PARTISI DAN GAUGE UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREMA TERKAIT FUNGSI KONTINU

SKRIPSI

OLEH:
ARI ANGGORO PUTRO
NIM. 18610061

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

PARTISI DAN GAUGE UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREMA TERKAIT FUNGSI KONTINU

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ari Anggoro Putro
NIM. 18610061

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

PARTISI DAN GAUGE UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREMA TERKAIT FUNGSI KONTINU

SKRIPSI

Oleh
Ari Anggoro Putro
NIM. 18610061

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 19 November 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M.Si	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19940217 202012 2 001	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PARTISI DAN GAUGE UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREMA TERKAIT FUNGSI KONTINU

SKRIPSI

Oleh
Ari Anggoro Putro
NIM. 18610061

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 27 Mei 2025

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc,	....
Anggota Penguji 1	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ari Anggoro Putro

NIM : 18610061

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Partisi dan Gauge untuk Membuktikan Teorema Terkait Fungsi Kontinu

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Juni 2025

Yang membuat pernyataan,

Ari Anggoro Putro

NIM. 18610061

HALAMAN MOTO

"Being your self."

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim. Dengan mengucap segala puji dan syukur kepada Allah Swt. penulis persembahkan skripsi ini untuk bapak saya Suyadi, ibu saya Wiwik Pujiarti serta istri dan anak saya tercinta Robiatul Adawiyah dan Rangga Ravendra Abyakta yang telah tanpa pamrih melahirkan dan membesarkan saya, memberi dukungan dan dorongan baik moral maupun moril, serta menjadi teladan yang selalu memotivasi penulis untuk senantiasa kuat dan tabah melalui perjalanan panjang dalam menyelesaikan penelitian ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirobbilalamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt yang senantiasa melimpahkan rahmat serta karunia kepada hamba-Nya ini rezeki yang berlimpah sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "Sifat-Sifat Fungsi Kontinu pada Suatu Interval" ini. Sholawat serta salam tak lupa penulis haturkan kepada junjungan umat Islam yaitu nabi besar Muhammad Saw yang telah membawa dan menjadika Islam sebagai petunjuk untuk seluruh umat manusia.

Penulis dengan segala kekurangannya sebagai manusia biasa yang jauh dari kesempurnaan menjadikan penyusunan tugas akhir ini melalui banyak kesulitan serta hambatan. Hingga akhirnya dapat menyelesaikan tugas akhir ini, penulis mendapatkan dan menerima banyak bantuan, arahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Untuk membalas kebaikan yang berlimpah tersebut, penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta selaku ketua penguji seminar hasil yang telah memberikan motivasi untuk terus melangkah maju.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah senantiasa sabar dalam memberikan arahan, ilmu, serta motivasi.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan ilmu, arahan, serta motivasi berfikir bagi penulis.

6. Seluruh civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya seluruh dosen yang dengan ikhlas melimpahkan ilmu serta pengalaman yang luar biasa berharga.
7. Bapak Suyadi, Ibu Wiwik Pujiarti selaku ayah dan ibu penulis yang senantiasa melantunkan doa serta memberikan motivasi berfikir bagi penulis.
8. Robiatul Adawiyah dan Rangga Ravendra Abyakta selaku istri dan anak tercinta dari penulis yang senantiasa mengirimkan doa, motivasi serta dukungan dalam berbagai bentuk demi melancarkan penulisan tugas akhir ini.
9. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018, 2019 dan 2020, khususnya mahasiswa konsorsium analisis yang telah bersama-bersama berjuang menyelesaikan studi.

Penulis berharap besar hasil dari penulisan tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis serta bagi pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 20 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Putro, Ari A. 2024. Partisi dan Gauge untuk Membuktikan Teorema Terkait Fungsi Kontinu. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Fungsi, Fungsi Kontinu, Partisi, Gauge, Keterbatasan Fungsi kontinu, Nilai Maksimum-Minimum, Letak Nilai Akar Fungsi Kontinu

Partisi pada suatu interval $\mathrm{I} \coloneqq [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ adalah koleksi $\mathcal{P} = \{\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_\mathrm{n}\}$ dari interval tertutup $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ yang tidak saling tumpang tindih. Gauge pada *I* adalah suatu fungsi positif yang terdefinisi pada I. Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan penggunaan partisi dan Gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif dengan tahapan meliputi pengumpulan data terkait fungsi kontinu yang meliputi nilai keterbatasan fungsi kontinu, nilai maksimum-minimum fungsi kontinu dan letak nilai akar, kemudian memaparkan definisi partisi dan gauge, serta membuktikan beberapa teorema terkait fungsi kontinu dengan menggunakan partisi dan gauge. Hasil penelitian ini adalah bahwa keterbatasan fungsi kontinu, nilai maksimum-minimum fungsi kontinu dan letak nilai akar fungsi kontinu dapat dibuktikan dengan partisi dan gauge.

ABSTRACT

Putro, Ari A. 2024. Partitions and Gauges to Prove Theorems Related to Continuous Functions. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Function, Continuous Function, Partition, Gauge, Limitation of Continuous Function, Maximum-Minimum Value, Location of Root Value of Continuous Function

A partition on an interval $\mathrm{I} \coloneqq [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ is a collection $\mathcal{P} = \{\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_\mathrm{n}\}$ of non-overlapping closed intervals $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. The gauge on I is a positive function defined on I. This research aims to show partition and Gauge to prove theorems related to continuous functions. The research method used includes collecting data related to continuous functions which include the limitation value of continuous functions, the maximum-minimum value of continuous functions and the location of the root value, then presenting the definition of partition and gauge, and proving several theorems related to continuous functions using partition and gauge. The result of this research is that the limitation of continuous function, the maximum-minimum value of continuous function and the location of the root value of continuous function can be proved by partition and gauge.

تجريدي

بوترو ، آري .٢٠٢٤. التقسيمات والمقاييس لإثبات النظريات المتعلقة بالدوال المتصلة.البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية مالانج. المشرف الأول: د. إيلي سوسانتي، الماجستير.المشرف الثاني: محمد نافع الجوهري ,الماجستير.

الكالمات الرئيسية: الدالة المتصلة، الدالة المتصلة، التقسيم، المقياس، حدود الدالة المتصلة، القيمة القصوى-الدنياللدالة، موقع القيمة الجذرية للدالة المتصلة

التقسيم على الفترة $\mathrm{I} := [a, b]$هو مجموعة $\mathcal{P} = \{\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_n\}$ من الفترات المغلقة غير المتداخلة $[a, b]$ يهدف هذا البحث إلى إظهار التقسيم والقياس لإثبات النظريات المتعلقة بالدوال المتصلة. وتتضمن طريقة البحث المستخدمة جمع البيانات المتعلقة بالدوال المتصلة والتي تشمل القيمة الحدية للدوال المتصلة، والقيمة العظمى والصغرى للدوال المتصلة وموقع قيمة الجذر، ثم تقديم تعريف التقسيم والمقياس، وإثبات عدة نظريات متعلقة بالدوال المتصلة باستخدام التقسيم والمقياس. نتيجة هذا البحث هي أنه يمكن إثبات حدود الدالة المتصلة، والقيمة القصوى-الدنيا للدالة المتصلة وموقع القيمة الجذرية للدالة المتصلة عن طريق التقسيم والقياس.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi merupakan sebuah konsep yang penting dalam ilmu matematika. Penerapan konsep tersebut mudah ditemui dalam suatu pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu maka konsep fungsi dapat dikatakan sebagai salah satu dasar dari matematika. Pernyataan tersebut sangat beralasan karena fungsi adalah konsep yang mendasari setiap cabang ilmu matematika seperti aljabar, analisis, statistik dan lainnya (Denbel, 2015).

Fungsi seringkali diidentikkan dengan hubungan atau relasi. Namun, keduanya tidaklah sama. Secara umum yang dimaksud dengan relasi adalah hubungan antara dua himpunan di mana setiap dari himpunan pertama terkait dengan satu atau lebih elemen dari himpunan kedua. Sedangkan fungsi sering dikatakan sebagai hubungan atau relasi istimewa. Kata ini kerap muncul karena fungsi didefinisikan sebagai aturan yang menghubungkan setiap elemen domain dengan tepat satu anggota pada kodomain (Denbel, 2015). Fungsi merupakan suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal (domain) yang dinotasikan dengan $D(f)$ dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang kemudian disebut daerah hasil (range) (Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S., 2003).

