac{cx^*}{1 + ax^*}\right)(y(t) - y^*) \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) \approx & \frac{mx^*y^*}{1+ax^*} - dy^* - \frac{py^*z^*}{1+by^*} \\
& + \left(\frac{my^*}{1+ax^*} - \frac{max^*y^*}{(1+ax^*)^2} \right) (x(t) - x^*) \\
& + \left(\frac{mx^*}{1+ax^*} - d - \frac{pz^*}{1+by^*} + \frac{pby^*z^*}{(1+by^*)^2} \right) (y(t) - y^*) \\
& - y^*) - \left(\frac{py^*}{1+by^*} \right) (z(t) - z^*)
\end{aligned} \tag{4.18b}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) \approx & \frac{qy^*z^*}{1+by^*} - \mu z^* + \left(\frac{qz^*}{1+by^*} - \frac{qby^*z^*}{(1+by^*)^2} \right) (y(t) - y^*) \\
& + \left(\frac{qy^*}{1+by^*} - \mu \right) (z(t) - z^*)
\end{aligned} \tag{4.18c}$$

4.5 Analisis Kestabilan pada Titik Keseimbangan

Untuk memastikan stabilitas pada titik keseimbangan, maka diperlukannya nilai eigen dari titik keseimbangan dengan menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian diperoleh dari persamaan linier berikut ini.

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{cy}{1+ax} + \frac{caxy}{(1+ax)^2} & -\frac{cx}{1+ax} & 0 \\ \frac{my}{1+ax} - \frac{maxy}{(1+ax)^2} & \frac{mx}{1+ax} - d - \frac{pz}{1+by} + \frac{pbyz}{(1+by)^2} & -\frac{py}{1+by} \\ 0 & \frac{qz}{1+by} - \frac{qbyz}{(1+by)^2} & \frac{qy}{1+by} - \mu \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Berdasarkan matriks Jacobian yang diperoleh, diperlukannya analisis terhadap stabilitas sebagai berikut:

4.5.1 Titik Keseimbangan Pertama

Titik Keseimbangan pertama yaitu $E_0 = (0,0,0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (4.19), sehingga diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dengan matriks Jacobian di atas, maka nilai eigen dapat dicari dengan:

$$\begin{aligned} & \det (J(E_0) - \lambda I) \\ \Leftrightarrow & \det \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu-\lambda \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (1-\lambda) \cdot (-d-\lambda) \cdot (-\mu-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -d \\ \lambda_3 &= -\mu \end{aligned} \quad (4.21)$$

Berdasarkan hasil nilai eigen tersebut, diperoleh nilai eigen 1, $-d$, dan $-\mu$.

Nilai eigen dikatakan stabil apabila semua nilai eigen memiliki riil negatif. Maka dapat disimpulkan bahwa untuk titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$ tidak stabil. Hal ini dikarenakan adanya satu nilai yang bersifat riil positif.

4.5.2 Titik Kesetimbangan Kedua

Titik Kesetimbangan kedua yaitu $E_1 = (1,0,0)$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (4.19), sehingga diperoleh:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{c}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{m}{a+1} - d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dengan menggunakan matriks Jacobian tersebut, maka nilai eigen dapat dicari dengan:

$$\begin{aligned} & \det(J(E_1) - \lambda I) \\ \Leftrightarrow & \det \left[\begin{bmatrix} -1 & -\frac{c}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{m}{a+1} - d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \left[\begin{bmatrix} -1 & -\frac{c}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{m}{a+1} - d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{c}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{m}{a+1} - d - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (-1 - \lambda) \cdot \left(\frac{m}{a+1} - d - \lambda \right) \cdot (-\mu - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Maka, diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{a+1} - d \quad (4.23)$$

$$\lambda_3 = -\mu$$

Berdasarkan hasil nilai eigen tersebut, diperoleh nilai eigen yaitu -1 , $\frac{m}{a+1} - d$, dan $-\mu$. Pada nilai eigen untuk $\lambda_2 = \frac{m}{a+1} - d$ bisa bernilai positif atau negatif.

Sehingga dibutuhkan syarat kestabilan yaitu jika $\lambda_2 < 0 \Rightarrow \frac{m}{a+1} - d < 0$

artinya $m < (a + 1)d$, maka semua nilai eigen bernilai negatif. Sehingga untuk titik kesetimbangan $E_1 = (1,0,0)$ dapat dikatakan stabil. Namun, apabila $\lambda_2 > 0 \Rightarrow \frac{m}{a+1} - d > 0$, maka titik kesetimbangan menjadi tidak stabil.

4.5.3 Titik Kesetimbangan Ketiga

Pada titik kesetimbangan selanjutnya yaitu $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$, pertama lakukan substitusi ke dalam persamaan (4.19). Dimana pada kondisi E_2 untuk mencari matriks Jacobian didefinisikan sebagai $\hat{x} = \frac{d}{m-ad}$ sesuai dengan persamaan (4.11), dan $\hat{y} = \frac{m(m-ad-d)}{c(m-ad)^2}$ sesuai dengan persamaan (4.12). pada titik kesetimbangan E_2 , persamaan kesetimbangan dari sistem mem sehingga diperoleh

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\hat{x} + \frac{ca\hat{x}\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & -\frac{c\hat{x}}{1+a\hat{x}} & 0 \\ \frac{m\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & 0 & -\frac{p\hat{y}}{1+b\hat{y}} \\ 0 & 0 & \frac{q\hat{y}}{1+b\hat{y}} - \mu \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Berdasarkan matriks Jacobian di atas, dikarenakan matriks yang diperoleh tidak termasuk ke dalam struktur segitiga, maka diperlukannya untuk mencari persamaan karakteristik dari

$$\det(J(E_2) - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left[\begin{bmatrix} -\hat{x} + \frac{ca\hat{x}\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & -\frac{c\hat{x}}{1+a\hat{x}} & 0 \\ \frac{m\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & 0 & -\frac{p\hat{y}}{1+b\hat{y}} \\ 0 & 0 & \frac{q\hat{y}}{1+b\hat{y}} - \mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left[\begin{array}{ccc} -\hat{x} + \frac{ca\hat{x}\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & -\frac{c\hat{x}}{1+a\hat{x}} & 0 \\ \frac{m\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} & 0 & -\frac{p\hat{y}}{1+b\hat{y}} \\ 0 & 0 & \frac{q\hat{y}}{1+b\hat{y}} - \mu \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian lakukan penyederhanaan persamaan menjadi

$$\Leftrightarrow \det \left[\begin{array}{ccc} -v_{11} & -v_{12} & 0 \\ v_{21} & 0 & -v_{23} \\ 0 & 0 & v_{33} \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan

$$v_{11} = \hat{x} + \frac{ca\hat{x}\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} \qquad v_{12} = \frac{c\hat{x}}{1+a\hat{x}}$$

$$v_{21} = \frac{m\hat{y}}{(1+a\hat{x})^2} \qquad v_{23} = \frac{p\hat{y}}{1+b\hat{y}}$$

$$v_{33} = \frac{q\hat{y}}{1+b\hat{y}} - \mu$$

Sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \det \left[\begin{array}{ccc} -v_{11} - \lambda & -v_{12} & 0 \\ v_{21} & -\lambda & -v_{23} \\ 0 & 0 & v_{33} - \lambda \end{array} \right] = 0$$

Berdasarkan matriks tersebut pada baris dan kolom ketiga yaitu $v_{33} - \lambda$ berinteksi terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, $\det(J - \lambda I)$ dapat difaktorkan menjadi sebagai berikut:

$$\det(J - \lambda I) = (v_{33} - \lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -v_{11} - \lambda & -v_{12} \\ v_{21} & -\lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, hitung submatriks 2×2 :

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -v_{11} - \lambda & -v_{12} \\ v_{21} & -\lambda \end{bmatrix} &= (-v_{11} - \lambda)(-\lambda) - (-v_{12})(v_{21}) \\ &= \lambda^2 + v_{11}\lambda + v_{12}v_{21} \end{aligned}$$

Jadi determinan keseluruhan menjadi sebagai berikut:

$$\det(J - \lambda I) = (v_{33} - \lambda)(\lambda^2 + v_{11}\lambda + v_{12}v_{21})$$

Dengan demikian, maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut

1. Untuk nilai eigen dari faktor kuadrat

$$A = 1$$

$$B = v_{11}$$

$$C = v_{12}v_{21}$$

Sehingga

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4(1)C}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

dengan

$$B = \hat{x} + \frac{ca\hat{x}\hat{y}}{(1 + a\hat{x})^2} = \hat{x} \left(1 + \frac{ca\hat{y}}{(1 + a\hat{x})^2} \right)$$

kemudian substitusikan persamaan $1 - \hat{x} = \frac{c\hat{y}}{1 + a\hat{x}}$

sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned} B &= \hat{x} \left(1 + \frac{ca\hat{y}}{1 + a\hat{x}} \cdot \frac{1}{1 + a\hat{x}} \right) & C &= \left(\frac{c\hat{x}}{1 + a\hat{x}} \right) \left(\frac{m\hat{y}}{(1 + a\hat{x})^2} \right) \\ &= \hat{x} \left(1 + \frac{a(1 - \hat{x})}{1 + a\hat{x}} \right) & &= \frac{cm\hat{x}\hat{y}}{(1 + a\hat{x})^3} \\ &= \hat{x} \left(\frac{1 + a\hat{x} + a - a\hat{x}}{1 + a\hat{x}} \right) \\ &= \hat{x} \frac{(1 + a)}{1 + a\hat{x}} \end{aligned}$$

2. Untuk nilai eigen dari faktor linier

$$\lambda_3 = v_{33} = \frac{q\hat{y}}{1 + b\hat{y}} - \mu$$

Dengan demikian, nilai eigen dari E_2 adalah sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{q\hat{y}}{1 + b\hat{y}} - \mu \quad (4.25)$$

Berdasarkan hasil nilai eigen tersebut, diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-v_{11} \pm \sqrt{(v_{11})^2 - 4v_{12}v_{21}}}{2} \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = \frac{q\hat{y}}{1+b\hat{y}} - \mu .$$

Titik kesetimbangan $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ dikatakan stabil asimtotik lokal apabila seluruh nilai eigen bernilai negatif, dimana hal ini terjadi apabila memenuhi syarat kestabilan yaitu $\lambda_3 < 0, B = -v_{11} > 0$ dan $C = v_{12}v_{21} > 0$.

