TEOREMA TITIK TETAP UNTUK EMPAT PEMETAAN PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

OLEH
LUBABA UFA
NIM. 210601110031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK EMPAT PEMETAAN PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lubaba Ufa
NIM. 210601110031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK EMPAT PEMETAAN PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Lubaba Ufa
NIM. 210601110031

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 21 Mei 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK EMPAT PEMETAAN PADA RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Lubaba Ufa
NIM. 210601110031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 20 Juni 2025

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Lubaba Ufa
NIM	: 210601110031
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Teorema Titik Tetap untuk Empat Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman akhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Juni 2025

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

0967FAMX340844099

Lubaba Ufa

NIM. 210601110031

MOTO

“Man Jadda Wa Jadda – Barangsiapa bersungguh-sungguh, maka ia akan berhasil.”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim

Dengan rasa syukur yang mendalam kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya, dengan segenap hati karya skripsi ini kupersembahkan kepada:

Abah Abdul Wahid dan Ibu Ni'mah, yang doa, kasih sayang, dan pengorbanannya tak pernah terputus sepanjang langkahku. Terima kasih telah menjadi sumber semangat dan kekuatan dalam setiap fase perjuanganku.

Adik Mohammad Ashabil Yamin, yang selalu memberikan dukungan dan canda tawa di saat aku lelah. Kehadiran kalian adalah bagian dari kebahagiaan dalam proses ini.

Para dosen dan pembimbing yang telah membimbing dengan sabar, membuka wawasan, dan menuntunku dalam menyusun karya ilmiah ini.

Sahabat-sahabat seperjuangan, yang setia menemani dalam suka dan duka, dalam tawa dan tangis selama masa kuliah dan penyusunan skripsi.

Dan untuk diriku sendiri, terima kasih telah bertahan, berjuang, bersabar, dan tidak menyerah.

Semoga skripsi ini menjadi langkah awal menuju jalan pengabdian dan ilmu yang bermanfaat, aamiiin.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga proses penyusunan skripsi yang berjudul “Teorema Titik Tetap untuk Empat Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial” dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah memberikan petunjuk kepada manusia dalam menjalankan perintah Allah SWT. Semoga tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya di akhir kelak, Aamiin. Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari dorongan berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan bimbingan, motivasi dan nasihat dalam penyusunan skripsi.
5. Dr. Abdussakir, M.Pd., selaku dosen pembimbing II Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan bimbingan, saran dan pengetahuan dalam penyusunan skripsi.
6. Evawati Alisah, M.Pd., selaku dosen wali yang telah sabar memberikan bimbingan, saran dan pengetahuan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. *Abah* Abdul Wahid, Ibu Ni’mah dan Adik Mohammad Ashabil Yamin yang senantiasa mendoakan, memotivasi dan mendukung.
9. Teman-teman “Analisis” yang selalu membantu dan saling memberi semangat.
10. Teman *online* yang selalu membantu ketika sedang mengalami kesusahan, dan selalu membantu memperbaiki perasaan hati yang tidak stabil.

11. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang “Teorema” angkatan 2021 yang saling mendukung dan mendoakan.

Malang, 20 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

p	: Parsial
(L, p)	: Ruang Metrik Parsial
(x_n)	: Barisan
$B(q, j)$	: Bola buka berpusat di q dan jari-jari j
$cl(D)$	: Tutupan pada D
p^r	: Metrik yang diturunkan oleh metrik parsial pada L
φ	: Fungsi Kontinu dan Tak Menurun
ψ	: Himpunan Fungsi φ

ABSTRAK

Ufa, Lubaba. 2025. **Teorema Titik Tetap untuk Empat Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Ruang Metrik, Ruang Metrik Parsial, Titik Tetap, Pemetaan Kontraktif Lemah.

Ruang metrik parsial merupakan bentuk perluasan dari ruang metrik. Perbedaan metrik dengan metrik parsial dapat dilihat dalam hal jarak antara suatu titik dengan dirinya sendiri *(self distance)*. Jika dalam ruang metrik jarak tersebut selalu bernilai nol, maka pada ruang metrik parsial nilainya tidak harus nol. Teorema titik tetap di ruang metrik parsial merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut pemetaan kontraktif lemah dari ruang metrik parsial lengkap ke dalam dirinya sendiri. Sebelum membuktikan ketunggalan titik tetap, terlebih dahulu perlu ditunjukkan bahwa ruang metrik parsial bersifat lengkap. Suatu ruang dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai bukti teorema titik tetap untuk empat pemetaan yang merupakan pemetaan diri, yaitu A, B, S, T pada ruang metrik parsial. Metode penelitian yang digunakan adalah studi pustaka dengan mengumpulkan sumber yang relevan dengan topik. Dari hasil penelitian dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap untuk empat pemetaan tersebut menjamin keberadaan titik tetap yang bersifat tunggal dalam ruang metrik parsial. Dalam pembuktian teorema, menggunakan teorema pemetaan kontraktif lemah.

ABSTRACT

Ufa, Lubaba. 2025. **Fixed Point Theorem for Four Maps on Partial Metric Space**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (2) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Metric Space, Partial Metric Space, Fixed Point, Weakly Contractive Mapping.

