KETERKAITAN RUANG QUASI M −METRIK DENGAN RUANG M − METRIK DAN RUANG METRIK KLASIK

SKRIPSI

OLEH
DESTIA AYU NANDA
NIM. 210601110050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025

KETERKAITAN RUANG QUASI M −METRIK DENGAN RUANG M − METRIK DAN RUANG METRIK KLASIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Destia Ayu Nanda
NIM. 210601110050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2025

KETERKAITAN RUANG QUASI M – METRIK DENGAN RUANG M – METRIK DAN RUANG METRIK KLASIK

SKRIPSI

Oleh
Destia Ayu Nanda
NIM. 21060111050

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 08 Desember 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Juhari, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

KETERKAITAN RUANG QUASI M – METRIK DENGAN RUANG M – METRIK DAN RUANG METRIK KLASIK

SKRIPSI

Oleh
Destia Ayu Nanda
NIM. 21060111050

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Desember 2025

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Destia Ayu Nanda
NIM	: 210601110050
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Keterkaitan Ruang Quasi *M*-Metrik dengan Ruang *M*-Metrik dan Ruang MetrikKlasik.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2025

Yang membuat pernyataan,

Destia Ayu Nanda

NIM. 210601110050

MOTO

"Skripsi ini bukan bukti kepintaran, tapi bukti bahwa aku tidak menyerah."

PERSEMBAHAN

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat-nya, sehingga peneliti berhasil menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta menyelesaikan penulisan skripsi ini.
Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

1. Ayah tercinta Halifi, S.H., sebagai sosok teladan yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta pengorbanan tanpa pamrih. Terima kasih atas kerja keras, nasihat, dan keteguhan yang menjadi sumber kekuatan penulis dalam menempuh pendidikan. Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan kesehatan, umur panjang, dan kebahagiaan.
2. Ibu tercinta Nyimas Nur Ainun, yang dengan penuh kasih sayang, kesabaran, dan doa yang tiada putus selalu menjadi penyemangat utama penulis dalam setiap langkah perjuangan. Terima kasih atas cinta, perhatian, dukungan, serta pengorbanan yang tak terhingga. Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan kesehatan, umur panjang, dan kebahagiaan.
3. Kakak penulis, Yoga Aprilianda Pratama, yang senantiasa memberikan dukungan, perhatian, dan motivasi kepada penulis selama menempuh pendidikan hingga penyusunan skripsi ini. Terima kasih atas kebersamaan, nasihat, serta dorongan semangat yang telah diberikan.
4. Seluruh keluarga besar, yang senantiasa memberikan doa, dukungan moral, serta dorongan semangat kepada penulis selama menempuh pendidikan dan proses penyusunan skripsi ini.
5. Diri penulis sendiri, sebagai bentuk apresiasi atas ketekunan, kesabaran, komitmen, serta usaha yang telah dilalui dalam menyelesaikan studi dan penyusunan skripsi ini, meskipun dihadapkan pada berbagai tantangan dan keterbatasan.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Segala puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT dengan segala rahmat dan karunia-Nya. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing umat manusia keluar dari zaman jahiliah menuju cahaya terang yaitu agama islam.

Skripsi dengan judul "Keterkaitan Ruang Quasi *M*-Metrik dengan Ruang *M*-Metrik dan Ruang Metrik Klasik" merupakan tugas akhir untuk menyelesaikan mata kuliah skripsi di program studi Matematika pada akultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam penyusunan skripsi ini, penulis telah banyak menerima bantuan, bimbingan serta arahan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang tulus kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nurdiana, M.Si., CHARM., CRMP, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I, yang dengan penuh kesabaran telah memberikan bimbingan, arahan, saran, serta kritik yang sangat membantu penulis dalam proses penyusunan dan penyelesaian skripsi ini.
5. Juhari, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan arahan, masukan, serta pandangan yang sangat bermanfaat, khususnya dalam mengintegrasikan nilai-nilai keislaman dengan penelitian yang dilakukan penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku Ketua Penguji, yang dengan penuh perhatian telah memberikan penilaian, masukan, serta rekomendasi yang sangat berharga demi penyempurnaan skripsi ini.

7. Dian Maharani, M.Si., selaku Anggota Penguji 1, yang telah memberikan saran, masukan, dan penilaian yang konstruktif sehingga skripsi ini dapat disempurnakan dengan lebih baik.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang dengan tulus mencurahkan ilmu, bimbingan, dan semangat selama masa studi penulis.
9. Kedua orang tua penulis, Ayah Halifi, S.H. dan Ibu Nyimas Nur Ainun, yang senantiasa mengiringi setiap langkah penulis dengan doa yang tulus, kasih sayang yang tak terhingga, serta pengorbanan yang tidak pernah berhenti sejak awal perjalanan pendidikan hingga tahap penyelesaian skripsi ini. Segala capaian penulis tidak terlepas dari peran, keikhlasan, dan restu Ayah dan Ibu yang selalu menjadi sumber kekuatan dan ketenangan bagi penulis.
10. Seluruh keluarga besar penulis, yang telah mendoakan, memberikan dukungan moral, serta menyertai perjalanan akademik penulis dengan perhatian dan kepedulian. Kehadiran keluarga menjadi penguat bagi penulis untuk tetap bertahan, bangkit, dan menyelesaikan tugas akhir ini dengan penuh tanggung jawab.
11. Sahabat di kampung halaman, Elsa, Ina, Nilta, dan Zidan, yang senantiasa menghadirkan kebersamaan, dukungan, dan doa di setiap fase kehidupan penulis. Terima kasih atas persahabatan yang tulus, canda yang menguatkan, serta kehadiran yang selalu memberi semangat, meskipun jarak dan waktu sering kali memisahkan.
12. Sahabat seperjuangan di kampus dalam menyusun skripsi, Aya, Fitri, dan Vina, yang telah menemani proses panjang penyusunan skripsi dengan diskusi, berbagi cerita, saling menguatkan, serta berjuang bersama dalam suka dan duka akademik. Kebersamaan dan solidaritas yang terjalin menjadi kenangan berharga sekaligus penyemangat bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Seseorang, yang dengan ketulusan senantiasa memberikan perhatian, dukungan, dan motivasi kepada penulis. Kehadirannya menjadi sumber

semangat, penguat mental, dan pendamping dalam menghadapi berbagai tantangan selama proses penyusunan skripsi ini.

14. Seluruh mahasiswa angkatan 2021, atas kebersamaan yang hangat, semangat juang yang saling menular, serta dukungan yang tak ternilai selama menjalani masa perkuliahan. Perjalanan bersama angkatan ini menjadi bagian penting dalam proses pembentukan karakter, kedewasaan, dan pengalaman akademik penulis.

Penulis menyadari bahwa karya tulis ini masih jauh dari kata sempurna dan masih terdapat berbagai kekurangan. Oleh karena itu, segala bentuk kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan dan penyempurnaan di masa mendatang. Semoga karya ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca serta menjadi kontribusi positif dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 15 Desember 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini yaitu:

d	: Metrik
dq	: Quasi metrik
p	: Metrik parsial
m	: *M*-metrik
ζ	: Quasi *M*-metrik
$\emptyset$	: Himpunan kosong
m_{sg}	: Nilai minimum dari s dan g di ruang *M*-metrik
M_{sg}	: Nilai maksimum dari s dan g di ruang *M*-metrik
z_{sg}	: Nilai minimum dari s dan g di ruang quasi *M*-metrik
R_{sg}	: Nilai maksimum dari s dan g di ruang quasi *M*-metrik

ABSTRAK

Nanda, Destia Ayu. 2025. Keterkaitan Ruang Quasi *M*-Metrik dengan Ruang *M*-Metrik dan Ruang Metrik Klasik. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Juhari, M.Si.

Kata kunci: Ruang Metik, Ruang Quasi Metrik, Ruang *M*-Metrik, Ruang Quasi *M*-Metrik.

Ruang quasi *M*-metrik merupakan salah satu bentuk generalisasi dari ruang *M*-metrik dengan menghapus sifat simetri, namun tetap memenuhi aksioma identitas serta ketaksamaan segitiga sehingga mampu merepresentasikan fenomena jarak yang bersifat asimetris. Perkembangan menuju ruang quasi *M*-metrik berawal dari ruang metrik klasik, kemudian diperluas menjadi ruang metrik parsial yang memperbolehkan *self-distance* bernilai positif, dilanjutkan dengan ruang *M*-metrik yang menambahkan parameter minimum dan maksimum *self-distance*, hingga akhirnya terbentuk konsep ruang quasi *M*-metrik yang tidak lagi mensyaratkan simetri. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji keterkaitan ruang quasi *M*-metrik dengan ruang *M*-metrik dan ruang metrik klasik melalui studi pustaka terhadap literatur terkait ruang metrik klasik, ruang quasi metrik, ruang metrik parsial, dan ruang *M*-metrik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap ruang *M*-metrik merupakan ruang quasi *M*-metrik, namun tidak berlaku sebaliknya karena ruang quasi *M*-metrik tidak mensyaratkan simetri. Selain itu, diperoleh bahwa dari suatu ruang quasi *M*-metrik dapat dibentuk metrik klasik dan ruang *M*-metrik. Penelitian ini memperjelas posisi ruang quasi *M*-metrik dalam teori metrik serta fleksibilitasnya dalam merepresentasikan jarak tak simetris. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi pengembangan kajian lebih lanjut, khususnya dalam teori titik tetap dan topologi dalam ruang quasi *M*-metrik.

ABSTRACT

Nanda, Destia Ayu. 2025. The Relationship of Quasi *M*-Metric Spaces with *M*-Metric Spaces and Classical Metric Spaces. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Juhari, M.Si.

Keywords: Metric Space, Quasi Metric Space, *M*-Metric Space, Quasi *M*-Metric Space.

Quasi *M*-metric space is a generalization of *M*-metric space by eliminating the symmetry property, but still fulfilling the identity axiom and triangle inequality so that it is able to represent asymmetric distance phenomena. The development towards quasi *M*-metric space begins with classical metric space, then expanded into partial metric space that allows positive self-distance, continued with *M*-metric space that adds minimum and maximum self-distance parameters, until finally the concept of quasi *M*-metric space is formed that no longer requires symmetry. This study aims to examine the relationship between quasi *M*-metric space with *M*-metric space and classical metric space through a literature study of literature related to classical metric space, quasi metric space, partial metric space, and *M*-metric space. The results show that every *M*-metric space is a quasi-*M*-metric space, but the reverse is not true because quasi *M*-metric space does not require symmetry. In addition, it is obtained that from a quasi *M*-metric space, classical metric and *M*-metric space can be formed. This research clarifies the position of *M*-metric quasispaces in metric theory and their flexibility in representing asymmetric distances. The results of this research are expected to be the basis for the development of further studies, especially in the theory of fixed points and topology in quasi *M*-metric spaces.

مستخلص البحث

نانداء، ديستيا أيو. ٢٠٢٥. العلاقة بين الفضاءات شبه المترية-M والفضاءات المترية-M والفضاءات المترية الكلاسيكية. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج. المشرف: (١) الدكتور خير الرحمن، الماجستير. (٢) جوهري، الماجستير.

الكلمات الأساسية: الفضاء المتري، الفضاء شبه المتري، الفضاء المتري M، الفضاء المتري شبه M.

الفضاء المتري شبه M هو تعميم للفضاء المتري M من خلال إزالة خاصية التناظر، مع الوفاء بمسلمة الهوية وعدم مساواة المثلث بحيث يكون قادرًا على تمثيل ظاهرة المسافة غير المتماثلة. بدأ التطور نحو الفضاء المتري شبه M بالفضاء المتري الكلاسيكي، ثم توسع إلى الفضاء المتري الجزئي الذي يسمح بالمسافة الذاتية الموجبة، واستمر مع الفضاء المتريM الذي يضيف معلمات المسافة الذاتية الدنيا والقصوى، حتى تم تشكيل مفهوم الفضاء المتري شبه M الذي لم يعد يتطلب التناظر. هدفت هذه الدراسة إلى دراسة العلاقة بين الفضاء المتري شبه M والفضاءات المترية الأخرى من خلال دراسة الأدبيات المتعلقة بالفضاء المتري الكلاسيكي والفضاء المتري شبه المتري والفضاء المتري الجزئي والفضاء المتري M. ظهرتْ النتائج أن كل فضاء متري M هو فضاء متري شبه M، ولكن العكس ليس صحيحًا لأن الفضاء المتري شبه M لا يتطلب التناظر. بالإضافة إلى ذلك، يُستنتج أنه من فضاء شبه متري M، يُمكن تكوين متريات كلاسيكية وفضاءات مترية Mجديدة. قدّم هذا البحث صورة أوضح لموقع شبه الفضاءات المترية M في النظرية المترية، وظهر أن هذه الفضاءات تتمتع بمرونة أكبر في تمثيل ظواهر المسافة غير المتماثلة. من المتوقع أن تُشكل نتائج هذا البحث أساسًا لمزيد من الأبحاث، لا سيما في نظرية النقطة الثابتة والطوبولوجيا في شبه الفضاءات المترية M.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Maurice Fréchet pertama kali memperkenalkan konsep mengenai ruang metrik pada tahun 1906 sebagai generalisasi dari ide jarak dalam himpunan tak kosong. Secara formal, suatu ruang metrik terdiri atas pasangan terurut (X, d) di mana $X \neq \emptyset$ dan fungsi d memetakan dari $X \times X$ ke $\mathbb{R}$. Fungsi ini harus memenuhi empat aksioma utama, yaitu: *non-negativitas* $(d(s, g) \geq 0)$, identitas $(d(s, g) = 0 \Leftrightarrow s = g)$, simetri $\big(d(s, g) = d(g, s)\big)$, dan ketaksamaan segitiga $\big(d(s, g) \leq d(s, u) + d(u, g)\big)$ untuk setiap $s, g, u \in X$ (Kreyszig, 1978). Salah satu contoh dari ruang metrik adalah ruang Euclid $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik yang didefinisikan sebagai $d(s, g) = |s - g|$, $\forall\, s, g, u \in \mathbb{R}$.

Seiring dengan perkembangan ilmu matematika, konsep ruang metrik mengalami berbagai modifikasi untuk menyesuaikan dengan fenomena yang tidak dapat dijelaskan secara memadai oleh struktur metrik klasik. Salah satu fenomena tersebut adalah ketidaksimetrian jarak, di mana dalam situasi nyata jarak dari titik A ke titik B tidak selalu sama dengan jarak dari B ke A, misalnya akibat arah jalan satu arah atau kondisi lalu lintas yang berbeda. Fenomena semacam ini mendorong para matematikawan untuk mengembangkan berbagai bentuk generalisasi dari ruang metrik, seperti ruang quasi metrik yang menghilangkan sifat simetri, ruang metrik parsial yang memperbolehkan jarak diri bernilai positif, serta ruang *M*-metrik yang merupakan perluasan dari konsep metrik klasik. Dari berbagai pengembangan tersebut kemudian lahirlah ruang quasi *M*-metrik, yaitu hasil kombinasi antara sifat ruang quasi metrik dan ruang M-metrik yang mampu merepresentasikan fenomena ketidaksimetrian sekaligus memperluas konsep jarak pada ruang metrik.

Salah satu bentuk generalisasi awal dari ruang metrik adalah ruang quasi metrik. Menurut Ayoob dkk. (2023), konsep ruang quasi metrik pertama kali diperkenalkan oleh W. A. Wilson pada tahun 1931. Secara umum, ruang quasi metrik merupakan pasangan (X, dq), di mana dq adalah fungsi jarak yang didefinisikan dari $dq: X \times X \to \mathbb{R}$. Ruang ini berbeda dengan ruang metrik karena pada ruang quasi metrik fungsi jarak dq tidak harus bersifat simetri, sehingga jarak antara dua titik s ke g tidak selalu sama dengan jarak dari g ke s. Sebagai contoh, pada himpunan $X = [0,1]$ dan didefinisikan fungsi $dq(s, g) = |s - g| + |s|$, $\forall\, s, g, u \in X$ merupakan ruang quasi metrik, akan tetapi bukan ruang metrik karena tidak memenuhi sifat simetri $dq(s, g) = dq(g, s)$.

Pada tahun 1994, Stephen G. Matthews memperkenalkan konsep metrik parsial sebagai perluasan dari ruang metrik klasik. Secara umum, ruang metrik parsial merupakan pasangan (X, p) di mana $p: X \times X \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi jarak yang memenuhi sifat-sifat tertentu serupa dengan ruang metrik, namun dengan beberapa perbedaan penting. Berbeda dengan ruang metrik yang mensyaratkan $d(s, s) = 0$ untuk setiap $s \in X$, pada ruang metrik parsial jarak dari suatu titik terhadap dirinya sendiri, yaitu $p(s, s)$ tidak harus bernilai nol. Dalam ruang ini, dua titik s dan g dianggap identik jika dan hanya jika $p(s, s) = p(s, t) = p(g, g)$. Selain itu, pada aksioma kedua pada ruang metrik parsial berbentuk $p(s, s) \leq p(s, g)$. Kemudian pada aksioma keempat di ruang metrik berbentuk $d(s, g) \leq d(s, u) + d(u, g)$, sedangkan pada ruang metrik parsial berbentuk $p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$. Sebagai contoh, misalkan $X = [0,\infty)$ dan didefinisikan fungsi $p(s,g) = \max(s,g)$. Fungsi ini memenuhi sifat-sifat dasar dari metrik parsial, yakni *non-negativitas* dan ketaksamaan segitiga, namun tidak selalu memenuhi $p(s,s) = 0$, karena $p(s,s) = s, \forall\, s \geq 0$.