4.5.4 Titik Kesetimbangan Keempat

Pada bagian ini, titik kesetimbangan yang digunakan merupakan titik interior. Titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, z^*)$ disubstitusikan kedalam matriks (4.19). Kemudian, dilakukan penyederhanaan pada matriks, sehingga diperoleh bentuk matriks sebagai berikut:

$$V(E^*) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

dengan

$$v_{11} = x^* \left\{ -1 + \frac{acy^*}{(1 + ax^*)^2} \right\} \quad v_{12} = -\frac{cx^*}{1 + ax^*}$$

$$\begin{aligned}
v_{21} &= \frac{my^*}{(1+ax^*)^2} & v_{22} &= \frac{pby^*z^*}{(1+by^*)^2} \\
v_{23} &= -\frac{py^*}{1+by^*} & v_{32} &= \frac{qz^*}{(1+by^*)^2}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan matriks Jacobian tersebut, maka nilai eigen dapat dicari dengan:

$$\begin{aligned}
& \det(V(E^*) - \lambda I) \\
& \Leftrightarrow \det \left[\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \\
& \Leftrightarrow \det \left[\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ 0 & v_{32} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] \\
& \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} v_{11} - \lambda & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} - \lambda & v_{23} \\ 0 & v_{32} & -\lambda \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow (v_{11} - \lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} v_{22} - \lambda & v_{23} \\ v_{32} & -\lambda \end{bmatrix} - v_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} v_{21} & v_{23} \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow (v_{11} - \lambda)(-\lambda(v_{22} - \lambda) - v_{23}v_{32}) + v_{12}v_{21}\lambda
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\det(V(E^*) - \lambda I) = \lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$$

Dengan

$$\begin{aligned}
A_1 &= -v_{11} - v_{22} \\
A_2 &= v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} \\
A_3 &= v_{11}v_{23}v_{32}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Selanjutnya, untuk menganalisis kestabilan, maka diperlukannya syarat berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz agar semua akar persamaan bernilai negatif, yaitu:

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta > 0$$

Dengan

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv A_1 A_2 - A_3 \\ &= -(v_{11} + v_{22})(v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21} - v_{23} v_{32}) + v_{11} v_{23} v_{32} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan untuk $E_3(x^*, y^*, z^*)$ dinyatakan stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat Routh-Hurwitz, yaitu $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$, dan $\Delta = A_1 A_2 - A_3 > 0$. Apabila syarat ini terpenuhi, maka semua akar polinomial karakteristik bernilai negatif, sehingga titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, z^*)$ bersifat stabil.

Berdasarkan keempat titik kesetimbangan yang diperoleh sebelumnya, tidak semua titik kesetimbangan tersebut selalu bermakna secara biologis. Oleh karena itu, diperlukan konsep eksistensi titik kesetimbangan. Eksistensi menunjukkan apakah nilai populasi pada titik kesetimbangan tidak bernilai negatif, sehingga memungkinkan terjadinya secara biologis. Pada model ini terdapat titik kesetimbangan yang selalu eksis dan titik kesetimbangan yang konsistensinya bergantung dengan parameter tertentu. Berikut adalah tabel yang menyajikan eksistensi dan kestabilan dari keempat titik kesetimbangan.

Tabel 4. 2 Syarat Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Respon Fungsional Holling Type II

Titik Keseimbangan	Eksistensi	Syarat Kestabilan	Keterangan
$E_0(0,0,0)$	Selalu ada	-	Tidak stabil
$E_1(1,0,0)$	Selalu ada	$m < (a + 1)d$	Stabil

$E_2(\hat{x}, \hat{y}, 0)$	Ada jika: $m > (a + 1)d$	$\frac{qy}{1 + by} < \mu$, $B > 0, C > 0$	Stabil
$E_3(x^*, y^*, z^*)$	Ada jika: $q > (b + c)\mu$ $m > \frac{ad(A + a + 1)}{A + a - 1}$ dengan $A =$ $\sqrt{(1 - a)^2 + 4a \left(\frac{q - \mu(b + c)}{q - b\mu} \right)}$	Jika memenuhi kriteria Routh- Hurwitz: $A_1 > 0$ $A_3 > 0$ $\Delta > 0$	Stabil asimtotik lokal

Berdasarkan Tabel 4.2, dapat diketahui kondisi eksistensi dan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan yang diperoleh. Dari keempat titik kesetimbangan tersebut, analisis numerik difokuskan pada titik kesetimbangan interior yaitu E_3 , dikarenakan hanya pada titik ini yang merepresentasikan keadaan eksistensi untuk ketiga populasi secara bersamaan, sehingga dinamika sistem yang paling sesuai secara biologis maupun matematis terjadi di sekitar titik tersebut.

4.6 Analisis Numerik dan Simulasi Model

Penelitian ini menggambarkan kondisi simulasi numerik, yang akan menyajikan dua simulasi dari persamaan (4.6) dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Table 4.1. Hal ini bertujuan untuk mengetahui apakah titik kesetimbangan stabil atau tidak. Pada simulasi ini berfokus pada model *predator-prey* dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II tanpa menggunakan waktu tunda, yang diselesaikan dengan menggunakan *software* Maple. Simulasi pertama, memvisualisasikan perilaku dinamis dari model rantai makanan tritrofik

dengan menggunakan nilai parameter yang tercantum pada Tabel 4.1 yang diambil dari Maiti dkk, (2008). Simulasi ini digunakan untuk untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan, serta melihat seberapa besar pengaruh parameter mempengaruhi populasi tersebut. Begitu pula untuk simulasi kedua, dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang sama, namun dengan memodifikasi satu nilai parameter yaitu pada variabel m menjadi 4.35. Hal ini dilakukan sebagai bentuk analisis sensitivitas untuk melihat pengaruh perubahan parameter terhadap dinamika sistem.

Model predator-prey persamaan (4.6) memiliki 4 titik kesetimbangan, yaitu $E_0 = (0,0,0)$ dan $E_1 = (1,0,0)$ yang bersifat tidak stabil. Titik $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ dengan $\hat{x} = \frac{d}{m-ad}$ dan $\hat{y} = \frac{m(m-ad-d)}{c(m-ad)^2}$, merupakan titik kesetimbangan yang eksis akan tetapi hanya merepresentasikan dua spesies saja. Selanjutnya, pada titik kesetimbangan interior $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ dengan $x^* = \frac{A+a-1}{2a}$, $y^* = \frac{\mu}{q-b\mu}$, $z^* = \frac{q\{(A+a)(m-ad)+d-m\}}{ap(q-b\mu)(A+a+1)}$ bersifat stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat kestabilan pada Tabel 4.2. Oleh karena itu, berikut akan ditunjukkan hasil simulasi untuk menggambarkan dinamika populasi dari model *predator-prey* tersebut.

4.6.1 Simulasi Pertama

Pada bagian simulasi ini, model predator-prey disimulasikan dengan menggunakan nilai parameter yang tercantum pada Tabel 4.1 yaitu, $m = 2.5$, $p = 0.05$, $q = 0.3$, $a = 3$, $b = 0.4$, $d = 0.4$, $\mu = 0.075$, dengan kondisi awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$. Berdasarkan Tabel 4.2 kondisi E_3 , dikatakan eksis jika dan hanya jika memenuhi 2 syarat berikut:

$$(i) \quad q > (b + c)\mu$$

$$q > (0.4 + 1.5)0.075$$

$$q > (1.9)0.075$$

$$0.3 > 0.1425$$

$$(ii) \quad m > \frac{ad(A+a+1)}{A+a-1}$$

dengan

$$A = \sqrt{(a-1)^2 + 4a \left(\frac{q - \mu(b+c)}{q - b\mu} \right)}$$

$$A = \sqrt{(3-1)^2 + 4(3) \left(\frac{0.3 - 0.075(0.4 + 1.5)}{0.3 - 0.4(0.075)} \right)}$$

$$A = \sqrt{4 + 7}$$

$$A = \sqrt{11} = 3.3166$$

Maka, diperoleh

$$m > \frac{ad(A+a+1)}{A+a-1}$$

$$m > \frac{3(0.4)(3.3166 + 3 + 1)}{3.3166 + 3 - 1}$$

$$2.5 > 1.6514$$

Dengan demikian syarat (i) dan (ii) terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, z^*)$ eksis. Selanjutnya, hitung koordinat dari x^*, y^*, z^* untuk mengetahui posisi dari titik kesetimbangan tersebut.

$$x^*(t) = \frac{A+a-1}{2a} = \frac{3.3166 + 3 - 1}{2(3)} = 0.8861$$

$$\begin{aligned}
y^*(t) &= \frac{\mu}{q - b\mu} = \frac{0.075}{0.3 - 0.4(0.075)} = 0.2778 \\
z^*(t) &= \frac{q\{(A + a)(m - ad) + d - m\}}{ap(q - b\mu)(A + a + 1)} \\
&= \frac{0.3\{(3.3166 + 3)(2.5 - 3(0.4)) + 0.4 - 2.5\}}{3(0.05)(0.3 - 0.4(0.075))(3.3166 + 3 + 1)} \\
&= 4.5676
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh koordinat dari titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, z^*) = (0.8861, 0.2778, 4.5676)$.

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah titik kesetimbangan tersebut stabil dilakukannya analisis kestabilan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Tabel 4.2 titik $E_3(x^*, y^*, z^*)$ dikatakan stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat $A_1 > 0, A_3 > 0$, dan $\Delta > 0$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter ke dalam persamaan matriks (4.26), sehingga diperoleh bentuk numeriknya sebagai berikut:

$$V(E^*) = \begin{bmatrix} -0.8033 & -0.3633 & 0 \\ 0.0519 & 0.0206 & -0.0125 \\ 0 & 1.1099 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, substitusikan elemen-elemen matriks pada persamaan (4.27) dan persamaan (4.28), sehingga diperoleh

$$A_1 = -(v_{11} + v_{22}) = -(-0.8033 + 0.0206) = 0.7827$$

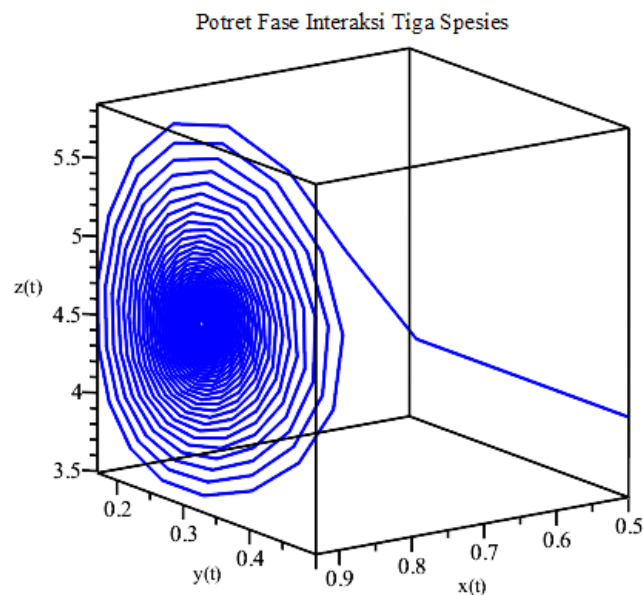
$$\begin{aligned}
A_2 &= v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} \\
&= -0.8033(0.0206) - (-0.3633)(0.0519) - (-0.0125)(1.1099) \\
&= 0.0162
\end{aligned}$$

$$A_3 = v_{11}v_{23}v_{32} = -0.8033(-0.0125)(1.1099) = 0.0111$$

$$\Delta \equiv A_1A_2 - A_3 = 0.7827(0.0162) - 0.0111 = 0.0016$$

Karena nilai dari $A_1 = 0.7827 > 0$, $A_3 = 0.0111 > 0$, dan $\Delta = 0.0016 > 0$, maka titik kesetimbangan dari E_3 bersifat stabil asimtotik lokal. Kemudian, dilakukannya simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika sistem dan memverifikasi hasil dari analisis kestabilan dengan menggunakan nilai parameter yang sama.