Salah satu topik yang dibahas dalam konsep fungsi yaitu fungsi pada himpunan bilangan riil. Fungsi pada himpunan bilangan riil itu sendiri dikaji lebih mendalam sifat-sifatnya. Salah satu sifatnya yaitu adalah kekontinuan. Definisi kekontinuan fungsi yaitu jika $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in A. f$ dikatakan kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika x adalah sebarang titik di A memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Jika fungsi f tidak kontinu di c, dikatakan bahwa fungsi f diskontinu di c (Cahya dan Muksar, 2020).

Sifat urutan dari bilangan real menimbulkan suatu subhimpunan disebut inteval (Subhan, 2017). Suatu interval merupakan himpunan bilangan-bilangan riil yang ditunjukkan dan dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan (Moore dan Kearfott, 2009). Ada beberapa macam interval dalam himpunan bilangan riil di antaranya adalah interval terbuka, tertutup dan setengah buka tutup.

Terkait dari sifat-sifat fungsi ternyata apabila suatu fungsi yang domainnya dibatasi pada sebuah interval tertentu maka sifat-sifatnya akan berbeda dengan suatu fungsi yang domainnya tidak dibatasi pada sebuah interval tertentu. Suatu fungsi dapat dikatakan terbatas jika memiliki batas atas dan batas bawah (pada domainnya). Menurut proposisi f terbatas pada A jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq K,\ x \in A$ (Gunawan, 2017). Adapun jika fungsi-fungsi kontinu dikombinasikan dengan fungsi-fungsi kontinu lainnya adakala akan tetap menjadi fungsi kontinu tergantung dari fungsi yang dikombinasikan. Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g masing-masing fungsi dari A ke $\mathbb{R}$ serta $\alpha \in \mathbb{R}$. Jika $c \in A, f$ dan g kontinu di c maka $f + g, f - g, fg$, dan αf kontinu di c (Cahya dan Muksar, 2020). Suatu fungsi kontinu memiliki beberapa keterkaitan dengan partisi dan gauge. Beberapa teorema pada fungsi kontinu dapat dibuktikan dengan konsep partisi dan gauge (bartle dan Sherbert, 2010).

Fungsi kontinu memegang banyak peran penting dalam memahami dan menganalisis berbagai fenomena dalam dunia nyata. Begitupun dalam Islam, kita sebagai muslim ditekankan untuk mengenal serta mencontoh sifat dan perilaku Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan yang utama dalam menjalani hidup. Allah berfirman pada surat Al-Imran ayat 31:

قُلۡ إِن كُنتُمۡ تُحِبُّونَ ٱللَّهَ فَٱتَّبِعُونِي يُحۡبِبۡكُمُ ٱللَّهُ وَيَغۡفِرۡ لَكُمۡ ذُنُوبَكُمۡۚ وَٱللَّهُ غَفُورٞ رَّحِيمٞ

Artinya: *"Katakanlah (Muhammad), 'jika kamu mencintai Allah, ikutilah aku, niscaya Allah mencintaimu dan mengampuni dosa-dosamu'. Allah Maha Pngampun, Maha Penyayang"* (Fadlan, 2020).

Ayat tersebut membicarakan syarat memperoleh cinta Allah. Dalam Tafsir Al Misbah ditafsirkan bahwa jika seseorang merasa mencintai Allah, hendaknya mengikuti Nabi Muhammad dengan melaksanakan apa yang diperintahkan Allah melalui Nabi, yaitu beriman dan bertakwa kepada-Nya. Seseorang tersebut dapat dikatakan memasuki pintu gerbang meraih cinta Allah jika syarat tersebut dilaksanakan. Ketaatan hendaknya dipelihara serta ditingkatkan dengan melaksanakan kewajiban serta sunnah-sunnah Nabi. Sebagai balasannya, Allah akan mencintai dan mengampuni dosa-dosa mereka. Tafsir ayat tersebut menunjukkan bahwa untuk mendapat cinta Allah mengharuskan kita untuk meneladani beliau dalam seluruh aspek kehidupan dimulai dari mengikuti amalan wajib hingga sunnah termasuk mengikuti cara beliau dalam berperilaku sehari-hari.

Untuk menjadikan Nabi Muhammad SAW teladan dalam seluruh aspek kehidupan, penting bagi kita untuk mengenali sifat-sifat mulia nabi Muhammad SAW yang banyak disebutkan pada berbagai sumber baik Al-Quran maupun hadits. Sejalan dengan pernyataan tersebut, untuk mengoptimalkan pengaplikasian pada berbagai bidang serta melakukan pengembangan ataupun penelitian lebih lanjut mengenai fungsi kontinu, penting untuk memahami serta membuktikan teorema terkait fungsi kontinu dengan partisi dan gauge.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjabaran pada latar belakang dalam pembahasan ini, maka dapat disimpulkan bahwa rumusan masalah pada penelitian ini adalah “Bagaimanakah penggunaan partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu?”

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penelitian ini berdasarkan rumusan masalah yaitu untuk mengetahui penggunaan partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini, penulis mengharapkan penelitian ini dapat menjadi bahan bacaan hingga referensi penelitian selanjutnya berkaitan dengan penggunaan partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini terdapat pada pemilihan domain fungsi yang akan dibahas lebih lanjut yaitu himpunan bilangan riil pada suatu interval. Peneliti hanya akan membahas fungsi kontinu suatu interval pada himpunan bilangan riil, sehingga peneliti tidak akan membahas fungsi lain maupun himpunan bilangan lainnya.

1.6 Definisi Istilah

1. Fungsi

   Fungsi adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal (Domain) yang dinotasikan dengan $D(f)$ dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang kemudian disebut daerah hasil (Range) (Purcell, 2023).

2. Fungsi Kontinu

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x \in A$ dengan $\mid x - c \mid < \delta$, berlaku bahwa $\mid f(x) - f(c) \mid < \delta$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

3. Interval

Suatu interval merupakan himpunan bilangan-bilangan riil yang ditunjukkan dan dinyatakan dalam suatu pertidaksamaan (Moore dan Kearfott, 2009).

Interval terbuka yaitu misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \leq b$ maka interval terbuka dengan titik ujung a dan b dapat didefinisikan sebagai:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x < b\}$$

Interval tertutup yaitu misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \leq b$ maka interval tertutup dengan titik ujung a dan b dapat didefinisikan sebagai:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x \, b\}$$

Interval setengah buka tutup yaitu misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \leq b$ maka interval setengah buka tutup dengan titik ujung a dan b dapat didefinisikan sebagai:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | \, a < x \leq b\}$$

atau

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | \, a \leq x < b\}$ (Subhan, 2017).

4. Partisi

Partisi pada suatu interval $\mathrm{I} \coloneqq [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ adalah koleksi $\mathcal{P} = \{\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_\mathrm{n}\}$ dari interval tertutup $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ yang tidak saling tumpang tindih. Interval-interval tersebut dapat dinotasikan sebagai $\mathrm{I}_\mathrm{i} \coloneqq [\mathrm{x}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{x}_\mathrm{i}]$ dimana

$a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

5. Gauge

   Gauge pada I adalah suatu fungsi positif yang terdefinisi pada I. Jika δ adalah gauge pada I, maka partisi $\dot{\mathcal{P}}$ disebut $\delta - \mathrm{fine}$ jika :

   $t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ *untuk* $i = 1, \dots, n$(Bartle dan Sherbert, 2010).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Himpunan Bilangan Riil

Konsep himpunan merupakan konsep yang paling mendasar dalam mempelajari berbagai cabang ilmu matematika, salah satunya adalah analisis. Pada subbab himpunan bilangan riil didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1(Suryawan, 2023)

Bilangan riil merupakan semua bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk desimal.