A partial metric space is a generalization of a metric space. The difference between a metric and a partial metric lies in the concept of self-distance, that is, the distance from a point to itself. In a metric space, this distance is always zero, whereas in a partial metric space, it is not necessarily zero. The fixed point theorem in partial metric spaces is a uniqueness theorem concerning a fixed point of a mapping known as a weakly contractive mapping from a complete partial metric space into itself. Before proving the uniqueness of the fixed point, it is necessary to show that the partial metric space is complete. A space is said to be complete if every Cauchy sequence in it converges. This study discusses the proof of the fixed point theorem for four self-mappings, namely A, B, S and T, in a partial metric space. The research method used is a literature review by collecting sources relevant to the topic. The results of the study demonstrate that the fixed point theorem for the four mappings guarantees the existence of a unique fixed point in the partial metric space. In proving the theorem, the weakly contractive mapping theorem is applied.

مستخلص البحث

عوفا, لبابة. 2025. **النقطة نظرية مبرهنة التثابتة لأربعة تطبيقات في الفضاء المتري الجزئي**. قسم الرياضتات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتور خير الرحمن, ماجستير(٢) الدكتور عبد الشاكر, الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية في العلوم: افضاء المتري, الفضاء المتري الجزئي, النقطة الثابية, التطبيق الانكماشي الضعيف.

الفضاء المتري الجزئي هو امتداد للفضاء المتري. وظهر الفرق بين الفضاء المتري والفضاء المتري الجزئي قي مسافة النقطة إلى نفسها. ففي الفضاء المتري تكون هذه المسافة دائما صفرا, آما في الفضاء المتري الجزئي فلا يشترط آن تكون كذلك. إن مبرهنة النقطة الثابتة في الفضاء المتري الجزئي هي مبرهنة تتعلق بوحدانية النقطة الثابتة لتطبيق يسمي التطبيق لانكماشي الضعيف من الفضاء المتري الجزئي التام إلى نفسه. وقبل إثبات وحدانية النقطة الثابتة, يحب أولأ إثبات آن الفضاء المتري الجزئي تام. يتناول هذا البحث إثبات النقطة الثابتة لأربعة تطبيقات ذاتية, وهي A, B, S, T في الفضاء المتري الجزئي. ويقال إن الفضاء تام إذا كانت كل متتالية كوشي فيه متقاربه. منهج البحث المستخدم هو الدراسة النظرية من خلال جمع المصادر المرتبطة بالموضوع. ومن نتائج البحث يمكن إثبات أن مبرهنة النقطة الثابتة لتلك التطبيقات لأربعة تضمن وجود نقطة ثابتة وحية قي الفضا المتري الجزئي. وقد تم في إثبات المبرهنة استخدام مبرهنة التطبيق الانكماشي الضعيف.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metrik pertama kali dikenalkan oleh Frechet (1906). Metrik merupakan pemetaan dengan domain suatu himpunan tak kosong menuju bilangan riil dan memenuhi sejumlah sifat tertentu yaitu *nonnegativity, equality biimplies indistancy*, simetri dan ketaksamaan segitiga (Bukatin dkk, 2009). Ruang metrik adalah sebuah himpunan tidak kosong yang disertai metrik yang terdefinisi pada himpunan tersebut (Rahmat dkk, 2021). Ruang metrik terus mengalami perkembangan, sehingga menghasilkan berbagai jenis ruang metrik baru. Salah satu perkembangannya adalah ruang metrik parsial.

Pada tahun 1992, Matthews memperkenalkan untuk pertama kalinya tentang ruang metrik parsial. Ruang ini mempunyai perbedaan dengan ruang metrik, dapat dilihat dalam hal jarak antara suatu titik dengan dirinya sendiri *(self distance)*. Jika dalam ruang metrik jarak tersebut selalu bernilai nol, maka pada ruang metrik parsial nilainya tidak harus nol (Dwi dkk, 2023). Matthews mengembangkan ruang metrik parsial dalam konteks penelitiannya terkait notasi jaringan *dataflow*, dan menunjukkan bahwa prinsip kontraksi Banach masih dapat berlaku di dalamnya, khususnya sebagai aplikasi dalam verifikasi program (Bukatin dkk, 2009). Selanjutnya, salah satu konsep penting yang menjadi fokus kajian dalam ruang metrik parsial adalah konsep titik tetap.