Konsep ruang *M*-metrik pertama kali diperkenalkan oleh Asadi, dkk (2014) sebagai bentuk generalisasi dari ruang metrik parsial. Secara umum, ruang *M*-metrik adalah pasangan (X,m) di mana $m: X \times X \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi jarak yang memperluas ide pada metrik parsial dengan menambahkan dua parameter tambahan, yaitu nilai minimum dan maksimum dari *self-distance* dua titik. Kedua nilai tersebut masing-masing didefinisikan sebagai $m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\}$ dan $M_{sg} \coloneqq \max\{m(s,s), m(g,g)\}$ yang berperan penting dalam perumusan aksiomatik ruang *M*-metrik.

Ruang metrik parsial dan ruang *M*-metrik merupakan dua generalisasi dari ruang metrik yang sama-sama memperbolehkan nilai jarak dari suatu titik ke dirinya sendiri $p(s,s)$ atau $m(s,s)$ tidak selalu nol. Namun, ruang *M*-metrik memberikan fleksibilitas yang lebih besar dibandingkan metrik parsial karena melibatkan dua parameter tambahan yaitu m_{sg} dan M_{sg} dalam perumusan aksiomanya. Perbedaan mendasar antara ruang metrik parsial dan ruang *M*-metrik terletak pada formulasi aksioma kedua dan keempat. Pada metrik parsial, aksioma kedua menyatakan bahwa $p(s,s) \leq p(s,g)$, sedangkan pada *M*-metrik aksioma tersebut ditulis sebagai $m_{sg} \leq m(s,g)$. Sementara itu, aksioma keempat dalam metrik parsial berbunyi $p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$, sedangkan pada *M*-metrik ditulis sebagai $m(s,g) - m_{sg} \leq m(s,u) - m_{su} + m(u,g) - m_{ug}$.

Berdasarkan pernyataan Asadi, dkk (2014), ruang *M*-metrik merupakan perluasan langsung dari ruang metrik parsial. Bahkan terdapat fungsi yang membentuk *M*-metrik tetapi tidak memenuhi syarat sebagai metrik parsial. Sebagai contoh, $X = \{s, g, u\}$,dan fungsi $m: X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $m(s,s) = 1$, $m(g,g) = 9$, $m(u,u) = 5$, $m(s,g) = m(g,s) = 10$, $m(s,u) = m(u,s) = 7$, dan $m(u,g) = m(g,u) = 8$. Fungsi m tersebut memenuhi semua aksioma *M*-metrik, namun gagal memenuhi syarat metrik parsial karena tidak memenuhi aksioma kedua dalam definisi metrik parsial. Oleh karena itu, m adalah *M*-metrik pada X tetapi bukan metrik parsial. Oleh karena itu, contoh ini menunjukkan bahwa ruang *M*-metrik memang lebih umum daripada ruang metrik parsial.

Ruang quasi *M*-metrik merupakan generalisasi lebih lanjut dari ruang *M*-metrik, yang diperkenalkan oleh Ayoob, dkk (2023). Pada ruang ini, sifat simetri yang terdapat pada *M*-metrik dihapuskan, sehingga memungkinkan $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$, $\forall\, s, g \in X$. Sebagai contoh, $X = \{s, g, u\}$ dan fungsi $\zeta: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan sebagai berikut: $\zeta(s,s) = 1$, $\zeta(g,g) = 9$, $\zeta(u,u) = 5$, $\zeta(s,u) = \zeta(u,s) = 7$, $\zeta(u,g) = \zeta(g,u) = 8$, $\zeta(s,g) = 10$, $\zeta(g,s) = 11$. Karena $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$, maka jelas bahwa fungsi tersebut tidak memenuhi sifat simetri dan oleh karena itu (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik tetapi bukan ruang *M*-metrik.

Keteraturan dan fleksibilitas dalam struktur quasi *M*-metrik ini secara filosofis selaras dengan pandangan Islam mengenai ciptaan Allah yang teratur dan penuh perhitungan, meskipun tampak tidak selalu simetri di mata manusia. Hal ini ditegaskan dalam firman Allah SWT. dalam Al-Qur’an surah At-Thalaq ayat 12:

اَللّٰهُ الَّذِيْ خَلَقَ سَبْعَ سَمٰوٰتٍ وَّمِنَ الْاَرْضِ مِثْلَهُنَّۗ يَتَنَزَّلُ الْاَمْرُ بَيْنَهُنَّ لِتَعْلَمُوْٓا اَنَّ اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ ەۙ
وَّاَنَّ اللّٰهَ قَدْ اَحَاطَ بِكُلِّ شَيْءٍ عِلْمًا ࣖ ﴿١٢﴾

Artinya:
"Allahlah yang menciptakan tujuh langit dan (menciptakan pula) bumi seperti itu. Perintah-Nya berlaku padanya agar kamu mengetahui bahwa Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu dan ilmu Allah benar-benar meliputi segala sesuatu." (Q.S. At-Thalaq: 12)

Ayat ini menunjukkan bahwa ciptaan Allah memiliki tingkatan dan lapisan yang teratur, dengan ukuran dan jarak yang pasti di antara setiap lapisannya. Meskipun lapisan-lapisan tersebut berbeda dan tidak selalu seragam, semuanya tetap tunduk pada ketetapan yang harmonis dan konsisten. Hal ini sejalan dengan prinsip ruang quasi M-metrik yang memperbolehkan sifat asimetri maupun *self-distance* tak nol, namun tetap memenuhi aksioma lainnya. Oleh karena itu, pengembangan ruang quasi M-metrik bukan hanya memperluas cakrawala keilmuan, tetapi juga mencerminkan keteraturan ciptaan yang ditetapkan oleh Allah Swt.

Berdasarkan uraian sebelumnya, tujuan penelitian ini adalah untuk memahami bagaimana ruang quasi M-metrik berhubungan dengan ruang metrik lainnya, terutama ruang M-metrik dan ruang metrik klasik. Penelitian ini membahas definisi ruang quasi M-metrik, memberikan contoh untuk membantu pemahaman, serta menjelaskan bagaimana ruang tersebut dapat menghasilkan metrik biasa dan ruang M-metrik baru.

Pemilihan topik ini didasari oleh kenyataan bahwa ruang metrik klasik belum mampu menggambarkan beberapa fenomena yang bersifat tidak simetri. Contohnya, pada sistem logistik, biaya atau waktu tempuh dari suatu lokasi ke lokasi lainnya tidak selalu sama jika arah perjalanan dibalik. Kondisi serupa terjadi pada jaringan komunikasi digital, di mana waktu pengiriman data dari server ke pengguna bisa berbeda dengan waktu pengiriman data sebaliknya. Fenomena seperti ini menunjukkan bahwa jarak tidak selalu simetri, sehingga ruang quasi *M*-metrik menjadi relevan sebagai model matematis yang lebih fleksibel dan mampu merepresentasikan kondisi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah dipaparkan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: “Bagaimana keterkaitan ruang quasi *M*-metrik dengan ruang metrik lain, khususnya ruang *M*-metrik dan ruang metrik klasik?”.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini ditujukan untuk menjelaskan keterkaitan ruang quasi *M*-metrik dengan ruang metrik lainnya, khususnya ruang *M*-metrik dan ruang metrik klasik, melalui kajian terhadap ruang metrik parsial sebagai tahap pengembangannya.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian yang telah dipaparkan, hasil yang diharapkan dari studi ini meliputi:

1. Memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang ruang quasi *M*-metrik.
2. Memperluas pengetahuan mengenai proses analisis dan pembuktian berdasarkan definisi ruang quasi *M*-metrik, ruang *M*-metrik, dan ruang metrik klasik.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada kajian teoretis mengenai sifat-sifat dasar ruang quasi *M*-metrik serta hubungannya dengan ruang *M*-metrik dan ruang metrik klasik. Pembuktian difokuskan pada beberapa pernyataan utama, antara lain bahwa setiap ruang *M*-metrik merupakan ruang quasi *M*-metrik, namun tidak berlaku sebaliknya. Selain itu, akan ditunjukkan pula bahwa dari suatu ruang quasi *M*-metrik dapat dibentuk metrik klasik dan ruang *M*-metrik.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Metrik

   Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

   (D1) $d(s, g) \geq 0$ (aksioma *non-negativitas*)

   (D2) $d(s, g) = 0 \iff s = g$ (aksioma identitas)

   (D3) $d(s, g) = d(g, s)$ (aksioma simetri)

   (D4) $d(s, g) \leq d(s, u) + d(u, g)$ (aksioma ketaksamaan segitiga)

   Maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

2. Ruang Quasi Metrik

   Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $dq: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut quasi metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

   (DQ1) $dq(s, g) = dq(g, s) = 0 \iff s = g$

   (DQ2) $dq(s, g) \leq dq(s, u) + dq(u, g)$

Maka pasangan (X, dq) disebut ruang quasi metrik. Dalam ruang quasi metrik tidak diperlukan aksioma simetri, jadi bisa saja berlaku $dq(s,g) \neq dq(g,s)$.

3. Ruang Metrik Parsial

   Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik parsial jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

   (P1) $s = g \Leftrightarrow p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$

   (P2) $p(s,s) \leq p(s,g)$

   (P3) $p(s,g) = p(g,s)$

   (P4) $p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$

   Maka pasangan (X, p) disebut ruang metrik parsial.

4. Ruang *M*-Metrik

   Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $m: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut *M*-metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

   (M1) $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g) \Leftrightarrow s = g$,

   (M2) $m_{sg} \leq m(s,g)$,

   (M3) $m(s,g) = m(g,s)$,

   (M4) $\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$.

   Maka pasangan (X, m) disebut ruang *M*-metrik.

5. Ruang Quasi *M*-Metrik

   Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut quasi *M*-metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

   (QM1) $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) \Leftrightarrow s = g$,

   (QM2) $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$,

(QM3) $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$.

Maka pasangan (X,ζ) disebut ruang quasi *M*-metrik. Dalam ruang quasi *M*-metrik tidak diperlukan aksioma simetri, jadi bisa saja berlaku $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Metrik

Dalam subbab ini akan membahas definisi, karakteristik, contoh serta bukti yang memiliki keterkaitan dengan ruang metrik.

Definisi 2.1 Ruang Metrik (Kreyzig, 1978 ; Maharani, 2025)

Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

(D1) $d(s,g) \geq 0$ (aksioma *non-negativitas*)

(D2) $d(s,g) = 0 \iff s = g$ (aksioma identitas)

(D3) $d(s,g) = d(g,s)$ (aksioma simetri)

(D4) $d(s,g) \leq d(s,u) + d(u,g)$ (aksioma ketaksamaan segitiga)

Maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 2.2 Ruang Metrik

Misalkan $X = \mathbb{R}$, $\forall\, s, g, u \in \mathbb{R}$, didefinisikan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(s,g) = |s - g|$. Akan dibuktikan bahwa d merupakan metrik di X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa $d(s,g) = |s - g|$ di mana $\forall\, s, g, \in \mathbb{R}$, karena nilai mutlak selalu bernilai tak negatif, mengakibatkan nilai $d(s,g) = |s - g| \geq 0$. Karena $\forall\, s, g, \in \mathbb{R}$ berlaku pula $d(s,g) = |s - g| \in \mathbb{R}$, dan karena $\forall\, s, g, \in \mathbb{R}$ terbukti pula $d(s,g) = |s - g| < \infty$.

2. ($\Longrightarrow$) jika $d(s,g) = 0$ akan ditunjukkan bahwa $s = g$

$$d(s,g) = 0, \text{maka } s = g$$

$$d(s,g) = |s - g|$$

$$0 = |s - g|$$

$$0 = s - g$$

$$s = g$$

($\Leftarrow$) jika $s = g$ akan ditunjukkan bahwa $d(s,g) = 0$

$$s = g, \text{maka } d(s,g) = 0$$

$$d(s,g) = |s - g|$$

$$= |s - s|$$

$$d(s,g) = 0$$

Jadi terbukti bahwa $d(s,g) = 0 \Leftrightarrow s = g$

3. akan dibuktikan bahwa $d(s,g) = d(g,s)$

$$d(s,g) = |s - g|$$

$$= |g - s|$$

$$= d(g,s)$$

Jadi terbukti bahwa $d(s,g) = d(g,s)$

4. $\forall\, s, g, u \in \mathbb{R}$ berlaku ketaksamaan segitiga nilai mutlak:

$$|s - g| \leq |s - u| + |u - g|$$

Maka,

$$d(s,g) = |s - g| \leq |s - u| + |u - g| = d(s,u) + d(u,g)$$

Sehingga diperoleh

$$d(s,g) \leq d(s,u) + d(u,g)$$

Maka terbukti bahwa $d(s,g) \leq d(s,u) + d(u,g)$.

Karena d memenuhi (1-4) maka $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik.

Contoh 2.3 Bukan Ruang Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$, $\forall\, s, g, u \in \mathbb{R}$, didefinisikan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(s, g) = |2s - 3g|$. Akan dibuktikan bahwa d bukan merupakan metrik di X.

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa $d(s, g) = |2s - 3g|$

Perhatikan aksioma ke-2 dari ruang metrik

$$d(s, g) = 0 \iff |2s - 3g| = 0 \iff 2s - 3g = 0 \iff \mathrm{s} = \frac{3}{2} g$$

Persamaan $\mathrm{s} = \frac{3}{2} g$ tidak selalu mengakibatkan $\mathrm{s} = g$

Sebagai contoh, misalkan $g = 2$, maka $\mathrm{s} = \frac{3}{2} g = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Jelas bahwa $s \neq g$, namun

$$d(s, g) = |2(3) - 3(2)| = |6 - 6| = 0$$

Dengan demikian, terdapat pasangan $s \neq g$ tetapi $d(s, g) = 0$, sehinga aksioma ke-2 tidak teepenuhi.

Oleh karena itu, fungsi $d(s, g) = |2s - 3g|$ bukan merupakan metrik, dan pasangan (X, d) bukan ruang metrik.

Contoh 2.4 Bukan Ruang Metrik

Misalkan $\mathrm{X} \neq \emptyset$, $\forall\, s, g, u \in \mathbb{R}$, didefinisikan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(s, g) = s - g$. Akan dibuktikan bahwa d bukan merupakan metrik di X.

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa $d(s, g) = s - g$, misalkan $s > g$, maka $d(s, g) = s - g > 0$, misalkan $s < g$, maka $d(s, g) = s - g < 0$. Maka (D1) tidak selalu terpenuhi. Selain itu, untuk aksioma simetri juga tidak terpenuhi, karena $d(s,g) = s - g$, $d(g,s) = g - s = -(s - g)$, sehingga

$$d(s,g) = d(g,s) \Leftrightarrow s - g = g - s \Leftrightarrow s = g$$

Jadi untuk $s \neq g$ berlaku $d(s,g) \neq d(g,s)$.

Dikarenakan ada syarat atau sifat yang tidak terpenuhi, maka d bukan merupakan metrik pada X.

Contoh 2.5 Ruang Metrik (Phillips, 1984)

Misalkan $C[0,1]$, himpunan semua fungsi kontinu dari interval $[0,1]$. Didefinisikan fungsi $d: C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$d(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)|$$

Butikan bahwa d adalah mertik pada $C[0,1]$

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa

$$d(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)|$$

Ambil sebarang $s, g, u \in C[0,1]$

1. Akan dibuktikan bahwa $|s(t) - g(t)| \geq 0$ untuk setiap t, sehingga

$$d(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| \geq 0$$

2. Jika $s = g$, maka $s(t) - g(t) = 0$ untuk semua t, jadi $d(s,g) = 0$. Sebaliknya, jika $d(s,g) = 0$, maka $|s(t) - g(t)| \leq 0$ untuk semua t, sehinggga $|s(t) - g(t)| = 0$ dan $s(t) = g(t)$ untuk semua t. Jadi $s = g$.

3. Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka

$$d(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| = \max_{t \in [0,1]} |g(t) - s(t)| = d(s,g)$$

4. Untuk setiap $t \in [0,1]$

$$|s(t) - g(t)| \leq |s(t) - u(t)| + |u(t) - g(t)|$$

Dari ketaksamaan segitiga di $\mathbb{R}$

Ambil maksimum terhadap t pada kedua sisi, diperoleh

$$d(s,g) \leq d(s,u) + d(u,g)$$

Karena d memenuhi (1-4) maka d merupakan metrik pada $C[0,1]$.

Definisi 2.6 Barisan Konvergen dalam Ruang Metrik (Kreyszig, 1978).

Suatu barisan (x_{n}) pada ruang metrik $X = (X,d)$ dikatakan konvergen jika terdapat elemen $x \in X$ sehingga:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{\mathrm{n}},x) = 0$$

Di mana notasi x merupakan nilai limit dari (x_{n}), dapat dituliskan sebagai:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{\mathrm{n}},x) = x$$

Atau

$$x_{\mathrm{n}} \to x$$

Sebaliknya, jika suatu barisan (x_{n}) tidak konvergen, maka disebut barisan divergen.

