PRODUCT-NORM PADA RUANG LINEAR

SKRIPSI

OLEH
IVAN MAUROBI
NIM. 19610027

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

PRODUCT-NORM PADA RUANG LINEAR

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ivan Maurobi
NIM. 19610027

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

PRODUCT-NORM **PADA RUANG LINEAR**

SKRIPSI

Oleh
Ivan Maurobi
NIM. 19610027

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 27 Oktober 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	M. Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

PRODUCT-NORM PADA RUANG LINEAR

SKRIPSI

Oleh
Ivan Maurobi
NIM. 19610027

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 03 November 2025

Ketua Penguji	:	Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji 1	:	Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji 2	:	Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 3	:	M. Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012

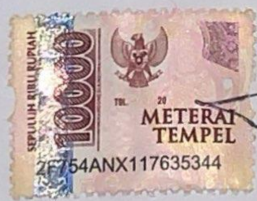
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Ivan Maurobi
NIM	:	19610027
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	*Product-Norm* Pada Ruang Linear

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 03 November 2025



Ivan Maurobi
NIM.19610027

MOTO

“Keberhasilan adalah perjalanan, bukan destinasi ”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang dengan kasih sayang-Nya telah memberikan kemudahan, kekuatan, dan kelapangan hati dalam setiap langkah hingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Dengan penuh rasa hormat dan cinta, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Ahmadi, Ibu Iramaya Supaputra, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasehat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta adik Najwa Tasya Nadira dan Naila Sahratus Sifa yang menantikan kelulusan S1

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah, yang memberikan rahmat, taufik dan hidayat-Nya, sehingga peneliti berkesempatan menyelesaikan skripsi dengan judul "*Product-Norm* pada Ruang Linear", sebagai syarat memperoleh gelar Program Strata-1 bidang matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Salawat dan salam tentunya selalu peneliti curahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa kita ke *addinul islam.*

Proses penyusunan proposal penelitian ini tidak terlepas dari masukan serta arahan dari beberapa pihak. Atas dasar hal tersebut peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Ilfi Nur Diana, M.Si., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Agus Mulyono, M.Kes., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dian Maharani, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I, yang selalu membimbing dan mengarahkan serta senantiasa mendukung peneliti sehingga proposal skripsi ini dapat terselesaikan.
5. M. Nafie Juhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, ilmu, serta arahan kepada peneliti.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Orang tua peneliti dan seluruh keluarga yang tidak lelah memberikan dukungan, mendoakan, semangat serta kasih sayang sehingga peneliti selalu bersemangat dalam mengerjakan penelitian ini.
8. Seluruh mahasiswa Matematika angkatan 2019 yang telah memberikan bantuan dan mendukung dalam berbagai keadaan.
9. Serta seluruh pihak yang tidak bisa peneliti sebutkan seluruhnya.

Peneliti menyadari bahwasanya proposal penelitian ini banyak kekurangan, maka dari itu peneliti berharap adanya saran serta kritik yang membangun agar penelitian selanjutnya dapat semakin baik. Peneliti berharap penelitian yang dihasilkan nantinya bermanfaat bagi para pembaca.

Malang, 03 November 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PENGAJUAN .... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN .... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .... **v**
MOTO .... **vi**
PERSEMBAHAN .... **vii**
KATA PENGANTAR .... **viii**
DAFTAR ISI .... **x**
ABSTRAK .... **xi**
ABSTRACT .... **xii**
مستخلص البحث .... **xiii**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Definisi Istilah 5
BAB II KAJIAN TEORI **7**
2.1 Teori Pendukung 7
2.1.1 Ruang Vektor / Ruang Linear 7
2.1.2 Ruang Bernorma 9
2.1.3 Kekonvergenan pada fungsi terukur 13
2.1.4 Ruang Banach 15
2.1.5 Ruang Hasil kali Dalam (*inner product space*) 18
2.1.6 Ruang Hilbert 21
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur’an 24
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 25
BAB III METODE PENELITIAN **28**
3.1 Jenis Penelitian 28
3.2 Pra Penelitian 28
3.3 Tahapan Penelitian 28
BAB IV PEMBAHASAN **30**
4.1 Sifat Ruang Linear Product-Norm 30
4.2 Kajian Topik dalam Al-Qur’an 41
BAB V PENUTUP **43**
5.1 Kesimpulan 43
5.2 Saran 43
DAFTAR PUSTAKA **44**
RIWAYAT HIDUP **45**

ABSTRAK

Maurobi, Ivan. 2025. **Product-Norm Pada Ruang Linear.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dian Maharani, S.Pd., M.Si. (2) M. Nafie Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Ruang Linear, Ruang Bernorm, Product-Norm, Ruang Banach, Ruang Vektor.

Penelitian ini membahas tentang *Product-Norm pada Ruang Linear*, yang merupakan pengembangan dari konsep ruang vektor dan ruang bernorma. *Product-norm* digunakan untuk mengukur "panjang" atau "besarnya" elemen pada hasil kali dua ruang vektor bernorma, seperti $V_1 \times V_2$. Beberapa bentuk *product-norm* yang umum digunakan antara lain norm Euclidean, norm maksimum, dan norm jumlah, yang masing-masing memberikan struktur topologis berbeda namun tetap memenuhi aksioma norm. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan keberadaan dan sifat-sifat product-norm pada ruang linear, termasuk sifat linearitas, homogenitas, ketaksamaan segitiga, dan kelengkapan ruang (completeness). Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa jika setiap komponen ruang produk merupakan ruang Banach, maka ruang produk tersebut juga merupakan ruang Banach terhadap *product-norm*.

ABSTRACT

Maurobi, Ivan. 2025. **Product-Norm in Linear Spaces**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (1) Dian Maharani, S.Pd., M.Si. (2) M. Nafie Juhari, M.Si.

Keywords: Linear Space, Normed Space, Product-Norm, Banach Space, Vector Space.

This study discusses Product-Norm in Linear Space, which is an extension of the concepts of vector space and normed space. Product-norm is used to measure the “length” or “magnitude” of elements in the product of two normed vector spaces, such as $V_1 \times V_2$. Some commonly used forms of product-norm include Euclidean norm, maximum norm, and sum norm, each of which provides a different topological structure but still satisfies the norm axioms. This study aims to prove the existence and properties of product-norms in linear spaces, including linearity, homogeneity, triangle inequality, and space completeness. The results show that if each component of the product space is a Banach space, then the product space is also a Banach space with respect to the product-norm.

مستخلص البحث

ماوروبي، إيفان. (2025م). **المعيار الناتج في الفضاءات الخطية**. رسالة جامعية. برنامج قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفان: (1) ديان مها راني، الحاصلة على بكالوريوس التربية والماجستير في العلوم. (2) م. نافي جوهري، الحاصل على الماجستير في العلوم.

الكلمات المفتاحية: الفضاء الخطي، الفضاء المعياري، المعيار الناتج، فضاء بانخ، الفضاء المتجهي.

تتناول هذه الدراسة موضوع المعيار الناتج في الفضاءات الخطية، وهو تطوير لمفهوم الفضاءات المتجهية والفضاءات المعيارية. يُستخدم المعيار الناتج لقياس "طول" أو "مقدار" العناصر في حاصل ضرب فضاءين متجهيين معياريين، مثل $V_1 \times V_2$. ومن أشهر أشكال المعيار الناتج: المعيار الإقليدي، ومعيار القيم العظمى، ومعيار المجموع، حيث يمنح كلٌ منها بنية طوبولوجية مختلفة، لكنها جميعًا تفي بمسلَّمات المعيار. وتهدف هذه الدراسة إلى إثبات وجود وخصائص المعيار الناتج في الفضاء الخطي، بما في ذلك خاصية الخطية، والتجانس، ولا مساواة المثلث، وكذلك خاصية الاكتمال *(completeness)*. وتشير النتائج إلى أنه إذا كان كل مكوّن من مكوّنات الفضاء الناتج فضاء بانخ، فإن الفضاء الناتج نفسه يكون أيضًا فضاء بانخ بالنسبة للمعيار الناتج.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep dasar dalam pembentukan ruang norm berakar dari struktur fundamental dalam aljabar linear, yaitu ruang vektor. Ruang vector atau ruang linear merupakan suatu himpunan yang anggotanya disebut vektor, dengan dua operasi dasar: penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Kedua operasi ini memungkinkan manipulasi vektor secara sistematis dan matematis. Dalam pengertian formal, ruang vektor atas suatu lapangan $\mathbb{F}$ (misalnya bilangan real $\mathbb{R}$ atau kompleks $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $V \times V$ dan perkalian $\mathbb{F} \times V \to V$, yang memenuhi sejumlah aksioma seperti asosiatif, komutatif, dan keberadaan elemen identitas (Rynne & Youngson, 2008).