Dalam analisis fungsional, titik tetap berfungsi penting untuk membuktikan adanya solusi pada persoalan nilai awal serta syarat batas dalam persamaan diferensial, baik yang bersifat linier maupun nonlinier (Andy dkk, 2020). Teorema titik tetap awal mula diperkenalkan oleh Brouwer (1912). Brouwer membahas pemetaan kontinu mempunyai titik tetap. Kontinu adalah suatu pemetaan yang tidak terpotong (Bartle & Sherbert, 2010). Brouwer menyatakan bahwa pemetaan kontinu T pada bola tutup satuan di ruang *Euclidean* mempunyai setidaknya satu titik tetap, yakni x sehingga $T(x) = x$. Kemudian, Birkhoff dan Kellogg (1922) menggunakan teorema titik tetap Brouwer untuk membuktikan teorema eksistensi titik tetap dalam teori persamaan differensial. Pada tahun 1922, Banach memperkenalkan teorema kontraksi mengenai titik tetap, yang kini dikenal dengan nama teorema titik tetap Banach (Sukaesih, 2015). Teorema titik tetap Banach banyak dikembangan, sebagaimana yang dikemukakan oleh Meir dan Keeler (1969) yaitu pemetaan kontraktif yang diperluas ke dalam bentuk pemetaan kontraktif seragam lemah yang bersifat murni (2008) juga mengembangkan teorema titik tetap Banach, yaitu memperluas prinsip kontraktif Banach yang menjadi karakterisasi metrik lengkap. Teorema titik tetap Banach di ruang metrik diperluas dan diterapkan pada ruang metrik parsial seperti yang dibahas oleh Abdeljawad, dkk (2011). Selanjutnya Dwivedi (2022) membahas teorema titik tetap untuk empat pemetaan serta pembuktiannya di ruang metrik parsial. Untuk membahas teorema titik tetap akan dibahas juga mengenai barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam ruang metrik parsial.

Barisan konvergen adalah barisan di dalam ruang metrik parsial yang mendekati suatu nilai *limit* dengan seiring bertambahnya indeks barisan tersebut (Dwivedi, 2022). Sedangkan barisan Cauchy adalah barisan di dalam ruang metrik parsial yang mendekati satu sama lain seiring bertambahnya indeks barisan, tanpa mencapai suatu nilai *limit* di ruang metrik parsial (Dwivedi, 2022). Teorema titik tetap pada ruang metrik parsial dapat dibuktikan dengan mendasarkan sifat-sifat barisan konvergen dan barisan Cauchy.

Seperti yang telah dibahas mengenai ruang metrik, ruang metrik parsial dan teorema titik tetap, penelitian ini akan mengambil kasus mengenai teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial yang merujuk pada artikel Dwivedi (2022). Adapun bukti teorema yang ada, yang telah dibuktikan oleh Dwivedi masih kurang mendetail, sehingga dalam penelitian ini akan dibahas lebih detail agar mudah untuk dipelajari. Hal ini sebagaimana Allah SWT memberikan kemudahan kepada manusia dalam mempelajari isi al-Quran, yang telah dijelaskan dalam al-Quran yang artinya (Kemenag, 2024):

"Sungguh, Kami benar-benar telah memudahkan al-Quran sebagai pelajaran. Maka, adakah orang yang mau mengambil pelajaran?" (Q.S. al-Qomar [54]:17)

Ibnu Katsir mentafsirkan bahwa Allah SWT telah memudahkan lafazhnya dan juga pengertiannya bagi orang-orang yang ingin memberikan peringatan kepada umat manusia. Mujahid menyatakan, "Ini berarti, bacaan tersebut menjadi mudah." As-Suddi menambahkan, "Artinya, Kami mempermudah bacaan tersebut untuk semua lidah." Sementara itu, adh-Dhahhak mengutip dari Ibnu 'Abbas: "Seandainya Allah tidak memudahkan lidah keturunan Adam, tidak akan ada makhluk yang mampu mengucapkan firman Allah SWT." Hal ini menunjukkan bahwa salah satu kemudahan yang Allah berikan kepada umat manusia adalah kemampuan untuk membaca al-Quran (Ghoffar dkk, 2004).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah bagaimana pembuktian teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini ialah memberikan penjelasan mengenai bukti teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam memperluas wawasan mengenai eksistensi titik tetap dari empat pemetaan pada ruang metrik parsial melalui penerapan teorema titik tetap.

1.5 Batasan Masalah

Batasan penelitian ini adalah hanya membahas teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Metrik (Kreyszig, 1978)

   Misalkan L adalah sebarang himpunan tak kosong dan d *(distance)* adalah metrik pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$, pemetaan $d: L \times L \to \mathbb{R}$ memenuhi:

   (M1) $d(x,y) \in \mathbb{R}, d(x,y) < \infty, d(x,y) \geq 0$ *(Nonnegativity)*

   (M2) $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ *(Indistancy Biimplies Equality)*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Ketaksamaan Segitiga)

(L, d) adalah ruang metrik.

2. Ruang Metrik Parsial (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah sebarang himpunan tak kosong dan p *(distance)* adalah metrik parsial pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$. Pemetaan $p : L \times L \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ memenuhi:

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ *(Equality Biimplies Indistancy)*

(P2) $p(x, x) \leq p(x, y)$ *(Small Self-Distances)*

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$ (Simetri)

(P4) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$ *(Triangularity)*

(L, p) adalah ruang metrik parsial.

3. Pemetaan (Kreyszig, 1978)

Diberikan (L, d) dan (O, d) adalah ruang metrik. Pemetaan T dari himpunan L ke himpunan O dinotasikan dengan $T: L \to O$, yaitu mengawankan satu-satu setiap $x \in L$ ke $y \in O$. Sehingga $T(x) = y$.

4. Titik Tetap (Sihombing & Septiati, 2018)

Diberikan ruang metrik (L, d). Titik $x \in L$ dikatakan sebagai titik tetap dari pemetaan $T: L \to L$ jika $T(x) = x$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Berikut diberikan teori-teori dasar sebelum mengkaji teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.