Bilangan riil dapat dipresentasikan sebagai titik pada sebuah garis yang disebut garis bilangan riil. Himpunan bilangan riil kemudian dinotasikan sebagai $\mathbb{R}$. Himpunan semua bilangan riil memiliki beberapa himpunan bagian yaitu bilangan asli yang dinotasikan dengan $\mathbb{N}$ yaitu $\{1, 2, 3, \dots, \dots\}$, himpunan bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$ yaitu $\{\dots, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \dots\}$ dan himpunan semua bilangan rasional yang dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$. Bilangan rasional dibentuk oleh pembagian bilangan bulat $\frac{p}{q}$ dengan $q \neq 0.$ sebagai contoh $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}, \frac{0}{4}, -\frac{2}{3}$.

Perhatikan bahwa setiap bilangan bulat juga merupakan bilangan rasional karena setiap bilangan bulat p dapat ditulis sebagai pembagian $\frac{p}{1}$.

2.1.2 Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak merupakan suatu konsep yang esensial dalam analisis. Pada subbab ini akan didefinisikan nilai mutlak sebagai berikut:

Definisi 2.2(Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $a \in \mathbb{R}$. *Nilai mutlak dari* a *dinyatakan oleh* $|a|$, *didefinisikan sebagai berikut:*

$$|a| \begin{cases} a, jika\ a > 0 \\ 0, jika\ a = 0 \\ -a, jika\ a < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.1 (Bartle & Sherbert, 2010)

(a) $|ab| = |a||b|$ *untuk setiap* $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $|a|^2 = a^2$, *untuk setiap* $a \in \mathbb{R}$.

(c) Jika $c \geq 0$, *maka* $|a| \leq c$ *jika dan hanya jika* $-c \leq a \leq c$, *untuk setiap* $a, c \in \mathbb{R}$.

(d) $-|a| \leq a \leq |a|$, *untuk setiap* $a \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Fungsi

Sebelum membahas tentang fungsi kontinu, terlebih dahulu akan dibahas tentang definisi fungsi sebagai berikut:

Definisi 2.3 (purcell, dkk., 2003)

Suatu fungsi f *adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek* x *dalam satu himpunan yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal* $f(x)$ *dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi.*

Bilangan x dan y adalah peubah. Nilai y bergantung pada pemilihan nilai x, sehingga x disebut peubah bebas dan y disebut peubah tak bebas.

2.1.4 Barisan Terbatas

Salah satu konsep dasar dari kalkulus adalah keterbatasan. Sebelum menunjukkan sifat-sifat dari fungsi kontinu, salah satu konsep terkait yang perlu diperhatikan yaitu keterbatasan dari suatu barisan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu barisan $X = (x_n)$ *dari bilangan riil dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan riil* $M > 0$ *sedemikian hingga* $|x_n| \leq M$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.1 Akan ditunjukkan bahwa $\left(\frac{1}{x}\right)$ terbatas pada (a, ∞) untuk sembarang $a > 0$.

Perhatikan bahwa jika $x > a$ maka $f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, dan $\frac{1}{a}$ merupakan batas atas bagi f pada (a, ∞). Jika $0 < b < \frac{1}{a}$, maka untuk x yang memenuhi $a < x < \frac{1}{b}$ didapat $f(x) = \frac{1}{x} > b$. Hal ini menunjukkan bahwa b bukan merupakan batas atas f pada (a, ∞) sehingga $\frac{1}{a}$ merupakan batas atas terkecil bagi f pada (a, ∞).

Definisi 2.5(Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu barisan $X = (x_n)$ *dari himpunan bilangan riil dikatakan konvergen pada* $x \in \mathbb{R}$ *atau* x *disebut sebagai limit dari* (x_n) *jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sedemikian hingga* $n \geq K(\varepsilon)$, *memenuhi* $|x_n - x| < \varepsilon$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Suatu barisan yang memiliki limit dikatakan sebagai barisan yang konvergen, sedangkan barisan yang tidak memiliki limit disebut barisan divergen.

Contoh 2.2 Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ merupakan barisan yang konvergen.

Perhatikan bahwa $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Dipilih $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Maka jika $n \geq K$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Sehingga jika $n \geq K$, berlaku

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ konvergen dan $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$.

Teorema 2.2 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n)$, dengan n adalah barisan bilangan riil. Jika (x_n) adalah barisan yang konvergen maka (x_n) terbatas.

Bukti. Misalkan $\lim(x_n) = x$ terdapat suatu bilangan asli $K = K_{(1)}$ sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Menggunakan ketaksamaan segitiga didapat

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Jika dipilih $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$, maka $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.3 Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ merupakan barisan konvergen. Akan ditunjukkan barisan tersebut terbatas.

Dari **contoh 2.2** diketahui barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ konvergen dengan nilai $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$.

Perhatikan bahwa terdapat bilangan riil $M = 1 > 0$, sedemikian hingga

$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < 1$. Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ terbatas dengan nilai batas atas $M = 1$.

Teorema 2.3 Bolzano-Weirstrass (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n)$,dengan n adalah barisan bilangan riil yang terbatas.

Barisan (x_n) memiliki suatu sub barisan yang konvergen.

Bukti. Perhatikan bahwa himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas dan berada pada interval $I_1 = [a, b]$. Ambil $n_1 = 1$. Bagi interval I_1 menjadi dua sub interval yang sama $I_1^{\prime}$ dan $I_1^{\prime\prime}$, serta bagi himpunan indeks $\{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$ menjadi dua bagian, yaitu

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1^{\prime}\}$ dan $B_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1^{\prime\prime}\}$

Jika A_1 tak hingga, ambil $I_2 = I_1{}'$ dan misalkan n_2 bilangan asli terkecil pada A_1. Jika A_1 himpunan berhingga maka B_1 tak hingga sehingga apabila diambil $I_2 = I_1''$ dan misalkan n_2 bilangan terkecil pada B_1.

Dengan cara yang sama bagi interval I_2 menjadi dua sub interval yang sama I_2' dan I_2'', serta bagi himpunan indeks $\{n \in \mathbb{N}: n > n_2\}$ menjadi dua bagian, yaitu $A_1 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2,\ x_n \in I_2{}'\}$ dan $B_2 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2, x_n \in I_2{}''\}$.

Jika A_2 tak hingga, ambil $I_3 = I_2{}'$ dan misalkan n_3 bilangan asli terkecil pada A_2. Jika A_2 himpunan berhingga maka B_2 tak hingga sehingga apabila diambil $I_3 = I_2''$ dan misalkan n_3 bilangan terkecil pada B_2.

Dengan cara yang sama selanjutnya didapatkan barisan interval bersarang $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ dan sub barisan (x_{n_k}) pada X sedemikian hingga $x_{n_k} \in I_k$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Karena panjang $I_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, berdasarkan teorema 2.14 terdapat suatu titik tunggal $\xi \in I_k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Lebih jauh karena x_{n_k} dan ξ keduanya berada pada I_k, didapat

$$|x_{n_k} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Sehingga terbukti sub barisan (x_{n_k}) konvergen ke ξ.

Teorema 2.4 Apit (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n), Y = (y_n)$ *dan* $Z = (z_n)$ *masing-masing barisan bilangan riil dan* $x_n \leq y_n \leq Z_n$, *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Jika $\lim(x_n) = \lim(z_n)$, *maka* $Y = (y_n)$ *konvergen dan* $\lim(x_n) = \lim\,(Y_n) = \lim(Z_n)$.

Teorema 2.5 interval bersarang (Bartle & Sherbert, 2010)

Barisan interval I_n*, untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *disebut interval bersarang jika dan hanya jika memenuhi syarat berikut:*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

2.1.5 Limit Fungsi

Limit dari suatu fungsi secara intuisi merupakan suatu nilai yang didekati fungsi saat peubah bebasnya mendekati suatu nilai atau tak hingga. Mengatakan bahwa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ berarti bahwa selisih antara $f(x)$ dan L dapat dibuat sekecil mungkin dengan mensyaratkan bahwa x cukup dekat tetapi tidak sama dengan x_0. Purcell, dkk (2003) mendefinisikan limit secara formal sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Purcell, dkk., 2003)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *berarti bahwa untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat* $\delta > 0$ *yang berpadanan sedemikian hingga* $|f(x) - L| < \delta$ *dengan syarat* $0 < |x - x_0| < \delta$ *memenuhi* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Contoh 2.3 $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$

Misal diberikan $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, maka $0 < |x - 3| < \delta$ mengakibatkan $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = \varepsilon$. Karena memenuhi definisi, terbukti bahwa $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$.