Contoh 2.7 Barisan Konvergen dalam Ruang Metrik

Misalkan $(\mathbb{R},d)$ merupakan ruang metrik dengan $d(l,m) = |l-m|$ dan $x = 0$. Terdapat barisan (x_n) dengan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke 0.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke 0. Misalkan ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan sifat *archimedean*, terdapat bilangan bulat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\left(\frac{1}{N}\right) < \varepsilon.$$

Maka, jika $n \geq N$ didapat

$$\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{1}{N}\right) < \varepsilon$$

Akibatnya, apabila $n \geq N$, maka berlaku

$$d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$$

Dengan demikian, terbukti bahwa barisan $(x_n) \to 0$.

Definisi 2.8 Barisan Cauchy dalam Ruang Metrik (Kreyszig, 1978)

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) memenuhi sifat Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $m, n > N$.

Setiap barisan yang konvergen di ruang metrik (X, d) adalah sebuah barisan Cauchy.

Contoh 2.9 Barisan Cauchy dalam Ruang Metrik

Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dengan $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m|$ dan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat *archimedean* terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $N > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$, jika $n, m \geq N$

Maka,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \text{ dan } \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$$

Sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Jadi terbukti barisan (x_n) Adalah barisan Cauchy.

Lemma 2.10 Setiap barisan konvergen di ruang metrik (X, d) adalah barisan Cauchy (Kreyszig, 1978).

Bukti

Misalkan $(x_{\mathrm{n}}) \rightarrow x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dengan ketaksamaan segitiga, maka untuk $m > n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian, (x_{n}) adalah barisan Cauchy. Teorema di atas tidak berlaku sebaliknya.

2.1.2 Ruang Quasi Metrik

Pada subbab ini akan membahas definisi, karakteristik, contoh serta bukti yang memiliki keterkaitan dengan ruang quasi metrik.

Ruang quasi metrik merupakan salah satu generalisasi dari ruang metrik. Ketidaksamaan utamanya terletak pada tidak mensyaratkan sifat simetri dalam ruang quasi metrik. Sementara sifat-sifat lain yang dimiliki oleh ruang metrik tetap berlaku dalam ruang quasi metrik.

Definisi 2.11 Ruang Quasi Metrik (Romaguera, 2024).

Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $dq: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut quasi metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

(DQ1) $dq(s,g) = dq(g,s) = 0 \Leftrightarrow s = g$

(DQ2) $dq(s,g) \leq dq(s,u) + dq(u,g)$

Maka pasangan (X, dq) disebut ruang quasi metrik. Dalam ruang quasi metrik tidak diperlukan aksioma simetri, jadi bisa saja berlaku $dq(s,g) \neq dq(g,s)$.

Contoh 2.12 Ruang Quasi Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$, $\forall\, s, g, u \in X$, didefinisikan $dq: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $dq(s,g) = |s - g|$. Akan dibuktikan bahwa dq merupakan quasi metrik di X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$dq(s,g) = |s - g|$$

$$dq(s,s) = |s - s| = 0$$

$$dq(g,g) = |g - g| = 0$$

($\Longrightarrow$) jika $dq(s,g) = 0$ akan ditunjukkan bahwa $s = g$

$$dq(s,g) = 0, \text{maka } s = g$$

$$dq(s,g) = |s - g|$$

$$0 = |s - g|$$

$$0 = s - g$$

$$s = g$$

($\Longleftarrow$) jika $s = g$ akan ditunjukkan bahwa $dq(s,g) = 0$

$$s = g, \text{maka } dq(s,g) = 0$$

$$dq(s,g) = |s - g|$$

$$= |s - s|$$

$$dq(s, g) = 0$$

Jadi terbukti bahwa $dq(s, g) = 0 \Leftrightarrow s = g$

2. $\forall\, s, g, u \in X$ berlaku ketaksamaan segitiga nilai mutlak:

$$|s - g| \leq |s - u| + |u - g|$$

Maka,

$$dq(s, g) = |s - g| \leq |s - u| + |u - g| = dq(s, u) + dq(u, g)$$

Sehingga diperoleh

$$dq(s, g) \leq dq(s, u) + dq(u, g)$$

Maka terbukti bahwa $dq(s, g) \leq dq(s, u) + dq(u, g)$.

Karena kedua aksioma dari ruang quasi metrik terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa dq dapat dikatakan sebagai fungsi quasi metrik dan (X, dq) adalah ruang quasi metrik.

Contoh 2.13 Ruang Quasi Metrik (Phillips, 1984)

Misalkan $C[0,1]$, himpunan semua fungsi kontinu dari interval $[0,1]$. Didefinisikan fungsi dq: $C[0,1] \times C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$dq(s, g) = {}_{t \in [0,1]}^{max} |s(t) - g(t)|$$

Butikan bahwa dq adalah quasi mertik pada $C[0,1]$

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa

$$dq(s, g) = {}_{t \in [0,1]}^{max} |s(t) - g(t)|$$

Ambil sebarang $s, g, u \in C[0,1]$

1. Jika $s = g$, maka $s(t) - g(t) = 0$ untuk semua t, jadi $dq(s, g) = 0$. Sebaliknya, jika $dq(s, g) = 0$, maka $|s(t) - g(t)| \leq 0$ untuk semua t, sehinggga $|s(t) - g(t)| = 0$ dan $s(t) = g(t)$ untuk semua t. Jadi $s = g$.
2. Untuk setiap $t \in [0,1]$

$$|s(t) - g(t)| \leq |s(t) - u(t)| + |u(t) - g(t)|$$

Dari ketaksamaan segitiga di $\mathbb{R}$

Ambil maksimum terhadap t pada kedua sisi, diperoleh

$$dq(s, g) \leq d(s, u) + d(u, g)$$

Karena dq memenuhi (1-2) maka dq merupakan metrik pada $C[0,1]$

Lemma 2.14 Setiap ruang metrik merupakan ruang quasi metrik (Malahayati dan Utami, 2014).

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $dq(s, g) = d(s, g)$ adalah quasi metrik pada X.

(DQ1) Berdasarkan syarat (D2) pada Definisi 2.1, jelas bahwa $dq(s, g) = d(s, g) = 0 \Leftrightarrow s = g$

(DQ2) Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga (D4) pada Definisi 2.1, jelas bahwa $dq(s, g) = d(s, g) \leq d(s, u) + d(u, g)$

Sehingga terbukti bahwa setiap ruang metrik (X, d) juga merupakan ruang quasi metrik (X, dq).

Contoh 2.15 Ruang Quasi Metrik

Diberikan $X = [0,1]$ dan pemetaan $dq: X \times X \to [0, \infty)$ yang didefinisikan oleh

$$dq(s, g) = |s - g| + |s|, \quad \forall\, s, g, u \in X$$

Tunjukkan bahwa (X, dq) adalah ruang quasi metrik, akan tetapi bukan termasuk ruang metrik.

Bukti

Terlebih dahulu akan ditunjukkkan bahwa (X, dq) adalah ruang quasi metrik. Ambil sebarang $s, g, u \in X$.

1. Karena $dq(s, g) = dq(g, s)$ berarti

$$dq(s, g) = |s - g| + |s|$$

$$dq(g, s) = |g - s| + |g|$$

   Dengan memperhatikan sifat nilai mutlak selalu tidak negatif, dan jumlah dua bilangan tak negatif hanya mungkin nol bila keduanya nol, maka berlaku:

$$|s - g| + |s| = 0 \Leftrightarrow |s - g| = 0 \wedge |s| = 0 \Leftrightarrow s = g \wedge s = 0$$

   dan

$$|g - s| + |g| = 0 \Leftrightarrow |g - s| = 0 \wedge |g| = 0 \Leftrightarrow g = s \wedge g = 0$$

   Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $s = g$.

2. Dengan memanfaatkan sifat ketaksamaan segitiga, diperoleh:

$$\begin{aligned} dq(s, g) &= |s - g| + |s| \\ &= |s - u + u - g| + |s| \\ &\leq |s - u| + |u - g| + |s| \\ &\leq |s - u| + |u - g| + |s| + |u| \\ &= |s - u| + |s| + |u - g| + |u| \\ &= dq(s, u) + dq(u, g) \end{aligned}$$

   Karena kedua syarat terpenuhi, maka dq adalah suatu quasi metrik pada X, dengan demikian pasangan (X, dq) adalah ruang quasi metrik.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pasangan (X, dq) bukan merupakan ruang metrik. Perhatikan bahwa:

$$dq(s,g) = |s-g| + |s|,\ dq(g,s) = |g-s| + |g|$$

Secara umum, $|s-g| = |g-s|$, tetapi $|s|$ tidak selalu sama $|g|$.

Dengan demikian, fungsi d tidak memenuhi syarat dasar metrik, yaitu $dq(s,g) \neq dq(g,s)$. Oleh karena itu pasangan (X, dq) bukanlah ruang metrik.

2.1.3 Ruang Metrik Parsial

Pada subbab ini akan membahas definisi, karakteristik, contoh serta bukti yang memiliki keterkaitan dengan ruang metrik parsial.

Definisi 2.16 Ruang Metrik Parsial (Matthews, 1994)

Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik parsial jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

(P1) $s = g \Leftrightarrow p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$

(P2) $p(s,s) \leq p(s,g)$

(P3) $p(s,g) = p(g,s)$

(P4) $p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$

Maka pasangan (X, p) disebut ruang metrik parsial.

Contoh 2.17 Ruang Metrik Parsial

Diketahui suatu fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $p(s,g) = \max(s,g)$, dengan s dan g merupakan bilangan real non negatif. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan suatu metrik parsial, dan bahwa pasangan (X, p) membentuk ruang metrik parsial.

Bukti

1. Ambil sebarang $s, g \in X$, selanjutnya akan dibuktikan dari arah kanan dan kiri.

   ($\Longrightarrow$) jika $p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$ maka $s = g$

   Dari definisi p, diperoleh $p(s,g) = \max(s,g)$, maka:

   $$p(s,s) = \max(s,s), \quad p(s,g) = \max(s,g), \quad p(g,g) = \max(g,g)$$

   Dari hipotesis $p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$ diperoleh

   $$s = \max(s,g) = g \tag{2.1}$$

   Sifat dasar fungsi maksimum menyatakan:

   - $\max(s,g) = s \Longrightarrow s \geq g$
   - $\max(s,g) = g \Longrightarrow g \geq s$

   Dari (2.1) diperoleh $s \geq g$ dan $g \geq s$, sehingga $s = g$.

   Jadi, terbukti bahwa $s = g$.

   ($\Longleftarrow$) Jika $s = g$ maka $p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$.

   Diasumsikan $s = g$ dengan $p(s,g) = \max(s,g)$, diperoleh:

   $$p(s,s) = \max(s,s) = s$$

   $$p(s,g) = p(s,s) = \max(s,s) = s$$

   $$p(g,g) = \max(g,g) = \max(s,s) = s$$

   Jadi

   $$p(s,s) = p(s,g) = p(g,g) = s$$

   Dengan demikian, jika $s = g$ maka $p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$.

   maka, terbukti bahwa $p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$.

2. Ambil sebarang $s, g \in X$

   Dari definisi p, diperoleh

$$p(s,g) = \max(s,g), \quad p(s,s) = \max(s,s) = s.$$

Perhatikan dua kasus berikut:

- Jika $s \geq g$, maka $\max(s,g) = s$, sehingga $p(s,s) = s = p(s,g)$
- Jika $g \geq s$, maka $\max(s,g) = g \geq s$, sehingga $p(s,s) = s \leq \max(s,g)$

Dalam kedua kasus, $p(s,s) \leq p(s,g)$ tetap berlaku.

Sehingga terbukti bahwa $p(s,s) \leq p(s,g)$.

3. Ambil sebarang $s, g \in X$, berlaku sifat komutatif fungsi maksimum:

$$\max(s,g) = \max(g,s)$$

Dengan definisi p, diperoleh

$$p(s,g) = \max(s,g) = \max(g,s) = p(g,s)$$

Sehingga terbukti bahwa $p(s,g) = p(g,s)$

4. Ambil sebarang $s, g, u \in X$:

$$p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$$

Dengan definisi p, bentuk ini ekuivalen dengan

$$\max(s,u) \leq \max(s,g) + \max(g,u) - \max(g,g)$$

Karena $\max(g,g) = g$, ketaksamaan menjadi

$$\max(s,u) \leq \max(s,g) + \max(g,u) - g$$

Misalkan:

$$A \coloneqq \max(s,g), \quad B \coloneqq \max(g,u)$$

Maka dari definisi maksimum berlaku:

$$A \geq s \text{ dan } A \geq g, \qquad B \geq u \text{ dan } B \geq g.$$

Akibatnya,

$$A + B - g \geq s + g - g$$

$$A + B - g \geq s$$

dan

$$A + B - g \geq g + u - g$$

$$A + B - g \geq u$$

Jadi $A + B - g$ lebih besar atau sama dengan masing-masing s dan u sehingga

$$A + B - g \geq \max(s, u)$$

Subsitusikan kembali A dan B ke definisinya

$$\max(s, g) + \max(g, u) - g \geq \max(s, u)$$

Ketaksamaan ini dapat ditulis kembali dalam bentuk yang ekuivalen, yaitu

$$\max(s, u) \leq \max(s, g) + \max(g, u) - g$$

Maka terbukti bahwa $p(s, u) \leq p(s, g) + p(g, u) - p(g, g)$.

Contoh 2.18 Ruang Metrik Parsial

Misalkan $C[0,1]$, himpunan semua fungsi kontinu dari interval $[0,1]$. Didefinisikan fungsi $p: C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$p(s, g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1$$

Butikan bahwa p adalah mertik parsial pada $C[0,1]$

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa

$$p(s, g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1$$

$$p(s, s) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - s(t)| + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$p(g, g) = \max_{t \in [0,1]} |g(t) - g(t)| + 1 = 0 + 1 = 1$$

Ambil sebarang $s, g, u \in C[0,1]$

1. Jika $s = g$ maka $p(s, s) = 0 + 1 = 1$

   Maka jelas bahwa $p(s, s) = p(s, g) = p(g, g) = 1$

   Sebaliknya, jika $p(s, s) = p(s, g) = p(g, g)$

   Karena $p(s, s) = 1$ dan $p(s, g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1$

   Maka persamaan $p(s, s) = p(s, g)$ memberikan

$$1 = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1 \Rightarrow \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| = 0$$

   Karena nilai maksimum dari fungsi bernilai non-negatif hanya dapat nol bila seluruh nilainya nol, maka:

   $|s(t) - g(t)| = 0$ untuk semua $t \in [0,1]$. $\Rightarrow s(t) = g(t)$ untuk semua t. Artinya $s = g$. Maka aksioma ini terpenuhi.

2. Untuk setiap $t \in [0,1]$, berlaku $|s(t) - g(t)| \geq 0$ sehingga:

$$\max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| \geq 0 \Rightarrow \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1 \geq 1$$

   Karena $p(s, s) = 1$ maka $p(s, s) \leq p(s, g)$

3. Untuk setiap t,

$$|s(t) - g(t)| = |g(t) - s(t)|$$

   Sehinga maksimum interval yang sama menghasilkan:

$$\max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| = \max_{t \in [0,1]} |g(t) - s(t)|$$

4. Untuk setiap $t \in [0,1]$, berlaku ketaksamaan segitiga bilangan real:

$$|s(t) - u(t)| \leq |s(t) - g(t)| + |g(t) - u(t)|$$

   Ambil nilai maksimum kedua ruas pada interval $[0,1]$:

$$\max_{t \in [0,1]} |s(t) - u(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + \max_{t \in [0,1]} |g(t) - u(t)|$$

   Tambahkan $+1$ pada kedua kasus

$$\max_{t \in [0,1]} |s(t) - u(t)| + 1 \leq \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + \max_{t \in [0,1]} |g(t) - u(t)| + 1$$

Bagian kiri adalah $p(s,u)$, sementara bagian kanan dapat ditulis ulang sebagai $p(s,g)+p(g,u)-p(g,g)$.

Karena $p(g,g)=1$, maka:

$$p(s,u)\leq p(s,g)+p(g,u)-p(g,g)$$

Aksioma keempat terpenuhi.

Karena keempat aksioma metrik parsial telah terbukti, maka $(C[0,1],p)$ merupakan ruang metrik parsial.

2.1.4 Ruang *M*-Metrik

Pada subbab ini akan membahas definisi, karakteristik, contoh serta bukti yang memiliki keterkaitan dengan ruang *M*-metrik. Fungsi $m: X\times X\to\mathbb{R}$ disebut *M*-metrik pada himpunan X apabila digunakan untuk mengukur jarak antara dua elemen di dalam X dengan memperbolehkan *self-distance* $m(s,s)$ tidak selalu bernilai nol. Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, digunakan dua notasi tambahan sebagai berikut:

1. $m_{sg}\coloneqq \min\{m(s,s),m(g,g)\}$
2. $M_{sg}\coloneqq \max\{m(s,s),m(g,g)\}$

Definisi 2.19 Ruang *M*-Metrik (Asadi dkk, 2014)

Misalkan $X\neq\emptyset$. Suatu fungsi $m: X\times X\to\mathbb{R}$ disebut *M*-metrik jika untuk setiap $s,g,u\in X$ berlaku:

(M1) $m(s,s)=m(g,g)=m(s,g)\Leftrightarrow s=g$,

(M2) $m_{sg}\leq m(s,g)$,

(M3) $m(s,g)=m(g,s)$,

(M4) $\left(m(s,g)-m_{sg}\right)\leq(m(s,u)-m_{su})+\left(m(u,g)-m_{ug}\right)$.