Setelah memahami materi terkait ruang vektor, setelah itu mempelajari materi terkait ruang hasil kali dalam dan ruang norm. Pada ruang hasil kali dalam dapat didefinisikan norm menggunakan hasil kali dalamnya. Misal X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$ maka fungsi $\|.\|: \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ disebut norm apabila memenuhi aksioma-aksioma pada ruang norm (Rynne & Youngson, 2008).

Ruang norm merupakan ruang linear yang dilengkapi dengan suatu norm $\|.\|$. Teorema pada ruang norm yang menjelaskan bahwa setiap ruang norm merupakan ruang metrik mengakibatkan semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik berlaku juga pada ruang bernorma.

Salah satu bentuk penting dari norm adalah *product norm*, yang diterapkan pada product Kartesius dari dua atau lebih ruang vektor norm. Dalam ruang product

$V_1 \times V_2$, *product norm* dapat didefinisikan dengan beberapa cara, seperti norm Euclidean $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$, norm maksimum $\|(x_1, x_2)\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$, atau norm jumlah $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|\|x_2\|$. Ketiga jenis norma ini memberikan struktur yang berbeda namun semuanya valid sebagai norm dalam ruang product (Kolmogorov & Fomin, 1970).

Ruang linear dengan *product norm* memiliki sifat-sifat penting yang berkaitan erat dengan komponen-komponen penyusunnya. Misalnya, jika V_1 dan V_2 masing-masing adalah ruang Banach (ruang vektor bernorma lengkap), maka ruang product $V_1 \times V_2$ dengan product norm tertentu juga merupakan ruang Banach. Dengan demikian, product norm tidak hanya mempertahankan struktur aljabar dari ruang vektor, tetapi juga menjaga sifat topologis seperti kelengkapan dan konvergensi, sifat-sifat product-norm pada ruang linear inilah yang akan dibahas lebih mendetail (Rudin, 1991).

Manusia adalah makhluk Allah yang paling sempurna. Predikat ini diperoleh karena manusia dianugerahi akal. Anugerah ini menjadikan manusia bisa membedakan mana yang baik dan buruk. Adanya akal ini juga menjadikan manusia untuk selalu berfikir akan ciptaan Allah yang begitu menakjubkan. Al-Qur’an juga menyeru terhadap umat manusia untuk merenung, memperhatikan dan memikirkan ciptaan Allah SWT baik langit, bumi maupun diantara keduanya. Sebagaimana disebutkan dalam Q.S Ali Imran ayat 190.

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.”(190)

“ (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): “Ya Tuhan Kami, Tiada Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.” (191) (Departemen Agama RI., 2006).

Ayat ini menjelaskan anjuran manusia untuk selalu menggunakan akalnya untuk berfikir tentang ciptaan Allah baik itu yang ada dilangit, bumi maupun keduanya. Ini menunjukkan adanya interaksi manusia dengan ciptaan Allah dan sama dengan konsep Hablum minas-nas. Interaksi ini menandakan adanya hubungan horizontal antara manusia dan ciptaan Allah.

Hubungan vertikal dan horisontal ini memiliki keterkaitan yang erat. Manusia yang berfikir tentang ciptaan Allah pasti akan merasa kagum dan senantiasa mengakui keagungan Allah. Mereka akan sadar bahwa ilmu yang mereka dapatkan sangatlah sedikit. Orang-orang yang selalu mengingat Allah tidak akan berlaku sombong. Mereka akan selalu berusaha menjadi orang yang bermanfaat baik untuk dirinya sendiri ataupun untuk sesamanya.

Pada ayat Q.S. Ali Imran 190–191 menjelaskan bahwa dalam penciptaan langit, bumi, serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda kebesaran Allah bagi orang-orang yang berakal. Manusia dianugerahi akal agar mampu merenungkan keteraturan dan keserasian ciptaan Allah, sehingga menumbuhkan kesadaran akan keagungan-Nya dan menjauhkan diri dari kesombongan.

Dalam matematika, khususnya pada konsep ruang vektor, kita mengenal suatu himpunan vektor yang tunduk pada aturan penjumlahan dan perkalian skalar. Setiap unsur dalam ruang linier saling berhubungan dalam keteraturan tertentu. Ketika kita memperluas konsep ini ke *product space* (ruang hasil kali), kita menggabungkan dua atau lebih ruang linier, lalu mendefinisikan ukuran kesatuan itu melalui product-norm. Misalnya, pasangan (x, y) dalam ruang $X \times Y$ memiliki norma gabungan:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Analogi ini dapat dipahami sebagai gambaran bagaimana dua entitas berbeda seperti langit dan bumi, atau malam dan siang membentuk satu kesatuan harmonis yang dapat diukur keteraturannya. Sama halnya dengan hubungan manusia dengan Allah (vertikal) dan manusia dengan alam atau sesama (horizontal), keduanya tidak berdiri sendiri, tetapi membentuk satu kesatuan nilai yang saling melengkapi.

Dengan demikian, ayat tersebut dapat dimaknai sejalan dengan prinsip ruang linier dan product-norm, yaitu menegaskan bahwa keberagaman unsur ciptaan Allah bukanlah sesuatu yang berdiri sendiri-sendiri, melainkan membentuk harmoni yang dapat dipahami, diukur, dan direnungi oleh akal manusia. Hal ini meneguhkan bahwa keteraturan kosmik adalah tanda kekuasaan Allah, sama seperti keteraturan matematis yang ada dalam struktur ruang linier dengan product-norm.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat product-norm pada ruang linear dan pembuktiaannya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan sifat-sifat product-norm pada ruang linear.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan adanya penelitian skripsi ini, diharapkan dapat memberi manfaat, di antaranya:

1. Bagi Penulis

Manfaat dari Penelitian ini adalah penulis mendapatkan pengetahuan terkait product-norm pada ruang linear.

2. Bagi Pembaca

   Selain itu pembaca juga memperoleh ilmu untuk menjadikan penelitian ini sebagai referensi dalam penelitian-penelitian selanjutnya, misal penelitian tentang sifat-sifat kelangkapan atau kekontinuan pada product-norm pada ruang linear.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas mengenai sifat-sifat product-norm pada ruang linear.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang vektor atau ruang linear adalah himpunan vektor yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar.
2. Ruang bernorma adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu fungsi norma, yaitu fungsi yang mengaitkan setiap vektor dengan suatu bilangan real tak negatif.
3. Ruang hasil kali dalam adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu operasi hasil kali dalam, yaitu pemetaan yang menghubungkan setiap pasangan vektor dengan sebuah bilangan skalar dan memenuhi sifat linearitas, simetri atau hermitian.
4. Product Kartesius adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b)yang dibentuk dari dua himpunan A dan B, dengan setiap a berasal dari A dan setiap b berasal dari B.

5. Product norm adalah norma yang didefinisikan pada hasil kali Kartesius dari dua atau lebih ruang bernorma, yang mengukur “ukuran” pasangan atau tupel elemen dari ruang-ruang tersebut dan memenuhi sifat-sifat dasar norma: positif definit, homogenitas, dan ketaksamaan segitiga.
6. Fungsi $f : X \to Y$ disebut fungsi terukur jika untuk setiap himpunan terukur $B \subseteq Y$ praimajunya $f^{-1}(B)$ merupakan himpunan terukur dalam X.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada bagian teori pendukung akan diberikan konsep pendukung yang meliputi beberapa definisi, lemma dan teorema yang terpaut dengan pembahasan, yaitu terkait Ruang Bernorma, *Product-Norm*, Ruang Banach, Ruang Vektor.

2.1.1 Ruang Vektor / Ruang Linear (Rynne&Youngson, 2008)

Ruang vector/ruang linear (*vector space/linear space*) atas lapangan $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu fungsi yang memetakan V x $V \rightarrow V$ dan fungsi yang memetakan $\mathbb{F}$ x $V \rightarrow V$, yang secara berturut-turut dinotasikan dengan $x + y$ dan αx, untuk setiap $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$, sedemikian hingga untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $x,y,z \in V$ berlaku:

1. $x + y = y + x$ (komutatif pada penjumlahan)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$(assosiatif pada penjumlahan)
3. Terdapat $0 \in V$ sedemikian hingga $x + 0 = x$ (eksistensi identitas pada penjumlahan)
4. Terdapat $-x \in V$ sedemikian hingga $x + (-x) = 0$ (eksistensi invers pada penjumlahan)
5. $1x = x$ (eksistensi identitas pada perkalian)
6. $\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x$ (assosiatif pada perkalian)
7. $\alpha (x + y) = \alpha x + \beta y$ (distribusi kiri perkalian skalar terhadap penjumlahan vector)
8. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta y$ (distribusi kanan perkalian vektor terhadap

penjumlahan skalar).

Jika $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ maka *V* merupakan ruang vektor riil (*real vector space*). Jika $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ maka *V* merupakan ruang vektor kompleks (*complex vector space*). Anggota dari $\mathbb{F}$ disebut skalar dan anggota dari *V* disebut vektor. Operasi $x + y$ disebut penjumlahan vektor (*vector addition*) dan operasi αx disebut perkalian scalar.