2.1.6 Fungsi Terbatas

Pada subbab ini akan didefinisikan secara sederhana tentang fungsi terbatas sebagai berikut:

Definisi 2.7 (Parzynsky & Zipse, 1982)

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Suatu fungsi $f: A \to B$ dikatakan terbatas apabila terdapat suatu bilangan riil $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, untuk setiap $x \in A$.

Definisi 2.8 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas di A jika terdapat suatu konstanta $M > 0$ sdemikian sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$.

Teorema 2.6 (Parzynsky & Zipse, 1982)

Diberikan himpunan tak kosong A, B, C di mana $f: A \to B$ dan $g: A \to C$. Jika f dan g masing-masing terbatas pada A dan k merupakan sembarang bilangan riil maka fungsi $f + g, kf$ dan $f \cdot g$ terbatas pada A.

Bukti. Misalkan $|f(x)| \leq M_1$ dan $|g(x)| \leq M_2$ untuk setiap $x \in A$. Maka didapat

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$
$$|(kf)(x)| = |k \cdot f(x)| \leq |k| \cdot |f(x)| \leq |k| M_1$$
$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M_1 M_2$$

untuk setiap $x \in A$. Misalkan $M_1 + M_2 = M_3, |k|M_1 = M_4$ dan $M_1 M_2 = M_5$, maka terbukti bahwa $f + g, kf$ dan $f \cdot g$ terbatas pada A.

2.1.7 Fungsi Kontinu

Secara formal fungsi kontinu dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, dan $c \in A$. Maka f dikatakan kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika x adalah sebarang titik di A memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definisi 2.10 (Bartle & Sherbert, 2010)

Diberikan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, *dengan* $x_0 \in I$. *Fungsi* f *dikatakan kontinu pada* x_0 *jika dan hanya jika ketiga syarat berikut dipenuhi:*

(i) $f(x_0)$ ada

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ada

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Contoh 2.5 Perhatikan bahwa misalkan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, untuk $x = 2$ maka $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2}$. $f(2)$ tidak terdefinisi sehingga fungsi tersebut tidak memenuhi syarat pertama, $f(x)$ dikatakan tidak kontinu pada $x = 2$. Lebih jauh lagi, perhatikan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$.

Sehingga apabila didefinisikan $f(2) = 4$, maka f dapat dibuat kontinu pada $x = 2$.

Teorema 2.7 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas di A jika terdapat suatu konstanta* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|f(x)| \leq M$ *untuk setiap* $x \in A$.

Dengan kata lain, suatu fungsi disebut terbatas pada suatu himpunan jika daerah hasil (range) nya terbatas dalam $\mathbb{R}$. Untuk mengatakan bahwa suatu fungsi tak terbatas pada himpunan yang diberikan adalah dengan mengatakan bahwa tidak terdapat bilangan yang menjadi batas untuk daerah hasilnya. Secara matematis, suatu fungsi tak terbatas pada himpunan A jika diberikan sebarang $M > 0$, terdapat titik $x_M \in A$ sehingga $f(x) > M$.

Contoh 2.6 Suatu fungsi f yang didefinisikan pada interval $A = (0, \infty)$ oleh $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah tak terbatas pada A, sebab untuk setiap $M > 0$ terdapat (dapat diambil) $x_M = \frac{1}{M+1}$ sehingga $f(x_M) = \frac{1}{x_M} = M + 1 > M$.

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi kontinu tidak perlu terbatas.

2.1.8 Partisi

Secara formal partisi dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.11 (Bartle & Sherbert, 2010)

Partisi pada suatu interval $I \coloneqq [a, b]$ *adalah koleksi* $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ *dari interval tertutup* $[a, b]$ *yang tidak saling tumpang tindih. Interval-interval tersebut dapat dinotasikan sebagai* $I_i \coloneqq [x_{i-1}, x_i]$ *dimana*

$$a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

Titik x_i(i = 0, …, n) disebut titik-titik partisi dari $\mathcal{P}$. Jika suatu titik t_i dipilih dari masing-masing interval I_i untuk $i = 1, \dots, n$ maka titik t_i disebut penanda dan himpunan pasangan $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_1, t_1), \dots, (I_n, t_n)\}$ disebut partisi bertanda dari I.

Definisi 2.12 (Bartle & Sherbert, 2010)

Gauge pada I adalah suatu fungsi positif yang terdefinisi pada I. Jika δ *adalah gauge pada I, maka partisi* $\dot{\mathcal{P}}$ *disebut* $\delta - fine$ *jika :*

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \text{ untuk } i = 1, \dots, n$$

Gauge δ pada sebuah interval I menugaskan interval $[t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ ke setiap $t \in I$. Partisi $\delta - fine$ dari partisi $\dot{\mathcal{P}}$ mengharuskan bahwa subinterval I_i dari $\dot{\mathcal{P}}$ termuat dalam interval yang bergantung pada gauge δ dan penanda t_i untuk interval tersebut

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur,an/Hadist

Nabi Muhammad SAW digambarkan sebagai sosok yang memiliki sifat-sifat mulia pada bebagai sumber, termasuk di dalamnya Al-Quran dan Hadis. pada surah Al-Qalam ayat 4 Allah SWT menyebutkan:

وَإِنَّكَ لَعَلَىٰ خُلُقٍ عَظِيم

Artinya: *"dan sesungguhnya engkau benar-benar berbudi pekerti yang agung"* (Fadlan, 2020).

Keluhuran budi pekerti Nabi Muhammad SAW yang berada pada puncaknya terpampang dari cara Allah, Yang Maha Agung, menyifati budi pekerti Nabi dengan kata agung. Keagungan akhlak Nabi Muhammad SAW disebutkan oleh Sayyid Quthub terbukti dari kemampuan beliau menerima pujian tersebut dengan mantap. Pujian tersebut tidak sedikitpun menggoyahkan kepribadian beliau ataupun membuat beliau menunjukkan sifat sombong. Nabi Muhammad SAW menerima pujian tersebut dengan tenang dan penuh keseimbangan. Ketenangan yang beliau tunjukkan tersebut menurut Sayyid Guthub telah menjadi bukti kuat tentang keagungan beliau (Shihab, 2002).

Penelitian lebih lanjut tentang ayat-ayat Al-Quran akan menunjukkan lebih banyak sifat-sifat mulia dari Rasulullah yang memberi dorongan bagi muslim untuk berakhlak baik. Salah satunya pada surat At-Taubah ayat 128 berikut yang menunjukkan sifat belas kasih serta penyayang Nabi Muhammad SAW

لَقَدْ جَآءَكُمْ رَسُولٌ مِّنْ أَنفُسِكُمْ عَزِيزٌ عَلَيْهِ مَا عَنِتُّمْ حَرِيصٌ عَلَيْكُم بِٱلْمُؤْمِنِينَ رَءُوفٌ رَّحِيمٌ

Artinya: "*Sungguh telah datang kepadamu seorang Rasul dari kaummu sendiri, berat terasa olehnya penderitaan yang kamu alami, (dia) sangat menginginkan (keimanan dan keselamatan) bagimu, penyantun dan penyayang terhadap orang-orang yang beriman"* (Fadlan, 2020).

Menurut Quraish Shihab dalam tafsirnya, ayat tersebut menjelaskan bahwa seorang Rasul yang diutus akan senantiasa mengharapkan keselamatan serta kebaikan bagi umatnya karena beliau secara langsung dapat merasakan penderitaan mereka baik lahir maupun batin. Rasul juga mengharapkan keimanan mereka kepada Allah. Sifat Rasulullah yang demikan mengindikasikan bahwa Nabi Muhammad memiliki kasih sayang dan kepekaan yang besar sebagai seorang pemimpin.