2.1.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1 (Kreyszig, 1978)

L adalah sebarang himpunan tak kosong dan d *(distance)* adalah metrik pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$, pemetaan $d: L \times L \to \mathbb{R}$ memenuhi:

(M1) $d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$ *(Nonnegativity)*

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (*Equality Biimplies Indistancy)*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Ketaksamaan Segitiga)

(L, d) adalah ruang metrik.

Contoh 2.2:

Didefinisikan pemetaan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Akan dibuktikan $(\mathbb{R}, d)$ ruang metrik.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$.

(M1) Berdasarkan definisi nilai mutlak

$$|x - y| = \begin{cases} Apabila\ x - y \geq 0\ dan\ x \geq y, maka\ x - y, \\ Apabila\ x < y, \qquad -(x - y) \end{cases},$$

maka $d(x, y) \in \mathbb{R}$,

karena x & y *finite* maka $d(x, y) = |x - y|$ *finite*,

$d(x,y) = |x - y|$ *non-negative* berdasarkan sifat nilai mutlak.

Terbukti $d(x,y) \in \mathbb{R}, d(x,y) < \infty, d(x,y) \geq 0$.

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

($\Rightarrow$) Diketahui $d(x,y) = 0$, akan dibuktikan $x = y$, karena $d(x,y) = |x - y| = 0$, maka $x - y = 0$, sehingga $x = y$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$, akan dibuktikan $d(x,y) = 0$, karena $x = y$, maka $x - y = 0$, sedemikian sehingga $|x - y| = |0|$, artinya $|x - y| = d(x,y) = 0$.

Terbukti $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x - y| \\ &= |x + (-y)| \\ &= |-y + x| \\ &= |(-1)(y - x)| \\ &= |-1||y - x| \\ &= |y - x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

Terbukti $d(x,y) = d(y,x)$.

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x - y| \\ &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Terbukti $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ ruang metrik.

2.1.2 Himpunan Buka pada Ruang Metrik

Definisi 2.3 (Kreyszig, 1978)

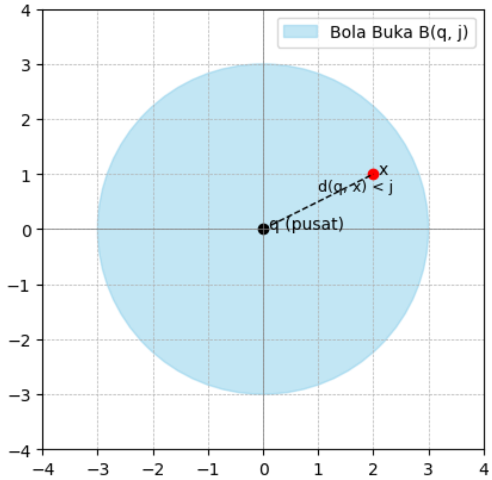
Misalkan (L, d) adalah ruang metrik. Suatu bola buka $B(q, j)$ dengan pusat q dan jari-jari j di L didefinisikan sebagai himpunan berikut,

$$B(q, j) = \{x \in L : d(q, x) < j\}$$

dengan $q \in L$ dan $j \in \mathbb{R}$, $j > 0$.

Contoh 2.4:

Diberikan ruang metrik (L, d) dan misalkan $L = \mathbb{R}^2$. Misalkan bola buka $B(q, j)$ mempunyai pusat q pada titik $(0,0)$, jari-jari $j = 3$, dan titik $x = (2,1)$. Berdasarkan Definisi 2.3 bahwa $x \in B(q, j)$.



Gambar 2.1 Contoh Bola Buka $B(q, j)$ di Ruang Metrik

Definisi 2.5 (Sihombing & Septiati, 2018)

Misalkan $D \subseteq L$, $D \neq \emptyset$. Titik $c \in D$ merupakan titik interior dari D jika terdapat

$$\varepsilon > 0$$

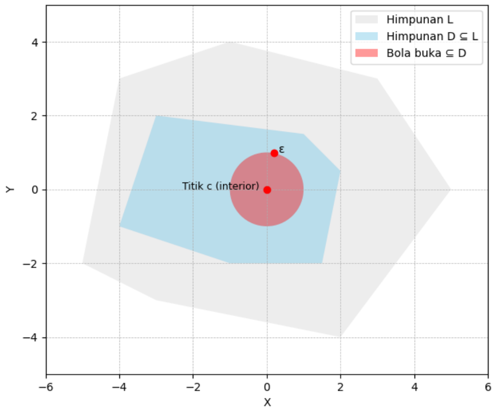
sedemikian sehingga

$$B(c, \varepsilon) \subseteq D$$

dengan c adalah titik pusat dan ε adalah jari-jari di D.

Contoh 2.6:

Diberikan ruang metrik (L, d), misalkan $L = \mathbb{R}^2$ dan $D \subseteq L$, $D \neq \emptyset$. Misalkan bola buka $B(c, \varepsilon)$ dengan c adalah titik pusat dan ε adalah jari-jari di D, berdasarkan Definisi 2.5 titik $c = (0,0)$ adalah titik interior.