Berikut adalah gambar grafik yang menggambarkan interaksi dari tiga spesies yaitu mangsa $x(t)$, predator $y(t)$, dan superpredator $z(t)$.

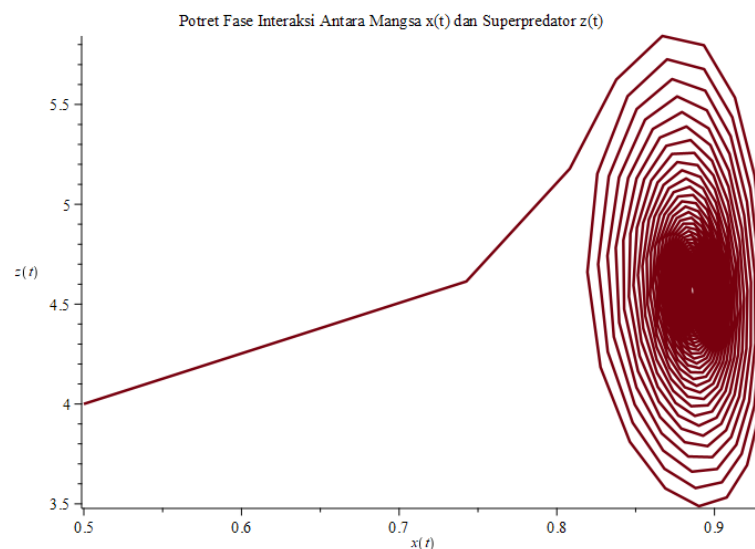


Gambar 4.1 Potret Fase Grafik Model Predator-Prey (I) dengan Nilai Parameter $m = 2.5$, $p = 0.05$, $q = 0.3$, $a = 3.0$, $b = 0.4$, $d = 0.4$, $\mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$

Gambar 4.1 adalah Potret fase grafik tiga dimensi dari model predator-prey dengan parameter awal $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 4$. Gambar grafik ini menunjukkan lintasan populasi mangsa, predator, dan superpredator yang bergerak menuju titik kesetimbangan yang stabil yaitu $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$. Hasil simulasi menunjukkan kondisi di mana ketiga populasi eksis sesuai dengan Tabel 4.2. Lintasan ketiga populasi mengalami osilasi, perlahan bergerak berbentuk spiral menuju ke dalam yang semakin mengerucut ke arah titik pusat

menggambarkan adanya dinamika osilasi yang semakin mengecil, artinya populasi mangsa (*prey*) menalami perubahan yang sangat drastis akibat predator, begitu pula predator akibat superpredator sehingga populasi mangsa mengalami fluktuasi. Namun, meskipun awalnya mengalami fluktuasi, pada akhirnya semua bergerak menuju ke dalam keadaan stabil.

Selain potret fase tiga dimensi, selanjutnya akan divisualisasikan suatu interaksi populasi mangsa $x(t)$ dengan populasi superpredator $z(t)$ pada gambar grafik berikut:

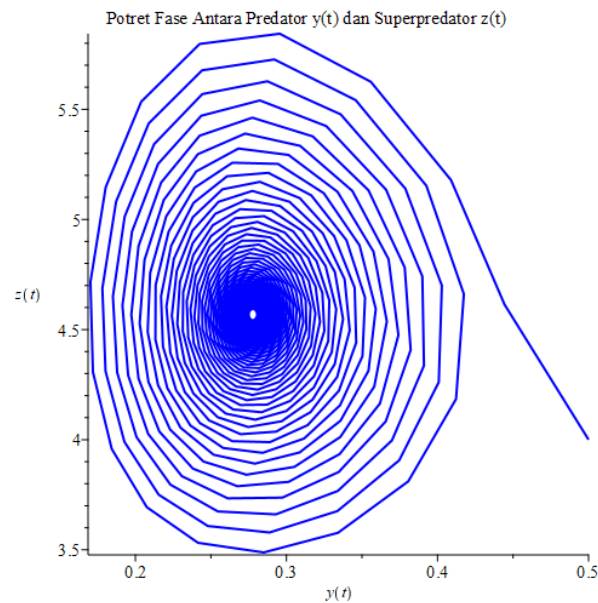


Gambar 4.2 Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Mangsa $x(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$

Pada Gambar 4.2 grafik menunjukkan bahwa adanya lintasan yang bergerak dari titik z menjauhi titik awal, hingga membentuk spiral yang menuju suatu titik kesetimbangan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem dinamik mengalami osilasi, hingga seiring waktu berkurang yang akhirnya berhenti pada satu titik kesetimbangan. Artinya, populasi superpredator secara tidak langsung sangat bergantung pada kestabilan populasi mangsa, di mana mangsa mendukung

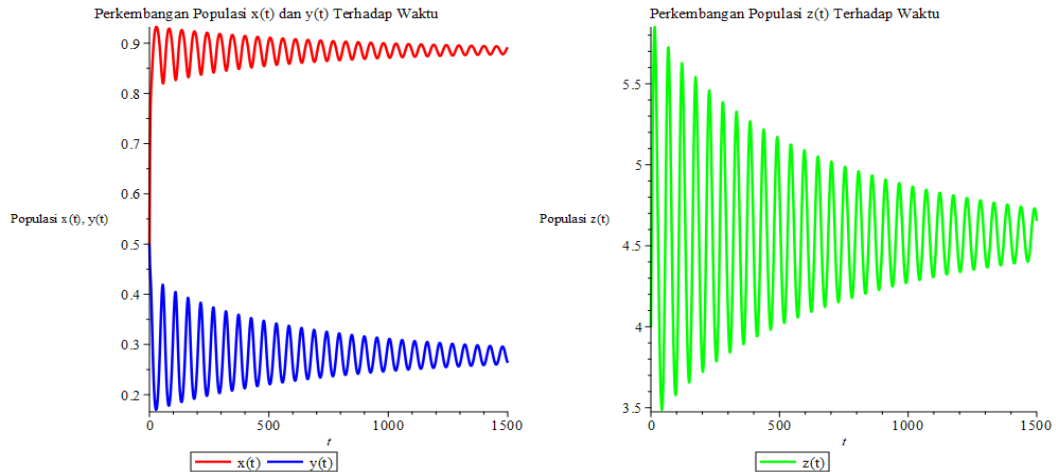
superpredator melalui predator. Sehingga pada akhirnya kedua populasi ini mencapai keseimbangan bersama.

Selanjutnya, akan ditunjukkan visualisasi dari interaksi antara predator dengan superpredator sebagai berikut:



Gambar 4.3 Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Predator $y(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$

Gambar 4.3 menunjukkan perilaku serupa dengan interaksi antara mangsa dengan superpredator. Pada grafik ini, interaksi antara predator dengan superpredator menunjukkan adanya osilasi yang pada akhirnya menuju titik kesetimbangan. Artinya, populasi predator dapat bertahan hidup meskipun dikendalikan oleh superpredator.



Gambar 4.4 Grafik Perubahan Populasi Tritrofik Seiring Waktu dengan Nilai Parameter $m = 2.5, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan Kondisi Awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$

Berdasarkan grafik Gambar 4.4 menunjukkan bahwa dinamika ketiga populasi mengalami osilasi teredam, yaitu pola osilasi dimana seiring waktu amplitudonya semakin mengecil hingga pada akhirnya menuju titik kesetimbangan. Pada populasi superpredator $z(t)$ mengalami osilasi yang pada awalnya cukup tajam. Kemudian, seiring waktu berjalan osilasi mengalami penurunan hingga pada akhirnya stabil. Pada populasi mangsa $x(t)$ berawal dari osilasi yang sangat kecil. Namun, nilainya tetap rendah dan cenderung mendekati nol. Hal ini berarti bahwa mangsa meskipun mengalami osilasi yang sangat rendah akan tetapi tidak sampai punah. Sedangkan, pada populasi predator $y(t)$ cenderung lebih stabil sejak awal dan hanya mengalami osilasi lebih besar daripada $x(t)$, hingga akhirnya menuju kepunahan. Hal ini menunjukkan bahwa predator lebih dominan dan relatif lebih stabil dibandingkan dengan populasi mangsa.

4.6.2 Simulasi Kedua

Pada bagian ini, model *predator-prey* disimulasikan dengan menggunakan nilai parameter sesuai dengan Tabel 4.1 yaitu, $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$, dengan kondisi awal $(x(0), y(0), z(0)) = (0.5, 0.5, 4)$. Sama seperti simulasi pertama, simulasi kedua ini juga dilakukan di sekitar titik kesetimbangan interior E_3 . Di mana, dikatakan eksis jika syarat berikut terpenuhi.

$$(i) \quad q > (b + c)\mu$$

$$q > (0.4 + 1.5)0.075$$

$$q > (1.9)0.075$$

$$0.3 > 0.1425$$

$$(ii) \quad m > \frac{ad(A+a+1)}{A+a-1}$$

dengan

$$A = \sqrt{(a-1)^2 + 4a \left(\frac{q - \mu(b+c)}{q - b\mu} \right)}$$

$$A = \sqrt{(3-1)^2 + 4(3) \left(\frac{0.3 - 0.075(0.4 + 1.5)}{0.3 - 0.4(0.075)} \right)}$$

$$A = \sqrt{4 + 7} = \sqrt{11} = 3.3166$$

Maka, diperoleh

$$m > \frac{ad(A+a+1)}{A+a-1}$$

$$m > \frac{3(0.4)(3.3166 + 3 + 1)}{3.3166 + 3 - 1}$$

$$4.35 > 1.6514$$

Dengan demikian syarat (i) dan (ii) terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan titik kesetimbangan $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ eksis. Selanjutnya, hitung koordinat dari x^*, y^*, z^* untuk mengetahui posisi dari titik kesetimbangan tersebut.