Nabi Muhammad SAW adalah contoh utama bagi umat Islam dalam menjalani kehidupan sehari-hari. Mempelajari sifat-sifat mulia beliau membantu umat Islam memahami bagaimana menjalani kehidupan yang sesuai dengan ajaran Islam sekaligus membantu umat Islam untuk meningkatkan kualitas diri. Begitupun, dalam mempelajari matematika khususnya bidang analisis, mempelajari sifat-sifat fungsi kontinu mengambil peran penting dalam pengaplikasian pada berbagai aspek kehidupan. Sehingga penelitian ini akan membahas partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dipaparkan tentang definisi hingga teorema pendukung yang akan dijadikan rujukan untuk membuktikan teorema yang menunjukkan partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu. Selanjutnya akan didefinisikan terlebih dahulu tentang fungsi kontinu sebagai berikut:

Definisi 2.9 *Misal* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, *dan* $c \in A$. *Maka* f *dikatakan kontinu di* c *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* x *adalah sebarang titik di A memenuhi* $|x - c| < \delta$, *maka* $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Teorema 2.4 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *dikatakan terbatas di A jika terdapat suatu konstanta* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|f(x) \leq M$ *untuk setiap* $x \in A$.

Definisi 2.7 (Parzynsky & Zipse, 1987)

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ *dikatakan terbatas apabila terdapat suatu bilangan riil* $M > 0$ *sedemikian hingga* $|f(x)| < M$, *untuk setiap* $x \in A$.

Teorema 2.3 Bolzano-Weirstrass (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n)$,*dengan* $n \in \mathbb{N}$ *barisan bilangan riil yang terbatas. Barisan* (x_n) *memiliki suatu sub barisan yang konvergen.*

Teorema 2.4 Teorema Apit (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n), Y = (y_n)$ *dan* $Z = (z_n)$ *masing-masing barisan bilangan riil dan* $x_n \leq y_n \leq Z_n$, *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5 Interval Bersarang (Bartle & Sherbert, 2010)

Barisan interval I_n, *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *disebut interval bersarang jika dan hanya jika memenuhi syarat berikut:*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1}$$

Definisi 2.11 (Bartle & Sherbert, 2010)

Partisi pada suatu interval $I := [a, b]$ *adalah koleksi* $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ *dari interval tertutup* $[a, b]$ *yang tidak saling tumpang tindih. Interval-interval tersebut dapat dinotasikan sebagai* $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ *dimana*

$$a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

Definisi 2.12 (Bartle & Sherbert, 2010)

Gauge pada I adalah suatu fungsi positif yang terdefinisi pada I. Jika δ *adalah gauge pada I, maka partisi* $\dot{\mathcal{P}}$ *disebut* $\delta - fine$ *jika :*

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \text{ untuk } i = 1, \dots, n$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian literatur atau kepustakaan. Metode ini menjadikan informasi yang didapat dari buku maupun artikel menjadi dasar dari terjawabnya rumusan masalah. Objek kajian penelitian pustaka menjadikan buku-buku sebagai sumber data. Dalam penelitian ini kegiatan yang dilakukan penulis meliputi pengumpulan data kepustakaan, pemahaman konsep, serta analisis bahan penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan pertama sebelum memulai penelitian yaitu menentukan topik yang akan dijadikan penelitian dengan membaca artikel, jurnal, maupun skripsi terdahulu yang relevan dengan topik. Kemudian peneliti menentukan rumusan masalah beserta batasannya yang akan dibahas. Selanjutnya adalah memahami konsep dasar definisi yang digunakan sebagai dasar untuk menjawab rumusan masalah. Selanjutnya peneliti mencari dan memilih ayat-ayat Al-Qur'an serta hadist nabi yang dapat diintegrasikan dengan topik penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mempelajari penelitian sebelumnya yang terkait dengan fungsi kontinu.
2. Memaparkan definisi terkait himpunan bilangan riil, fungsi, barisan terbatas, fungsi terbatas, fungsi terdiferensial, fungsi kontinu, partisi.

3. Menentukan dan mengkaji ayat Al-Qur’an yang berkaitan dengan topik penelitian.
4. Membuktikan teorema terkait fungsi kontinu dengan partisi dan gauge.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Partisi dan Gauge untuk membuktikan beberapa Teorema Terkait Fungsi Kontinu

Subbab ini membahas tentang pembuktian dari Partisi dan Gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu yang termuat dalam kajian teori. Sifat-sifat yang akan dinyatakan kembali pada subbab ini sebagai teorema 4.1 sampai 4.5, yaitu mengenai pembuktian teorema 4.1, dan pembuktian teorema 4.2, teorema keterbatasan fungsi kontinu, teorema maksimum-minimum pada fungsi kontinu, teorema letak nilai akan.

4.1.1 Teorema 4.1

Jika sebuah partisi $\dot{\mathcal{P}}$ dari $I \coloneqq [a, b]$ adalah $\delta - fine$ dan $x \in I$, maka terdapat suatu $t_i \in \dot{\mathcal{P}}$ sehingga $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

Bukti:

Diberikan $x \in I$, maka terdapat suatu subinterval $[x_{i-1,} x_i]$ dari $\dot{\mathcal{P}}$yang memuat x. Karena $\dot{\mathcal{P}}$ adalah $\delta - fine$, maka berlaku

$$t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-1} \leq x \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i)$$

Berdasarkan **teorema 2.1 (c)**, sehingga $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.(terbukti)

Contoh 4.1

(a) Jika δ dan γ adalah *gauge* pada $I \coloneqq [a, b]$ dan jika $0 < \delta(x) \leq \gamma(x)$ untuk setiap $x \in I$, maka setiap partition $\dot{\mathcal{P}}$ adalah $\delta - fine$ dan $\gamma - fine$, yaitu

$$t_i - \gamma(t_i) \leq t_i - \delta(t_i) \text{ dan } t_i + \delta(t_i) \leq t_i + \gamma(t_i)$$

Yang mengimplikasikan bahwa:

$t_i \in [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subseteq t_i \in [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)]$, untuk setiap $i = 1, \dots, \dots, \dots, n$.

(b) Jika δ_1 dan δ_2 adalah *gauge* pada $I \coloneqq [a, b]$ dan $\delta(x) \coloneqq \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in I$, maka δ merupakan *gauge* pada I. karena $\delta(x) \le \delta_1(x)$, maka untuk setiap partisi $\delta - fine$ adalah $\delta_1 - fine$. Demikian pula untuk setiap partisi $\delta - fine$ adalah $\delta_2 - fine$.

(c) jika δ terdefinisi pada $I \coloneqq [0,1]$ dengan

$$\delta(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{10} \; jika \; x = 0 \\ \frac{1}{2}x \; jika \; 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Maka δ adalah *gauge* pada [0,1].

(d) Jika $0 < x \le 1$, maka $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = [\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$ di mana selang ini tidak memuat titik 0. Jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah partisi $-fine$ dari I, maka hanya satu subinterval di $\dot{\mathcal{P}}$ yang memuat 0 yaitu mengharuskan $t_i = 0$.

Misalkan γ terdefinisi pada $I \coloneqq [0,1]$ dengan

$$\tilde{a}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{10} \; jika \; x = 0 \; atau \; x = 1, \\ \frac{1}{2}x \quad jika \; 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(1 - x) \; jika \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Maka γ adalah *gauge* pada I.(terbukti)

4.1.2 Teorema 4.2

Jika δ adalah *gauge* yang terdefinisi pada interval [a,b], maka terdapat partisi $\delta - fine$ dari [a,b].

Bukti:

Misalkan E adalah sebuah himpunan tak kosong $x \in [a, b]$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta - fine$ dari subinterval $[a, x]$. Himpunan E tak kosong karena pasangan $([a, x], a)$ adalah partisi $\delta - fine$ dari interval $[a, x]$ ketika $x \in [a, a + \delta(x)]$ dan $x \geq b$.

Karena $E \in [a, b]$, maka E terbatas.

Misalkan $u \coloneqq \sup E$ sehingga $a < u \leq b$. Akan ditunjukkan bahwa $u \in E$ dan $u = b$.

Andaikan bahwa $u \in E$

Karena $u - \delta(u) < u = \sup E$, terdapat $v \in E$ sedemikian sehingga terdapat $u - \delta(u) < v < u$.