Teorema 2.1

Misalkan *V* suatu ruang vektor, merupakan suatu vektor pada *V* dan adalah suatu skalar maka berlaku:

1. $0x = 0$
2. $k0 = 0$
3. $-1(x) = -x$
4. jika $kx = 0$ maka $k = 0$ atau $= 0$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 2.1.1 diperoleh:

   $0x + 0x = (0 + 0)x$ (sifat 8)

   $= 0x$

   Berdasarkan sifat 4 terdapat $-0x \in V$. Dengan menambahkan $-0x$ pada kedua ruas di atas sehingga diperoleh:

   $0x + 0x + -0x = 0x + (-0x)$

   $0x + (0x + (-0x)) = 0x + (-0x)$(sifat 2)

   $0x + 0 = 0$ (sifat 4)

   $0x = 0$ (sifat 3)

2. Bedasarkan sifat 7 pada definisi 2.1.1 diperoleh:

   $k0 + k0 = k(0 + 0)$ (sifat 7)

= $k0$

Berdasarkan sifat 4, vektor $k0 \in V$ terdapat - $k0 \in V$. Dengan menambahkan – $k0$ pada kedua ruas di atas sehingga diperoleh:

$k0$ + $k0$ + (-$k0$) = $k0$+ (-$k0$)

$k0$ + ($k0$ + (-$k0$)) = ($k0$ + (-$k0$)) (sifat 2)

$k0$ + 0 = 0 (sifat 4)

$k0$ = 0 (sifat 3)

3. Untuk menunjukkan -1(x) = - x maka melihat pada teorema 2.1 bagian 1, yaitu 0x = 0. Vektor 0x dapat ditulis (1+(-1)) x , maka berlaku

   $0x = (1 + (-1))\ x$ (sifat invers pada penjumlahan)

   $= x$ (1+(-1)) x (sifat 8)

   Sehingga diperoleh -1(x) = - x

4. Untuk k = 0 dan $x \neq 0$ maka $kx = 0$ sedangkan untuk $k \neq 0$ dan $x = 0$ maka $kx = 0$. Dapat disimpulkan jika $kx = 0$ maka k = 0 atau $x = 0$ (Anton & Rorres, 2004).

2.1.2 Ruang Bernorma

Definisi 2.1 (Rynne & Youngson, 2001)

Sebuah ruang vektor V dikatakan sebagai ruang bernorma apabila terdapat pemetaan fungsi norm V ke bilangan riil tak negatif, ditulis $\|v\|$ untuk setiap $v \in V$ dan memenuhi aksioma berikut

(i). $\|v\| \geq 0$, untuk setiap $v \in V$

(ii). $\|v\| = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$,

(iii). $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, untuk setiap $v \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, (iv). $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, untuk setiap $u, v \in V$.

Ruang vektor yang memiliki dengan suatu norm disebut ruang bernorm (dinotasikan $\|\cdot\|$).

Contoh 2.1

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Buktikan bahwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan ditunjukkan $\|x\| \geq 0$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq 0.$$

   Jadi, aksioma 1 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

   $\Rightarrow$ Jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0$.

   Diketahui $\|x\| = 0$ artinya,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$$x = 0.$$

   $\Leftarrow$ Jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

   Diketahui $x = 0$, artinya $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,0,\dots,0)$.

   Sehingga dapat dituliskan

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = |0| + |0| + \cdots + |0| = 0.$$

   Dengan demikian, aksioma 2 terpenuhi.

1. Akan ditunjukkan $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

$$\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = |\alpha|\|x\|.$$

Jadi, aksioma 3 terpenuhi.

2. Akan ditunjukkan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_1| = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 4 terpenuhi.

Karena dari ke-4 aksioma terpenuhi, maka $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Definisi 2.2 (Konvergen pada Ruang Norma) (Christensen, 2010)

Sebuah barisan (x_n) pada ruang bernorma V konvergen ke $v \in V$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k \geq N$

$$\|v - v_k\| \leq \varepsilon$$

yang artinya

$$\|v_k - v\| \to 0 \text{ untuk } k \to \infty$$

atau bisa ditulis

$$v_k \to v \text{ untuk } k \to \infty$$

atau

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

Definisi 2.3 (Christensen, 2010)

Misalkan V merupakan ruang bernorma.

(i). Diambil sebuah titik $v_0 \in V$, sehingga bola berpusat pada v_0 dengan jari-jari $r > 0$, maka

$$B(v_0, r) := \{v \in V \,|\, \|v - v_0\| < r\}.$$

(ii). Titik $v_0 \in V,$ sedemikian sehingga persekitaran dari v_0 adalah subset dari V dan terkandung bola $B(v_0, \delta)$ untuk setiap $\delta > 0$.

Definisi 2.4 (Christensen, 2010)

Misalkan V merupakan ruang bernorma, dan W subset dari V.

(i). W terbuka jika untuk setiap $v_0 \in W$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$B(v_0, \delta) \subseteq W.$$

(ii). Komplemen dari W yaitu

$$W^c := V \backslash W.$$

(iii). W tertutup jika komplemen W terbuka.

Lemma 2.1 (Christensen, 2010)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan suatu norm dan $A \subset X$. Sedemikian sehingga pernyataan di bawah ini ekuivalen:

2.1.1 A tertutup.

2.1.2 Jika suatu barisan (x_n) di A dan $(x_n) \to x$ maka $x \in A$.

Bukti. $(\to)$ Misalkan A tertutup sehingga A^c terbuka. Lalu diambil sebuah barisan (x_n) konvergen di A dan $(x_n) \to x$. Asumsikan $x \in A^c$, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$B(x,\delta) \subseteq A^c$$

Karena $B(x,\delta)$ mengandung koleksi barisan (x_n), maka berakibat $x_n \in A^c$, ini kontradiksi dengan permisalan awal bahwa barisan (x_n) di A, maka $x \in A$.

(←) asumsikan A tidak tertutup, maka A^c tidak terbuka. Artinya mengandung $u \in A^c$ sehingga diperoleh

$$B(x,\delta) \nsubseteq A^c, \forall\delta > 0$$

Ambil $\delta = \frac{1}{n}, n = 1,2, \ldots$ maka diperoleh barisan (u_n) sedemikian sehingga $u_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ dan $u_n \in A, \forall n$. Maka dari itu diperoleh

$$\|u_n - u\| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Berdasarkan (ii) maka $u \in A^c$ suatu kontradiksi.

2.1.3 Kekonvergenan pada fungsi terukur

Definisi 2.5 (Robert G Bartle, 1996)

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur. Barisan (f_n) dikatakan konvergen hampir di mana-mana ke f jika terdapat himpunan $M \in \beta$ dengan $\mu(M) = 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in X \backslash M$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon.x)$ sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon.x)$, maka

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definisi 2.6 (Robert G Bartle, 1996)

Misalakan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur.

Barisan (f_n) di L_p, konvergen dalam L_p ke *f*, dengan $f \in L_p$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon)$, maka

$$\|f_n - f\|_p = \left\{\int |f_n - f|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Barisan (f_n) di L_p dikatakan cauchy dalam L_p, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq N(\varepsilon)$.

Definisi 2.7 (Robert G Bartle, 1996)

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur.

Barisan (f_n) dikatakan konvergen dalam ukuran ke *f*, jika

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}\right) = 0$$

Untuk setiap $\alpha > 0$.

Hubungan anatara berbagai jenis konvergen pada fungsi terukur.

Suatu barisan f_n yang konvergen hampir di mana-mana ke suatu fungsi *f* di L_p, tetapi tidak mengakibatkan konvergen dalam L_p. hal ini dapat dilihat pada contoh berikut:

Contoh:

Misalkan f_n = $n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$.

Akan ditunjukkan barisan f_n = $n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ konvergen hampir dimana-mana ke *f* =0

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Ambil $x \in X$

- Jika ≤ 0, maka $f_n(x)$ = $n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]} = 0$

  Jadi f_n konvergen ke *f* = 0
- Jika $0 < x \leq 2$

  Pilih N_0 sedemikian hingga $N_0 > \frac{2}{x}$

  Akibatnya $|f_n(x) - 0| = n\mathcal{X}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]} = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$
- Jika $x > 2$, maka $f_n(x) = 0, \forall n$

Dengan demikian f_n konvergen ke *f* = 0.

2.1.4 Ruang Banach

Definisi 2.8 (Rynne & Youngson, 2001)

Misalkan X ruang bernorma dan misalkan $\{x_k\}$ sebuah barisan di X. Untuk setiap bilangan bulat positif n, misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ menjadi jumlah sampai suku ke-n pada barisan. $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dikatakan konvergen jika terdapat $\lim_{n\to\infty} s_n$ di X dan dengan demikian diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Teorema 2.2 (Rynne & Youngson, 2001)

Misalkan X ruang bernorm dan misalkan $\{x_k\}$ sebuah barisan di X. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergen maka $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen.