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= \frac{A + a - 1}{2a} = \frac{3.3166 + 3 - 1}{2(3)} = 0.8861 \\
 y^*(t) &= \frac{\mu}{q - b\mu} = \frac{0.075}{0.3 - 0.4(0.075)} = 0.2778 \\
 z^*(t) &= \frac{q\{(A + a)(m - ad) + d - m\}}{ap(q - b\mu)(A + a + 1)} \\
 &= \frac{0.3\{(3.3166 + 3)(4.35 - 3(0.4)) + 0.4 - 4.35\}}{3(0.05)(0.3 - 0.4(0.075))(3.3166 + 3 + 1)} \\
 &= 14.5254
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh koordinat dari titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*, z^*) = (0.8861, 0.2778, 14.5254)$.

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah titik kesetimbangan tersebut stabil dilakukannya analisis kestabilan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Di mana, hal ini tercantum pada Tabel 4.2. Selanjutnya, substitusikan nilai parameter ke dalam persamaan matrik (4.25), sehingga diperoleh bentuk numeriknya sebagai berikut:

$$V(E^*) = \begin{bmatrix} -0.8033 & -0.3633 & 0 \\ 0.0903 & 0.0654 & -0.0125 \\ 0 & 3.5297 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, substitusikan elemen-elemen matriks pada persamaan (4.27) dan persamaan (4.28), sehingga diperoleh

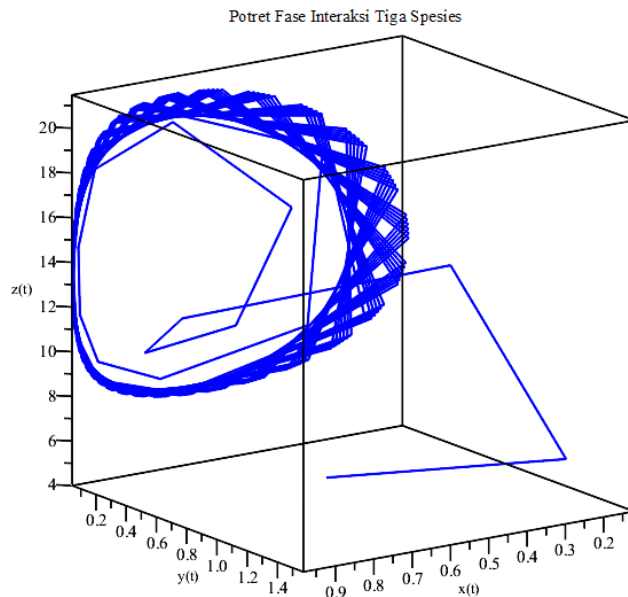
$$\begin{aligned}
 A_1 &= -(v_{11} + v_{22}) = -(-0.8033 + 0.0654) = 0.7379 \\
 A_2 &= v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} \\
 &= -0.8033(0.0654) - (-0.3633)(0.0903) - (-0.0125)(3.5297)
 \end{aligned}$$

$$= 0.0244$$

$$A_3 = v_{11}v_{23}v_{32} = -0.8033(-0.0125)(3.5297) = 0.0354$$

$$\Delta \equiv A_1A_2 - A_3 = 0.09744(1.2630) - 0.0019 = -0.0174$$

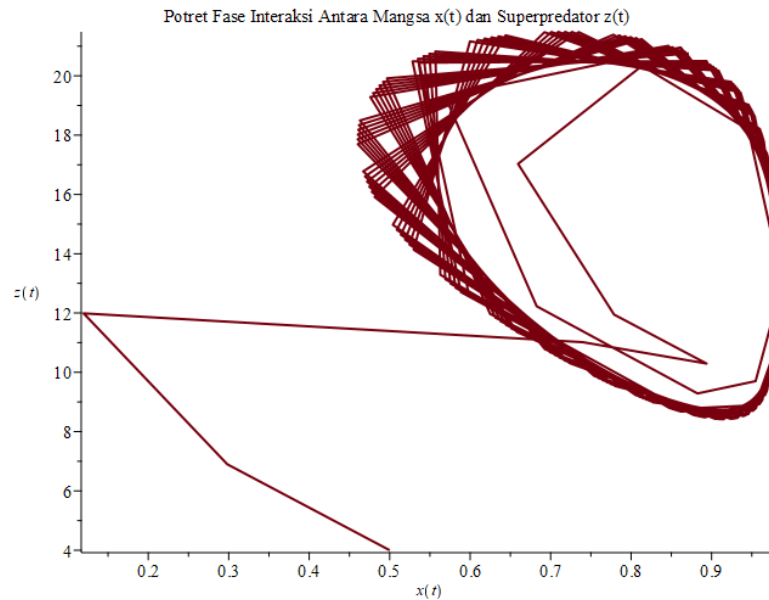
Dari hasil perhitungan tersebut diperoleh $A_1 = 0.7379 > 0$, $A_3 = 0.0354 > 0$, yang memenuhi kriteria kestabilan. Namun, dikarenakan $\Delta = -0.0174 < 0$, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil. Kemudian, dilakukannya simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika sistem untuk memverifikasi hasil dari analisis kestabilan dengan menggunakan nilai parameter yang sama.



Gambar 4.5 Potret Fase Grafik Model Predator-Prey (II) dengan Nilai Parameter $m = 4.35$, $p = 0.05$, $q = 0.3$, $a = 3.0$, $b = 0.4$, $d = 0.4$, $\mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $(x(t), y(t), z(t)) = (0.5, 0.5, 4)$.

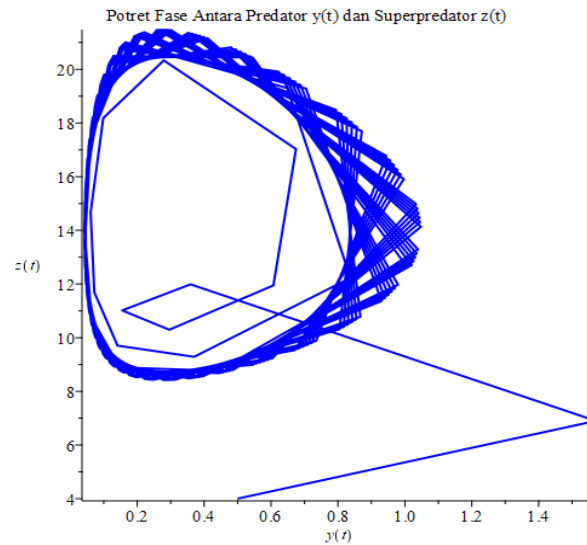
Gambar 4.5 menunjukkan interaksi antara populasi mangsa (*prey*), predator, dan superpredator yang mengalami lintasan yang membentuk kurva tertutup yang stabil. Pola grafik tersebut menunjukkan bahwa amplitudo osilasi tidak mengecil seiring waktu, melainkan bertahan, sehingga sistem tidak mencapai titik kesetimbangan. Artinya, interaksi ketiga populasi ini menghasilkan kesimbangan

yang tidak stabil dan sistem memasuki suatu limit cycle yang stabil. Hal ini terjadi akibat perubahan parameter yang menyebabkan sistem kehilangan kestabilan.



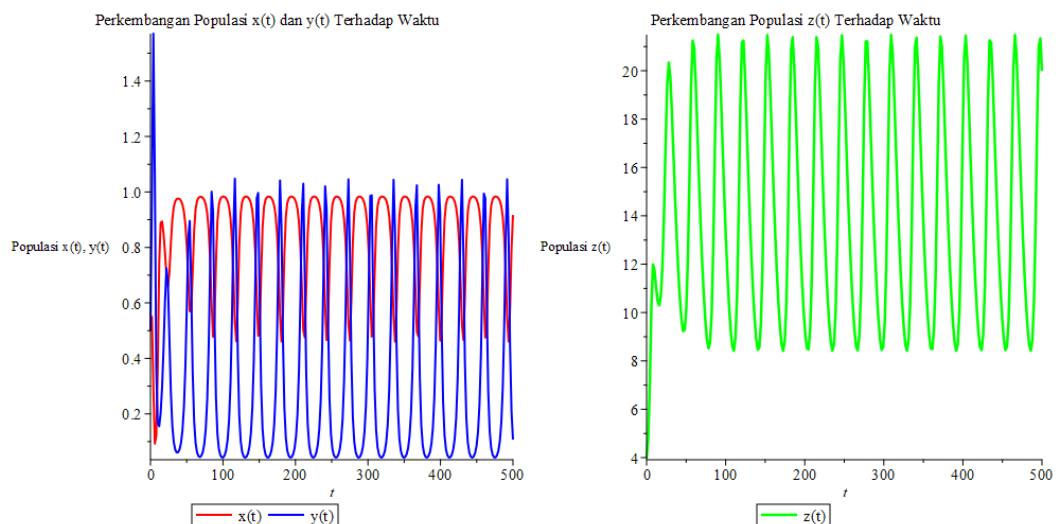
Gambar 4.6 Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Mangsa $x(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $(x(t), y(t), z(t)) = (0.5, 0.5, 4)$.

Pada grafik Gambar 4.6 menggambarkan interaksi antara populasi mangsa $x(t)$ dengan populasi superpredator $z(t)$ yang menunjukkan lintasan tidak bergerak menuju titik kesetimbangan. Namun, lintasan membentuk kurva tertutup yang stabil. Artinya, kedua populasi ini dari waktu ke waktu mengalami osilasi secara periodik dan menunjukkan bahwa sistem tidak stabil. Selain potret fase antara interaksi mangsa dengan superpredator, selanjutnya akan divisualisasikan juga suatu interaksi populasi predator $y(t)$ dengan populasi superpredator $z(t)$ pada gambar grafik berikut:



Gambar 4.7 Potret Fase Grafik Interaksi antara Populasi Predator $y(t)$ dan Superpredator $z(t)$ dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $(x(t), y(t), z(t)) = (0.5, 0.5, 4)$.

Gambar 4.7 menunjukkan lintasan pada grafik membentuk kurva tertutup yang menggambarkan bahwa grafik membentuk limit cycle. Grafik ini juga menunjukkan bahwa interaksi populasi predator dan superpredator tidak menuju titik kesetimbangan, sehingga bersifat tidak stabil. Selain itu, grafik menunjukkan bahwa sistem mengalami osilasi secara berulang.



Gambar 4.8 Grafik Perubahan Populasi Tritrofik Seiring Waktu dengan Nilai Parameter $m = 4.35, p = 0.05, q = 0.3, a = 3.0, b = 0.4, d = 0.4, \mu = 0.075$ dengan Kondisi Awal $(x(t), y(t), z(t)) = (0.5, 0.5, 4)$.