Maka pasangan (X, m) disebut ruang *M*-metrik.

Catatan 2.20 Berdasarkan definisi dari notasi m_{sg} dan M_{sg}, diperoleh beberapa sifat dasar berikut. Untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

1. $0 \leq M_{sg} + m_{sg} = m(s,s) + m(g,g)$,
2. $0 \leq M_{sg} - m_{sg} = |m(s,s) - m(g,g)|$,
3. $M_{sg} - m_{sg} \leq (M_{su} - m_{su}) + \left(M_{ug} - m_{ug}\right)$

Kebenaran ketiga sifat tersebut merupakan konsekuensi langsung dari sifat dasar fungsi minimum dan maksimum, serta ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak.

Contoh 2.21 Ruang *M*-Metrik

Misalkan $X = [0, \infty)$. Maka $m: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh $m(s,g) = \frac{s+g}{2}$ adalah *M*-metrik pada X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$m(s,g) = \frac{s+g}{2}$$

$$m(s,s) = \frac{s+s}{2} = s$$

$$m(g,g) = \frac{g+g}{2} = g$$

Akan dibuktikan $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g) \Leftrightarrow s = g$,

($\Longrightarrow$) Misal $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g)$, maka

$$s = g = \frac{s+g}{2}$$

($\Longleftarrow$) Misal $s = g$, maka

$$m(s,s) = s, \quad m(g,g) = g = s, \quad m(s,g) = \frac{s+g}{2} = s$$

Sehingga $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g)$

Dengan demikian, (M1) terbukti

2. Karena $m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\}$ dan $m(s,g) = \frac{s+g}{2}$, cukup tunjukkan bahwa $m_{sg} \leq m(s,g)$

   Karena $s, g \geq 0$, tinjau tiga kemungkinan yang akan terjadi:

   Kasus 1: $s \leq g$

   Maka $\min\{m(s,s), m(g,g)\} = s$, sehingga $m_{sg} = s$

   Hitung selisih

$$\begin{aligned} m(s,g) - m_{sg} &= \frac{s+g}{2} - s \\ &= \frac{s+g}{2} - \frac{2s}{2} \\ &= \frac{(s+g) - 2s}{2} \\ &= \frac{(s+g) - (s+s)}{2} \\ &= \frac{(s-s) + (g-s)}{2} \\ &= \frac{g-s}{2} \end{aligned}$$

   Karena $g \geq s$, maka $g - s \geq$, sehingga $\frac{g-s}{2} \geq 0$

   Jadi $m(s,g) \geq m_{sg}$

   Kasus 2: $g \leq s$

   Maka $\min\{m(s,s), m(g,g)\} = g$, sehingga $m_{sg} = g$

   Hitung selisih

$$m(s,g) - m_{sg} = \frac{s+g}{2} - g$$

$$= \frac{s+g}{2} - \frac{2g}{2}$$

$$= \frac{(s+g) - 2g}{2}$$

$$= \frac{(s+g) - (g+g)}{2}$$

$$= \frac{(s-g) + (g-g)}{2}$$

$$= \frac{s-g}{2}$$

Karena $s \geq g$, maka $s - g \geq$, sehingga $\frac{s-g}{2} \geq 0$

Jadi $m(s,g) \geq m_{sg}$

<u>Kasus 3</u>: $s = g$

Karena $s = g$, maka

$$m(s,s) = s,\ m(g,g) = g = s$$

Jadi $\min\{m(s,s), m(g,g)\} = \min\{s,s\} = s$.

Nilai $m(s,g)$ adalah

$$m(s,g) = \frac{s+g}{2} = \frac{s+s}{2} = s$$

Hitung selisih

$$m(s,g) - m_{sg} = s - s = 0 \Longrightarrow m(s,g) = m_{sg}$$

Jadi $m(s,g) = m_{sg}$.

Dalam ketiga kasus diperoleh $m(s,g) \geq m_{sg}$ dan $m(s,g) = m_{sg}$ dengan demikian terbukti bahwa $m_{sg} \leq m(s,g)$.

3. Dari definisi, diketahui bahwa

$$m(s,g) = \frac{s+g}{2}\ , \qquad m(g,s) = \frac{g+s}{2}$$

Karena penjumlahan bilangan real komutatif, yaitu:

$$s+g=g+s$$

Oleh karena itu,

$$m(s,g)=\frac{s+g}{2}=\frac{g+s}{2}=m(g,s)$$

Maka terbukti bahwa $m(s,g)=m(g,s)$.

4. Dari definisi, diketahui bahwa:

   $$m(s,g)=\tfrac{s+g}{2}, \text{ dengan } m_{sg}\coloneqq \min\{m(s,s),m(g,g)\}.$$

   Ini serupa dengan:

   $$m(s,u)=\tfrac{s+u}{2} \text{ dan } m_{su}\coloneqq \min\{m(s,s),m(u,u)\},$$

   $$m(u,g)=\tfrac{u+g}{2} \text{ dan } m_{ug}\coloneqq \min\{m(u,u),m(g,g)\}.$$

   Akan dibuktikan bahwa $\left(m(s,g)-m_{sg}\right)\leq (m(s,u)-m_{su})+\left(m(u,g)-m_{ug}\right)$

   Pertama, akan ditunjukkan terlebih dahulu bentuk dari masing-masing ruas.

   Perhatikan bahwa ruas kiri berikut:

   $$\left(m(s,g)-m_{sg}\right)=\frac{s+g}{2}-\min\{m(s,s),m(g,g)\}$$

   Dapat disederhanakan menjadi

   $$\left(m(s,g)-m_{sg}\right)=\frac{s+g}{2}-\min\{s,g\}$$

   Sementara pada ruas kanan:

   $$(m(s,u)-m_{su})+\left(m(u,g)-m_{ug}\right)=$$

   $$\left(\frac{s+u}{2}-\min\{m(s,s),m(u,u)\}\right)+$$

   $$\left(\frac{u+g}{2}-\min\{mq(u,u),m(g,g)\}\right)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$(m(s,u) - m_{su}) + \big(m(u,g) - m_{ug}\big) =$$

$$\left(\frac{s+u}{2} - \min\{s,u\}\right) + \left(\frac{u+g}{2} - \min\{u,g\}\right)$$

Selanjutnya, sederhanakan menjadi bentuk nilai mutlak

Dengan definisi fungsi minimum, diperoleh:

$$\min\{s,g\} = \begin{cases} s, & \text{jika } s \leq g \\ g, & \text{jika } g \leq s \end{cases}$$

Maka hitung:

<u>Kasus 1</u>: $s \leq g$

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{s+g}{2} - s = \frac{s+g-2s}{2} = \frac{g-s}{2}$$

<u>Kasus 2</u>: $g \leq s$

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{s+g}{2} - g = \frac{s+g-2g}{2} = \frac{s-g}{2}$$

Pada kedua kasus, hasilnya yaitu:

$$\frac{|g-s|}{2} \text{ dan } \frac{|s-g|}{2}$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka

$$\frac{|g-s|}{2} = \frac{|s-g|}{2}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{|s-g|}{2}$$

Jadi

$$\frac{s+u}{2} - \min\{s,u\} = \frac{|s-u|}{2}$$

$$\frac{u+g}{2} - \min\{u,g\} = \frac{|u-g|}{2}$$

Terakhir, substitusikan hasil langkah sebelumnya ke dalam (M4)

$$\frac{|s-g|}{2} \leq \frac{|s-u|}{2} + \frac{|u-g|}{2}$$

Kalikan 2 pada kedua ruas

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Ini adalah ketaksamaan segitiga pada garis bilangan real, yang selalu benar.

Dengan demikian, (M4) terbukti.

Maka terbukti bahwa $\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$.

Karena semua sifat dari ruang *M*-metrik terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa m adalah fungsi *M*-metrik dan (X, m) merupakan ruang *M*-metrik.

Contoh 2.22 Ruang *M*-Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$, $\forall\ s, g, u \in X$, didefinisikan $m: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $m(s,g) = |s-g|$. Akan dibuktikan bahwa m merupakan *M*-metrik di X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$m(s,g) = |s-g|$$

$$m(s,s) = |s-s| = 0$$

$$m(g,g) = |g-g| = 0$$

($\Longrightarrow$) Misal $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g)$, karena

$$m(s,s) = |s-s| = 0 \text{ dan } m(g,g) = |g-g| = 0$$

Maka dari persamaan di atas diperoleh

$$m(s,s) = 0 \Longrightarrow |s-g| = 0 \Longrightarrow s = g$$

($\Longleftarrow$) Misal $s = g$, maka

$m(s,s) = |s-s| = 0, \quad m(g,g) = |g-g| = 0, \quad m(s,g) = |s-g| = |s-s| = 0$

Sehingga $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g)$

Dengan demikian, (M1) terbukti

2. Karena $m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\}$ dan $m(s,g) = |s-g|$, cukup tunjukkan bahwa

$$m_{sg} \leq m(s,g)$$

Karena $m(s,s) = |s-s| = 0$ dan $m(g,g) = |g-g| = 0$, maka

$$m_{sg} \coloneqq \min\{0,0\} = 0$$

Maka jelas bahwa

$$m_{sg} = 0 \leq |s-g| = m(s,g)$$

3. Untuk setiap $s, g \in X$ berlaku sifat nilai mutlak:

$$|s-g| = |g-s|$$

Maka diperoleh:

$$m(s,g) = |s-g| = |g-s| = m(g,s)$$

Dengan demikian terbukti bahwa $m(s,g) = m(g,s)$,

4. Dari definisi, diketahui bahwa:

$m(s,g) = |s-g|$, dengan $m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\}$.

Karena $m(s,s) = |s-s| = 0$ dan $m(g,g) = |g-g| = 0$, maka

$$m_{sg} \coloneqq \min\{0,0\} = 0$$

Ini serupa dengan:

$$m(s,u) = |s-u| \text{ dan } m_{su} \coloneqq \min\{0,0\} = 0,$$

$$m(u,g) = |u-g| \text{ dan } m_{ug} \coloneqq \min\{0,0\} = 0.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$$

$$|s - g| \leq |s - u| + |u - g|$$

Ini adalah ketaksamaan segitiga pada garis bilangan real, yang selalu benar.

Dengan demikian, (M4) terbukti.

Maka terbukti bahwa $\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$.

Contoh 2.23 Ruang *M*-Metrik

Misalkan $C[0,1]$, himpunan semua fungsi kontinu dari interval $[0,1]$. Didefinisikan fungsi $m: C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$m(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1$$

Butikan bahwa m adalah *M*-mertik pada $C[0,1]$

Bukti

Ambil sebarang $s, g, u \in C[0,1]$

Tuliskan notasi:

$$m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\}, \quad M_{sg} \coloneqq \max\{m(s,s), m(g,g)\}$$

Karena $m(s,s) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - s(t)| + 1 = 1$

Maka untuk semua s, $m(s,s) = 1$, begitu pula $m(g,g) = 1, m(u,u) = 1$

Dengan demikian

$$m_{sg} = 1, \quad M_{sg} = 1, \quad m_{ug} = 1, \quad M_{ug} = 1, \quad m_{us} = 1, \quad M_{us} = 1,$$

Artinya semua *self-distance* bernilai 1

1. Jika $s = g$, maka

$$m(s,g) = \max_{t \in [0,1]} |s(t) - g(t)| + 1 = 0 + 1 = 1$$

Sebaliknya, misakan

$$m(s,s) = m(s,g) = m(g,g)$$

Karena $m(s,s) = m(g,g) = 1$, maka:

$$1 = m(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 \Rightarrow \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| = 0$$

Ini hanya terjadi jika

$|s(t) - g(t)| = 0$ untuk semua $t \Rightarrow s(t) - g(t)$

Jadi

$$m(s,s) = m(s,g) = m(g,g) \Leftrightarrow s = g$$

2. Akan dibuktikan bahwa

$$m_{sg} = 1 = m(s,s) \leq m(s,g)$$

Karena $\max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| \geq 0$, maka

$$m(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 \geq 1$$

Jadi terbukti bahwa $m_{sg} \leq m(s,g)$

3. Untuk setiap t,

$$|s(t) - g(t)| = |g(t) - s(t)|$$

Maka

$$m(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 = \max_{t\in[0,1]}|g(t) - s(t)| + 1 = m(g,s)$$

4. Aksioma ketaksamaan segitiga *M*-metrik dirumuskan sebagai berikut:

$$\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$$

Karena semua $m_{sg} = 1$, maka

$$(m(s,g) - 1) \leq (m(s,u) - 1) + (m(u,g) - 1)$$

Subsitusikan definisi:

$$\max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| \leq \max_{t\in[0,1]}|s(t) - u(t)| + \max_{t\in[0,1]}|u(t) - g(t)|$$

Ini benar karena ketaksamaan segitiga bilangan real:

$$|s(t) - g(t)| \leq |s(t) - u(t)| + |u(t) - g(t)|$$

Maka aksioma 4 terbukti.

Karena keempat aksioma *M*-metrik telah terbukti, maka $(C[0,1], m)$ merupakan ruang *M*-metrik.

Lemma 2.24 Setiap metrik parsial adalah *M*-metrik (Asadi dkk, 2014).

Bukti

Ingat aksioma metrik parsial (Matthews, 1994), untuk semua $s, g, u \in X$:

(P1) $s = g \Leftrightarrow p(s,s) = p(s,g) = p(g,g)$

(P2) $p(s,s) \leq p(s,g)$

(P3) $p(s,g) = p(g,s)$

(P4) $p(s,u) \leq p(s,g) + p(g,u) - p(g,g)$

Definisikan $m \coloneqq p$, untuk setiap $s, g \in X$ tulis:

1. $m_{sg} \coloneqq \min\{m(s,s), m(g,g)\} = \min\{p(s,s), p(g,g)\}$
2. $M_{sg} \coloneqq \max\{m(s,s), m(g,g)\} = \max\{p(s,s), p(g,g)\}$

Akan ditunjukkan bahwa p memenuhi keempat aksioma *M*-metrik:

(M1) $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g) \Leftrightarrow s = g$

ini identik dengan (P1), maka jelas bahwa $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g) \Leftrightarrow s = g$

(M2) $m_{sg} \leq m(s,g)$

Diketahui $m \coloneqq p$ dengan p metrik parsial.

Aksioma metrik parsial yang dipakai yaitu (P2) dan (P3).

Dari (P2) diperoleh

$$p(s,s) \leq p(s,g)$$

Karena $m = p$, maka

$$m(s,s) \leq m(s,g) \tag{2.2}$$

Tukar peran kedua titik dan gunakan (P2) pada pasangan (g,s)

$$p(g,g) \leq p(g,s)$$

Karena $m = p$, maka

$$m(g,g) \leq m(g,s) \tag{2.3}$$

Dari (2.2) dan (2.3), kedua bilangan $m(s,s)$ dan $m(g,g)$ masing-masing $\leq m(g,s)$. Maka nilai minimumnya juga $\leq m(g,s)$.

$$\min\{m(s,s), m(g,g)\} \leq m(g,s)$$

Dengan definisi m_{sg}, maka diperoleh

$$m_{sg} \leq m(s,g)$$

Dengan demikian, aksioma (M2) terpenuhi.

(M3) $m(s,g) = m(g,s)$,

ini identik dengan (P3), maka jelas bahwa $m(s,g) = m(g,s)$

(M4) $\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$.

Mulai dari (P4) dan subsitusikan $m = p$:

Pada (P4) diperoleh

$$m(s,u) \leq m(s,g) + m(g,u) - m(g,g)$$

Ini dapat diganti dengan

$$m(s,g) \leq m(s,u) + m(u,g) - m(u,u) \tag{2.4}$$

Kemudian kurangi dengan m_{sg} di kedua ruas

$$m(s,g) - m_{sg} \leq m(s,u) + m(u,g) - m(u,u) - m_{sg} \tag{2.5}$$

Kemudian bandingkan ruas kanan (2.5) dengan bentuk (M4)

$(m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right) =$

$$(m(s,u) - \min\{m(s,s), m(u,u)\}) +$$

$$(m(u,g) - \min\{m(u,u), m(g,g)\})$$

$$(m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right) =$$

$$m(s,u) + m(u,g) - \min\{m(s,s), m(u,u)\} -$$

$$\min\{m(u,u), m(g,g)\} \qquad (2.6)$$

Supaya (2.5) ≤ (2.6), cukup dibuktikan

$$m(u,u) + m_{sg} \geq \min\{m(s,s), m(u,u)\} +$$

$$\min\{m(u,u), m(g,g)\} \qquad (2.7)$$

Kemudian, misalkan $a \coloneqq m(s,s), b \coloneqq m(g,g), c \coloneqq\ m(u,u)$. Karena $m_{sg} = \min\{a,b\}$, maka (2.7) setara dengan

$$c + \min\{a,b\} \geq \min\{a,c\} + \min\{c,b\} \qquad (2.8)$$

Ketaksamaan (2.8) benar untuk semua $a, b, c \geq 0$, verifikasi kasus singkat:

- Jika $c \leq a$ dan $c \leq b$:

  $\min\{a,c\} = c$ dan $\min\{b,c\} = c$

  Sehingga $c + \min\{a,b\} \geq c + c = 2c$

  Maka $c + \min\{a,b\} \geq 2c$

- Jika $a \leq c \leq b$:

  $\min\{a,b\} = a$, $\min\{a,c\} = a$ dan $\min\{b,c\} = c$

  Sehingga $c + a \geq a + c$

  Maka $c + a = a + c$ (simetri)

- Jika $b \leq c \leq a$

  $\min\{a,b\} = b$, $\min\{a,c\} = c$ dan $\min\{b,c\} = b$

  Sehingga $c + b \geq b + c$

  Maka $c + b = b + c$ (simetri)

- Jika $a \leq b \leq c$:

  $\min\{a,b\} = a$, $\min\{a,c\} = a$ dan $\min\{b,c\} = b$

  Sehingga $c + a \geq a + b$

- Jika $b \leq a \leq c$:

  $\min\{a,b\} = b$, $\min\{a,c\} = a$ dan $\min\{b,c\} = b$

  Sehingga $c + b \geq a + b$

  Maka (2.8) terbukti, sehingga (4) benar.