Bukti. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ menjadi jumlah sampai suku ke-n pada barisan. Sebagai $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergen jumlah suku pada $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ dan membentuk sebuah barisan Cauchy sehingga terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$\sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\| < \varepsilon$ di mana $m > n >\geq N$. Oleh karena itu, menurut ketaksamaan segitiga, di mana $m > n \geq N$

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\| < \varepsilon.$$

Karena (s_n) barisan Cauchy dan konvergen maka X lengkap. Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen.

Definisi 2.9 (Barisan Cauchy) (Christensen, 2010)

Misalkan V merupakan ruang bernorma. Barisan (x_n) merupakan elemen dari V disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga diperoleh $\|v_k - v_\ell\| \leq \varepsilon$, di mana $k, \ell \geq N$.

Lemma 2.2 (Christensen, 2010)

Misalkan V merupakan ruang bernorma, dan (x_n) barisan konvergen di V. Maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Kebalikannya tidak berlaku secara umum, ada ruang bernorma di mana ada barisan Cauchy yang tidak konvergen. Tetapi yang terpenting dalam ruang bernorma adalah barisan yang konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy. Karena jika setiap barisan Cauchy yang konvergen maka barisan tersebut dikatakan lengkap. Ruang bernorma yang lengkap tersebut disebut ruang Banach.

Definisi 2.10 (Zakir, 2015).

Misalkan V adalah ruang bernorma atas lapangan $\mathbb{F}$. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

Definisi 2.11 (Christensen, 2010)

Ruang bernorm V dengan anggota setiap barisan Cauchy (x_n) di V konvergen ke setiap $v \in V$, disebut ruang Banach.

Dari definisi 2.9 Ada dua persyaratan agar dapat disebut ruang Banach:

(i). Setiap barisan Cauchy elemen di V harus konvergen;

(ii). Batas barisan Cauchy harus elemen di V.

Definisi 2.12 (Bartle & Sherbert, 2000)

Barisan (x_n) pada $\mathbb{R}$ dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ maka untuk semua $m, n \in N$ sehingga didapatkan $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Contoh 2.2

Buktikan bahwa barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Penyelesaian. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, dan terdapat bilangan asli $H = H(\varepsilon)$ sehingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka, jika $m, n \geq H$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan demikian juga $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $m, n \geq H$, maka diperoleh

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena sebarang $\varepsilon > 0$, maka barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.3 (Bartle & Sherbert, 2000)

Jika barisan bilangan real $X = (x_n)$ konvergen, maka X merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Jika $x \coloneqq \lim X$, lalu diberikan $\varepsilon > 0$ dan terdapat bilangan asli $K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ sehingga jika $n \geq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $H(\varepsilon) \coloneqq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$, maka diperoleh

$$|x_n - x| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$

$$\leq |x_n - x| + |x - x_m|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena sebarang $\varepsilon > 0$, maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Lemma 2.4

Setiap (x_n) barisan Cauchy, maka (x_n) terbatas (Kumar & Kumaresan, 2014).

Bukti. Misalkan (x_n) merupakan barisan Cauchy, untuk $\varepsilon = 1$, terdapat N sehingga $k, m \geq N$, maka diperoleh

$$|x_k - x_m| < \varepsilon = 1.$$

Jika diambil $m = N$, didapatkan

$$k \geq N, |x_k - x_N| < 1.$$

Oleh karena itu,

$$|x_k| \leq |x_k - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

Misalkan $\mathbb{C} \coloneqq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$. Maka mudah menunjukkan bahwa $|x_n| \leq \mathbb{C}$ untuk semua n.

2.1.5 Ruang Hasil kali Dalam (*inner product space*)

Definisi 2.13 (Rynne & Youngson, 2008)

Jika diketahui *V* sebagai ruang vektor riil. Hasil kali dalam pada *V* adalah fungsi $\langle .,. \rangle$: *V* x *V* → ℝ sedemikian hingga untuk semua *x,y,z* ∈ *V* dan $\alpha, \beta \in$ ℝ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle x\,, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x\,, x \rangle$ = 0 jika dan hanya jika *x* = 0
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$ = $\alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
4. $\langle x\,, y\rangle = \langle y\,, x\rangle$.

Definisi 2.14 (Rynne & Youngson, 2008)

Jika diketahui *V* sebagai ruang vektor kompleks. Hasil kali dalam pada *V* adalah fungsi $\langle .,. \rangle$: *V* x *V* → ℂ sedemikian hingga untuk semua *x,y,z* ∈ *V* dan $\alpha, \beta \in$ ℝ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle x\,, x \rangle \geq 0$ dan $\langle x\,, x \rangle \in$ ℝ
2. $\langle x\,, x \rangle$ = 0 jika dan hanya jika *x* = 0
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$ = $\alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
4. $\langle x\,, y\rangle = \langle y\,, x\rangle$.

Lemma 2.5 (Rynne & Youngson, 2008)

Misalkan *H* merupakan ruang hasil kali dalam, untuk semua $x, y, z \in H$ dan $\alpha, \beta \in$ ℂ, maka berlaku:

1. $\langle 0\,, y\rangle = \langle x\,, 0\rangle = 0$
2. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle$ = $\bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle$
3. $\langle \alpha x + \beta y, \alpha y + \beta y\rangle$ = $|\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha\beta\langle x, y\rangle$ + $\beta\alpha\langle y, x\rangle + |\beta|^2\langle y, y\rangle$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 2.14 diperoleh

   $\langle 0\,, y\rangle = \langle y + (-y), y\rangle$

$= \langle y , y\rangle + \langle(-y) , y\rangle$

$= \langle y , y\rangle - \langle y , y\rangle$

$= 0$

Dan

$\langle x , 0\rangle = \langle x, x + (-x)\rangle$

$= \langle x + (-x), x\rangle$

$= \langle x , x\rangle + \langle(-x) , x\rangle$

$= 0$

2. Berdasarkan definisi 2.14 diperoleh

$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \langle\overline{\alpha y + \beta z, x}\rangle$ (Sifat 4)

$= \bar{\alpha}\langle\overline{y, x}\rangle + \bar{\beta}\langle\overline{z, x}\rangle$ (sifat 3)

$= \bar{\alpha}\langle\overline{x, y}\rangle + \bar{\beta}\langle\overline{x, z}\rangle$ (sifat 4)

3. Berdasarkan definisi 2.14 diperoleh

$.\langle\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = \langle\alpha x, \alpha x + \beta y\rangle + \langle\beta y, \alpha x + \beta y\rangle$

$= \overline{\langle\alpha x + \beta y, \alpha x\rangle} + \overline{\langle\alpha x + \beta y, \beta y\rangle}$

$= \overline{\langle\alpha x, \alpha x\rangle} + \overline{\langle\beta y, \alpha x\rangle} + \overline{\langle\alpha x, \beta y\rangle} + \overline{\langle\beta y, \beta y\rangle}$

$= \bar{\alpha}\langle\overline{x, \alpha x}\rangle + \beta\langle\overline{y, \alpha x}\rangle + \bar{\alpha}\langle\overline{x, \beta y}\rangle + \beta\langle\overline{y, \beta y}\rangle$

$= \bar{\alpha}\langle\alpha x, x\rangle + \bar{\beta}\langle\alpha x, y\rangle + \bar{\alpha}\langle\beta y, x\rangle + \bar{\beta}\langle\beta y, y\rangle$

$= \bar{\alpha}\ \alpha\langle x, x\rangle + \bar{\beta}\alpha\langle x, y\rangle + \bar{\alpha}\ \beta\langle y, x\rangle + \bar{\beta}\beta\langle y, y\rangle$

$= |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \bar{\alpha}\ \beta\langle x, y\rangle\bar{\beta}\alpha\langle x, y\rangle + |\beta|^2\langle y, y\rangle$

Definisi 2.15 (Anton, H. dan Rorres, 2004)

Jika *H* sebuah ruang hasilkali dalam, maka norm atau panjang (lenght) sebuah vector *x* di dalam *H* dinotasikan dengan ||*x*|| dan didefinisikan dengan

$\|x\|\sqrt{\langle x, x\rangle}$.

2.1.6 Ruang Hilbert

Definisi 2.16 Misalkan H ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Pemetaan $\langle .,. \rangle : HxH \rightarrow \mathbb{C}$ yang memenuhi:

1. $\langle ku\ , v\rangle = k\langle u, v\rangle, \forall u, v, \in H; k \in \mathbb{C}$
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall u, v \in H$
3. $\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in H; \langle u, u\rangle = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$
4. $\langle u + v, m\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

disebut hasil kali dalam pada H. Ruang vektor H atas $\mathbb{C}$ yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle .,. \rangle$ disebut ruang hasil kali dalam.