Grafik pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa ketiga populasi mengalami osilasi secara periodik. Pada populasi mangsa (*prey*), grafik menggambarkan bahwa lintasan mengalami osilasi dengan amplitudo yang sangat kecil namun stabil dan terus berosilasi secara periodik dengan rentang nilai yang juga relatif kecil. Pada populasi predator, juga menunjukkan bahwa lintasan mengalami osilasi dengan amplitudo kecil dan menunjukkan lintasan berosilasi secara terus menerus di sekitar titik positif. Pada populasi superpredator, menunjukkan bahwa populasi mengalami osilasi dengan amplitudo yang sangat besar. Selain itu, lintasan pada populasi superpredator menunjukkan osilasi periodik tanpa teredam yang menandakan dinamika populasi berada dalam keadaan limit cycle.

4.7 Analisis Kajian Islam

Dalam perspektif Islam, keseimbangan yang ditunjukkan oleh model matematika berupa dinamika populasi dalam suatu ekosistem secara tidak langsung mencerminkan prinsip Al-Mizan. Hal ini dijelaskan dalam QS.Ar-Rahman [55]: 7 yang menyatakan:

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ﴿٧﴾

Artinya: “Dan langit telah ditinggikan-Nya dan Dia ciptakan keseimbangan.”

Berdasarkan tafsir karya Muhammad Husain Thabathaba'i menjelaskan bahwa makna mizan berarti keseimbangan dan keadilan (Filmizan dkk, 2024). Hal ini menjelaskan bahwa prinsip Al-Mizan telah ditetapkan oleh Allah SWT dalam menciptakan alam semesta. Sistem dinamik model *predator-prey* tersebut menggambarkan bahwa perubahan sekecil apapun pada parameter dapat menyebabkan perubahan sistem menjadi tidak stabil atau dapat mencapai

keseimbangan hingga stabil. Hal ini sesuai dengan QS. Al-Qamar [54]: 49, sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran.”

Ayat tersebut menegaskan bahwa setiap ciptaan Allah sesuai pada ukurannya. Menurut tafsir Al-Qurthubi, bahwasannya Allah telah menetapkan segala sesuatu, ukuran, keadaan, dan waktu setiap makhluk sebelum diciptakan (Syaiikh Imam Al Qurthubi, 2015). Artinya, setiap ciptaan Allah sesuai dengan takdirnya, dan tidak terjadi secara kebetulan atau sia-sia. Hal ini sama halnya dengan model *predator-prey* dengan respon fungsional Holling Type II, di mana setiap parameter memiliki ketetapan ukuran yang sesuai untuk menjaga keseimbangan populasi pada ekosistem. Selain itu, sekecil apapun perubahan parameter, hal ini akan sangat mempengaruhi sistem dinamik. Kondisi ini sesuai dengan pernyataan pada QS. Al-An'am [6]: 38 yang menyatakan bahwa seluruh makhluk hidup berada pada sistem yang teratur.

وَمَا مِنْ دَابَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا طَائِرٍ يَطِيرُ بِجَنَاحَيْهِ إِلَّا أُمَمٌ أَمْثَلُكُمْ ... ﴿٣٨﴾

Artinya: “Tidak ada seekor hewan pun (yang berada) di bumi dan burung-burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan semuanya merupakan umat (juga) seperti kamu.”

Ayat tersebut menjelaskan bagaimana setiap makhluk hidup mempunyai sistem sosial. Berdasarkan tafsir Al-Qurthubi, menegaskan bahwa semua makhluk hidup seperti predator dan mangsa merupakan “umat” yang memiliki perannya masing-masing (Al-Qurthubi, 2019). Selain itu, ayat ini sangatlah berkaitan dengan model *predator-prey*, di mana setiap interaksi antar populasi pada ekosistem saling berpengaruh hingga menciptakan keseimbangan alami, sehingga ekosistem tetap stabil. Hal ini menunjukkan bahwa nasib setiap makhluk hidup tidak luput dari

ketetapan dan pengaturan Allah. Oleh karena itu, sistem dinamik model *predator-prey* ini tidak hanya membantu dalam bidang ilmiah. Namun, juga dapat menjadi sarana dalam memahami dan meneguhkan nilai-nilai agama bahwa Allah SWT. menciptakan alam semesta ini dengan keseimbangan yang teratur. Dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan dengan ajaran Islam sangatlah selaras.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dipaparkan pada pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model *predator-prey* yang digunakan pada penelitian ini adalah model tritrofik hasil penelitian yang digunakan oleh Maiti dkk, (2008) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dX(T)}{dT} &= rX(T) \left(1 - \frac{X(T)}{K}\right) - \frac{B_1X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)} \\ \frac{dY(T)}{dT} &= \frac{C_1X(T)Y(T)}{A_1 + X(T)} - D_1Y(T) - \frac{B_2Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)} \\ \frac{dZ(T)}{dT} &= \frac{C_2Y(T)Z(T)}{A_2 + Y(T)} - D_2Z(T)\end{aligned}$$

Setelah dilakukan nondimensionalisasi diperoleh model *predator-prey* yang lebih sederhana. Sehingga diperoleh model berikut menjadi dasar dalam analisis penelitian ini.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(1 - x(t)) - \frac{cx(t)y(t)}{1 + ax(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{mx(t)y(t)}{1 + ax(t)} - dy(t) - \frac{py(t)z(t)}{1 + by(t)} \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{qy(t)z(t)}{1 + by(t)} - \mu z(t)\end{aligned}$$

Dengan

$$c = \frac{B_1K}{A_1r}, a = \frac{K}{A_1}, m = \frac{C_1K}{A_1r}, d = \frac{D_1}{r}, p = \frac{B_2K}{A_2r}, b = \frac{K}{A_2}, q = \frac{C_2K}{A_2r}, \mu = \frac{D_2}{r}$$

2. Berdasarkan analisis pada model *predator-prey* dengan menggunakan respon fungsional Holling Type II diperoleh 4 titik kesetimbangan yaitu $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$ yang selalu eksis, namun tidak stabil. Pada $E_2 = (\hat{x}, \hat{y}, 0)$ juga eksis jika memenuhi syarat $m < (a + 1)d$, namun stabil jika memenuhi $\frac{qy}{1+by} < \mu$. Sedangkan pada titik $E_3 = (x^*, y^*, z^*)$ dapat dikatakan eksis dan stabil jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik kesetimbangan menunjukkan kondisi stabil asimtotik lokal, dengan koordinat $E_3(x^*, y^*, z^*) = (0.8861, 0.2778, 4.5676)$ untuk simulasi pertama. Pada simulasi kedua, pada titik $E_3(x^*, y^*, z^*) = (0.8861, 0.2778, 14.5254)$ menunjukkan bahwa kondisi sistem tidak stabil. Hal ini terjadi dikarenakan $\Delta = -0.0174 < 0$.
3. Hasil simulasi numerik dengan Maple mendukung hasil analisis dinamik. Berdasarkan simulasi pertama yang ditampilkan menunjukkan bahwa solusi dari sistem menuju kestabilan pada titik E_3 . Simulasi tersebut menunjukkan bahwa sistem mengalami osilasi teredam dengan pola spiral di mana awalnya lintasannya mengalami fluktuasi yang amplitudonya seiring waktu semakin mengecil hingga menuju titik kesetimbangan interior E_3 . Artinya, populasi ketiga spesies tidak mengalami kepunahan, melainkan berfluktuasi sementara hingga pada akhirnya stabil. Pada simulasi kedua, ketika nilai parameter m diubah menjadi $m = 4.35$, perilaku sistem berubah secara signifikan. Simulasi tersebut menunjukkan bahwa lintasan pada grafik tidak menuju ke titik kesetimbangan, melainkan membentuk kurva tertutup yang stabil, sehingga mengalami osilasi secara periodik dan tidak teredam. Artinya,

sistem berada dalam kondisi *limit cycle*. Dengan demikian, perubahan parameter spesies menyebabkan hilangnya kestabilan titik kesetimbangan.

5.2 Saran

Dalam penelitian selanjutnya, disarankan untuk mempertimbangkan pengaruh faktor lain, seperti kompetisi antarspesies, atau efek lingkungan pada tingkat predator maupun superpredator. Selain itu, dapat juga dilakukan modifikasi model dengan menggunakan fungsi interaksi yang lain, seperti respon fungsional Holling type III atau Beddington-DeAngelis.

DAFTAR PUSTAKA

- Afiyah, S. N. (2015). Analisis Dinamik Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Holling Tipe II. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, 9(2), 27–29.
- Al-Qurthubi, I. (2019). Tafsir Qurthubi Jilid 6 Terj. Muhyidin Mas Rida dan M. Rana Mengala. Ed. Mukhlis B. Mukti. *Sustainability (Switzerland)*, 11(1), 1–14.
- Al Idrus, A. S., Abd. Gani, A. P., & Zaid, N. (2022). Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Struktur Usia dan Perilaku Anti-Predator. *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, 1(2), 22–29. <https://doi.org/10.55657/rmns.v1i2.63>
- Aryani, F., & Maisyitah, R. A. D. (2015). Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Dari Matriks Kompleks Bujursangkar Ajaib. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, 1(2), 10. <https://doi.org/10.24014/jsms.v1i2.1954>
- Az-Zuhaili, W. (2013). *Tafsir al-Munir fi al-‘Aqidah wa al-Syari’at wa al-Manhaj* (Jilid 7). Gema Insani.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). Elementary Differential Equations. In *Educacao e Sociedade* (10th ed., Vol. 1, Issue 1). John Wiley & Sons, Inc. http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/Educacao_PereiraAS_1.pdf%0Ahttp://www.anpocs.org.br/portal/publicacoes/rbcs_00_11/rbcs11_01.htm%0Ahttp://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/7845/1/td_2306.pdf%0Ahttps://direitofma2010.files.wordpress.com/2010/03/emi
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Dawes, J. H. P., & Souza, M. O. (2013). A derivation of Holling’s type I, II and III functional responses in predator-prey systems. *Journal of Theoretical Biology*, 327, 11–22. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2013.02.017>
- Filmizan, Nirwana AN, A., Rhain, A., Dahliana, Y., & Hidayat, S. (2024). Kata Mizan Dalam Prespektif Tafsir Al-Mizan Dan Implikasinya Terhadap Nilai Pendidikan (Kajian Surat Ar-Rahman dan Al-Hadid). *Al-Mau’izhoh*, 6(1), 585–595. <https://doi.org/10.31949/am.v6i1.9428>
- Glass L., & Murray J. D. (2002). Interdisciplinary Applied Mathematics: Mathematical Biology I. In *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* (Issue 4).
- Kemenag. (2025). *Qur’an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/>