Gambar 2.2 Contoh Titik Interior di D

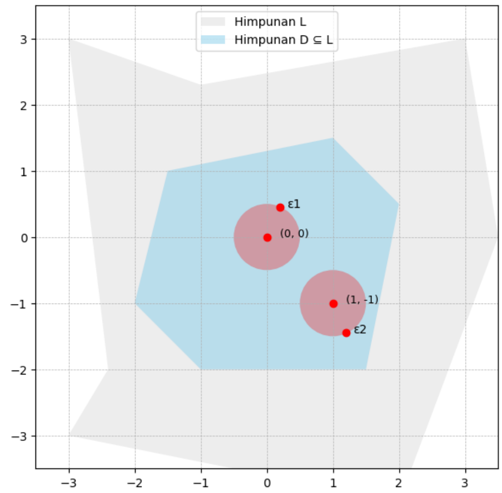
Definisi 2.7 (Sihombing & Septiati, 2018)

Suatu himpunan bagian $D \subseteq L$ disebut himpunan buka di L apabila setiap titik di D merupakan titik interior di D.

Contoh 2.8:

Diberikan ruang metrik (L, d), misalkan $L = \mathbb{R}^2$ dan $D \subseteq L$, $D \neq \emptyset$. Misalkan bola buka $B(c, \varepsilon)$ dengan pusat c dan jari-jari ε dan misalkan titik $c_1 = (0,0)$ dan titik $c_2 = (1, -1)$. Berdasarkan Definisi 2.5, maka titik c_1 dan c_2 adalah titik interior.

Karena titik c_1 dan c_2 adalah titik interior, maka berdasarkan Definisi 2.7 himpunan D adalah himpunan buka.



Gambar 2.3 Contoh Himpunan Buka

Definisi 2.9 (Sihombing & Septiati, 2018)

Misalkan bahwa $D \subseteq L, D \neq \emptyset$. Maka:

1. $c \in L$ disebut titik akumulasi dari D jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka

$$(B(c,\varepsilon)\backslash\{c\}) \cap D \neq \emptyset.$$

   Titik-titik akumulasi dari D membentuk himpunan yang dinotasikan sebagai D'.

2. D bersama dengan semua titik akumulasinya, dinotasikan dengan $cl(D)$ didefinisikan,

$$cl(D) = D \cup D'.$$

Contoh 2.10:

Misalkan $D = \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$, sehingga $D = (1,1), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, dan seterusnya.

Himpunan D mendekati $(0,0)$ ketika $n \longrightarrow \infty$. Apakah $(0,0)$ adalah titik akumulasi dari D?

Jawab:

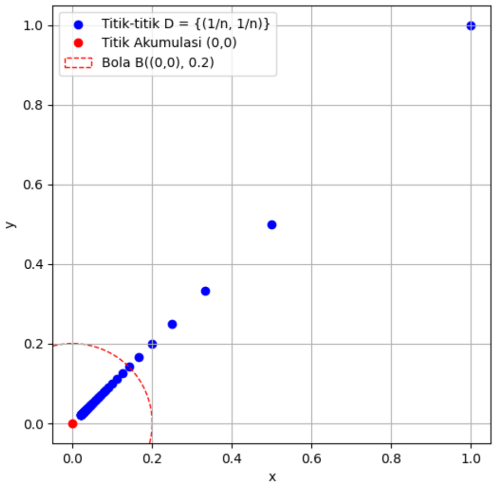
Untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka bola buka $B((0,0), r)$ memuat tak hingga banyak titik dari D.

Untuk setiap $r > 0$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in B\big((0,0), r\big).$$

Oleh karena itu $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0,0)$.

Jadi $(0,0)$ adalah titik akumulasi dari D.



Gambar 2.4 Contoh Titik Akumulasi di *D*

2.1.3 Himpunan Tutup pada Ruang Metrik

Defiisi 2.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan (L, d) ruang metrik dan $D \subseteq L$. Himpunan D bersifat tertutup jika dan hanya jika $L \backslash D$ adalah himpunan terbuka.

Proposisi 2.12 (Sihombing & Septiati, 2018)

Misalkan D adalah himpunan bagian dari suatu ruang metrik (L, d). Maka

1. $D \subset cl(D)$.
2. $cl(D)$ adalah tutupan pada D.
3. D adalah himpunan bagian tutup jika dan hanya jika $D = cl(D)$.

<u>Bukti:</u>

1. Berdasarkan Definisi 2.9, $cl(D)$ adalah himpunan yang terdiri dari semua titik di D dan semua titik akumulasi dari D. Karena semua titik di D jelas ada di D, maka semua titik di D juga berada dalam $cl(D)$. Dengan demikian, terbukti $D \subset cl(D)$.
2. Berdasarkan Definisi 2.9, $cl(D)$ adalah himpunan yang terdiri dari semua titik di D dan semua titik akumulasi dari D. Karena $cl(D)$ mencakup semua titik akumulasi dari D dan D itu sendiri, maka terbukti bahwa $cl(D)$ adalah himpunan tertutup.
3. ($\Rightarrow$) Jika D adalah himpunan bagian tertutup maka $D = cl(D)$.

   Jika D tertutup maka D memuat semua titik akumulasinya. Karena $cl(D)$ adalah himpunan yang mencakup semua titik di D dan titik akumulasinya, dan karena D sudah mencakup semua titik akumulasinya (karena D tertutup), maka $D = cl(D)$.