Ruang hasil kali dalam H dengan hasil kali dalam $\langle .,. \rangle$ dapat didefenisikan dengan norma $||u|| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ yang dapat memenuhi beberapa sifat berikut:

1. $||u|| \geq 0, \forall u \in H; \left||u|\right| = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$
2. $||ku|| = |k|\,||u||\ \forall u \in H; k \in \mathbb{C}$

Lemma 2.6 jika u dan v adalah vektor pada sebuah ruang hasil kali dalam maka $|(u,v\ )| \leq ||u||\ ||v||$, (Ketaksamaan Cauchy Schwarz).

Bukti:

Jika $u = 0$ dan $v = 0$ maka ketaksamaan Cauchy di atas terpenuhi, jika dan $v \neq 0$, misalkan $\langle u, u\rangle = a$,$2\langle u, v\rangle = b$,$\langle v, v\rangle = c$, dan $t \in \mathbb{R}$. Dengan mengunakan aksioma-aksioma kepositifan hasil kali dalam dari ketaksamaan Cauchy di atas di mana sebarang vektor itu sendiri negatif sehingga

$$0 \leq \langle tu + v, tu + v\rangle$$

$$\leq (\langle tu + v\rangle . \langle tu + v\rangle)$$

$$\langle u, u\rangle t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \langle v, v\rangle$$

$$at^2 + bt + c$$

Ketaksamaan Cauchy di atas menunjukkan bahwa $at^2 + bt + c$ yang tidak mempunyai akar real sehingga harus menggunakan deskriminasi yang memenuhi sifat $b^2 - 4ac \leq 0$ maka

$$(2\langle u, v\rangle)^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \leq 0$$

$$4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \leq 0$$

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \leq 0$$

$$\langle u, v\rangle^2 \leq ||u||^2||v||^2$$

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Jadi **Lemma 2.6** terbukti:

Ruang hasil kali dalam H yang telah dilengkapi dengan norm ||.|| dapat juga didefenisikan sebagai d (u,v) =||u-v||, yang memenuhi beberapa sifat berikut:

1. $d(u, v) \geq 0, \forall u, v \in H; d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$
2. $d(u, v) = d(v, u), \forall u, v \in H$
3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \forall u, v \in H$

Definisi 2.17 Ruang hasil kali dalam H yang lengkap disebut juga Ruang Hilbert, yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya Konvergen.

Definisi 2.18 Barisan bilangan real $u = (u_n)$dikatakan barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0, \exists H \epsilon\ N$ sehingga untuk setiap $m, n \epsilon\ N$, dengan $m, n \geq\ N$, berlaku $|u_n - u_m| < \varepsilon$

Lemma 2.7 Jika (u_n) barisan bilangan real yang konvergen maka (u_n) barisan Cauchy.

Diketahui (u_n) barisan bilangan real yang konvergen dengan kata lain (u_n) konvergen ke u

Akan ditunjunkkan (u_n) adalah barisan Cauchy

Jika (u_n) konvergen ke u maka $\lim_{n}(u_n) = \text{u}$ atau $\forall\varepsilon > 0 \exists H \epsilon N \ni n \epsilon N$ dengan $n \geq H$

berlaku $|u_n - u| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, berarti $\forall m, n \epsilon\ N$ dengan $m, n \geq H$ berlaku:

$$|u_n - u_m| = |u_n - u + u - u_m|$$

$$\leq |u_n - u + u - u_m|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Jadi terbukti (u_n)barisan Cauchy.

Contoh 2.3

Tunjukkan bahwa $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ barisan Cauchy

Jawab:

Diketahui $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)$, akan ditunjukkan $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ barisan Cauchy.

Diberikan $\varepsilon > 0$ dengan $H = H(\varepsilon)$ terdapat $H > \frac{2}{\varepsilon}$. $\forall m, n\ \epsilon\ H$, didapat $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ yang mana berlaku $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Maka diperoleh $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Definisi 2.19 Barisan bilangan real $u = (u_n)$ dikatakan konvergen ke $u \in N$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k\ (\varepsilon)$, $k \in N$sehingga untuk setiap $n \in N$ dengan $n \geq k$ berlaku

$$|u_n - u| < \varepsilon$$

Jika $|u_n - u| < \varepsilon$, barisan (u_n) konvergen ke u atau barisan (u_n) mempunyai limit u untuk $n \to \infty$ dan dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Barisan yang mempunyai limit disebut konvergen, sebaliknya jika barisan yang tidak mempunyai limit disebut divergen.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Pada sub bab ini, akan dibahas bagaimana Al-Qur'an menjelaskan sifat-sifat manusia. Dari sekian banyak sifat manusia maka dalam subab ini akan berfokus pada rasionalisasi tindakan manusia. Dengan demikian, dalam perspektif Islam, rasionalisasi tindakan manusia mengacu pada penggunaan akal, kebebasan berkehendak dan perbuatan, serta ketaatan pada hukum syariat. Rasionalisasi tindakan manusia untuk hidup sesuai dengan pedoman agama Islam dan bertaqwa kepada Allah SWT.

Menjadi baik untuk diri sendiri itu mudah untuk seseorang, akan tetapi seseorang tidak bisa berbuat baik kepada dirinya sendiri tanpa memberi manfaat terhadap orang lain. Sejatinya Allah memerintahkan seluruh hamba-Nya untuk berbuat baik yang telah difirmankan Allah melalui surah-Nya yaitu:

Artinya: "*Maka barang siapa yang mengerjakan kebaikan seberat biji dzarrah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barang siapa mengerjakan kejahatan sebesar zarrah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya.*" (QS. Al – Zalzalah ayat 7-8). (Shihab, 2002)

Quraish Shihab (Shihab, 2002) menjelaskan ayat di atas tentang kata 'zarrah' yang ada pada ayat ini sebenarnya, untuk menggambarkan sesuatu yang sangat kecil dan paling terkecil. Dengan ayat yang digunakan Allah SWT ini, mencoba menjelaskan bagaimana perlakuan yang adil-Nya terhadap seluruh umat manusia. Di mana setiap amal, sekecil apapun, akan benar-benar mendapat pahala. Apabila kalian berbuat kebaikan dengan patuh, hal ini sebenarnya merupakan kebaikan pada dirimu sendiri, sebab pahala dari kebaikan itu menjadi milikmu. Sebaliknya, jika kamu melakukan perbuatan buruk yang merugikan, maka akibat buruk akan menjadi milikmu sebagai balasan atau tindakan burukmu yang telah diperbuat.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Definisi 2.20

Misalkan V adalah ruang vektor dan Ω merupakan himpunan bagian tak kosong dari V. Jika Ω adalah ruang vektor terhadap operasi di V, maka Ω disebut subruang dari V.

Teorema 2.3

Misalkan U adalah ruang vektor pada [0, 2] ⊆ ℝ. U ruang vektor dengan product norm $u \to ||U||$ memenuhi fungsi bernilai riil $||.||_{pn}$

$$||.||_{pn}: U \to [0, \infty)$$

sehingga untuk sembarang $u, v \in U$, α ∈ [0, 2], kondisi berikut terpenuhi:

P1. $||u||_{pn} \geq 0$, dan $||u||_{pn} = 0$, jika dan hanya jika $u = 0$

P2. $||\alpha u||_{pn} = |\alpha| ||u||_{pn}$, $\alpha \in [0, 2]$, dan $u \in U$

P 3. $||u + v||_{pn} \leq ||u||_{pn} + ||v||_{pn}$, $\forall u, v \in U$

P 4(a). $||u||_{pn}||y||_{pn} \leq ||u||_{pn} + ||u||_{pn}$ $\forall u, v \in [0, 2]$ (pertidaksamaan product-norm pertama)

P 4(b). $||u||_{pn} + ||v||_{pn} \leq ||u||_{pn}||v||_{pn}$, $\forall u, v \in [2, \infty)$ (pertidaksamaan product-norm kedua).

Teorema 2.4

Misal (U, $||.||_{pn}$) adalah suatu product-norm. Akan ditunjukkan bahwa (U, $||.||_{pn}$) ruang yang lengkap.

Teorema 2.5

Misalkan U adalah ruang vektor atas lapangan[0, 2] ⊆ ℝ. Subruang (U, $||.||_{pn}$) adalah ruang yang lengkap jika dan hanya jika U adalah himpunan tertutup.

Definisi 2.21

Misalkan U dan V adalah dua ruang linier norm. Sebuah operator $A : U \rightarrow V$ kontinu di $u_o \in U$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\alpha\delta = \delta (\varepsilon , u_o)$ seperti yang

$$\|Au - Au_{\boldsymbol{o}}\| < \varepsilon \text{ kapanpun } \|u - u_o\| < \delta$$

Definisi 2.22

A barisan (u_n) dalam ruang linier norm ($\mathbb{R}^n, ||.||$)konvergen ke suatu titik $u \in \mathbb{R}^n$, jika dan hanya jika, untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$,ada bilangan bulat N sedemikian sehingga

$$||U_n - u|| < \varepsilon.\ n > N$$

Definisi 2.23

Himpunan u = [0, 2] dalam ruang linier norm ($\mathbb{R}^n, ||.||$)

Ditutup jika dan hanya jika setiap barisan titik (u_n) ⊂ U konvergen di $\mathbb{R}^n$ mempunyai limit di U .