- Kuznetsov, Y. A. (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition. *Kuznetsov, Y.A. 1998. Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition. 112:614., 112, 614.*
- Maidah, M. Al, Nabilah, S., & Syata, I. (2022). *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Software R*. Indocamp. <https://webadmin-ipusnas.perpusnas.go.id/ipusnas/publications/books/208925/>
- Maiti, A., Pal, A. K., & Samanta, G. P. (2008). Effect of time-delay on a food chain model. *Applied Mathematics and Computation*, 200(1), 189–203. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.011>
- Miller, D. A., Grand, J. B., Fondell, T. F., & Anthony, M. (2006). Predator functional response and prey survival: Direct and indirect interactions affecting a marked prey population. *Journal of Animal Ecology*, 75(1), 101–110. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2656.2005.01025.x>
- Morita, S., & Tainaka, K. I. (2006). Undamped oscillations in prey-predator models on a finite size lattice. *Population Ecology*, 48(2), 99–105. <https://doi.org/10.1007/s10144-006-0257-0>
- Muhammad. (2023). *Kajian Ayat-Ayat Al-Quran tentang Pelestarian Lingkungan Hidup*. 9(2). <https://doi.org/10.37567/alwatzikhoebillah.v9i2.2259>
- Muttaqin, A. (2020). *Al- Qur ' an dan Wawasan Ekologi*. 14(2).
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika: Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Deepublish.
- Ogata, K. (2010). 105-166. [https://repository.unikom.ac.id/50540/1/Modern Control Engineering-Katsuhiko Ogata \(Prentice Hall 2010\)\(904s\).pdf](https://repository.unikom.ac.id/50540/1/Modern%20Control%20Engineering-Katsuhiko%20Ogata%20(Prentice%20Hall%202010)(904s).pdf)
- Papanikolaou, N. E., Broufas, G. D., Papachristos, D. P., Pappas, M. L., Kyriakaki, C., Samaras, K., & Kypraios, T. (2020). On the mechanistic understanding of predator feeding behavior using the functional response concept. *Ecosphere*, 11(5). <https://doi.org/10.1002/ecs2.3147>
- Strogatz, S. H. (2018). *NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press.
- Syaikh Imam Al Qurthubi. (2015). *Tafsir Al-Qurtubi Jilid 17*. 507.
- Ukaely, M. A. (2021). *Analisis Kestabilan Model Predator Prey (Suatu Tinjauan Teoritis)*. <http://dx.doi.org/10.31237/osf.io/65p9j>

LAMPIRAN

Lampiran 1 Perhitungan Maple Tanpa Nilai Parameter

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) : unprotect(γ) : unprotect(π) :
  DFE : END :

> dx := x · (1 - x) -  $\frac{c \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x}$  :

> dy :=  $\frac{m \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x} - d \cdot y - \frac{p \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y}$  :

> dz :=  $\frac{q \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y} - \mu \cdot z$  :

> fixpoint := solve( {dx, dy, dz}, {x, y, z} ) :
> ttk1 := fixpoint[1];
                                     ttk1 := {x=0, y=0, z=0} (1)

> ttk2 := fixpoint[3];
                                     ttk2 := {x=1, y=0, z=0} (2)

> ttk3 := fixpoint[4];
                                     ttk3 :=  $\left\{ x = -\frac{d}{a d - m}, y = -\frac{m(a d + d - m)}{c(a d - m)^2}, z = 0 \right\}$  (3)

> ttk4 := fixpoint[5];
ttk4 :=  $\left\{ x = \text{RootOf}\left((a b \mu - a q) \_Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) \_Z - b \mu - \mu c + q\right), y = -\frac{\mu}{b \mu - q}, z = \frac{1}{a c \mu p (b \mu - q)} \left( q \left( \text{RootOf}\left((a b \mu - a q) \_Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) \_Z - b \mu - \mu c + q\right) b m \mu + a c d \mu - \text{RootOf}\left((a b \mu - a q) \_Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) \_Z - b \mu - \mu c + q\right) m q - b m \mu - c m \mu + m q \right) \right) \right\}$  (4)

> J := Matrix( jacobian( [dx, dy, dz], [x, y, z] ) ) :
> ttk1 := eval(subs(ttk1, J));
                                     ttk1 :=  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$  (5)

> ttk2 := eval(subs(ttk2, J));
                                     ttk2 :=  $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{c}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{m}{a+1} - d & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$  (6)