Selanjutnya, dari (2.5), (2.6), dan (2.7) diperoleh

$$\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$$

Ini tepat aksioma (M4)

Karena aksioma (M1) - (M4) telah dipenuhi oleh $m \coloneqq p$, maka terbukti bahwa setiap metrik parsial adalah *M*-metrik.

Contoh 2.25 Ruang *M*-Metrik

Misalkan $X = \{s, g, u\}$ dan fungsi $m: X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh:

$$m(s,s) = 1, m(g,g) = 9, m(u,u) = 5,$$

$$m(s,g) = m(g,s) = 10,\ \ m(s,u) = m(u,s) = 7,\ \ m(u,g) = m(g,u) = 8$$

Maka, m adalah *M*-metrik pada X tetapi bukan metrik parsial.

Bukti

Langkah pertama, akan dibuktikan bahwa m merupakan *M*-metrik pada X.

1. Dari fakta yang diketahui, jelas bahwa

   $$m(p,p) = m(q,q) = m(p,q)$$

   Berlaku hanya jika $p = s = q$ atau $p = g = q$ atau $p = u = q$

   Maka terbukti bahwa $m(s,s) = m(g,g) = m(s,g) \Leftrightarrow s = g$

2. Akan dibuktikan bahwa $m_{sg} \leq m(s,g)$,

$$m_{sg} \leq m(s,g)$$

$$1 \leq 10$$

$$m_{su} \leq m(s,u)$$

$$1 \leq 7$$

$$m_{ug} \leq m(u,g)$$

$$5 \leq 8$$

   Maka terbukti bahwa $m_{sg} \leq m(s,g)$ untuk ketiga pasangan tersebut.

3. Terlihat jelas bahwa

$$m(s,g) = m(g,s) = 10$$

$$m(s,u) = m(u,s) = 7$$

$$m(u,g) = m(g,u) = 8$$

   Maka terbukti bahwa $m(s,g) = m(g,s)$ untuk ketiga pasangan tersebut.

4. Akan dibuktikan bahwa $\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$

$$\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$$

$$10 - 1 \leq (7 - 1) + (8 - 5)$$

$$9 \leq 6 + 3$$

$$9 \leq 9$$

   Maka terbukti bahwa

$$\left(m(s,g) - m_{sg}\right) \leq (m(s,u) - m_{su}) + \left(m(u,g) - m_{ug}\right)$$

Karena keempat aksioma terbukti, maka terbukti bahwa m adalah ruang *M*-metrik. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa m bukan merupakan metrik parsial.

1. Dari fakta yang diketahui, jelas bahwa

$$m(p,p) = m(q,q) = m(p,q)$$

   Berlaku hanya jika $p = s = q$ atau $p = g = q$ atau $p = t = q$

   Maka terbukti bahwa $p(s,s) = p(g,g) = p(s,g) \Leftrightarrow s = g$

2. Akan dibuktikan bahwa $p(s,s) \leq p(s,g)$,

$$p(s,s) \leq p(s,g)$$

$$1 \leq 10$$

$$p(s,s) \leq p(s,u)$$

$$1 \leq 7$$

$$p(g,g) \leq p(g,u)$$

$$9 \leq 8$$

$$9 \nleq 8$$

   Karena $9 \nleq 8$ maka tidak terbukti bahwa $p(s,s) \leq p(s,g)$.

Karena aksioma kedua dari ruang metrik parsial tidak terbukti, maka m bukan ruang metrik parsial. Jadi terbukti bahwa m adalah ruang *M*-metrik tetapi bukan ruang metrik parsial.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Konsep ruang quasi *M*-metrik merupakan perluasan dari ruang *M*-metrik yang menghilangkan sifat simetri namun tetap mempertahankan sifat identitas dan ketaksamaan segitiga. Secara matematis, hal ini mencerminkan suatu sistem yang tidak seimbang secara arah, tetapi masih memiliki keteraturan logis dan kestabilan struktural. Fenomena ini secara filosofis dan spiritual dapat dikaitkan dengan konsep asimetri dan keseimbangan dalam ciptaan Allah SWT. Sebagaimana disebutkan dalam firman Allah SWT:

الَّذِيْ خَلَقَ سَبْعَ سَمٰوٰتٍ طِبَاقًاۗ مَا تَرٰى فِيْ خَلْقِ الرَّحْمٰنِ مِنْ تَفٰوُتٍۗ فَارْجِعِ الْبَصَرَۙ هَلْ تَرٰى مِنْ فُطُوْرٍ ۝٣

Artinya:
"Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat?" (Q.S. Al-Mulk: 3).

Tafsir Kementerian Agama RI menjelaskan bahwa ayat ini menunjukkan bahwa ciptaan Allah memiliki kesempurnaan meskipun tampak kompleks dan tidak simetri, yang mencerminkan kebesaran dan keagungan-Nya (Kementerian Agama RI, 2022). Hal ini memiliki kemiripan dengan struktur ruang quasi *M*-metrik, yang secara matematis asimetri tetapi tetap teratur secara logis. Konsep kedekatan dalam ruang quasi *M*-metrik juga dapat dianalogikan dengan proses mendekat kepada Allah sebagaimana disebut dalam Q.S. Al-Baqarah: 186 yang berbunyi:

وَاِذَا سَاَلَكَ عِبَادِيْ عَنِّيْ فَاِنِّيْ قَرِيْبٌۗ اُجِيْبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ اِذَا دَعَانِۙ فَلْيَسْتَجِيْبُوْا لِيْ وَلْيُؤْمِنُوْا بِيْ لَعَلَّهُمْ
يَرْشُدُوْنَ ۝١٨٦

Artinya:
"Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu (Muhammad) tentang Aku, maka sesungguhnya Aku dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila dia berdoa kepada-Ku." (Q.S. Al-Baqarah: 186).

Menurut Tafsir al-Muyassar, ayat ini menekankan bahwa meskipun Allah tidak terlihat oleh mata manusia, kedekatan-Nya sangat nyata melalui jawaban atas doa dan hubungan batin dengan hamba-Nya (Tafsir Al-Muyassar, 2020). Dalam konteks ini, proses pendekatan dalam ruang quasi *M*-metrik, yang mungkin tidak simetri dan membutuhkan arah tertentu, mencerminkan perjalanan spiritual manusia menuju kedekatan dengan Allah. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun pendekatan tersebut tidak terjadi secara langsung dan seimbang, hasil akhirnya tetap menuju pada titik kesatuan dan harmoni yang sejati.

Dalam literatur matematika, (Ayoob dkk, 2023) menjelaskan bahwa ruang quasi *M*-metrik dapat digunakan dalam pemodelan sistem integral, pemetaan kontraktif, serta analisis titik tetap, yang membutuhkan struktur tidak simetri namun tetap stabil dan konvergen. Hal ini menandakan bahwa penerapan konsep matematis seperti quasi *M*-metrik sangat relevan dengan pola keteraturan dalam ciptaan Allah. Dengan demikian, pembelajaran ruang quasi *M*-metrik tidak hanya penting dalam pengembangan teori matematika, tetapi juga dapat menjadi sarana kontemplasi tentang ketetapan dan kesempurnaan hukum Allah SWT dalam menciptakan keteraturan dari ketidaksimetrian.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Lemma 2.26 Setiap ruang *M*-metrik adalah ruang quasi *M*-metrik, namun tidak berlaku untuk kebalikannya (Ayoob dkk, 2023).

Proposisi 2.27 Misalkan (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik, maka untuk semua $s, g, u \in X$, yang memenuhi ;

1. $0 \leq R_{sg} + z_{sg} = \zeta(s,s) + \zeta(g,g)$
2. $0 \leq R_{sg} - z_{sg} = |\zeta(s,s) - \zeta(g,g)|$
3. $R_{sg} - z_{sg} \leq (R - \zeta_{su}) + \left(R_{ug} - \zeta_{ug}\right)$ (Ayoob dkk, 2023).

Proposisi 2.28 Misalkan (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik dan $K: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$K(s, g) = \zeta(s, g) + \zeta(g, s) - 2z_{sg}$$

untuk semua $s, g, u \in X$. Maka K adalah metrik euclid, dan pasangan (X, K) adalah ruang metrik klasik (Ayoob dkk, 2023).

Proposisi 2.29 Misalkan (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik dan $H: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$H(s, g) = \frac{\zeta(s, g) + \zeta(g, s)}{2}$$

untuk semua $s, g, u \in X$. Maka H adalah *M*-metrik, dan pasangan (X, H) adalah ruang *M*-metrik (Ayoob dkk, 2023).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Kategori Penelitian

Metode kualitatif diterapkan dalam penelitian ini dengan pendekatan studi pustaka. Studi pustaka dilakukan dengan menghimpun berbagai informasi yang berkaitan dengan topik penelitian melalui sumber-sumber tertulis, seperti buku, jurnal ilmiah, dan artikel. Pengumpulan informasi ini bertujuan untuk memperkaya landasan teori serta mendukung analisis yang dilakukan dalam penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Beberapa tahapan perlu dilakukan untuk menyiapkan penelitian ini, meliputi: menganalisis permasalahan penelitian, mengusulkan judul skripsi ke pembimbing, merumuskan permasalahan, memilih referensi, menyusun proposal penelitian, serta menerima bimbingan dari dosen pembimbing.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan penelitian yang dilakukan meliputi:

1. Mengkaji konsep dasar ruang metrik sebagai landasan awal pengembangan menuju ruang quasi M-metrik.
2. Mengumpulkan referensi dan literatur ilmiah yang relevan mengenai ruang quasi metrik, M-metrik, dan penggabungannya dalam bentuk ruang quasi M-metrik.

3. Menyusun dan memaparkan definisi serta sifat-sifat dasar dari ruang metrik, ruang quasi metrik, ruang metrik parsial, ruang M-metrik, dan ruang quasi M-metrik secara sistematis.
4. Menganalisis dan membuktikan sifat-sifat ruang quasi M-metrik yang meliputi non-simetri, generalisasi dari metrik dan M-metrik, serta penerapannya dalam pembuktian teorema tertentu.
5. Menyimpulkan hasil analisis dan pembuktian untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam terhadap struktur dan karakteristik ruang quasi M-metrik.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Quasi *M*-Metrik

Pada subbab ini akan dibahas terlebih dahulu mengenai sifat-sifat yang dimiliki oleh ruang quasi *M*-metrik. Fungsi $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut quasi *M*-metrik pada himpunan X apabila digunakan dalam mengukur jarak antara dua elemen di dalam X, diperbolehkan *self-distance* $\zeta(s,s)$ tidak selalu bernilai nol dan tidak mensyaratkan sifat simetri, sehingga $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$ dapat terjadi. Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, digunakan dua notasi tambahan sebagai berikut:

$$z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} \tag{4.1}$$

$$R_{sg} \coloneqq \max\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} \tag{4.2}$$

Sebelum memasuki pembahasan yang lebih mendalam, terlebih dahulu dipaparkan definisi formal ruang quasi *M*-metrik sebagai dasar pemahaman.

Definisi 4.1 Ruang Quasi *M*-Metrik (Ayoob dkk, 2023)

Misalkan $X \neq \emptyset$. Suatu fungsi $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut quasi *M*-metrik jika untuk setiap $s, g, u \in X$ berlaku:

(QM1) $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) \Leftrightarrow s = g$,

(QM2) $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$,

(QM3) $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$.

Pasangan (X, ζ) disebut ruang quasi *M*-metrik. Dalam ruang quasi *M*-metrik tidak diperlukan aksioma simetri, jadi bisa saja berlaku $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$.

Ruang quasi *M*-metrik merupakan generalisasi dari ruang *M*-metrik. Hal ini terlihat dari dihilangkannya sifat simetri pada ruang quasi *M*-metrik, sementara sifat-sifat penting lainnya seperti identitas jarak dan ketaksamaan segitiga tetap dipertahankan (Ayoob dkk, 2023).

Contoh 4.2 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $X = [0, \infty)$. Maka $\zeta: X \times X \to [0, \infty)$ yang didefinisikan oleh $\zeta(s, g) = \frac{s+g}{2}$ adalah quasi *M*-metrik pada X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$\zeta(s, g) = \frac{s + g}{2}$$

$$\zeta(s, s) = \frac{s + s}{2} = s$$

$$\zeta(g, g) = \frac{g + g}{2} = g$$

(⟹) Misal $\zeta(s, s) = \zeta(g, g) = \zeta(s, g)$, maka

$$s = g = \frac{s + g}{2}$$

(⟸) Misal $s = g$, maka

$$\zeta(s, s) = s, \quad \zeta(g, g) = g = s, \quad \zeta(s, g) = \frac{s+g}{2} = s$$

Sehingga $\zeta(s, s) = \zeta(g, g) = \zeta(s, g)$

Dengan demikian, (QM1) terbukti

2. Karena $s, g \geq 0$, tinjau tiga kemungkinan yang akan terjadi:

<u>Kasus 1</u>: $s \leq g$

Maka $\min\{\zeta(s, s), \zeta(g, g)\} = s$, sehingga $z_{sg} = s$

Hitung selisih

$$\begin{aligned}\zeta(s,g) - z_{sg} &= \frac{s+g}{2} - s \\ &= \frac{s+g}{2} - \frac{2s}{2} \\ &= \frac{(s+g) - 2s}{2} \\ &= \frac{(s+g) - (s+s)}{2} \\ &= \frac{(s-s) + (g-s)}{2} \\ &= \frac{g-s}{2}\end{aligned}$$

Karena $g \geq s$, maka $g - s \geq$, sehingga $\frac{g-s}{2} \geq 0$

Jadi $\zeta(s,g) \geq z_{sg}$

Kasus 2: $g \leq s$

Maka $\min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} = g$, sehingga $z_{sg} = g$

Hitung selisih

$$\begin{aligned}\zeta(s,g) - z_{sg} &= \frac{s+g}{2} - g \\ &= \frac{s+g}{2} - \frac{2g}{2} \\ &= \frac{(s+g) - 2g}{2} \\ &= \frac{(s+g) - (g+g)}{2} \\ &= \frac{(s-g) + (g-g)}{2} \\ &= \frac{s-g}{2}\end{aligned}$$

Karena $s \geq g$, maka $s - g \geq$, sehingga $\frac{s-g}{2} \geq 0$

Jadi $\zeta(s,g) \geq z_{sg}$

<u>Kasus 3</u>: $s = g$

Karena $s = g$, maka

$$\zeta(s,s) = s,\ \zeta(g,g) = g = s$$

Jadi $\min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} = \min\{s,s\} = s$.

Nilai $\zeta(s,g)$ adalah

$$\zeta(s,g) = \frac{s+g}{2} = \frac{s+s}{2} = s$$

Hitung selisih

$$\zeta(s,g) - z_{sg} = s - s = 0 \Longrightarrow \zeta(s,g) = z_{sg}$$

Jadi $\zeta(s,g) = z_{sg}$.

Dalam ketiga kasus diperoleh $\zeta(s,g) \geq z_{sg}$ dan $\zeta(s,g) = z_{sg}$ dengan demikian terbukti bahwa $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$.

3. Dari definisi, diketahui bahwa: $\zeta(s,g) = \frac{s+g}{2}$, dengan $z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$. Ini serupa dengan:

$$\zeta(s,u) = \tfrac{s+u}{2} \text{ dan } z_{su} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(u,u)\},$$

$$\zeta(u,g) = \tfrac{u+g}{2} \text{ dan } z_{ug} \coloneqq \min\{\zeta(u,u), \zeta(g,g)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$

Pertama, akan ditunjukkan terlebih dahulu bentuk dari masing-masing ruas.

Perhatikan bahwa ruas kiri berikut:

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = \frac{s+g}{2} - \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = \frac{s+g}{2} - \min\{s,g\}$$

Sementara pada ruas kanan:

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) =$$

$$\left(\frac{s+u}{2} - \min\{\zeta(s,s), \zeta(u,u)\}\right) +$$

$$\left(\frac{u+g}{2} - \min\{\zeta(u,u), \zeta(g,g)\}\right)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) =$$

$$\left(\frac{s+u}{2} - \min\{s,u\}\right) + \left(\frac{u+g}{2} - \min\{u,g\}\right)$$

Selanjutnya, sederhanakan menjadi bentuk nilai mutlak

Dengan definisi fungsi minimum, diperoleh:

$$\min\{s,g\} = \begin{cases} s, & \text{jika } s \leq g \\ g, & \text{jika } g \leq s \end{cases}$$

Maka hitung:

<u>Kasus 1</u>: $s \leq g$

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{s+g}{2} - s = \frac{s+g-2s}{2} = \frac{g-s}{2} = \frac{|g-s|}{2}$$

<u>Kasus 2</u>: $g \leq s$

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{s+g}{2} - g = \frac{s+g-2g}{2} = \frac{s-g}{2} = \frac{|s-g|}{2}$$

Pada kedua kasus, hasilnya yaitu:

$$\frac{|g-s|}{2} \text{ dan } \frac{|s-g|}{2}$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka

$$\frac{|g-s|}{2} = \frac{|s-g|}{2}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{s+g}{2} - \min\{s,g\} = \frac{|s-g|}{2}$$

Jadi

$$\frac{s+u}{2} - \min\{s,u\} = \frac{|s-u|}{2}$$

$$\frac{u+g}{2} - \min\{u,g\} = \frac{|u-g|}{2}$$

Terakhir, substitusikan hasil langkah sebelumnya ke dalam (M4)

$$\frac{|s-g|}{2} \leq \frac{|s-u|}{2} + \frac{|u-g|}{2}$$

Kalikan 2 pada kedua ruas

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Ini adalah ketaksamaan segitiga pada garis bilangan real, yang selalu benar.