Definisi 2.24

Misalkan $T : U \rightarrow U$ merupakan pemetaan dari suatu yang lengkap

ruang linier norm U ke dalam dirinya sendiri. Kontinuitas Lipschitz pada T dikatakan kontraksi

jika

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \lambda||u - v||,\ \forall u, v \in U, \text{ dan } \lambda < 1$$

Teorema 2.6

Misalkan $(U_1, ||.||_{pn})$ dan $(U_2, ||.||_{pn})$ adalah dua product ruang bernorma, dan T : $U_1 \to U_2$ adalah operator linier. Maka *T* terbatasi jika dan hanya jika *T* kontinu.

Teorema 2.7

Misalkan $(U, ||.||_{pn})$ adalah ruang vektor product norm $T : U \to U$ adalah pemetaan kontraktif. Maka *T* mempunyai titik tetap tunggal *U*.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan kualitatif dengan metode kepustakaan. Metode kepustakaan dilakukan dengan mengumpulkan informasi yang berkaitan dengan topik penelitian. Hal tersebut dilakukan di antaranya dengan mengumpulkan buku, jurnal, serta artikel agar informasi yang diperoleh semakin lengkap dan relevan.

3.2 Pra Penelitian

Berikut tahapan sebelum melakukan penelitian:

1. Mengumpulkan sumber-sumber bacaan atau artikel-artikel yang relevan terkait topik yang akan dibahas sebagai acuan penelitian.
2. Menentukan rumusan masalah, tujuan, dan manfaat dari penelitian.
3. Membuat latar belakang serta memahami konsep dasar pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut tahapan pada penelitian ini:

1. Mempelajari jurnal-jurnal atau buku-buku yang menjadi rujukan dalam penelitian ini.
2. Memaparkan definisi terkait ruang vektor, ruang Banach, ruang bernorma, barisan Cauchy, kekonvergenan dan kelengkapan.
3. Menentukan serta mengkaji ayat Al-Qur’an atau hadis yang berkaitan dengan topik penelitian.
4. Membuktikan sifat-sifat product-norm pada ruang linear.

Membuktikan Product-Norm pada Ruang Linear menggunakan definisi-definisi yang telah dipaparkan pada bagian sebelumnya.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Sifat Ruang Linear Product-Norm

Sebelum membahas sifat-sifat ruang linier dengan product-norm, terlebih dahulu perlu diberikan definisi yang jelas mengenai product-norm itu sendiri.

Definisi 4.1 (Kreyszig, 1978)

Misalkan x adalah suatu ruang vektor yang memiliki dengan suatu norm (dinotasikan $\|x\|$) adalah sebuah fungsi $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kriteria berikut.

$\forall x$, $\in X$, berlaku:

(i). $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$

(ii). $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,

(iii). $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iv). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$.

Teorema 4.1

Misalkan U adalah ruang vektor atas lapangan [0, 2] $\subseteq \mathbb{R}$. Product-norm $||u||_{pn}$ adalah fungsi $||.||_{pn}: U \to [0, \infty)$

yang memenuhi kondisi-kondisi berikut.

$\forall u$, $v \in U$ dan $\alpha \in [0, 2]$, berlaku:

P1. $||u||_{pn} \geq 0$, dan $||u||_{pn} = 0$,jika dan hanya jika $u = 0$.

P2. $||\alpha u||_{pn} = |\alpha|||u||_{pn}$, $\alpha \in [0, 2]$, dan $u \in U$.

P 3. $||u + v||_{pn} \leq ||u||_{pn} + ||v||_{pn}$, $\forall u, v \in U$.

P 4(a). $||u||_{pn}||v||_{pn} \leq ||u||_{pn} + ||v||_{pn}$, $\forall u, v \in U$ dengan $||u||_{pn}, ||v||_{pn} \in [0, 2]$ (pertidaksamaan product-norm pertama).

P 4(b). $||u||_{pn} + ||v||_{pn} \leq ||u||_{pn}||v||_{pn}$, $\forall u, v \in U$ dengan $||u||_{pn}, ||v||_{pn} \in [2, \infty)$ (pertidaksamaan product-norm kedua).

$P1$. Berdasarkan sifat hasil kali dalam, karena $||u||_{pn}^2 = \langle u, u\rangle \geq 0$, maka $\left||u|\right|_{pn} \geq 0$

$\Rightarrow$ Misal $\left||u|\right|_{pn} = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $u = 0$

Perhatikan bahwa

$$||u||_{pn}^2 = \langle u, u\rangle = 0$$

Untuk $u = 0$ berdasarkan sifat hasil kali dalam.

$\Leftarrow$ Di lain sisi, misal $u = 0$, maka

$$||u||_{pn}^2 = \langle u, u\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$$

Sehingga $||u||_{pn} = 0$

Dari sini terbukti bahwa $||u||_{pn} = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

$P2$. Dapat dihasilkan dari sisi kiri

$$\begin{aligned} ||\alpha u||_{pn}^2 &= \langle \alpha u, \alpha u\rangle \\ &= |\alpha|^2\langle u, u\rangle \\ &= |\alpha|^2||u||^2 \\ &= (|\alpha|||u||)^2 \\ &= |\alpha|||u||. \end{aligned}$$

$P3$ terbukti sebagai berikut.

$$\begin{aligned} ||u + v||_{pn}^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \overline{\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + 2|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle$$

$$= ||u||_{pn}^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||_{pn}^2$$

$$\Rightarrow\ \le \left||u|\right|_{pn}^2 + 2\left||u|\right|_{pn}\left||v|\right|_{pn} + \left||v|\right|_{pn}^2$$

(ketaksamaan Cauchy-Schwarz)

$$= \left(\left||u|\right|_{pn} + \left||v|\right|_{pn}\right)^{\mathbf{2}}$$

sehingga

$$\left||u+v|\right|_{pn} \le \left||u|\right|_{pn} + \left||v|\right|_{pn}.$$

P4 (a) $||u||_{pn}||v||_{pn} \le ||u||_{pn} + ||v||_{pn}$ $\forall u$, $v \in [0, 2]$ (pertidaksamaan product-norm pertama).

$(u+v)^n \ge 0$

$$\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^n C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^n C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle +^n C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle$$

$$+^n C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^n C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle +^n C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3$$

$$+^n C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots +^n C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}} + \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} \ge 0$$

$$-^n C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}} \le \{\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^n C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^n C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle$$

$$+^n C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle +^n C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^n C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle$$

$$+^n C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3 +^n C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\}$$

$$-^{n}C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}} \leq \{\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^{n} C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^{n} C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle$$

$$+^{n} C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle +^{n} C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^{n} C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle$$

$$+^{n} C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3 +^{n} C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots +^{n}C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}$$

$$+ \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\}$$

$$-^{n}C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}\ \frac{1}{C_{\frac{n}{2}}}\ \langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}} \leq \langle u,v\rangle^{n}$$

$$\left\|- \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{2}}\right\| \leq \|\langle u,v\rangle^{n}\|$$

$$\{\|u\|\|v\|\}^{n} \leq \|\langle u,v\rangle\|^{n}$$

$$||u||_{pn}||v||_{pn} \leq ||u||_{pn} + ||v||_{pn}, \forall\, u,v \in [0,2].$$

$P4$(b) $||u||_{pn}$ + $||v||_{pn}$ ≤ $||u||_{pn}||v||_{pn}$, ∀u, v ∈ [2, ∞) (pertidaksamaan product-norm kedua).

$$(u+v)^{n} \geq 0$$

$$\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^{n} C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^{n} C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle +^{n} C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle$$

$$+^{n} C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^{n} C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle +^{n} C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3$$

$$+^{n} C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots +^{n}C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}} + \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} \geq 0$$

$$-\{\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^{n} C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^{n} C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle$$

$$+^{n} C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle +^{n} C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^{n} C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle$$

$+^n C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3 +^n C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\}$

$\leq {}^nC_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}$

$-\{\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}} +^n C_1\langle u,v\rangle\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}} +^n C_2\langle u,u\rangle^{\frac{n-2}{2}}\langle v,v\rangle$

$+^n C_3\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle\langle u,v\rangle +^n C_4\langle u,u\rangle^{\frac{n-4}{2}}\langle v,v\rangle^2 +^n C_5\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^2\langle u,v\rangle$

$+^n C_6\langle u,u\rangle^{\frac{n-6}{2}}\langle v,v\rangle^3 +^n C_7\langle u,u\rangle^{\frac{n-8}{2}}\langle v,v\rangle^3\langle u,v\rangle + \cdots +^n C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}$

$+ \cdots + \langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\}$

$\leq {}^nC_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}$

$-\langle u,v\rangle^n \leq^n C_{\frac{n}{2}}\langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}\ \frac{1}{C_{\frac{n}{2}}}\ \langle u,u\rangle^{\frac{n}{4}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{4}}$