> ttk3 := eval(subs(ttk3, J));
ttk3 :=  $\left[ \left[ 1 + \frac{2 d}{a d - m} + \frac{m(a d + d - m)}{(a d - m)^2 \left( -\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)} \right] \right]$  (7)

```


$$\begin{aligned}
& + \frac{d m (a d + d - m) a}{(a d - m)^3 \left(-\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)^2}, \frac{c d}{(a d - m) \left(-\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)}, 0 \Bigg], \\
& \left[-\frac{m^2 (a d + d - m)}{c (a d - m)^2 \left(-\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)} - \frac{m^2 d (a d + d - m) a}{(a d - m)^3 c \left(-\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)^2}, \right. \\
& - \frac{m d}{(a d - m) \left(-\frac{a d}{a d - m} + 1 \right)} - d, \\
& \left. \frac{p m (a d + d - m)}{c (a d - m)^2 \left(-\frac{b m (a d + d - m)}{c (a d - m)^2} + 1 \right)} \right], \\
& \left[0, 0, -\frac{q m (a d + d - m)}{c (a d - m)^2 \left(-\frac{b m (a d + d - m)}{c (a d - m)^2} + 1 \right)} - \mu \right] \Bigg]
\end{aligned}$$

\triangleright $ttk4 := eval(subs(ttk4, J));$

$$ttk4 := \left[\left[1 - 2 \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right) \right] \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& + q) + (c \mu) / ((b \mu - q) (a \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \\
& + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) + 1)) - (c \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \\
& - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) \mu a) / ((b \mu - q) (a \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \\
& + q) + 1)^2), \\
& - (c \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) \right) / (a \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) + 1), 0], \\
& \left[- (m \mu) / ((b \mu - q) (a \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) + 1)) + (m \operatorname{RootOf}\left((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) + 1)) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) \mu a) \Big/ \left((b \mu - q) \left(a \operatorname{RootOf}((a b \mu \right. \right. \\
& \left. \left. - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) + 1 \right)^2 \right), \\
& (m \operatorname{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
& + q)) \Big/ \left(a \operatorname{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \\
& \left. + q) + 1 \right) - d - \frac{1}{a c \mu (b \mu - q) \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)} \left(q \left(\operatorname{RootOf}((a b \mu \right. \right. \\
& \left. \left. - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b m \mu + a c d \mu \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \right. \\
& \left. \left. + q) m q - b m \mu - c m \mu + m q) \right) \right) \\
& - \frac{1}{(b \mu - q)^2 a c \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)^2} \left(q \left(\operatorname{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu \right. \right. \\
& \left. \left. + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b m \mu + a c d \mu - \operatorname{RootOf}((a b \mu \right. \right. \\
& \left. \left. - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) m q - b m \mu - c m \mu \right. \right. \\
& \left. \left. + m q) b \right), \frac{p \mu}{(b \mu - q) \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[0, \frac{1}{a c \mu p (b \mu - q) \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)} \left(q^2 \left(\text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b m \mu + a c d \mu - \text{RootOf}((a b \mu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) m q - b m \mu - c m \mu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + m q) \right) + \frac{1}{(b \mu - q)^2 a c p \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)} \left(q^2 \left(\text{RootOf}((a b \mu \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b m \mu + a c d \mu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + q) m q - b m \mu - c m \mu + m q) b \right), -\frac{q \mu}{(b \mu - q) \left(-\frac{b \mu}{b \mu - q} + 1 \right)} - \mu \right] \right]
\end{aligned}$$

> $ttk1 := \text{eigenvalues}(ttk1);$

$$ttk1 := 1, -d, -\mu \quad (9)$$

> $ttk2 := \text{eigenvalues}(ttk2);$

$$ttk2 := -1, -\frac{a d + d - m}{a + 1}, -\mu \quad (10)$$

> $ttk3 := \text{eigenvalues}(ttk3);$

$$\begin{aligned}
ttk3 := & -\left(a^2 c d^2 \mu - a b d m \mu - 2 a c d m \mu + a d m q - b d m \mu + b m^2 \mu + c m^2 \mu \right. \\
& \left. + d m q - m^2 q \right) / \left(a^2 c d^2 - a b d m - 2 a c d m - b d m + b m^2 + c m^2 \right), \\
& \frac{1}{2 m (a d - m)} \left(a^2 d^2 + a d^2 - a d m + d m \right. \\
& + \left(a^4 d^4 + 4 a^3 d^4 m + 2 a^3 d^4 - 2 a^3 d^3 m + 4 a^2 d^4 m - 12 a^2 d^3 m^2 + a^2 d^4 + a^2 d^2 m^2 - 8 a d^3 m^2 \right. \\
& \left. + 12 a d^2 m^3 + 2 a d^3 m - 2 a d^2 m^2 + 4 d^2 m^3 - 4 d m^4 + d^2 m^2 \right)^{1/2}, \\
& -\frac{1}{2 m (a d - m)} \left(-a^2 d^2 - a d^2 + a d m - d m \right. \\
& + \left(a^4 d^4 + 4 a^3 d^4 m + 2 a^3 d^4 - 2 a^3 d^3 m + 4 a^2 d^4 m - 12 a^2 d^3 m^2 + a^2 d^4 + a^2 d^2 m^2 - 8 a d^3 m^2 \right. \\
& \left. + 12 a d^2 m^3 + 2 a d^3 m - 2 a d^2 m^2 + 4 d^2 m^3 - 4 d m^4 + d^2 m^2 \right)^{1/2} \Big)
\end{aligned} \quad (11)$$

> $ttk4 := \text{eigenvalues}(ttk4);$

$$\begin{aligned}
 ttk4 := & \text{RootOf}(-a^3 b c^2 d \mu^4 + a^3 c^2 d \mu^3 q + b c^2 m \mu^4 a^2 - c^2 m \mu^3 q a^2 \\
 & + 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a^3 b c^2 d \mu^4 - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
 & - b \mu - \mu c + q) a^3 c^2 d \mu^3 q - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
 & + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b c^2 m \mu^4 + 3 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
 & -a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b^2 m \mu^3 q + 2 \text{RootOf}((a b \mu \\
 & - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 c^2 m \mu^3 q \\
 & - 3 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a^2 b m \mu^2 q^2 + 2 d c a^2 b \mu^3 q - 4 c a^2 b m \mu^3 q - 10 a b c m \mu^3 q \\
 & - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a^2 b^3 m \mu^4 + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
 & - b \mu - \mu c + q) a^2 m \mu q^3 + 6 a b m \mu^2 q^2 + 5 c a m \mu^2 q^2 - a^2 c d \mu^2 q^2 \\
 & + 2 a^2 c m \mu^2 q^2 - 6 a b^2 m \mu^3 q + 2 a^3 b c d \mu^3 q + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
 & -a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 c d \mu^2 q^2 + 6 \text{RootOf}((a b \mu \\
 & - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b^2 m \mu^3 q \\
 & - 6 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a b m \mu^2 q^2 - 4 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
 & - b \mu - \mu c + q) a c m \mu^2 q^2 - 4 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
 & + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b^2 c m \mu^4 + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
 & -a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b^2 c d \mu^4 + 3 \text{RootOf}((a b \mu \\
 & - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b^2 m \mu^3 q \\
 & + 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a m \mu q^3 - 3 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
 & - b \mu - \mu c + q) b m \mu^2 q^2 - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu \\
 & - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b^3 m \mu^4 + 3 b m \mu^2 q^2 + c m \mu^2 q^2 - \text{RootOf}((a b \mu \\
 & - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) b^3 m \mu^4 \\
 & + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) m \mu q^3 + b^2 c m \mu^4 - 3 b^2 m \mu^3 q - 2 b c m \mu^3 q + b^3 m \mu^4 - m \mu q^3 \\
 & + 8 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
 & + q) a b c m \mu^3 q - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
 & - b \mu - \mu c + q) a^2 b c d \mu^3 q + a^2 b^3 m \mu^4 + 2 b^3 a m \mu^4 - a^2 m \mu q^3 - 2 a m \mu q^3
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& + 5 a b^2 c m \mu^4 + \mu^2 c^2 a^3 _Z^2 q - 2 \mu^3 c \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu \\
& + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^3 b d q + 4 \mu^3 c \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 \\
& + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b m q + (-a^3 \mu^2 c^2 q \\
& + a^3 c \mu q^2 - a^2 \mu^2 c^2 q + a^2 c \mu q^2 + a^2 b c m \mu^2 q + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 \\
& + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b^2 c m \mu^3 \\
& + \mu^2 c \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
& + q) a^3 b q + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu \\
& - \mu c + q) a^2 b c \mu^2 q + a^3 c^2 b d \mu^3 - a^2 b^2 c m \mu^3 - a^2 b c^2 m \mu^3 - a^3 b c \mu^2 q \\
& - a^2 b c \mu^2 q + 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
& - b \mu - \mu c + q) a^3 c^2 \mu^2 q - \mu c \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
& + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^3 q^2 - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu \\
& + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 c \mu q^2 - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
& - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b c m \mu^2 q) _Z^2 + (-m q^3 \\
& + a^3 b c^2 d \mu^4 - a^3 c^2 d \mu^3 q - b c^2 m \mu^4 a^2 + c^2 m \mu^3 q a^2 - 2 \text{RootOf}((a b \mu \\
& - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b^2 c m \mu^3 \\
& - 8 a b c m \mu^2 q - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
& - b \mu - \mu c + q) a^2 b c^2 m \mu^3 + 3 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
& + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b^2 m \mu^2 q - 4 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
& - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b^2 c m \mu^3 - 3 \text{RootOf}((a b \mu \\
& - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a^2 b m \mu q^2 \\
& - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c \\
& + q) a^2 c m \mu q^2 + 6 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
& - b \mu - \mu c + q) a b^2 m \mu^2 q - 6 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
& + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b m \mu q^2 - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
& - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a c m \mu q^2 - 3 a^2 b c m \mu^2 q \\
& + 2 c a^2 b m \mu^3 q + b^3 m \mu^3 - a^2 m q^3 - 2 a m q^3 + \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (- \\
& - a b \mu + a q + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) m q^3 - a^2 c m \mu^2 q^2 + 2 a^2 b^2 c m \mu^3 \\
& + a^2 b c^2 m \mu^3 - 3 a^2 b^2 m \mu^2 q + 5 a b^2 c m \mu^3 + 3 a b c^2 m \mu^3 + 3 a^2 b m \mu q^2 \\
& + a^2 c m \mu q^2 - 6 a b^2 m \mu^2 q - a c^2 m \mu^2 q + 6 a b m \mu q^2 + 3 a c m \mu q^2 \\
& - 2 b c m \mu^2 q - \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q + b \mu - q) _Z \\
& - b \mu - \mu c + q) a^2 b^3 m \mu^3 - 2 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-a b \mu + a q \\
& + b \mu - q) _Z - b \mu - \mu c + q) a b^3 m \mu^3 + 3 \text{RootOf}((a b \mu - a q) _Z^2 + (-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) b^2 m \mu^2 q - 3 \text{RootOf}((ab\mu \\
& - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) b m \mu q^2 \\
& + a^2 b^3 m \mu^3 + 2 a b^3 m \mu^3 + b^2 c m \mu^3 - 3 b^2 m \mu^2 q + 3 b m \mu q^2 + c m \mu q^2 \\
& - \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c \\
& + q) b^3 m \mu^3 + \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu \\
& - \mu c + q) a^2 m q^3 + 2 \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu \\
& - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a m q^3 + 3 \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq \\
& + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 b c m \mu^2 q + 6 \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (\\
& -ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a b c m \mu^2 q - a^3 c^2 b d \mu^3 \\
& - a^3 b^2 c d \mu^3 - d a^2 b^2 c \mu^3 - a^2 b c^2 d \mu^3 - 2 \mu^3 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (\\
& -ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 b m q + a^3 b c d \mu^2 q \\
& + \mu^2 d c a^2 b q + \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z \\
& - b\mu - \mu c + q) a^3 b^2 c d \mu^3 + 2 \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq \\
& + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^3 b c^2 d \mu^3 + \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (\\
& -ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 b^2 c d \mu^3 - \text{RootOf}((ab\mu \\
& - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^3 b c d \mu^2 q \\
& - \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c \\
& + q) a^2 b c d \mu^2 q + \mu^4 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu \\
& - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 b^2 m + \mu^2 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu \\
& + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 m q^2 - a^2 b^2 c m \mu^4) _Z \\
& + \mu^4 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c \\
& + q) a^3 b^2 d - 2 \mu^4 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq + b\mu - q) _Z \\
& - b\mu - \mu c + q) a^2 b^2 m + \mu^2 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (-ab\mu + aq \\
& + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^3 d q^2 - 2 \mu^2 c \text{RootOf}((ab\mu - aq) _Z^2 + (\\
& -ab\mu + aq + b\mu - q) _Z - b\mu - \mu c + q) a^2 m q^2 - a^2 b c^2 d \mu^4 + a^2 c^2 d \mu^3 q \\
& + 3 b c^2 m \mu^4 a - 3 c^2 m \mu^3 q a - a^3 c d \mu^2 q^2 + 3 a^2 b m \mu^2 q^2 + 2 a^2 b^2 c m \mu^4 \\
& - a^2 b^2 c d \mu^4 - 3 a^2 b^2 m \mu^3 q - a^3 b^2 c d \mu^4)
\end{aligned}$$



Lampiran 2 Perhitungan Maple untuk Titik Keseimbangan Model Predator-Prey

```

> #ANALISIS NUMERIK PERTAMA
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) : unprotect( $\gamma$ ) : unprotect( $\pi$ ) :
  DFE : END :
> c := 1.5 : m := 2.5 : p := 0.05 : q := 0.3 : a := 3.0 : b := 0.4 : d := 0.4 : mu :=
  0.075 :
> dx := x · (1 - x) -  $\frac{c \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x}$  :
> dy :=  $\frac{m \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x}$  - d · y -  $\frac{p \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y}$  :
> dz :=  $\frac{q \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y}$  - mu · z :
> fixpoint := solve( {dx, dy, dz}, {x, y, z} ) :
> ttk1 := fixpoint[1];
  ttk1 := {x=0., y=0., z=0.} (1)
> ttk2 := fixpoint[3];
  ttk2 := {x=1., y=0., z=0.} (2)
> ttk3 := fixpoint[4];
  ttk3 := {x=0.3076923077, y=0.8875739645, z=0.} (3)
> ttk4 := fixpoint[5];
  ttk4 := {x=0.8861041317, y=0.2777777778, z=4.567591040} (4)
> J := Matrix( jacobian( [dx, dy, dz], [x, y, z] ) ) :
> ttk1 := eval(subs(ttk1, J));
  ttk1 :=  $\begin{bmatrix} 1. & -0. & 0 \\ 0. & -0.4 & -0. \\ 0 & 0. & -0.075 \end{bmatrix}$  (5)
> ttk2 := eval(subs(ttk2, J));
  ttk2 :=  $\begin{bmatrix} -1. & -0.3750000000 & 0 \\ 0. & 0.2250000000 & -0. \\ 0 & 0. & -0.075 \end{bmatrix}$  (6)
> ttk3 := eval(subs(ttk3, J));
  ttk3 :=  $\begin{bmatrix} 0.0246153845 & -0.2400000000 & 0 \\ 0.6000000001 & 0. & -0.03275109170 \\ 0 & 0. & 0.1215065502 \end{bmatrix}$  (7)
> ttk4 := eval(subs(ttk4, J));
  ttk4 :=  $\begin{bmatrix} -0.8033417081 & -0.3633249580 & 0 \\ 0.0518890753 & 0.02055415968 & -0.01250000000 \\ 0 & 1.109924623 & 0. \end{bmatrix}$  (8)
>
> ttk1 := eigenvalues(ttk1);
  ttk1 := -0.4000000000000000, -0.07500000000000000, 1. (9)
> ttk2 := eigenvalues(ttk2);

```