   ($\Leftarrow$) Jika $D = cl(D)$ maka D adalah himpunan bagian tertutup.

   Diketahui bahwa $D = cl(D)$. Karena $cl(D)$ adalah himpunan tertutup (berdasarkan bagian 2), maka haruslah D juga tertutup.

2.1.4 Barisan Konvergen di Ruang Metrik

Definisi 2.13 (Sihombing & Septiati, 2018)

Misalkan (L, d) adalah ruang metrik. Suatu barisan dari titik-titik di L adalah suatu pemetaan $T: \mathbb{N} \to L$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}, T(n) = x_n \in L$. Suku-suku x_n di L merupakan barisan titik di L dan dinotasikan sebagai (x_n).

Contoh:

Misalkan $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.

Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}$.

Sehingga $x_1 = (1,1), x_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), x_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right), \ldots$

Karena setiap elemen barisan (x_n) ada di $\mathbb{R}^2$, maka (x_n) adalah barisan di ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$.

Definisi 2.14 (Kreyszig, 1978)

Di dalam ruang metrik (L, d) suatu barisan (x_n) disebut konvergen jika terdapat titik $x \in L$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ditulis $(x_n) \to x$ dan x disebut sebagai limit dari barisan (x_n),

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = x.$$

Sifat Archimedes (Bartle & Sherbert, 2010)**:** Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $x \leq n_0$.

Contoh 2.15:

Misalkan $L = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$. Maka barisan (x_n) yang didefinisikan oleh $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik (L, d) konvergen ke 0.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Oleh sebab itu, jika $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Terbukti barisan (x_n) konvergen di L.

Lemma 2.16 (Sihombing & Septiati, 2018)

Misalkan (L, d) adalah ruang metrik dan $D \subseteq L, D$ tertutup. Jika (x_n) konvergen ke x dan $(x_n) \in D$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $x \in D$.

Bukti:

Diketahui D adalah himpunan bagian tertutup dari L, artinya D memuat semua titik limitnya. Karena D tertutup, maka haruslah D memuat semua titik limit dari barisan konvergen di dalamnya. Perhatikan bahwa x adalah limit dari (x_n) yang semua elemennya berada di D. Jadi terbukti bahwa $x \in D$.

2.1.5 Barisan Cauchy di Ruang Metrik

Definisi 2.17 (Kreyszig, 1978)

Di dalam ruang metrik (L, d) barisan (x_n) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m \geq n_0$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Teorema 2.18 (Kreyszig, 1978)

Di dalam ruang metrik (L, d), jika sebuah barisan konvergen, maka barisan tersebut juga bersifat Cauchy.

Bukti:

Misalkan (x_n) adalah barisan dalam ruang metrik (L, d), dan misalkan $x \in L$ sedemikian sehingga (x_n) konvergen ke x. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk setiap $n \geq n_0$.

Ambil $m \geq n_0$, maka juga berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga untuk $m, n \geq n_0$ berlaku ketaksamaan segitiga

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti (x_n) adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.18 menjelaskan bahwa jika sebuah barisan konvergen juga merupakan barisan Cauchy, namun tidak untuk sebaliknya. Berikut diberikan contoh barisan Cauchy yang tidak konvergen.

Contoh 2.19:

Himpunan $L = (0, 1]$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ dan barisan (x_n) di ruang metrik (L, d) dengan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ untuk $n = 1,2,3, \dots$. Barisan (x_n) adalah barisan Cauchy yang tidak konvergen di L.

<u>Bukti:</u>

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$n_0 > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Oleh karena itu, jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$.

Sehingga jika $n, m \geq n_0$ maka

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Berdasarkan contoh sebelumnya, 0 adalah *limit* dari barisan (x_n), namun $0 \notin L$. Jadi barisan (x_n) di dalam $L = (0,1]$ merupakan barisan tidak konvergen di L.

2.1.6 Ruang Metrik Lengkap

Definisi 2.20 (Kreyszig, 1978)

Ruang metrik (L, d) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy (x_n) di dalamnya konvergen menuju suatu elemen di L.

Teorema 2.21 (Kreyszig, 1978)

Misalkan (L, d) adalah ruang metrik lengkap dan $D \subseteq L$, maka

D tertutup di $L \Leftrightarrow (D, d)$ adalah subruang metrik lengkap dari L.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Diketahui $D \subseteq L$, dengan D adalah himpunan bagian tertutup di L. Ambil suatu barisan Cauchy (x_n) di D, sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

untuk $m, n \geq n_0$.

Karena $D \subseteq L$, maka barisan (x_n) juga berada di L. Dan karena (L, d) adalah ruang metrik lengkap, maka barisan Cauchy (x_n) konvergen ke suatu titik di L. Berdasarkan Lemma 2.16, karena (x_n) konvergen ke x dan $(x_n) \in D$, maka $x \in D$. Dengan demikian (D, d) merupakan subruang dari ruang metrik yang lengkap.

$(\Leftarrow)$ Diketahui (D, d) merupakan subruang dari ruang metrik yang lengkap. Misalkan $x \in cl(D)$.