$\|-\langle u+v\rangle^n\| \leq \left\|\langle u,u\rangle^{\frac{n}{2}}\langle v,v\rangle^{\frac{n}{2}}\right\|$

$||u||_{pn} + \|v\|_{pn}^n \leq \{||u||_{pn}||v||_{pn}\}^n$

$||u||_{pn} + ||v||_{pn} \leq ||u||_{pn}||v||_{pn}, \forall\, u,v\ \in [0,2].$

Teorema 4.2

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi terukur pada [0,2], maka

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

di mana $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Bukti:

$$(\|f\|\|g\|)^p \leq (\|f\|\|g\|)^{p-1}(\|f\|\|g\|)$$

Menerapkan pertidaksamaan product pertama ke sisi kanan dari persamaan di atas menghasilkan.

$$(\|f\|\|g\|)^p \leq (\|f\| + \|g\|)^{p-1}(\|f\| + \|g\|)$$

$$(\|f\|\|g\|)^p \leq (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\| + (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|g\| \qquad (1)$$

Dengan menggunakan integral pada persamaan (1), didapatkan

$$\int (\|f\|\|g\|)^p d\mu \leq \int \{(\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\| + (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|g\|\} d\mu$$

$$\int (\|f\|\|g\|)^p d\mu \leq \int (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\| d\mu + \int (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|g\| d\mu$$

$$\left(\int (\|f\|\|g\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} d\mu \leq \left[\int (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\| d\mu + \int (\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|g\| d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq \left[\left(\int ((\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\|)^p \, d\mu\right)\right.$$

$$\left.+ \left(\int ((\|f\| + \|g\|)^{p-1}\|f\|)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq \left[\left\{\left(\int \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int \|g\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left\{\left(\int (\|f\| + \|g\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq \left[(\|f\|_p + \|g\|_p)(\|f\|_p + \|g\|_p)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^{\frac{1}{p}}(\|f\|_p + \|g\|_p)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^{\frac{1}{p}}(\|f\|_p + \|g\|_p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|f\|_p\|g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (2)$$

Saat $p = 1$ dan $p = 2$ dalam pertidaksamaan (2), menjadi

$$\|f\|_1\|g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Dan

$$\|f\|_2\|g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

Saat, $p \to \infty$ maka pertidaksamaan (1) menjadi

$$\|f\|_\infty \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Definisi 4.2

Barisan Cauchy (u_n) dalam ruang vektor ($\mathbb{R}^n, ||.||$) konvergen ke suatu titik $u \in \mathbb{R}^n$, jika dan hanya jika, untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli N sedemikian sehingga

$$||U_n - u|| < \varepsilon.\ n > N$$

Untuk selanjutnya, misal $(U, ||.||_{pn}$) adalah subruang dari ruang ($\mathbb{R}^n, ||.||_{pn})$

Teorema 4.3

Misal $(U, ||.||_{pn})$ adalah suatu product-norm. Akan ditunjukkan bahwa $(U, ||.||_{pn}$) ruang yang lengkap.

Bukti : Ambil sembarang barisan Cauchy (u_n) dalam $(U, ||u||_{pn})$. Akan dibuktikan bahwa (u_n) konvergen. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku

$$||u_n - u||_{pn} < \varepsilon$$

Karena $\mathbb{R}^n$ bersifat lengkap, maka (u_n) konvergen ke suatu $u \in U$. Dengan demikian,

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{pn} = 0$$

Jadi (u_n) adalah barisan yang konvergen di u.

Terbukti bahwa $(U, ||u||_{pn})$ ruang yang lengkap.

Teorema 4.4

Misalkan U adalah ruang vektor atas lapangan[0, 2] ⊆ ℝ. Subruang $(U, ||.||_{pn})$ adalah ruang yang lengkap jika dan hanya jika U adalah himpunan tertutup.

Bukti : Misalkan (u_n) adalah barisan vektor di U. Karena U tertutup, maka jika (u_n) konvergen ke suatu limit u, diperoleh bahwa $u \in U$. Dengan demikian, $(U, ||.||_{pn})$ adalah ruang lengkap.

Sebaliknya, misalkan $(U, ||.||_{pn})$ lengkap. Ambil u sebagai titik akumulasi dari U. Artinya, setiap bola terbuka yang berpusat di u memuat paling sedikit satu titik dari U yang berbeda dari u. Maka, dapat dibangun barisan (u_n) di U yang konvergen ke u. Karena $(U, ||.||_{pn})$ lengkap, maka limit barisan tersebut $u \in U$. Jadi, U adalah himpunan tertutup.

Definisi 4.3 (Operator Linier dan Operator Linier Terbatas) (Reddy, 1997).

Misalkan $T : X \to Y$ operator linier, T dikatakan terbatass jika terdapat $k > 0$ sedemikian sehingga

$||T(u)||_{pn} \leq k \left||u|\right|_{pn}$; untuk setiap $u \in X$

Untuk $u \neq 0$, maka

$$k \geq \frac{||T(u)||_{pn}}{||u||_{pn}}$$

Sehingga himpunan $\left\{k : k \geq \frac{||T(u)||_{pn}}{||u||_{pn}}, u \neq 0\right\}$ terbatas di bawag dan terbatas di atas, untuk setiap anggota *u* pada *X*.

Diperoleh

$$||u||_{pn} = sup\left\{\frac{||T(u)||_{pn}}{||u||_{pn}}, u \neq 0\right\}$$

Maka

$$||T(u)||_{pn} \leq ||T||_{pn}||u||_{pn}$$

Teorema 4.5

Misalkan $(U_1, ||.||_{pn})$ dan $(U_2, ||.||_{pn})$ adalah dua product ruang bernorma, dan *T* : $U_1 \rightarrow U_2$ adalah operator linier, maka *T* terbatas jika dan hanya jika *T* kontinu.

Bukti :

Misalkan *T* adalah operator linier berbatas. Maka terdapat konstanta *M* sehingga

$$||T(u)||_{pn2} \leq M\ ||x||_{pn1}, \forall u \in U_1$$

Misalkan (u_n) adalah barisan pada U_1 sedemikian rupa sehingga

$$\lim_{n\to\infty} ||\ (u_n) - u||_{pn1} = 0$$

Jadi,

$$||T(u_n)\ - T(u)||_{pn2} \leq ||T(u_n - u)||_{pn2}$$

$$||T(u_n)\ - T(u)||_{pn2} \leq M||u_n - u||_{pn1}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||T(u_n)\ - T(u)||_{pn2} \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n)\ - \lim_{n\to\infty} T(u) \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n)\ - T(u) \leq 0$$

$$T(\lim_{n\to\infty} u_n) \to T(u)$$

Jadi T kontinu di U_1.

Sebaliknya, misalkan T adalah operator linier kontinu. Maka T kontinu di 0. Jadi, untuk setiap $\delta > 0$, $\|u - 0\|_{pn_1} = \|u\|_{pn_1} < \delta \to \|T - T0\|_{pn_2} \le \varepsilon$, sehingga

$$\|T(u)\|_{pn_2} \le \varepsilon \qquad (2)$$

Misalkan $u_o \neq 0$, adalah sembarang elemen di U_1 di dan $u = \alpha u_o$, di mana $\alpha = \frac{\delta}{\|u_o\|_{pn1}}$ untuk suatu $\delta > 0$. Sehingga,

$$||Tu||_{pn2} = ||T(\alpha u_o)||_{pn2}$$

$$||Tu||_{pn2} = |\alpha|||Tu_o||_{pn2}, \ \forall u_o \in U_1 \qquad (3)$$

Dari pertidaksamaan (2) dan (3), dapat diperoleh

$$|\alpha|||T(u_o)||_{pn2} \le \varepsilon$$

$$||T(u_o)||_{pn2} \le \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

$$||T(u_o)||_{pn2} \le \frac{\varepsilon}{|\delta|}||u_o||_{pn2}$$

Dengan demikian T adalah operator dibatas.

Definisi 4.4 (Pemetaan Kontraktif) (Kreyszig, 1978)

Misalkan $(U, ||.||_{pn})$ adalah ruang bernorma. Pemetaan $T : U \to U$ dikatakan pemetaan kontraktif pada X jika ada konstanta $k \in \mathbb{R}$ dengan $0 < k < 1$, berlaku $\|T_x - T_y\| \le k$, $\|x - y\|$) untuk setiap $x, y \in X$.

Teorema 4.6

Misalkan $(U, ||.||_{pn})$ adalah ruang vektor product norm $T : U \to U$ adalah pemetaan kontraktif. Maka *T* mempunyai titik tetap tunggal *U*

Bukti:

Ambil $u_o \in U_1$. Misal (u_n) adalah barisan Cauchy di $(U, ||.||_{pn})$.

$$u_n = T(u_n)$$

$$u_n = T_n(u_o), \qquad \forall n \in N.$$

Karena $(U, ||.||_{pn})$ lengkap berdasarkan teorema 4.3, dapat maka $u \in U$ sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty}(u_n) = u$$

Karena *T* adalah pemetaan kontraktif, maka *T* kontinu. Dengan demikian,

$$\lim_{n\to\infty} T(u_n) = Tu$$

Dapat diperoleh

$$T(u_n) = \lim_{n\to\infty} T(u_n)$$

$$T(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}$$

$$T(u_n) = u.$$

Oleh karena itu, *u* adalah titik tetap dari pemetaan T .