Misalkan $\dot{\mathcal{P}}_1$ adalah sebuah partisi $\delta - fine$ pada $[a, v]$ dan $\dot{\mathcal{P}}_2 \coloneqq \dot{\mathcal{P}}_1 \cup ([v, u], u)$, maka $\dot{\mathcal{P}}_2$ sebuah partisi $\delta - fine$ pada $[a, u]$ sehingga $u \in E$.

Andaikan bahwa $u < b$.

Misalkan $w \in [a, b]$ sedemikian sehingga $u < w < u + \delta(u)$.

Jika Q_1 adalah sebuah partisi $\delta - fine$ dari $[a, u]$ untuk setiap $u \in E$.

Misalkan $Q_2 \coloneqq Q_1 \cup ([u, w], u)$. Maka Q_2 adalah sebuah partisi $\delta - fine$ dari $[a, w]$ untuk setiap $w \in E$.

Hal ini kontradiksi dengan u adalah batas dari E, maka $u = b$.(terbukti)

4.1.3 Teorema Keterbatasan

Teorema 4.3 Jika, $I = [a, b]$ interval tertutup terbatas dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka fungsi f terbatas pada I. Jika terdapat suatu konstanta $M > 0$ untuk sebarang $x \in I$ sehingga $|f(x)| > M$, maka fungsi f dikatakan tidak terbatas pada I.

Bukti:

Terdapat dua cara untuk membuktikan teorema ini.

Cara 1:

Pembuktian ini menggunakan metode kontradiksi. Andaikan fungsi f tak terbatas pada I. menurut teorema 2.3 untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, terdapat $x_n \in I$ sedemikian sehingga $|f(x_n)| > n$.

Pilih $n = 1$, karena f tidak terbatas di I, maka ada $x_1 \in I$ sehingga $|f(x_1)| > 1$. Pilih $n = 2$, maka ada $x_2 \in I$ sehingga $|f(x_2)| > 2$. Dengan cara serupa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, akan ada $x_n \in I$ sehingga $|f(x_n)| > M$.

Didefinisikan suatu barisan $X = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Karena I terbatas, maka barisan $(x_n) \in I$ terbatas. Menurut teorema Bolzano-Weierstrass terdapat subbarisan $X' = (x_{n_r})$ yang konvergen di suatu titik x. Karena I tertutup dan unsur-unsur dari barisan $X' \in I$, maka $x \in I$. karena f kontinu di $x \in I$ maka $(f(x_{n_r}))$ konvergen ke $f(x)$. Akibatnya $(f(x_{n_r}))$ terbatas.

Dengan demikian haruslah f terbatas pada I, maka pengandaian f tak terbatas pada I adalah salah.(terbukti)

Pada **teorema 4.3** tedapat tiga syarat yaitu intervalnya tertutup, terbatas dan fungsinya kontinu. Ketiga syarat di atas harus terpenuhi. Karena apabila satu syarat saja tidak terpenuhi maka akan ada kemungkinan fungsinya tidak terbatas di I.

Misalkan, diberikan suatu fungsi kontinu $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ pada interval $I = [0, \infty)$, fungsi tersebut kontinu dan juga intervalnya tertutup akan tetapi fungsi kontinu tersebut tidak terbatas karena domainnya dari 0 sampai tak hingga.

Misalkan, diberikan suatu fungsi kontinu $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ dan $x \neq 0$ pada interval $I = (0, \infty]$, fungsi tersebut kontinu, intervalnya terbatas dan tidak tertutup. Suatu fungsi f yang didefinisikan pada interval $A = (0, \infty]$ oleh $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah tak terbatas pada A, sebab untuk setiap $M > 0$ terdapat (dapat diambil) $x_M = \frac{1}{M+1}$ sehingga $f(x_M) = \frac{1}{x_M} = M + 1 > M$. Sehingga hal ini menunjukkan bahwa fungsi kontinu tersebut tidak terbatas.

Misalkan, diberikan suatu fungsi $h(x)$ yang diskontinu pada interval tertutup terbatas $I = [0,1]$,

Misalkan $h(x) \begin{cases} \frac{1}{x}, untuk\ x \neq 0 \\ 0, untuk\ x = 0 \end{cases}$ maka fungsi tersebut juga tidak terbatas.

Cara 2:

Teorema 4.3 Jika, $I = [a, b]$ interval tertutup terbatas dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka fungsi f terbatas pada I.

Karena f kontinu di I, maka untuk setiap $t \in I$, terdapat $\delta(t) > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in I$ dan $|x - t| \leq \delta(t)$, maka $|f(x) - f(t)| \leq 1$.

Dengan demikian, δ adalah gauge pada I.

Misalkan $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $\delta - fine$ dari I, dan

$$K \coloneqq maks\{|f(t_i)|: i = 1, \dots, n\}.$$

Berdasarkan teorema 4.1, diberikan $x \in I$ terdapat i dengan $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$, maka berlaku:

$$f(x) \leq |f(x) - f(t_i) + |f(t_i)| \leq 1 + K.$$

Karena $x \in I$ adalah sebarang, maka f terbatas oleh $1 + K$ pada I.(terbukti)

4.1.4 Teorema Maksimum-minimum pada Fungsi Kontinu

Teorema 4.4 Jika $I = [a, b]$ interval tertutup terbatas dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka f mempunyai suatu nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak.

Bukti:

Terdapat dua cara untuk membuktikan teorema ini.

Cara 1:

Misalkan $f(I) = \{f(x)|x \in I\}$, Kondisi $f(I)$ yang mana intervalnya tertutup terbatas dan fungsinya kontinu menurut **teorema 4.3** maka $f(I)$ terbatas. Dikarenakan $f(I)$ terbatas, maka $f(I)$ mempunyai supremum dan infimum.

Misalkan $s^* = \sup f(I)$, akan ditunjukkan bahwa $s^* = f(x)$.

Karena s^*adalah $sup\ (f(I))$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh $s^* - \frac{1}{n}$ bukan batas atas $f(I)$, sehingga terdapat suatu bilangan $x_n \in I$ sedemikian sehingga $s^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s^*$.

Karena I terbatas, maka barisan $X = (x_n)$ juga terbatas. Menurut **teorema 2.3** terdapat subbarisan dari X di mana $X' = (x_{n_r})$ yang konvergen ke suatu titik x.

Karena unsur-unsur dari X' terdapat di $I = [a, b]$, maka $x \in I$.

Karena f kontinu di I, maka f kontinu di x.

Karena(x_{nr}) konvergen ke suatu titik x. maka $\lim \left(f\left(x_{n_r}\right)\right) = f(x)$.

$s^* - \frac{1}{n} \leq f(x_{n_r}) \leq s^*$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Menurut **teorema 2.4** $\lim(s^* - \frac{1}{n}) \leq \lim\ f\left(x_{n_r}\right) \leq \lim\ (s^*)$, jika nilai $\lim(s^* - \frac{1}{n}) = s^*$, diperoleh $s^* \leq \lim f\left(x_{n_r}\right) \leq s^*$, maka $\lim f\left(x_{n_r}\right) = s^*$.

Dengan demikian $f(x^*) = \lim f\left(x_{n_r}\right) = s^*$=$\sup f(I)$ sehingga x merupakan titik maksimum mutlak dari f pada I.

Misalkan $s_* = \inf f(I)$, akan ditunjukkan bahwa $s_* = f(x)$.

Karena s_* adalah $\inf f(I)$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh $s_* + (\frac{1}{n})$ bukan batas bawah dari $f(I)$, sehingga terdapat suatu bilangan $x_n \in I$ sedemikian sehingga $s_* < f(x_n) \leq s_* + (\frac{1}{n})$.

Karena I terbatas, maka barisan $X = (x_n)$ juga terbatas. Menurut **teorema 2.3** terdapat subbarisan dari X di mana $X^{\prime} = (x_{n_r})$ yang konvergen ke suatu titik x.

Karena unsur-unsur dari $X^{\prime}$ terdapat di $I = [a, b]$, maka $x \in I$.

Karena f kontinu di I, maka f kontinu di x.

karena(x_{n_r}) konvergen ke suatu titik x. maka $\lim \left(f\left(x_{n_r}\right)\right) = f(x)$.