Ambil barisan (x_n) di D. Maka terdapat barisan (x_n) yang konvergen ke $x \in cl(D)$, ditulis

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Oleh karena itu, (x_n) adalah barisan Cauchy di D, dan $x \in D$. Dengan demikian $cl(D) = D$. Ini menunjukkan D tertutup.

2.1.7 Pemetaan Kontinu di Ruang Metrik

Definisi 2.22 (Kreyszig, 1978)

Misalkan T adalah pemetaan dari ruang metrik (L, d) ke ruang metrik $(O, \tilde{d})$, $T: L \to O$. Maka

1. Pemetaan T disebut kontinu di titik $x_0 \in L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\tilde{d}\big(T(x), T(x_0)\big) < \varepsilon,$$

   untuk setiap $x \in L$ dengan $d(x, x_0) < \delta$.

2. Jika pemetaan T kontinu pada setiap titik x di L maka T disebut kontinu.

2.1.8 Titik Tetap di Ruang Metrik

Definisi 2.23 (Sihombing & Septiati, 2018)

Diberikan ruang metrik (L, D). Titik $x \in L$ disebut titik tetap dari pemetaan $T: L \to L$ jika $T(x) = x$.

Contoh:

Pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $T(x) = x^2$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. 0 dan 1 adalah titik tetap dari T.

2.1.9 Pemetaan Kontraktif pada Ruang Metrik

Definisi 2.24 (Sihombing & Septiati, 2018)

Diberikan ruang metrik (L, d). Pemetaan $T: L \to L$ disebut pemetaan kontraktif pada L apabila terdapat bilangan riil $a \in (0,1)$, sedemikian sehingga berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq a d(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in L$.

Contoh 2.25:

Misalkan $L = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$. Pemetaan $T: L \to L$ dengan $T(x) = x^2$ adalah pemetaan kontraktif dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$.

<u>Bukti:</u>

Dengan menggunakan Definisi 2.24, maka:

$$
\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| \\
&= |x - y||x + y| \\
&\leq |x - y| \sup_{x,y \in L} |x + y| \\
&\leq |x - y| \sup_{x \in L} |x| + \sup_{y \in L} |y| \\
&= |x - y| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} |x - y|, x \neq y.
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa T adalah pemetaan kontraktif.

Lemma 2.26 (Sihombing & Septiati, 2018)

Pemetaan T adalah kontraktif di ruang metrik (L, d), T juga merupakan pemetaan yang kontinu.

<u>Bukti:</u>

Diketahui $a \in (0,1)$, misalkan $x \in L$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$,

dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{a} > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $d(x, y) < \delta$ berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq a d(x, y) < a \frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon$$

karena x sebarang anggota di L, maka T kontinu di L.

2.1.10 Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial

Ruang metrik parsial memiliki perbedaan dengan ruang metrik di salah satu sifatnya yaitu jarak suatu titik dengan dirinya sendiri *(self-distance)*. Sebelum membahas tentang hubungan ruang metrik dan ruang metrik parsial, akan diberikan terlebih dahulu definisi ruang metrik parsial.

Definisi 2.27 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah sebarang himpunan tak kosong dan p *(distance)* adalah metrik parsial pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$. Pemetaan $p : L \times L \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ memenuhi:

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ *(Equality Biimplies Indistancy)*

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$ *(Small Self-Distances)*

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$ (Simetri)

(P4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ *(Triangularity).*

(L, p) adalah ruang metrik parsial.

Selanjutnya akan dibuktikan apakah ruang metrik parsial memenuhi syarat-syarat sebagai ruang metrik. Untuk mengetahui akan diberikan contoh sebagai beikut.

Contoh 2.28:

Diberikan himpunan $\mathbb{R}^+$. Pemetaan $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ didefinisikan sebagai

$$p(x,y) = max\ \{x, y\}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$. $(\mathbb{R}^+, p)$ adalah metrik parsial.

<u>Bukti:</u>

(P1) ($\Rightarrow$) diketahui $x = y$, akan dibuktikan $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$.

Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$,

karena $x = y$,

maka $p(x, x) \quad = p(x, y)$

$= max\{x, x\}$

$= x = y$

$= max\{y, y\}$

$= p(x, y) = p(y, y)$.

Terbukti bahwa jika $x = y$, maka $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$.

($\Leftarrow$) diketahui $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$, akan dibuktikan $x = y$.

Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$p(x, x) = p(x, y)$

$= max\{x, x\} = x$

$p(y, y) = p(x, y)$

$= max\{y, y\} = y$

Terbukti bahwa jika $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$, maka $x = y$.

(P2) Akan ditunjukkan $p(x, x) \leq p(x, y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$

$p(x, x) = max\{x, x\}$

$\leq max\{x, y\} = p(x, y)$

Jadi, $p(x, x) \leq p(x, y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(P3) Akan ditunjukkan $p(x, y) = p(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$

Ambil $x, y \in \mathbb{R}^+$, maka:

$$p(x, y) = max\{x, y\} = max\{y, x\} = p(y, x)$$

Jadi, $p(x, y) = p(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(P4) Akan ditunjukkan $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

Ambil $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, maka:

$$\begin{aligned} p(x, y) + p(z, z) &= max\{x, y\} + max\ \{z, z\} \\ &\leq max\{x, z\} + max\ \{y, z\} \\ &\leq max\{x, z\} + max\ \{z, y\} \\ &\leq p(x, z) + p(z, y). \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$.