Selain itu, dapat menunjukkan bahwa titik tetap itu tunggal di $(U, ||.||_{pn})$. Misal $u_1, u_2 \in U$ adalah titik tetap T , maka

$$\left||T(u_1) - T(u_2)\right||_{pn} = ||u_1 - u_2||_{pn}. \qquad (2)$$

Lebih jauh lagi,

$$\left|\left|T(u_1) - T(u_2)\right|\right|_{pn} \leq \lambda \left|\left|u_1 - u_2\right|\right|_{pn}, \ \forall\lambda < 1 \qquad (3)$$

Dengan mensubsitusi persamaan (2) ke dalam pertidaksamaan (3), didapatkan:

$$(1 - \lambda)\ ||u_1 - u_2||_{pn} \leq 0$$

$$||u_1 - u_2||_{pn} = 0$$

Persamaan di atas berlaku jika $u_1 = u_2$. Oleh karena itu, titik tetap *x* tunggal pada ruang linier product-norm.

4.2 Kajian Topik dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an sangat menekankan keseimbangan dan keadilan dalam segala aspek kehidupan. Ini sejalan dengan sifat simetri dan struktur seimbang dalam ruang product-norm**,** di mana setiap unsur ruang komponen memiliki kontribusi proporsional dalam pembentukan norm.

Allah SWT berfirman:

"Yang telah menciptakan tujuh langit berlais-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?" (QS. Al-Mulk: 3)

Ini mencerminkan prinsip keseimbangan dalam semua sisi kehidupan manusia, sebagaimana norm dalam ruang product menggabungkan dua (atau lebih) norma dari ruang vektor komponen secara berimbang. Setiap elemen (vektor) dalam ruang normed harus dihitung secara tepat untuk menentukan normanya. Ini mencerminkan nilai akuntabilitas amal per individu, sebagaimana Allah tegaskan dalam ayat:

"Barang siapa mengerjakan kebaikan seberat zarrah, niscaya dia akan melihatnya. Dan barang siapa mengerjakan kejahatan seberat zarrah, niscaya dia

akanmelihatnyapula."
(QS. Az-Zalzalah: 7–8)

Dalam matematika, khususnya dalam product-norm, bahkan perubahan kecil dalam salah satu komponen vektor akan berpengaruh terhadap norm akhir. Ini identik dengan prinsip hisab dalam Islam: amal sekecil apa pun tidak akan diabaikan. Shihab, Q. (2002)**.**

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembuktian yang dilakukan dalam penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa product-norm merupakan norma yang dapat diterapkan pada ruang product dari dua atau lebih ruang vektor bernorma. Norm ini memiliki beberapa bentuk umum, seperti norm Euclidean, norm maksimum, dan norm jumlah, yang masing-masing memenuhi aksioma-aksioma norm seperti positif definit, homogenitas, dan ketaksamaan segitiga. Penelitian ini juga menunjukkan bahwa ruang product yang dibentuk dengan product-norm tetap mempertahankan struktur ruang vektor, bahkan dalam banyak kasus menjadi ruang Banach, yakni ruang bernorma yang lengkap terhadap konvergensi barisan Cauchy.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian tentang *product-norm* pada ruang linear, disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk memperluas kajian ke ruang-ruang yang lebih kompleks seperti ruang Hilbert atau ruang hasil kali dalam kompleks. Hal ini bertujuan agar pemahaman terhadap perilaku *product-norm* dalam berbagai struktur ruang matematis dapat lebih komprehensif, termasuk dalam melihat hubungan antara norma dan konvergensi dalam ruang topologis yang lebih luas. Selain itu, pendekatan numerik atau komputasional juga dapat dilakukan untuk mengilustrasikan bagaimana variasi bentuk norma dalam ruang product-norm (seperti norma maksimum dan norma Euclidean) mempengaruhi analisis spesial maupun performa konvergensi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdursyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Anton, H. (1997). *AljabarLinearElementer Edisi Kelima*. Jakarta:Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. . (2004). *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Delapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Barnes. B., Ansah. E. D. J. O., Amponsah. S. K., & Sebil. C., (2018). The Proofs Of Product Inequalities In A Generalized Vector Space. *European Journal Of Pure And Applied Mathematics*. Vol. 11, No. 3, 740-750.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis* (B. Holland, S. Prendergast, K. Santor, N. Horlacher, & G. Aiello (eds.); 3rd Editio). John Wiley & Sons, Inc.

Christensen. (2010). *Function, Spaces, and Expansions Mathematics Tools in Physics and Engineering*. Springer Science+Business Media LLC.

Kreyszig. E., (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. Simultaneously In Canada.

Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1970). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications.

Kumar, A., & Kumaresan, S. (2014). *A Basic Course in Real Analysis* (1st ed.). CRC Press.

Robert G Bartle, 1996, “*The Elements Of Integration*”, John Wiley & Sons, Inc New York. London, Sidney.

Rudin, W. (1991). *Functional Analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill.

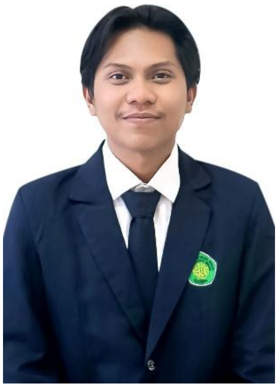
Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2001). Linear Function Analysis. In *Springer Undergraduate Mathematics Series*. Springer.

Rynne, B. P. dan Youngson, M. A. . (2008). *Linear Functional Analysis*. New York: Springgr-Verlag.

Shihab, Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta;Erlangga

Zakir, M. (2015). Sifat-sifat Ruang Banach Hom(U,V). *Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi*, *11*(2), 115–121.

RIWAYAT HIDUP



Ivan Maurobi lahir di Probolinggo pada tanggal 8 Mei 2000, memiliki nama panggilan Ivan. Tempat tinggalnya berada di RT 004 RW 002 Dusun Kramat Desa Pandean Kecamatan Paiton Kabupaten Probolinggo. Anak Pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Ahmadi dan Ibu Iramaya Supaputra. Masa pendidikan penulis di mulai dari TK Petunjungan 1, Probolinggo dari tahun 2006 hingga 2007. Kemudian dilanjutkan pendidikan dasar di SDN Petunjungan 1, Probolinggo dan lulus pada tahun 2013. Penulis melanjutkan pendidikan jenjang menengah pertama di MTS Pandean, Probolinggo lulus pada tahun 2016, Kemudian menempuh pendidikan jenjang menengah atas di MAN 1 Probolinggo Negeri, Probolinggo dan lulus pada tahun 2019. Pada tahun 2019 penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang tepatnya di program studi Matematika.

Laki-laki asal Probolinggo ini aktif mengikuti organisasi. Ia mengikuti organisasi di antaranya (pergerakan mahasiswa islam indonesia) Rayon *pencerahan* Galileo dan menjabat sebagai Co Pengembangan pada tahun 2020 hingga 2022. PMII Komisariat Sunan Ampel Malang dan menjabat sebagai anggota bidang 2 Gerakan pada tahun 2023 hingga 2024.Pengurus Cabang PMII Kota Malang dan menjabat sebagai anggota bidang 2 Gerakan (publikasi dan politik) pada tahun 2024 hingga 2025.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Ivan Maurobi
NIM	: 19610027
Fakultas / Program Studi	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Product-Norm Pada Ruang Linear
Pembimbing I	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si.
Pembimbing II	: M. Nafie Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	21 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	8 Mei 2024	Revisi Bab I, II, dan III	2.
3.	22 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	28 Mei 2024	Revisi Kajian Agama	4.
5.	21 Juni 2024	Revisi Bab III Flowchart	5.
6.	9 September 2024	ACC Seminar Proposal	6.
7.	21 Mei 2025	Revisi Bab IV dan V	7.
8.	28 Mei 2025	Konsultasi Bab IV Kajian Integrasi Al-Qur'an	8.
9.	23 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	26 Mei 2025	Revisi Bab IV dan V	10.
11.	17 September 2025	Revisi Kajian Integrasi Al-Qur'an	11.
12.	29 Agustus 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	19 September	Revisi Bab IV dan V	13.
14.	2 Oktober 2025	ACC Seminar Hasil	14.
15.	10 Oktober 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	15.

16.	15 Oktober 2025	ACC Matriks Seminar Hasil	16.
17.	20 Oktober 2025	ACC Ujian Skripsi	17.
18.	03 November 2025	ACC Keseluruhan	18.

Malang, 03 November 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012