Dengan demikian, (QM3) terbukti.

Maka terbukti bahwa $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$.

Karena semua sifat dari ruang quasi *M*-metrik terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa ζ adalah fungsi quasi *M*-metrik dan (X,ζ) merupakan ruang quasi *M*-metrik.

Contoh 4.3 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $X = [0,1]$. Maka $\zeta: X \times X \to [0,1]$ didefinisikan oleh $\zeta(s,g) = 2s + g$. Maka (X,ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik pada X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$\zeta(s,g) = 2s + g$$

$$\zeta(s,s) = 2s + s = 3s$$

$$\zeta(g,g) = 2g + g = 3g$$

($\Longleftarrow$) Misal $s = g$, maka:

$\zeta(s,s) = 2s + s = 3s$,

$mq(g,g) = 2g + g = 3g = 3s$ (karena $g = s$),

$\zeta(s,g) = 2s + s = 3s$ (karena $g = s$),

$\zeta(g,s) = 2s + s = 3s$,

Sehingga,

$$\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) = \zeta(g,s) = 3s \tag{4.3}$$

($\Longrightarrow$) Sebaliknya, andaikan

$$\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) = \zeta(g,s) \tag{4.4}$$

Dari sini, ambil dua persamaan konsekuen (keduanya akan mengarah pada kesimpulan yang sama):

- $\zeta(s,s) = \zeta(s,g)$

$$3s = 2s + g \Longrightarrow 3s - 2s = g \Longrightarrow s = g$$

- $\zeta(g,g) = \zeta(g,s)$

$$3g = 2g + s \Longrightarrow 3g - 2g = s \Longrightarrow g = s$$

Keduanya memberikan kesimpulan $s = g$. Dengan demikian, syarat (QM1) terpenuhi

2. Diketahui dari definisi bahwa $\zeta(s,g) = 2s + g$, jadi untuk z_{sg} yaitu:

$$\begin{aligned} z_{sg} &= \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} \\ &= \min\{(2s + s), (2g + g)\} \\ &= \min\{3s, 3g\} \end{aligned}$$

Jadi $z_{sg} = \min\{3s, 3g\}$. Kemudian akan dibuktikan bahwa $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$. Ambil contoh kasus bahwa $s \leq g$, $s \geq g$ dan $s = g$.

<u>Kasus 1</u>: $s \leq g$

Maka $z_{sg} = \min\{3s, 3g\} = 3s$, sehingga $z_{sg} = 3s$. Akan dibandingkan dengan $\zeta(s,g) = 2s + g$.

$\zeta(s,g) - z_{sg} = (2s + g) - 3s = g - s \geq 0$ (karena $g \geq s$)

Jadi $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$.

<u>Kasus 2</u>: $s \geq g$

Maka $z_{sg} = \min\{3s, 3g\} = 3g$, sehingga $z_{sg} = 3g$. Akan dibandingkan dengan $\zeta(s,g) = 2s + g$.

$mq(s,g) - mq_{sg} = (2s + g) - 3g = 2s - 2g = 2(s - g) \geq 0$ (karena $s \geq g$)

Jadi $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$

<u>Kasus 3</u>: $s = g$

Maka $z_{sg} = \min\{3s, 3s\} = 3s$, sehingga $\zeta(s,g) = 2s + g = 3s$. Jadi $z_{sg} = \zeta(s,g)$, sehingga $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$ juga terpenuhi.

Dalam semua kemungkinan (kasus 1, 2 dan 3), diperoleh $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$. Dengan demikian, aksioma (QM2) terbukti.

3. Diketahui dari definisi bahwa $\zeta(s,g) = 2s + g$, jadi $\zeta(s,u) = 2s + u$, $\zeta(u,g) = 2u + g$ dan untuk z_{sg}, z_{su}, dan z_{ug} yaitu:

$$z_{sg} = \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$$

$$= \min\{(2s + s), (2g + g)\}$$

$$= \min\{3s, 3g\}$$

$$z_{su} = \min\{\zeta(s,s), \zeta(u,u)\}$$

$$= \min\{(2s + s), (2u + u)\}$$

$$= \min\{3s, 3u\}$$

$$z_{ug} = \min\{\zeta(u, u), \zeta(g, g)\}$$

$$= \min\{(2u + u), (2g + g)\}$$

$$= \min\{3u, 3g\}$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left(\zeta(s, g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s, u) - z_{su}) + \left(\zeta(u, g) - z_{ug}\right)$$

Pertama, akan ditunjukkan terlebih dahulu bentuk dari masing-masing ruas.

Perhatikan bahwa ruas kiri berikut:

$$\left(\zeta(s, g) - z_{sg}\right) = (2s + g) - \min\{3s, 3g\}$$

Sementara pada ruas kanan:

$$(\zeta(s, u) - z_{su}) + \left(\zeta(u, g) - z_{ug}\right) =$$

$$\left((2s + u) - \min\{3s, 3u\}\right) + \left((2u + g) - \min\{3u, 3g\}\right)$$

Selanjutnya, hitung selisih ruas kanan dikurangi ruas kiri dan tunjukkan ≥ 0

$$\left[\left((2s + u) - \min\{3s, 3u\}\right) + \left((2u + g) - \min\{3u, 3g\}\right)\right] -$$

$$[(2s + g) - \min\{3s, 3g\}] =$$

$$\left((2s + u) + (2u + g)\right) - (2s + g) -$$

$$\min\{3s, 3u\} - \min\{3u, 3g\} + \min\{3s, 3g\} =$$

$$(2s + g + 3u) - (2s + g) -$$

$$\min\{3s, 3u\} - \min\{3u, 3g\} + \min\{3s, 3g\} =$$

$$3u - \min\{3s, 3u\} - \min\{3u, 3g\} + \min\{3s, 3g\} \geq 0 \qquad (4.5)$$

Kemudian sederhanakan faktor 3.

Karena $\min\{3s, 3u\} = 3\min\{s, u\}$ untuk $3 \geq 0$, bagi (1) dengan 3:

$$u - \min\{s, u\} - \min\{u, g\} + \min\{s, g\} \geq 0 \qquad (4.6)$$

Cukup dibuktikan (4.6) untuk semua $s, g, u \geq 0$, buktikan dengan analisis kasus.

<u>Kasus 1</u>:: $s \leq g \leq u$

$$\min\{s,u\} = s,\ \min\{u,g\} = g,\ \min\{s,g\} = s$$

$$u - \min\{s,u\} - \min\{u,g\} + \min\{s,g\} \geq 0$$

$$u - s - g + s \geq 0$$

$$u - s + s - g \geq 0$$

$$u - g \geq 0$$

Karena $u \geq g$ maka $u - g \geq 0$

<u>Kasus 2</u>: $s \leq u \leq g$

$$\min\{s,u\} = s,\ \min\{u,g\} = u,\ \min\{s,g\} = s$$

$$u - \min\{s,u\} - \min\{u,g\} + \min\{s,g\} \geq 0$$

$$u - s - u + s \geq 0$$

$$u - u + s - s \geq 0$$

$$0 \geq 0$$

<u>Kasus 3</u>: $u \leq s \leq g$

$$\min\{s,u\} = u,\ \min\{u,g\} = u,\ \min\{s,g\} = s$$

$$u - \min\{s,u\} - \min\{u,g\} + \min\{s,g\} \geq 0$$

$$u - u - u + s \geq 0$$

$$-u + s \geq 0$$

Karena $u \leq s$ maka $-u + s \geq 0$

<u>Kasus 4</u>: $u \leq g \leq s$

$$\min\{s,u\} = u,\ \min\{u,g\} = u,\ \min\{s,g\} = g$$

$$u - \min\{s,u\} - \min\{u,g\} + \min\{s,g\} \geq 0$$

$$u - u - u + g \geq 0$$

$$-u + g \geq 0$$

Karena $u \leq g$ maka $-u + g \geq 0$

<u>Kasus 5</u>: $g \leq u \leq s$

$$\min\{s, u\} = u, \min\{u, g\} = g, \min\{s, g\} = g$$

$$u - \min\{s, u\} - \min\{u, g\} + \min\{s, g\} \geq 0$$

$$u - u - g + g \geq 0$$

$$-g + g \geq 0$$

$$0 \geq 0$$

<u>Kasus 6</u>: $g \leq s \leq u$

$$\min\{s, u\} = s, \min\{u, g\} = g, \min\{s, g\} = g$$

$$u - \min\{s, u\} - \min\{u, g\} + \min\{s, g\} \geq 0$$

$$u - s - g + g \geq 0$$

$$u - s \geq 0$$

Karena $u \geq s$ maka $u - s \geq 0$

Dalam semua kasus, $u - \min\{s, u\} - \min\{u, g\} + \min\{s, g\} \geq 0$, sehingga (4.6) benar. Jadi $\left(\zeta(s, g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s, u) - z_{su}) + \left(\zeta(u, g) - z_{ug}\right)$ untuk semua $s, g, u \in [0,1]$. Dengan demikian, aksioma (QM3) terbukti.

Karena aksioma (QM1) – (QM3) terbukti, maka terbukti bahwa (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik.

Contoh 4.4 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$, $\forall\ s, g, u \in X$, didefinisikan $\zeta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $\zeta(s, g) = |s - g|$. Akan dibuktikan bahwa ζ merupakan quasi *M*-metrik di X.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$\zeta(s,g) = |s-g|$$

$$\zeta(s,s) = |s-s| = 0$$

$$\zeta(g,g) = |g-g| = 0$$

($\Longrightarrow$) Misal $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g)$, karena

$$\zeta(s,s) = |s-s| = 0 \text{ dan } \zeta(g,g) = |g-g| = 0$$

Maka dari persamaan di atas diperoleh

$$\zeta(s,s) = 0 \Longrightarrow |s-g| = 0 \Longrightarrow s = g$$

($\Longleftarrow$) Misal $s = g$, maka

$\zeta(s,s) = |s-s| = 0, \quad \zeta(g,g) = |g-g| = 0, \quad \zeta(s,g) = |s-g| = |s-s| = 0$

Sehingga $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g)$

Dengan demikian, (QM1) terbukti

2. Karena $z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$ dan $\zeta(s,g) = |s-g|$, cukup tunjukkan bahwa

$$z_{sg} \leq \zeta(s,g)$$

Karena $\zeta(s,s) = |s-s| = 0$ dan $\zeta(g,g) = |g-g| = 0$, maka

$$z_{sg} \coloneqq \min\{0,0\} = 0$$

Maka jelas bahwa

$$z_{sg} = 0 \leq |s-g| = \zeta(s,g)$$

3. Dari definisi, diketahui bahwa:

$\zeta(s,g) = |s-g|$, dengan $z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$.

Karena $\zeta(s,s) = |s-s| = 0$ dan $\zeta(g,g) = |g-g| = 0$, maka

$$z_{sg} \coloneqq \min\{0,0\} = 0$$

Ini serupa dengan:

$$\zeta(s,u) = |s-u| \text{ dan } z_{su} \coloneqq \min\{0,0\} = 0,$$

$$\zeta(u,g) = |u-g| \text{ dan } z_{ug} \coloneqq \min\{0,0\} = 0.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Ini adalah ketaksamaan segitiga pada garis bilangan real, yang selalu benar.

Dengan demikian, (QM3) terbukti.

Maka terbukti bahwa $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$.

Contoh 4.5 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $C[0,1]$, himpunan semua fungsi kontinu dari interval $[0,1]$. Didefinisikan fungsi $\zeta: C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\zeta(s,g) = \max_{t\in[0,1]} |s(t) - g(t)| + 1$$

Butikan bahwa ζ adalah quasi *M*-mertik pada $C[0,1]$

Bukti

Ambil sebarang $s, g, u \in C[0,1]$

Tuliskan notasi:

$$z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}, \quad R_{sg} \coloneqq \max\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$$

Karena $\zeta(s,s) = \max_{t\in[0,1]} |s(t) - s(t)| + 1 = 1$

Maka untuk semua s, $\zeta(s,s) = 1$, begitu pula $\zeta(g,g) = 1, \zeta(u,u) = 1$

Dengan demikian

$$z_{sg} = 1, \quad R_{sg} = 1, \qquad z_{ug} = 1, \quad R_{ug} = 1, \quad z_{us} = 1, \; R_{us} = 1,$$

Artinya semua *self-distance* bernilai 1

1. Jika $s = g$, maka

$$\zeta(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 = 0 + 1 = 1$$

Sebaliknya, misakan

$$\zeta(s,s) = \zeta(s,g) = \zeta(g,g)$$

Karena $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = 1$, maka:

$$1 = \zeta(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 \Rightarrow \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| = 0$$

Ini hanya terjadi jika

$|s(t) - g(t)| = 0$ untuk semua $t \Rightarrow s(t) - g(t)$

Jadi

$$\zeta(s,s) = \zeta(s,g) = \zeta(g,g) \Leftrightarrow s = g$$

2. Akan dibuktikan bahwa

$$z_{sg} = 1 = \zeta(s,s) \leq \zeta(s,g)$$

Karena $\max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| \geq 0$, maka

$$\zeta(s,g) = \max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| + 1 \geq 1$$

Jadi terbukti bahwa $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$

3. Aksioma ketaksamaan segitiga *M*-metrik dirumuskan sebagai berikut:

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Karena semua $m_{sg} = 1$, maka

$$(\zeta(s,g) - 1) \leq (\zeta(s,u) - 1) + (\zeta(u,g) - 1)$$

Subsitusikan definisi:

$$\max_{t\in[0,1]}|s(t) - g(t)| \leq \max_{t\in[0,1]}|s(t) - u(t)| + \max_{t\in[0,1]}|u(t) - g(t)|$$

Ini benar karena ketaksamaan segitiga bilangan real:

$$|s(t) - g(t)| \leq |s(t) - u(t)| + |u(t) - g(t)|$$

Maka aksioma 3 terbukti.

Karena ketiga aksioma quasi M-metrik telah terbukti, maka $(C[0,1], \zeta)$ merupakan ruang quasi M-metrik.

Lemma 4.6 Setiap ruang M-metrik adalah ruang quasi M-metrik, namun tidak berlaku untuk kebalikannya (Ayoob dkk, 2023).

Bukti

Misalkan (X, m) adalah ruang M-metrik. Didefinisikan fungsi $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ sebagai $\zeta \coloneqq m$ dan untuk setiap pasangan (s, g) digunakan notasi

$$z_{sg} \coloneqq min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $\zeta(s,g) = m(s,g)$ adalah quasi M-metrik pada X dengan mengecek aksioma (QM1) – (QM3).

(QM1) $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) \Leftrightarrow s = g$, karena $\zeta = m$, pernyataan ini persis sama dengan syarat (M1) pada Definisi 2.19, maka (QM1) tepenuhi

(QM2) $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$, karena $\zeta = m$, ini identik dengan syarat (M2) pada Definisi 2.19, dengan demikian (QM2) terpenuhi.

(QM3) $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$ karena $\zeta = m$, ketaksamaan ini tepat sama dengan syarat (M4) pada Definisi 2.19. maka (QM3) terpenuhi.

Karena ζ memenuhi (QM1), (QM2), dan (QM3), maka (X, ζ) adalah ruang quasi M-metrik. Dengan demikian terbukti bahwa setiap ruang M-metrik (X, m) juga merupakan ruang quasi M-metrik (X, ζ).

Kemudian akan ditunjukkan bahwa untuk setiap ruang quasi *M*-metrik bukan merupakan ruang *M*-metrik.

Berdasarkan Definisi 4.1 ruang quasi *M*-metrik tidak mensyaratkan sifat simetri:

$$\zeta(s,g) = \zeta(g,s) \qquad \text{(tidak wajib)}$$

Sedangkan berdasarkan Definisi 2.19 ruang *M*-metrik mensyaratkan sifat simetri:

$$m(s,g) = m(g,s) \qquad \text{(wajib terpenuhi)}$$

Maka, dapat terdapat quasi *M*-metrik yang tidak simetri, sehingga tidak mungkin memenuhi syarat ruang *M*-metrik. Artinya, tidak semua ruang quasi *M*-metrik merupakan ruang *M*-metrik. Dengan demikian, terbukti bahwa setiap ruang *M*-metrik adalah ruang quasi *M*-metrik, namun tidak berlaku untuk kebalikannya.

Contoh 4.6 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $X \neq \emptyset$, $\forall\ s,g,u \in X$, didefinisikan $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $\zeta(s,g) = |s-g| + |s|$. Akan dibuktikan bahwa ζ merupakan quasi *M*-metrik di X tetapi bukan *M*-metrik.