```

tk2 := -1., 0.2250000000000000, -0.0750000000000000 (10)
> tk3 := eigenvalues(tk3);
tk3 := 0.0123076922500000 + 0.379273675247148 I, 0.0123076922500000 (11)
      - 0.379273675247148 I, 0.121506550200000
> tk4 := eigenvalues(tk4);
tk4 := -0.780312740131322, -0.00123740414433868 + 0.119507257267440 I, (12)
      -0.00123740414433868 - 0.119507257267440 I
>
> #ANALISIS NUMERIK KEDUA
> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) : unprotect( $\gamma$ ) : unprotect( $\pi$ ) :
      DFE : END :
> c := 1.5 : a := 3 : m := 4.35 : d := 0.4 : p := 0.05 : b := 0.4 : q := 0.3 : mu :=
      0.075 :
> dx := x · (1 - x) -  $\frac{c \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x}$  :
> dy :=  $\frac{m \cdot x \cdot y}{1 + a \cdot x}$  - d · y -  $\frac{p \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y}$  :
> dz :=  $\frac{q \cdot y \cdot z}{1 + b \cdot y}$  - mu · z :
> fixpoint := solve( {dx, dy, dz}, {x, y, z} ) :
> tk1 := fixpoint[1];
      tk1 := {x=0., y=0., z=0.} (13)
> tk2 := fixpoint[3];
      tk2 := {x=1., y=0., z=0.} (14)
> tk3 := fixpoint[4];
      tk3 := {x=0.1269841270, y=0.8037288990, z=0.} (15)
> tk4 := fixpoint[5];
      tk4 := {x=0.8861041317, y=0.2777777778, z=14.52538619} (16)
> J := Matrix( jacobian( [dx, dy, dz], [x, y, z] ) ) :
> tk1 := eval( subs( tk1, J ) );
      tk1 :=  $\begin{bmatrix} 1. & -0. & 0 \\ 0. & -0.4 & -0. \\ 0 & 0. & -0.075 \end{bmatrix}$  (17)
> tk2 := eval( subs( tk2, J ) );
      tk2 :=  $\begin{bmatrix} -1. & -0.3750000000 & 0 \\ 0. & 0.6875000000 & -0. \\ 0 & 0. & -0.075 \end{bmatrix}$  (18)
> tk3 := eval( subs( tk3, J ) );
      tk3 :=  $\begin{bmatrix} 0.1138478380 & -0.1379310345 & 0 \\ 1.833333334 & 0. & -0.03040991420 \\ 0 & 0. & 0.1074594852 \end{bmatrix}$  (19)

```


$$\begin{aligned}
 &> \text{ttk4} := \text{eval}(\text{subs}(\text{ttk4}, J)); \\
 &\quad \text{ttk4} := \begin{bmatrix} -0.8033417081 & -0.3633249580 & 0 \\ 0.0902869909 & 0.06536423738 & -0.01250000000 \\ 0 & 3.529668844 & 0. \end{bmatrix} \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{ttk1} := \text{eigenvalues}(\text{ttk1}); \\
 &\quad \text{ttk1} := -0.4000000000000000, -0.0750000000000000, 1. \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{ttk2} := \text{eigenvalues}(\text{ttk2}); \\
 &\quad \text{ttk2} := -1., 0.6875000000000000, -0.0750000000000000 \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{ttk3} := \text{eigenvalues}(\text{ttk3}); \\
 &\quad \text{ttk3} := 0.0569239190000000 + 0.499633096169214 I, 0.0569239190000000 \\
 &\quad \quad - 0.499633096169214 I, 0.107459485200000 \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{ttk4} := \text{eigenvalues}(\text{ttk4}); \\
 &\quad \text{ttk4} := -0.766458430173604, 0.0142404797268021 + 0.214572225208632 I, \\
 &\quad \quad 0.0142404797268021 - 0.214572225208632 I \quad (24)
 \end{aligned}$$

Lampiran 3 Program Maple Simulasi Pertama

```

> # SIMULASI 1
> restart : with(plots) : with(DEtools) :
> c := 1.5 : a := 3 : m := 2.5 : d := 0.4 : p := 0.05 : b := 0.4 : q := 0.3 : mu := 0.075 :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · (1 - x(t)) -  $\frac{c \cdot x(t) \cdot y(t)}{1 + a \cdot x(t)}$  :
> dy := diff(y(t), t) =  $\frac{m \cdot x(t) \cdot y(t)}{1 + a \cdot x(t)}$  - d · y(t) -  $\frac{p \cdot y(t) \cdot z(t)}{1 + b \cdot y(t)}$  :
> dz := diff(z(t), t) =  $\frac{q \cdot y(t) \cdot z(t)}{1 + b \cdot y(t)}$  - mu · z(t) :
> ics := x(0) = 0.5, y(0) = 0.5, z(0) = 4 :
> sol := dsolve({dx, dy, dz, ics}, numeric) :
> plots[odeplot](sol, [x(t), y(t), z(t)], 0..3000, title
= "Potret Fase Interaksi Tiga Spesies", labels = ["x(t)", "y(t)", "z(t)"], color = blue,
axes = boxed, thickness = 2.5, numpoints = 900) :
> plots[odeplot](sol, [x(t), z(t)], 0..3000, title
= "Potret Fase Interaksi Antara Mangsa x(t) dan Superpredator z(t)", labels = [x(t),
z(t)], thickness = 2.5, numpoints = 900) :
> plots[odeplot](sol, [[y(t), z(t)]], t = 0 .. 3000, title
= "Potret Fase Antara Predator y(t) dan Superpredator z(t)", labels = [y(t), z(t)],
color = blue, linestyle = 1, thickness = 2.5, numpoints = 900) :
> plots[odeplot](sol, [[t, x(t)], [t, y(t)]], t = 0 .. 1500, numpoints = 700, title
= "Perkembangan Populasi x(t) dan y(t) Terhadap Waktu", labels = [t,
"Populasi x(t), y(t)"], linestyle = [1, 1], thickness = 2.5, color = [red, blue], legend
= ["x(t)", "y(t)"]) :
> plots[odeplot](sol, [t, z(t)], t = 0 .. 1500, numpoints = 700, title
= "Perkembangan Populasi z(t) Terhadap Waktu", labels = [t, "Populasi z(t)"],
linestyle = 1, thickness = 2.5, color = green, legend = ["z(t)"]) :
>

```

Lampiran 4 Program Maple Simulasi Kedua

```

> # SIMULASI 2
> restart : with(plots) : with(DEtools) :
> c := 1.5 : a := 3 : m := 4.35 : d := 0.4 : p := 0.05 : b := 0.4 : q := 0.3 : mu :=
    0.075 :
> dx := diff(x(t), t) = x(t) · (1 - x(t)) -  $\frac{c \cdot x(t) \cdot y(t)}{1 + a \cdot x(t)}$  :
> dy := diff(y(t), t) =  $\frac{m \cdot x(t) \cdot y(t)}{1 + a \cdot x(t)}$  - d · y(t) -  $\frac{p \cdot y(t) \cdot z(t)}{1 + b \cdot y(t)}$  :
> dz := diff(z(t), t) =  $\frac{q \cdot y(t) \cdot z(t)}{1 + b \cdot y(t)}$  - mu · z(t) :
> ics := x(0) = 0.5, y(0) = 0.5, z(0) = 4 :
> sol := dsolve({dx, dy, dz, ics}, numeric) :
> plots[odeplot](sol, [x(t), y(t), z(t)], 0..1000, title
    = "Potret Fase Interaksi Tiga Spesies", labels = ["x(t)", "y(t)", "z(t)"], color = blue,
    axes = boxed, thickness = 2, numpoints = 250) :
> plots[odeplot](sol, [x(t), z(t)], 0..1000, title
    = "Potret Fase Interaksi Antara Mangsa x(t) dan Superpredator z(t)", labels = [x(t),
    z(t)], thickness = 2, numpoints = 250) :
> plots[odeplot](sol, [[y(t), z(t)]], t = 0 .. 1000, title
    = "Potret Fase Antara Predator y(t) dan Superpredator z(t)", labels = [y(t), z(t)],
    color = blue, linestyle = 1, thickness = 2, numpoints = 250) :
> plots[odeplot](sol, [[t, x(t)], [t, y(t)]], t = 0 .. 500, numpoints = 250, title
    = "Perkembangan Populasi x(t) dan y(t) Terhadap Waktu", labels = [t,
    "Populasi x(t), y(t)", linestyle = [1, 1], color = [red, blue], thickness = 2, legend
    = ["x(t)", "y(t)"]) :
> plots[odeplot](sol, [t, z(t)], t = 0 .. 500, numpoints = 250, title
    = "Perkembangan Populasi z(t) Terhadap Waktu", labels = [t, "Populasi z(t)",
    linestyle = 1, thickness = 2.5, color = green, legend = ["z(t)"]) :
>

```

RIWAYAT HIDUP



Nur Fitria Irawan, lahir di Kota Probolinggo pada tanggal 17 Desember 2001. Bertempat tinggal di Kabupaten Dringu, Kota Probolinggo, Jawa Timur. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari Almarhum Bapak Agus Irawan dan Ibu Supiyani. Penulis merupakan mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam

Maulana Malik Ibrahim Malang. Perjalanan pendidikan penulis di mulai dari jenjang sekolah dasar di SDN Mranggon Lawang I dan lulus pada tahun 2014. Kemudian, melanjutkan ke SMPN 3 Probolinggo dan lulus pada tahun 2017. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan ke jenjang menengah atas di SMAN 1 Dringu dan lulus pada tahun 2020. Pada tahun 2021, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan menjalankan perkuliahan hingga menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Selama masa perkuliahan, penulis aktif mengikuti kegiatan akademik dan menyelesaikan berbagai proses pembelajaran yang menjadi bagian dari kurikulum studi. Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Gedog Kulon, Turen, Kabupaten Malang pada tahun 2024, di mana penulis dipercaya sebagai bendahara kelompok. Setelah itu, penulis menjalani Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Perhubungan Kabupaten Malang pada tahun 2024 pada bidang terminal dan perparkiran. Di luar kegiatan akademik, penulis mengisi waktu dengan membantu usaha keluarga di bidang perdagangan termasuk mengelola toko keluarga di pasar tradisional, melakukan kegiatan jual beli serta pendistribusian barang. Selain itu, penulis juga sesekali menerima pekerjaan lepas yang dapat dikerjakan dari kos untuk menambah pengalaman dan mengembangkan keterampilan diri.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nur Fitria Irawan
NIM : 210601110054
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Model *Predator-Prey* dengan Respon Fungsional Holling Type II
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Agustus 2024	Konsultasi Topik	1.
2.	26 Agustus 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	28 Agustus 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	26 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	25 November 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	10 Desember 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	12 Desember 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	13 Desember 2024	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	13 Desember 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	5 Mei 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	16 Juni 2025	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	8 Agustus 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	12 Agustus 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	28 Agustus 2025	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	23 September 2025	ACC Bab IV dan V	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

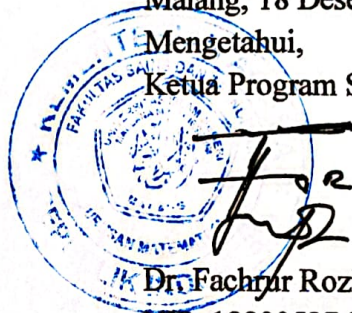
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	25 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16. <i>4.</i>
17.	25 September 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	17. <i>4.</i>
18.	2 Oktober 2025	ACC Seminar Hasil	18. <i>→</i>
19.	20 Oktober 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19. <i>→</i>
20.	15 Desember 2025	Sidang Skripsi	20. <i>→</i>
21.	18 Desember 2025	ACC Keseluruhan	21. <i>→</i>

Malang, 18 Desember 2025

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

NIP. 19800527 200801 1 012