$s_* \leq f(x_{n_r}) \leq s_* + (\frac{1}{n})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Menurut **teorema 2.4** $\lim\ s_* \leq \lim\ f(x_{n_r}) \leq \lim\ s_* + (\frac{1}{n})$ Jika nilai $\lim s_* + \left(\frac{1}{n}\right) = s_*$ diperoleh $\lim\ s_* \leq \lim\ f(x_{n_r}) \leq \lim\ s_*$

Dengan demikian $f(x) = \lim f\left(x_{n_r}\right) = s_*$=inf $f(I)$ sehingga x merupakan titik minimum mutlak dari f pada I.(terbukti)

Cara 2:

Teorema 4.4 Jika $I = [a, b]$ interval tertutup terbatas dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka f mempunyai suatu nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak.

Akan dibuktikan keberadaan x^*.

Misalkan $M = \sup\{f(x): x \in I\}$, anggap bahwa $f(x) < M$, untuk setiap $t \in I$ terdapat $ä(t) > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in I$ dan $|x - t| \leq ä(t)$, maka $f(x) < \frac{1}{2}\left(M + f(t)\right)$. Dengan demikian ä adalah gauge pada I.

Jika $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $ä - fine$ dari I, maka

$$\widetilde{M} = \frac{1}{2} maks\{M + f(t_i), \dots, M + f(t_n)\}.$$

Berdasarkan teorema 4.1, diberikan $x \in I$ terdapat i dengan $|x - t_i \leq ä(t_i)$, maka berlaku:

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\left(M + f(t_i)\right) \leq \widetilde{M}.$$

Karena $x \in I$ sebarang, maka $\widetilde{M}(< M)$ adalah batas atas untuk f pada I. hal ini kontradiksi dengan M adalah supremum f.(terbukti)

4.1.5 Teorema Letak Nilai Akar

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada I. jika $f(a) < 0 < f(b)$ atau jika $f(a) > 0 > f(b)$, maka terdapat bilangan $c \in (a, b)$ sehingga $f(c) = 0$.

Bukti:

Terdapat dua cara untuk membuktikan teorema ini.

Cara 1:

Didefinisikan $I_1 = [a_1, b_1]$, dengan $a_1 = a$ dan $b_1 = b$.

Misalkan $f(a_1) < 0 < f(b_1)$.

Didefinisikan $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, yang mana merupakan titik tengah interval $[a_1, b_1]$.

Jika $f(p_1) = 0$, maka $p_1$merupakan titik akar dan dapat dipilih $c = p_1$. Jika $f(p_1) \neq 0$, maka ada dua kemungkinan yaitu $f(p_1) > 0$ atau $f(p_1) < 0$. Jika $f(p_1) > 0$, maka dibentuk suatu interval $I_2 = [a_2, b_2]$ dengan $a_2 = a_1$ dan $b_2 = p_1$. Jika $f(p_1) < 0$, maka dibentuk suatu interval $I_2 = [a_2, b_2]$ dengan $a_2 = p_1$ dan $b_2 = b_1$.

Diperoleh $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Didefinisikan $p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$, yang mana merupakan titik tengah interval $[a_2, b_2]$.

Jika $f(p_2) > 0$, maka dibentuk suatu interval $I_3 = [a_3, b_3]$ dengan $a_3 = a_2$ dan $b_3 = p_2$. Jika $f(p_2) < 0$, makan dibentuk suatu interval $I_3 = [a_3, b_3]$ dengan $a_3 = p_2$ dan $b_3 = b_2$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh $p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ dan $(I_n) = ([a_n, b_n])$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Jika pada langkah ke-n diperoleh $f(p_n) = 0$, maka $c = p_n \in (a, b)$ menjadi letak nilai akar.

Jika $f(p_n) \neq 0$, maka diperoleh barisan tak hingga pada interval-interval $(I_n) = ([a_n, b_n])$, dengan sifat $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ dan panjang interval (I_n) adalah $\frac{b-a}{2^{n-1}}$, karena $\lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0$ dan $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$, maka menurut **teorema 2.5** terdapat $c \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Karena $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ dan karena $c \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $a_n \leq \mathrm{c} \leq b_n$.

Karena $a_n \leq \mathrm{c} \leq b_n$ menurut **teorema 2.4** $\lim a_n \leq \lim \mathrm{c} \leq \lim b_n$, maka $\lim a_n = \lim \mathrm{c} = \lim b_n$.

Jadi, a_n dan b_n konvergen ke c. Karena $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu, maka $\left(f(a_n)\right)$ dan $\left(f(b_n)\right)$ konvergen ke $f(c)$. Karena $f(a_n) < 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\lim f(a_n) \leq 0$ dan $f(b_n) > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\lim f(b_n) \geq 0$, maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = f(c) = 0$.

Dengan kata lain $c \in (a, b)$ merupakan nilai akar dari f.(terbukti)

Cara 2:

Misalkan $I = [a, b]$ dan $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada I. jika $f(a) < 0 < f(b)$ atau jika $f(a) > 0 > f(b)$, maka terdapat bilangan $c \in (a, b)$ sehingga $f(c) = 0$.

Asumsikan bahwa $f(t) \neq 0$ untuk setiap $t \in I$.

Karena f kontinu di t, terdapat $ä(t) > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in I$ dan $|x - t| \leq ä(t)$, maka $f(x) > 0$ Jika $f(t) < 0$, dan $f(x) < 0$ jika $f(t) < 0$. Maka ä adalah gauge pada I dan misalkan $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah partisi $ä - fine$. Perhatikan bahwa untuk setiap i baik $f(x) < 0$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$ atau $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Jika $f(x_0) = f(a) < 0$, maka $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0, \dots, f(b) = f(x_n) < 0$. hal ini kontradiksi dengan $f(b) > 0$.(terbukti)

4.2 Kajian Integrasi dengan Hasil Pembahasan

Konsep keimanan sejati merupakan sebuah ajaran Islam yang ditanamkan lewat al-Qur'an. Telah dibahas sebelumnya pada kajian pustaka Nabi Muhammad saw. mengajarkan bahwa keimanan hadir sebagai nilai kemanusiaan, rasa kepedulian, saling menyayangi saling melindungi. Dalam al-Qur'an juga telah dijelaskan bahwa Nabi Muhammad merupakan suri tauladan yang sifat-sifatnya menjadi sifat-sifat ideal orang yang beriman sehingga penting untuk mempelajari serta menjadikannya pedoman dalam hal apapun.

Penelitian ini menunjukkan sifat-sifat fungsi kontinu di mana fungsi tersebut terdefinisi pada suatu interval I. Agar dikatakan memenuhi sifat-sifat tersebut, suatu fungsi dibuktikan memenuhi suatu kondisi atau syarat-syarat tertentu.

Sejalan dengan pernyataan sebelumnya, untuk menjadi mukmin sejati memerlukan kesungguhan untuk berproses yang dimulai dari mengetahui ciri-cirinya agar dapat mengindentifikasi diri dan mengusahakan untuk memenuhinya. Dalam al-Qur'an disebutkan lima ciri orang mukmin sejati, yaitu pada surat Al-Anfal ayat 2-4. Sifat-sifat yang terkandung pada ayat berikut merupakan sifat-sifat mukmin yang kokoh dan sempurna (Shihab, 2002).

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ اللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ آيَاتُهُ زَادَتْهُمْ إِيمَانًا وَعَلَى رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ

الَّذِينَ يُقِيمُونَ الصَّلَاةَ وَمِمَّا رَزَقْنَاهُمْ يُنْفِقُون

Artinya: *"Sesungguhnya orang-orang yang beriman adalah mereka yang apabila disebut nama Allah gemetarlah hatinya, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya kepada mereka, bertambah (kuat) imannya dan hanya kepada Tuhan mereka bertawakkal (2) (yaitu) orang-orang yang melaksanakan salat dan yang menafkahkan sebagian dari rezeki yang Kami berikan kepada mereka(3)"* (Fadlan, 2020).