Bukti

1. Dari definisi, diketahui bahwa

$$\zeta(s,g) = |s-g| + |s|$$

$$\zeta(s,s) = |s-s| + |s| = |s|$$

$$\zeta(g,g) = |g-g| + |g| = |g|$$

($\Longrightarrow$) Misal $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g)$, karena

$$\zeta(s,s) = |s-s| + |s| = |s| \text{ dan } \zeta(g,g) = |g-g| + |g| = |g|$$

Maka dari persamaan di atas diperoleh

$$\zeta(s,s) = |s| \Longrightarrow |s-g| + |s| = |s| \Longrightarrow s = g$$

($\Longleftarrow$) Misal $s = g$, maka

$\zeta(s,s) = |s-s| + |s| = |s|$, $\zeta(g,g) = |g-g| + |g| = |g|$, $\zeta(s,g) = |s-g| + |s| = |s-s| + |s| = |s|$

Sehingga $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g)$

Dengan demikian, (M1) terbukti.

2. Karena $z_{sg} \coloneqq min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$ dan $\zeta(s,g) = |s-g| + |s|$, cukup tunjukkan bahwa

$$z_{sg} \leq \zeta(s,g)$$

Misalkan $\zeta(s,s) = |s-s| + |s| = |s|\ dan\ \zeta(g,g) = |g-g| + |g| = |g|$.

Karena,

$$\zeta(s,s) = |s| \leq \zeta(s,g) = |s-g| + |s|$$

Dan

$$\zeta(g,g) = |g| \leq \zeta(s,g) = |s-g| + |s|$$

Maka

$$z_{sg} \coloneqq min\{|s|, |g|\} \leq \zeta(s,g) = |s-g| + |s|$$

Sehingga diperoleh

$$z_{sg} \leq \zeta(s,g)$$

3. Dari definisi, diketahui bahwa:

$$\zeta(s,g) = |s-g| + |s|, \ \ z_{sg} \coloneqq min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}.$$

Karena

$$\zeta(s,s) = |s-s| + |s| = |s|$$

$$\zeta(g,g) = |g-g| + |g| = |g|$$

$$\zeta(u,u) = |u-u| + |u| = |u|$$

Maka

$$z_{sg} \coloneqq min\{|s|, |g|\}$$

$$z_{su} := min\{|s|\,,|u|\,\}$$

$$z_{ug} := min\{|u|\,,|g|\,\}$$

Untuk membuktikan aksioma ini, akan menggunaan 6 kasus yaitu:

<u>Kasus 1</u>: $|s| \leq |u| \leq |g|$

$z_{sg} = |s|, z_{su} = |s|, z_{ug} = |u|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s-g| + |s| - |s| = |s-g|$$

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) = |s-u| + |s| - |s| = |s-u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u-g| + |u| - |u| = |u-g|$$

Maka

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Oleh karena itu, berdasarkan ketaksamaan segitiga pada nilai mutlak di $\mathbb{R}$, diperoleh

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Dengan demikian, aksioma (QM3) terpenuhi untuk kasus 1.

<u>Kasus 2</u>: $|s| \leq |g| \leq |u|$

$z_{sg} = |s|, z_{su} = |s|, z_{ug} = |g|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s-g| + |s| - |s| = |s-g|$$

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) = |s-u| + |s| - |s| = |s-u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u-g| + |u| - |g|$$

Maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Karena berlaku ketaksamaan segitiga pada $\mathbb{R}$

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Selain itu, dari $|g| \leq |u|$ diperoleh

$$|u| - |g| \geq 0$$

Maka

$$|s-u| + |u-g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Akibatnya,

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Dengan demikian,

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq \left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Sehingga kasus 2 terbukti.

<u>Kasus 3</u>: $|u| \leq |s| \leq |g|$

$z_{sg} = |s|$, $z_{su} = |u|$, $z_{ug} = |u|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s-g| + |s| - |s| = |s-g|$$

$$\left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) = |s-u| + |s| - |u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u-g| + |u| - |u| = |u-g|$$

Maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq \left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s-g| \leq |s-u| + |s| - |u| + |u-g|$$

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g| + |s| - |u|$$

Gunakan ketaksamaan segitiga

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Karena $|u| \leq |s|$, maka $|s| - |u| \geq 0$. Akibatnya,

$$|s-u| + |u-g| \leq |s-u| + |u-g| + |s| - |u|$$

Sehingga

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g| \leq |s-u| + |u-g| + |s| - |u|$$

Dengan demikian,

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq \left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Sehingga kasus 3 terbukti.

<u>Kasus 4</u>: $|u| \leq |g| \leq |s|$

$z_{sg} = |g|$, $z_{su} = |u|$, $z_{ug} = |u|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s-g| + |s| - |g|$$

$$\left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) = |s-u| + |s| - |u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u-g| + |u| - |u| = |u-g|$$

Maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq \left(\zeta(s,u) - z_{su}\right) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s-g| + |s| - |g| \leq |s-u| + |s| - |u| + |u-g|$$

$$|s-g| + |s| - |g| \leq |s-u| + |u-g| + |s| - |u|$$

Kurangkan $|s|$ pada kedua ruas, diperoleh

$$|s-g| - |g| \leq |s-u| + |u-g| - |u|$$

Gunakan ketaksamaan segitiga

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Mengurangkan $|g|$ pada kedua ruas diperoleh

$$|s-g| - |g| \leq |s-u| + |u-g| - |g|$$

Karena pada kasus 4 berlaku $|u| \leq |g|$, maka $-|g| \leq -|u|$. Akibatnya,

$$|s| - |u| + |u-g| - |g| \leq |s-u| + |u-g| - |u|$$

Dengan menggabungkan kedua ketaksamaan di atas, diperoleh

$$|s-g| - |g| \leq |s-u| + |u-g| - |u|$$

Jadi,

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Sehingga kasus 4 terbukti.

<u>Kasus 5</u>: $|g| \leq |s| \leq |u|$

$z_{sg} = |g|, z_{su} = |s|, z_{ug} = |g|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s-g| + |s| - |g|$$

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) = |s-u| + |s| - |s| = |s-u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u-g| + |u| - |g|$$

Maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s-g| + |s| - |g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Gunakan ketaksamaan segitiga

$$|s-g| \leq |s-u| + |u-g|$$

Tambahkan $|s| - |g|$ pada kedua ruas, diperoleh

$$|s-g| + |s| - |g| \leq |s-u| + |u-g| + |s| - |g|$$

Karena pada kasus 5 berlaku $|s| \leq |u|$, maka $|s| - |g| \leq |s| - |g|$.

Akibatnya,

$$|s-u| + |u-g| + |s| - |g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Dengan menggabungkan kedua ketaksamaan di atas diperoleh

$$|s| - |g| \leq |s-u| + |u-g| + |u| - |g|$$

Sehingga

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Maka kasus 5 terbukti.

<u>Kasus 6</u>: $|g| \leq |u| \leq |s|$

$z_{sg} = |g|, z_{su} = |u|, z_{ug} = |g|$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) = |s - g| + |s| - |g|$$

$$(\zeta(s,u) - z_{su}) = |s - u| + |s| - |u|$$

$$\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) = |u - g| + |u| - |g|$$

Maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$|s - g| + |s| - |g| \leq |s - u| + |s| - |u| + |u - g| + |u| - |g|$$

Gunakan ketaksamaan segitiga

$$|s - g| \leq |s - u| + |u - g|$$

Tambahkan $|s| - |g|$ pada kedua ruas, diperoleh

$$|s - g| + |s| - |g| \leq |s - u| + |u - g| + |s| - |g|$$

Karena pada kasus 6 berlaku $|u| \leq |s|$, maka $-|g| \leq -|u| + |u| - |g|$ dan khususnya

$$|s| - |g| \leq |s| - |u| + |u| - |g|$$

Akibatnya,

$$|s - g| + |s| - |g| + |s| - |g| \leq |s - u| + |s| - |u| + |u - g| + |u| - |g|$$

Sehingga

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Maka kasus 6 terbukti.

Karena 6 kasus tersebut benar, maka

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Terbukti.

Karena ketiga syarat terpenuhi, maka ζ adalah suatu quasi *M*-metrik pada X, dengan demikian pasangan (X, ζ) adalah ruang quasi metrik.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pasangan (X, ζ) bukan merupakan ruang *M*-metrik. Perhatikan bahwa:

$$\zeta(s,g) = |s-g| + |s|,\ \ \zeta(g,s) = |g-s| + |g|$$

Secara umum, $|s-g| = |g-s|$, tetapi $|s|$ tidak selalu sama $|g|$.

Dengan demikian, fungsi ζ tidak memenuhi syarat dasar *M*-metrik, yaitu $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$. Oleh karena itu pasangan (X,ζ) bukanlah ruang *M*-metrik.

Contoh 4.7 Ruang Quasi *M*-Metrik

Misalkan $X = \{s, g, u\}$ dan fungsi $\zeta: X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh:

$$\zeta(s,s) = 1, \zeta(g,g) = 9, \zeta(u,u) = 5,$$

$$\zeta(s,g) = 10, \zeta(g,s) = 11,\ \ \zeta(s,u) = \zeta(u,s) = 7,$$

$$\zeta(u,g) = \zeta(g,u) = 8$$

Maka, ζ adalah quasi *M*-metrik pada *X* tetapi bukan *M*-metrik.

Bukti

Langkah pertama, akan dibuktikan bahwa ζ merupakan quasi *M*-metrik pada X.

1. Dari fakta yang diketahui, jelas bahwa

   $$\zeta(p,p) = \zeta(q,q) = \zeta(p,q)$$

   Berlaku hanya jika $p = s = q$ atau $p = g = q$ atau $p = u = q$

   Maka terbukti bahwa $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) \Leftrightarrow s = g$

2. Akan dibuktikan bahwa $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$,

   $$z_{sg} \leq \zeta(s,g)$$

   $$1 \leq 10$$

   $$z_{su} \leq \zeta(s,u)$$

   $$1 \leq 7$$

   $$z_{ug} \leq \zeta(u,g)$$

$$5 \leq 8$$

Maka terbukti bahwa $z_{sg} \leq \zeta(s,g)$ untuk ketiga pasangan tersebut.

3. Akan dibuktikan bahwa $\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

$$10 - 1 \leq (7 - 1) + (8 - 5)$$

$$9 \leq 6 + 3$$

$$9 \leq 9$$

Maka terbukti bahwa

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)$$

Karena ketiga aksioma terbukti, maka terbukti bahwa ζ adalah ruang quasi *M*-metrik. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa mq bukan merupakan *M*-metrik. Untuk membuktikannya, akan ditunjukkan bahwa $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$. Terlihat jelas bahwa

$$\zeta(s,g) = 10 \ \neq \zeta(g,s) = 11$$

$$\zeta(s,u) = \zeta(u,s) = 7$$

$$\zeta(u,g) = \zeta(g,u) = 8$$

Karena dari ketiga pasangan tersebut terdapat pasangan asimetri yaitu: $\zeta(s,g) \neq \zeta(g,s)$. Maka terbukti bahwa ζ bukan merupakan *M*-metrik.

Proposisi 4.8 Misalkan (X,ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik, maka untuk semua $s,g,u \in X$, yang memenuhi ;

1. $0 \leq R_{sg} + z_{sg} = \zeta(s,s) + \zeta(g,g)$
2. $0 \leq R_{sg} - z_{sg} = |\zeta(s,s) - \zeta(g,g)|$

3. $R_{sg} + z_{sg} \leq (R_{su} + z_{su}) + \left(R_{ug} + z_{ug}\right)$

Bukti

Dari definisi, diketahui bahwa

$$R_{sg} \coloneqq \max\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$$

$$z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$$

Demikian pula untuk pasangan lain seperti (s,u) dan (u,g).

Misalkan $s \coloneqq \zeta(s,s)$, $g \coloneqq \zeta(g,g)$, dan $u \coloneqq \zeta(u,u)$.

Pada ruang quasi *M*-metrik (X,ζ) berlaku $\zeta(\cdot,\cdot) \in [0,\infty)$, sehingga diperoleh $s, g, u \geq 0$.

1. Berdasarkan definisi, diketahui bahwa $R_{sg} \coloneqq \max\{s,g\}$ dan $z_{sg} \coloneqq \min\{s,g\}$.

   Perhatikan bahwa:

   $$\max\{s,g\} + \min\{s,g\} = s + g$$

   Jika $s \leq g$, maka $\min\{s,g\} = s$ dan $\max\{s,g\} = g$, sehinga jumlahnya $s + g$. Jika $g \leq s$, maka $\min\{s,g\} = g$ dan $\max\{s,g\} = s$, sehingga jumlahnya $g + s$. Karena sifat komutatif dari penjumlahan, maka $s + g = g + s$ sehingga hasilnya tetap sama.

   Dengan mensubstitusikan $s \coloneqq \zeta(s,s)$ dan $g \coloneqq \zeta(g,g)$, diperoleh:

   $$R_{sg} + z_{sg} = \max\{s,g\} + \min\{s,g\} = s + g = \zeta(s,s) + \zeta(g,g)$$

   Karena nilai ζ pada ruang quasi *M*-metrik selalu bernilai ≥ 0, maka:

   $$0 \leq R_{sg} + z_{sg} = \zeta(s,s) + \zeta(g,g)$$

   Dengan demikian, (1) tebukti.

2. Perhatikan bahwa:

   $$\max\{s,g\} - \min\{s,g\} = s - g$$

Jika $s \leq g$, maka $\max\{s, g\} = g$ dan $\min\{s, g\} = s$, sehingga selisihnya $g - s = |g - s|$. Jika $g \leq s$, maka $\max\{s, g\} = s$ dan $\min\{s, g\} = g$, sehingga selisihnya $s - g = |s - g|$. Berdasarkan sifat nilai mutlak, maka $|g - s| = |s - g|$ sehingga hasilnya tetap sama.

Dengan mensubstitusikan $s \coloneqq \zeta(s, s)$ dan $g \coloneqq \zeta(g, g)$, diperoleh:

$$R_{sg} - z_{sg} = \max\{s, g\} - \min\{s, g\} = |s - g| = |\zeta(s, s) - \zeta(g, g)|$$

Karena nilai mutlak selalu bersifat *non-negative*, maka:

$$0 \leq R_{sg} - z_{sg} = \zeta(s, s) - \zeta(g, g)$$

Sehingga (2) terbukti.

3. Dari definisi (2), berlaku:

$$R_{sg} - z_{sg} = |\zeta(s, s) - \zeta(g, g)|$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga

$$|\zeta(s, s) - \zeta(g, g)| \leq |\zeta(s, s) - \zeta(u, u)| + |\zeta(u, u) - \zeta(g, g)|$$

Berdasarkan definisi (2), untuk pasangan (s, u) dan (u, g) berlaku:

$$|\zeta(s, s) - \zeta(u, u)| = z_{su} - z_{su}$$

$$|\zeta(u, u) - \zeta(g, g)| = R_{ug} - z_{ug}$$

Sehingga:

$$R_{sg} + z_{sg} \leq (R_{su} + z_{su}) + \left(R_{ug} + z_{ug}\right)$$

Dengan demikian, (3) tebukti.

Proposisi 4.9 Misalkan (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik dan $K: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$K(s, g) = \zeta(s, g) + \zeta(g, s) - 2z_{sg}$$

untuk semua $s, g, u \in X$. Maka K adalah metrik Euclid, dan pasangan (X, K) adalah ruang metrik klasik.

Bukti

Dari definisi diketahui

$$K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg}$$

Bentuk tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$K(s,g) = \big(\zeta(s,g) - z_{sg}\big) + \big(\zeta(g,s) - z_{sg}\big)$$

Dengan

$$z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}. \quad \big(\text{Catatan: } z_{sg} = z_{gs}\big)$$

Akan ditunjukkan bahwa K memenuhi 4 aksioma metrik klasik:

1. Dari aksioma (QM2) untuk pasangan (s,g) diperoleh $z_{sg} \le \zeta(s,g)$ sehingga

   $$\zeta(s,g) - z_{sg} \ge 0$$

   Terapkan aksioma (QM2) juga pada pasangan (g,s). Karena $z_{sg} = z_{gs}$, maka didapatkan juga

   $$\zeta(g,s) - z_{sg} \ge 0$$

   Karena kedua suku bernilai ≥ 0 (tak negatif), maka $K(s,g) \ge 0$. Jadi aksioma (1) terpenuhi.

2. Diketahui bahwa $K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg}$, akan dibuktikan:

   ($\Longrightarrow$) jika $K(s,g) = 0$ maka $s = g$

   Karena setiap suku ≥ 0,

   $$\zeta(s,g) - z_{sg} = 0 \ \text{ dan } \zeta(g,s) - z_{sg} = 0$$

   Maka

   $$\zeta(s,g) = z_{sg} = \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}, \quad \zeta(g,s) = z_{sg}$$

   Dari $z_{sg} \coloneqq \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}$, maka diperoleh

$$\zeta(s,s) \le \zeta(s,g), \quad \zeta(g,g) \le \zeta(g,s).$$

Jadi

$$\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = z_{sg} = \zeta(s,g) = \zeta(g,s)$$

Dengan (QM1) yaitu kondisi identitas untuk quasi *M*-metrik: $\zeta(s,s) = \zeta(g,g) = \zeta(s,g) \Leftrightarrow s = g$. Maka dapat disimpulkan bahwa $s = g$

($\Longleftarrow$) Jika $s = g$ maka $K(s,g) = 0$

$$K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg}$$

Jika $s = g$ maka

$$K(s,s) = \zeta(s,s) + \zeta(s,s) - 2z_{ss}$$

$$= 2\zeta(s,s) - 2\min\{\zeta(s,s), \zeta(s,s)\}$$

$$= 0$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $K(s,g) = 0 \Leftrightarrow s = g$.

3. Karena $\zeta(s,g) = \zeta(g,s)$ dan $z_{sg} = z_{gs}$ (minimum dua bilangan bersifat simetri) maka jelas bahwa

$$K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg} =$$

$$\zeta(g,s) + \zeta(s,g) - 2z_{sg} = K(g,s)$$

Sehingga $K(s,g) = K(g,s)$. Maka terbukti.

4. Akan dibuktikan $K(s,g) \le K(s,u) + K(u,g)$ untuk setiap $s, g, u \in X$.

Diketahui definisi

$$K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg}$$

Bentuk tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$K(s,g) = \left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) + \left(\zeta(g,s) - z_{sg}\right)$$

Ingat bahwa $z_{sg} = z_{gs}$.

Gunakan (QM3) (ketaksamaan segitiga dalam quasi *M*-metrik)

Ambil $K(s,g) =$

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) \qquad (4.7)$$

Ambil $K(g,s) =$

$$\left(\zeta(g,s) - z_{gs}\right) \leq \left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right) + (\zeta(u,s) - z_{us}) \qquad (4.8)$$

Jumlahkan kedua pertidaksamaan (4.7) + (4.8)

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) + \left(\zeta(g,s) - z_{gs}\right)$$

$$\leq \left((\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)\right)$$

$$+ \left(\left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right) + (\zeta(u,s) - z_{us})\right)$$

Perhatikan kedua ruas, kemudian mulai dari ruas kiri terlebih dahulu

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) + \left(\zeta(g,s) - z_{gs}\right) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg} = K(s,g)$$

Kemudian lihat ruas kanan. Kelompokkan suku sesuai definisi K dan gunakan simetri $z_{ab} = z_{ba}$

$$\left((\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)\right) +$$

$$\left(\left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right) + (\zeta(u,s) - z_{us})\right) =$$

$$((\zeta(s,u) - z_{su}) + (\zeta(u,s) - z_{us})) +$$

$$\left(\left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) + \left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right)\right) =$$

$$(mq(s,u) + mq(u,s) - 2mq_{su}) + \left(mq(u,g) + mq(g,u) - 2mq_{ug}\right) =$$

$$K(s,u) + K(u,g)$$

Maka terbukti bahwa $K(s,g) \leq K(s,u) + K(u,g)$

Karena K memenuhi semua aksioma dari metrik klasik, maka K adalah metrik dan pasangan (X,K) adalah ruang metrik klasik.

Proposisi 4.10 Misalkan (X, ζ) adalah ruang quasi *M*-metrik dan $H: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan oleh

$$h(s,g) = \frac{\zeta(s,g) + \zeta(g,s)}{2}$$

untuk semua $s, g, u \in X$. Maka H adalah *M*-metrik, dan pasangan (X, H) adalah ruang *M*-metrik.

Bukti

Dari definisi diketahui

$$h(s,g) = \frac{\zeta(s,g) + \zeta(g,s)}{2}$$

Dengan

$$z_{sg} := \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\}. \ \left(\text{Catatan}: z_{sg} = z_{gs}\right)$$

Karena $h(s,s) = \frac{\zeta(s,s)+\zeta(s,s)}{2} = mq(s,s)$, maka

$$h_{sg} := \min\{h(s,s), h(g,g)\} = \min\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} = z_{sg}$$

Dan

$$H_{sg} := \max\{h(s,s), h(g,g)\} = \max\{\zeta(s,s), \zeta(g,g)\} = R_{sg}$$

Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi 4 aksioma *M*-metrik:

1. Diketahui bahwa $h(s,g) = \frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$, akan dibuktikan:

   ($\Leftarrow$) jika $s = g$ maka $h(s,s) = h(g,g) = h(s,g)$

   $$h(s,s) = \frac{\zeta(s,s) + \zeta(s,s)}{2} = \zeta(s,s)$$

   Sehingga jelas bahwa $h(s,s) = h(g,g) = h(s,g)$ (semuanya sama dengan $\zeta(s,s)$)

   ($\Rightarrow$) jika $h(s,s) = h(g,g) = h(s,g)$ maka $s = g$

   Misalkan $a := \zeta(s,s) = h(s,s) = h(g,g)$, $x := \zeta(s,g)$ dan $y := \zeta(g,s)$.

Dari $h(s,g)=\frac{x+y}{2}=a$ dan aksioma (QM2) yaitu: $z_{sg}\leq\zeta(s,g)$ diperoleh

$$a=\min\{\zeta(s,s),\zeta(g,g)\}\leq x,\quad\ a\leq y.$$

Karena $x\geq a$ dan $y\geq a$ tetapi $\frac{x+y}{2}=a$, maka wajib $x=y=a$. Jadi

$$\zeta(s,s)=\zeta(g,g)=\zeta(s,g)$$

Dengan (QM1), dapat disimpulkan bahwa $s=g$.

Maka terbukti.

2. Karena $h_{sg}=z_{sg}$ dan $h(s,g)=\frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$, cukup tunjukkan

$$z_{sg}\leq\frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$$

Ingat bahwa $z_{sg}=z_{gs}$

Dari (QM2) berlaku $z_{sg}\leq\zeta(s,g)$ dan $z_{gs}\leq\zeta(g,s)$.

Jumlahkan kedua ketaksamaan:

$$z_{sg}+z_{gs}\leq\zeta(s,g)+\zeta(g,s)$$

Sehingga:

$$2z_{sg}\leq\zeta(s,g)+\zeta(g,s)$$

Bagikan kedua ruas dengan 2:

$$z_{sg}\leq\frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$$

Karena ruas kanan adalah $h(s,g)$, maka

$$h_{sg}=z_{sg}\leq h(s,g)$$

Maka terbukti $h_{sg}\leq h(s,g)$.

3. Berdasarkan definisi fungsi h:

$$h(s,g)=\frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$$

Karena penjumlahan bersifat komutatif, yaitu $mq(s,g) + \zeta(g,s) = \zeta(g,s) + \zeta(s,g)$, maka

$$h(s,g) = \frac{\zeta(s,g) + \zeta(g,s)}{2} = \frac{\zeta(g,s) + \zeta(s,g)}{2} = h(g,s)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $h(s,g) = h(g,s)$

4. $\left(h(s,g) - h_{sg}\right) \leq (h(s,u) - h_{su}) + \left(h(u,g) - h_{ug}\right)$.

Tuliskan

$$\left(h(s,g) - h_{sg}\right) = \frac{\zeta(s,g) + \zeta(g,s)}{2} - z_{sg}$$

$$= \frac{\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) + \left(\zeta(g,s) - z_{sg}\right)}{2}$$

Gunakan (QM3) (ketaksamaan segitiga dalam quasi *M*-metrik)

Terapkan (QM3) pada (s,g)

$$\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) \leq (\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right) \qquad (4.10)$$

Terapkkan (QM3) pada (g,s)

$$\left(\zeta(g,s) - z_{gs}\right) \leq \left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right) + (\zeta(u,s) - z_{us}) \qquad (4.11)$$

Jumlahkan kedua pertidaksamaan (4.10) + (4.11)

$$\frac{\left(\zeta(s,g) - z_{sg}\right) + \left(\zeta(g,s) - z_{sg}\right)}{2}$$

$$\leq \frac{\left((\zeta(s,u) - z_{su}) + \left(\zeta(u,g) - z_{ug}\right)\right)}{2}$$

$$+ \frac{\left(\left(\zeta(g,u) - z_{gu}\right) + (\zeta(u,s) - z_{us})\right)}{2}$$

$$\left(h(s,g) - h_{sg}\right) \leq (h(s,u) - h_{su}) + \left(h(u,g) - h_{ug}\right)$$

Dengan memakai $h_{su} = z_{su}$ dan $h_{ug} = z_{ug}$.

Maka terbukti.

Karena H memenuhi semua aksioma dari *M*-metrik, maka H adalah *M*-metrik dan pasangan (X, H) adalah ruang *M*-metrik.

4.2 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam

Pembahasan mengenai ruang quasi *M*-metrik menunjukkan bahwa suatu konsep matematika dapat diterima apabila memenuhi syarat dan aturan yang telah ditetapkan. Dalam ruang quasi *M*-metrik, nilai jarak antara dua titik tidak harus memenuhi sifat simetri, sehingga dapat berlaku $\zeta(s, g) \neq \zeta(g, s)$ Selain itu, nilai jarak diri $\zeta(s, s)$ juga tidak selalu bernilai nol. Walaupun demikian, selama ketiga syarat pada definisi quasi *M*-metrik terpenuhi, yaitu (QM1), (QM2), dan (QM3), maka ruang tersebut tetap sah sebagai objek kajian dalam analisis.

Pemahaman ini dapat dikaitkan dengan prinsip dalam Islam. Pada Al-Qur'an surah At-Thalaq ayat 12 dijelaskan bahwa Allah menciptakan langit dan bumi dengan ukuran dan ketentuan tertentu. Ayat ini memberikan gambaran bahwa keteraturan tidak bergantung pada kesamaan bentuk atau sifat, tetapi pada adanya ketentuan yang jelas. Hal ini serupa dengan ruang quasi *M*-metrik, yang tetap dianggap teratur meskipun tidak memenuhi simetri seperti ruang metrik atau *M*-metrik.

Pada surah Al-Mulk ayat 3, Allah menegaskan bahwa tidak terdapat ketidakseimbangan dalam ciptaan-Nya meskipun diamati berulang-ulang. Prinsip ini memiliki kemiripan dengan proses pembuktian dalam matematika, di mana suatu pernyataan diuji melalui definisi, contoh, dan pembuktian untuk memastikan tidak ada pertentangan dengan aturan yang berlaku. Selanjutnya, surah Al-Baqarah ayat 186 menjelaskan bahwa Allah dekat dengan hamba-Nya.

Dalam matematika, istilah kedekatan biasanya dinyatakan melalui jarak antar titik. Walaupun maknanya berbeda, perbandingan ini dapat memberikan gambaran bahwa konsep jarak tidak hanya dapat dipahami secara matematis, tetapi juga dapat dikaitkan dengan makna spiritual, yaitu semakin dekat seseorang kepada Allah melalui ibadah dan doa, semakin besar pengaruhnya terhadap kehidupan.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian mengenai ruang quasi M-metrik tidak hanya menambah kajian dalam bidang analisis, tetapi juga menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan dapat dipahami berdampingan dengan nilai-nilai keislaman. Ketelitian dalam mendefinisikan, memberi contoh, dan membuktikan suatu konsep mencerminkan bahwa ilmu dibangun secara bertahap dan mengikuti aturan yang jelas, sebagaimana ciptaan Allah yang juga diatur dengan ketetapan yang sempurna.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Ruang quasi M-metrik merupakan bentuk generalisasi dari ruang M-metrik dengan menghilangkan sifat simetri, namun tetap mempertahankan sifat-sifat penting lainnya seperti identitas jarak dan ketaksamaan segitiga.
2. Setiap ruang M-metrik merupakan ruang quasi M-metrik, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa quasi M-metrik bersifat lebih umum, karena tidak mengharuskan fungsi jaraknya simetri.
3. Dari suatu ruang quasi M-metrik, dapat dibangun dua fungsi baru, yaitu: Fungsi $K(s,g) = \zeta(s,g) + \zeta(g,s) - 2z_{sg}$ yang membentuk ruang metrik klasik, dan fungsi $h(s,g) = \frac{\zeta(s,g)+\zeta(g,s)}{2}$ yang membentuk ruang M-metrik.
4. Melalui contoh dan pembuktian yang telah diberikan, dapat disimpulkan bahwa aksioma quasi M-metrik bersifat konsisten, dan dari quasi M-metrik tersebut dapat didefinisikan metrik dan M-metrik melalui fungsi tertentu yang telah diverifikasi memenuhi semua aksiomanya.

Dengan demikian, penelitian ini menunjukkan bahwa ruang quasi M-metrik merupakan generalisasi yang menggabungkan sifat asimetri dari quasi metrik dan sifat *self-distance* pada M-metrik. Hal ini menjadikan quasi M-metrik sebagai bentuk perluasan yang lebih fleksibel untuk merepresentasikan jarak pada himpunan tak kosong.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

1. Penelitian berikutnya dapat memperluas kajian mengenai penerapan ruang quasi *M*-metrik dalam analisis titik tetap, khususnya pada pemetaan kontraktif dan studi konvergensi, mengingat ruang ini merupakan generalisasi dari beberapa bentuk ruang metrik.
2. Hubungan antara topologi yang diinduksi oleh quasi *M*-metrik dan topologi yang berasal dari generalisasi ruang metrik lainnya perlu diteliti lebih lanjut, agar diperoleh pemahaman yang lebih lengkap mengenai sifat-sifat topologis yang muncul.
3. Penelitian lanjutan dapat mengembangkan contoh-contoh quasi *M*-metrik yang lebih bervariasi, misalnya dengan menggunakan fungsi nonlinier, fungsi berbasis integral, atau konstruksi lain yang dapat menghasilkan perilaku jarak yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Ayoob, I., Chuan, N. Z., & Mlaiki, N. (2023). Quasi M-metric spaces. *AIMS Mathematics*, *8*(5), 10228–10248. https://doi.org/10.3934/math.2023518

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Kementerian Agama Republik Indonesia. (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.

Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications. In *The Mathematical Gazette* (Vol. 63, Issue 424). Canada. https://doi.org/10.2307/3616033

Maharani, D. (2025). Penjelajahan Ruang Dalam Analisis Fungsional. *UIN Maliki Press* (1st ed.). UIN Maliki Press.

Malahayati, & Utami, M. (2014). *Teorema Titik Tetap Pada Ruang Quasi Metrik Terasing Tanpa Menggunakan Sifat Kekontinuan Fungsi*. *3*(1), 42–61.

Matthews, S. G. (1994). Partial Metric Topology. *Topology and Its Applications*, *728*(3), 183–197.

Phillips, E. R. (1984). *An Introduction to Analysis and Integration Theory*. New York: Dover Publications, Inc. ISBN 0-486-44747-4.

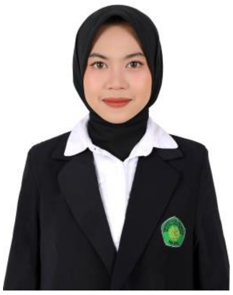
Romaguera, S. (2024). On Protected Quasi-Metrics. *Axioms*, *13*(3), 158. https://doi.org/10.3390/axioms13030158

Tafsir Al-Muyassar. (2020). Kementerian Agama Arab Saudi. Diakses dari: https://qurancomplex.gov.sa

Wahidatussolihah, R., Aini, Q., & Marwan. (2025). Beberapa Sifat Pemetaan C-Kontraktif Di Ruang Metrik Parsial Dan Titik Tetapnya. *E-Jurnal Matematika*, *14*(1), 1. https://doi.org/10.24843/mtk.2025.v14.i01.p472

Wilson, W. . A. . (2014). *On Quasi-Metric Spaces*. *53*(3), 675–684. http://www.jstor.org/stable/2371174

RIWAYAT HIDUP



Destia Ayu Nanda, lahir di Gresik pada 23 Desember 2002. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Halifi, S.H dan Ibu Nyimas Nur Ainun serta adik dari Yoga Aprilianda Pratama, S.H. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK Al-Huda yang lulus pada tahun 2009, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di SDIT Al-Huda dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 7 Gresik dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Sangkapura dan lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang sama melalui jalur SBMPTN, penulis diterima menjadi mahasiswa pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan menjalakan perkuliahan hingga menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis aktif mengikuti kegiatan akademik dan menyelesaikan berbagai proses pembelajaran yang menjadi bagian dari kurikulum studi. Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Wringinsongo, Kecamatan Tumpang, Kabupaten Malang selama satu bulan sebagai sekretaris kelompok dan bendahara umum dari 3 kelompok di satu desa pada tahun 2024. Selain itu pada tahun yang saama pada bulan Juni–Juli penulis juga mengikuti program Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT. PLN ULP Giri Gresik yang melaksanakan tugas seperti scanning document, arsip, processing data dan editing.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Destia Ayu Nanda
NIM	: 210601110050
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Keterkaitan Ruang Quasi $M-$ Metrik dengan Ruang $M-$ Metrik dan Ruang Metrik Klasik
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II	: Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Mei 2025	Konsultasi Topik	1
2.	23 Juni 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	12 Agustus 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 Agustus 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	11 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	12 September 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	16 September 2025	ACC Bab I, II, dan III	7
8.	18 September 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	18 September 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	19 September 2025	ACC Seminar Proposal	10.
11.	15 Oktober 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11
12.	15 Oktober 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	20 Oktober 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13
14.	04 November 2025	Konsultasi Bab IV dan V	14
15.	10 November 2025	Konsultasi Bab IV dan V	15

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	10 November 2025	ACC Bab IV dan V	16.
17.	10 November 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	17.
18.	10 November 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	10 November 2025	ACC Seminar Hasil	19.
20.	03 Desember 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	08 Desember 2025	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	15 Desember 2025	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 15 Desember 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012