Pada Tafsir Al-Misbah, disebutkan bahwa menurut Sayyid Quthub kata *wajilat qulubuhum* menggambarkan getaran rasa yang menyentuh kalbu seorang mukmin ketika diingat-ingatkan tentang Allah, perintah atau larangan-Nya (Shihab, 2002). Sehingga seseorang dikatakan mukmin sejati yang sempurna imannya saat menyandang sifat pertamanya yaitu memiliki rasa takut kepada Allah yang dibuktikan dengan adanya getaran rasa saat mengingat kebesaran Allah, mengingar pelanggaran juga dosanya. Hal ini mendorong orang mukmin untuk senantiasa beramal dan taat. Sifat kedua yang disebutkan yakni bertambahnya iman saat ayat-ayat-Nya dibacakan. Thahir Ibnu Ssyur berpendapat penambahan iman itu lahir karena ayat-ayat Al-Quran mengandung mukjizat atau bukti-bukti kebenaran sehingga saat berulang terdengar akan menambah keyakinan pendengarnya tentang kebenaran informasinya dan bahwa informasi-informasi tersebut berasal dari Allah (Shihab, 2002). Sifat ketiga yaitu bertawakkal kepada Allah. Disebutkan pada Tafsir Al-Misbah, Thabaathabaa'i menafsirkan bahwa saat sifat-sifat sebelumnya terpenuhi, seorang mukmin akan menyadari kebesaran dan kekuasaan Allah serta menyadari kelemahannya sesuai dengan kenyataan yang ada, yaitu segala persoalan kembali kepada Allah (Shihab, 2002). Dengan demikian, mukmin sejati akan berserah diri kepada-Nya. Setelah sifat tersebut terpenuhi maka seorang mukmin dapat menempatkan dirinya pada posisi hamba Allah yang taat dan tunduk kepada-Nya.

Setelah ayat sebelumnya menggambarkan sisi dalam atau sifat mukmin sejati, ayat ketiga menjelaskan amal lahiriyah mukmin yaitu melaksanakan shalat secara bersinambung dan sempurna, sesuai rukun dan syaratnya (Shihab, 2002). Sehingga sifat keempat yang harus disandang mukmin sejati yaitu melaksanakan shalat. Sifat terakhir yaitu menafkahkan sebagian rezeki yang dianugerahkan kepada mereka. Kata menafkahkan berarti mengeluarkan apa yang dimiliki dengan tulus setiap saat dan berkesinambungan yang wajib atau sunnah, untuk kepentingan pribadi, keluarga atau siapa pun yang butuh (Shihab, 2002). Sehingga selain memperhatikan hubungan dengan Allah, mukmin juga memperhatikan hubungannya dengan sesama manusia atau masyarakat dengan memenuhi kebutuhan mereka dari apa yang telah dianugerahkan Allah baik harta, ilmu atau lainnya.

Mempelajari dan mengamalkan sifat atau ciri-ciri dari seorang mukmin sejati memiliki manfaat sebagaimana dijanjikan Allah pada surat Al-Anfal ayat 4 yaitu:

أُولَئِكَ هُمُ الْمُؤْمِنُونَ حَقًّا لَهُمْ دَرَجَاتٌ عِنْدَ رَبِّهِمْ وَمَغْفِرَةٌ وَرِزْقٌ كَرِيمٌ

Artinya: *"Mereka itulah orang-orang yang benar-benar beriman. Mereka akan memperoleh derajat (tinggi) di sisi Tuhannya dan ampunan serta rezeki (nikmat) yang mulia"*

Pada ayat-ayat sebelumnya disebutkan ciri-ciri orang baik melalui tiga pokok amal baik yaitu amal kalbu, berupa hati yang gemetar, penambahan iman dan penyerahan diri kepada Allah. Selanjutnya amal badaniyah berupa shalat dan yang ketiga berupa amal harta berupa zakat. Sebagai imbalannya, disebutkan 3 hal yaitu untuk amal kalbu imbalannya ketinggian derajat untuk amal badan adalah *maghfirah* atau pengampunan tuhan dan untuk amal harta adalah *karim* yakni pelimpahan kemurahan hati (Shihab, 2002). Ayat ini mengukuhkan ayat kedua yang membatasi mukmin sejati yang sempurna imannya yaitu menyandang lima sifat tersebut, sehingga apabila salah satu tidak terpenuhi maka tidak dinamakan mukmin sejati.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari pembahasan skripsi adalah telah dibuktikannya partisi dan gauge untuk membuktikan teorema terkait fungsi kontinu, yaitu Lemma 4.1, Teorema 4.2, Teorema Keterbatasan, Teorema Maksimum-minimum pada Fungsi Kontinu dan Teorema Letak Nilai Akar. Sebelum membuktikan sifat tersebut, terlebih dahulu didefinisikan secara umum fungsi yang kontinu pada sebuah titik $c \in \mathbb{R}$. Menggunakan definisi fungsi terbatas, terbukti bahwa fungsi kontinu f merupakan fungsi terbatas pada suatu interval I. Suatu fungsi kontinu dibuktikan memiliki nilai maksimum dan minimum mutlak. Kemudian ditunjukkan dan dibuktikan letak nilai akar dari fungsi yang kontinu. Selanjutnya teorema terkait fungsi kontinu yang dibuktikan dengan partisi dan gauge.

5.2 Saran

Sebagai saran, penelitian selanjutnya dapat menunjukkan serta membuktikkan sifat-sifat fungsi kontinu yang belum dibahas pada penelitian ini. Penelitian lebih lanjut dapat mempelajari sifat-sifat fungsi kontinu pada ruang $\mathbb{R}^2$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Boiliu, N. I., Stepanus, Intarti, E. R., & Lumbantoruan, J. H. (2021). Influence of the Personal Competence of Teachers of Christian Religious Education on Learning Motivation in High School Students in South Tangerang City. Proceedings of the 2nd Annual Conference on Blended Learning, Educational Technology and Innovation (ACBLETI 2020), 560(Acbleti 2020), 298–302.

Cahya, E., & Muksar, M. (2020). *Analisis Real cetakan 3.* Tangerang: CV. Karya Indonesia.

Denbel, D. G., (2015). *Function in the secondary school Mathematics Curriculum.* J. Educ. Pract 6.

Fadlan, F. (2020). *Al-Qur'an dan Terjemah Cetakan 7.* Jakarta: Suara Agung.

Kemenag RI. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya (edisi peny).*

Louis, L. (1986). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Edisi Kelima.* New York: Penerbit Harper & Row.

Moore, R.E., Kearfott, R.B. and Cloud, M.J. (2009) Introduction to Interval Analysis. 213.

Parzynski, W. R., & Zipse, P. W. (1987). *Introduction to Mathematical Analysis.* Singapore: McGraw-Hill.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2003). *Calculus 8th Edition.* Addison Wesley: Prentince Hall.

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah.* Tangerang: Lentera Hati.

Subhan, M., (2017). *Analisis Real 1.* Padang: UNP press.

Suryawan, H. (2016). *Kalkulus Diferensial.* Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Ari Anggoro Putro, lebih dikenal sebagai Ari, dilahirkan di Ngawi, 05 Oktober 1999 sebagai anak kedua dari pasangan Suyadi dan Wiwik Pujiarti. Pendidikan dasar penulis diperoleh dari SDN Brangol 01 hingga lulus pada tahun 2012, setelah lulus jenjang pendidikan sekolah dasar penulis melanjutkan pendidikan di Pondok Pesantren As-salafi Al-Fithrah Surabaya, kemudian lulus dari tingkat sekolah menengah pertama di Mts As-Salafi Al-Fithrah Surabaya pada tahun 2015. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan selanjutnya di Pendidikan Diniyah Formal Ulya Al-Fithrah Surabaya dan lulus pada tahun 2018. Lulus dari jenjang menengah atas, penulis melanjutkan pendidikan sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama perkuliahan, penulis mendapat banyak relasi dan pengalaman berharga melalui beberapa pekerjaan paruh waktu di bidang F&B di Surabaya, dengan pengalaman tersebut penulis dapat mendirikan usaha di bidang F&B pada tahun 2023 . Apabila didapati pertanyaan, saran, ataupun kritik untuk disampaikan dari penelitian ini, disilahkan menghubungi penulis melalui email : arrobcut@gmail.com.