Terbukti $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$.

Terbukti $(\mathbb{R}^+, p)$ ruang metrik parsial.

Kemudian karena terbukti $(\mathbb{R}^+, p)$ ruang metrik parsial, maka akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}^+, p)$ bukan merupakan ruang metrik seperti contoh berikut.

Contoh 2.29:

Menggunakan contoh penyangkal.

Diberikan himpunan $\mathbb{R}^+$. Pemetaan $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ didefinisikan sebagai

$$p(x, y) = max\ \{x, y\}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$. $(\mathbb{R}^+, p)$ bukan merupakan ruang metrik.

<u>Bukti:</u>

Menggunakan bukti kontradiksi.

(M2) $p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (*Equality Biimplies Indistancy).*

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Untuk $x = 2, y = 2$ maka

$$p(2,2) = \max\{2,2\} = 2.$$

Sehingga $p(x, y) \neq 0$ dan bisa saja $x \neq y$.

Artinya $p(x, y) = 0$ tidak berlaku.

Karena terdapat salah satu sifat ruang metrik yang tidak terpenuhi, dengan demikian terbukti bahwa ruang metrik parsial bukan merupakan ruang metrik.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan al-Quran/Hadits

Penelitian ini membahas tentang pembuktian teorema. Teorema yang sudah ada perlu dibuktikan agar dapat dipertanggungjawabkan kebenarannya. Oleh karena itu, diintegrasikan dengan al-Quran yang menjelaskan pentingnya pembuktian menurut Islam. Allah SWT berfirman yang artinya (Kemenag, 2024):

"(Yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang dari domba dan sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya." Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar." (Q.S. al-An'am [6]:143)

Ibnu Katsir dalam tafsirnya, pada kalimat *"(Yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang dari domba dan sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya.""* dijelaskan bahwa kebiasaan masyarakat Arab pada masa pra-Islam yang menunjukkan ketidaktahuan mereka. Mereka mengatakan bahwa sebagian hewan ternak adalah haram, lalu mereka mengkategorikannya seperti *bahirah, saibah, wasilah*, dan *ham*. Larangan-larangan ini juga diterapkan pada tanaman dan buah-buahan. Kemudian, pada kalimat *"Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar."* dijelaskan bahwa Allah SWT meminta bukti serta penjelasan dari kitab Allah SWT dan para nabi-Nya bahwa Allah benar-benar mengharamkan hal tersebut, jika memang mereka berkata benar dan tidak mengada-ada. Allah SWT meminta penjelasan berdasarkan pengetahuan jika mereka adalah orang yang benar (Ghoffar dkk, 2004).

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Subbab ini menjelaskan lemma dan teorema yang akan dibuktikan yang berkaitan dengan topik penelitian, dan menggunakan teori pendukung pada subbab sebelumnya.

Definisi 2.30 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah sebarang himpunan tak kosong dan p *(distance)* adalah metrik parsial pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$. Pemetaan $p : L \times L \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ memenuhi:

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ *(Equality Biimplies Indistancy)*

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$ *(Small Self-Distances)*

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$ (Simetri)

(P4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ *(Triangularity)*

(L, p) adalah ruang metrik parsial.

Definisi 2.31 (Dwivedi, 2022)

Misalkan (x_n) adalah barisan di ruang metrik parsial (L, p), maka

1. (x_n) konvergen di titik $x \in L$, jika $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n)$.
2. (x_n) disebut barisan Cauchy jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ adalah *finite*.

Definisi 2.32 (Dwivedi, 2022)

Ruang metrik parsial (L, p) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy (x_n) di dalamnya konvergen menuju suatu elemen di L, dengan $x \in L$ sedemikian sehingga

$$p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

Lemma 2.33 (Dwivedi, 2022)

Misalkan (L, p) adalah ruang metrik parsial, maka

1. Jika barisan (x_n) disebut barisan Cauchy di ruang metrik (L, p^r), maka (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L, p).
2. (L, p) lengkap jika dan hanya jika ruang metrik (L, p^r) lengkap.

Teorema 2.34 (Bukatin dkk, 2009)

Misalkan T adalah pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga terdapat bilangan riil $a \in [0,1)$, berlaku

$$p(T(x), T(y)) \leq ap(x, y)$$

untuk semua $x, y \in L$, maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Definisi 2.35 (Dwivedi, 2022)

Pemetaan tak menurun $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ disebut pemetaan Gauge Bianchini-Grandolfi pada $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ jika $\sum_0^\infty \varphi^n(t)$ konvergen untuk setiap $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, dengan φ^n adalah iterasi ke-n dari φ, dan $\varphi^0(t) = t$ dan seterusnya.

$$\varphi^0(t) = t, \varphi^1(t) = \varphi(t), \varphi^2(t) = \varphi\big(\varphi(t)\big), \dots, \varphi^n(t) = \varphi\big(\varphi^{n-1}(t)\big).$$

Lemma 2.36

Jika $\varphi \in \psi$, maka $\varphi(0) = 0$ dan $\varphi(t) < t$, untuk semua $t > 0$ (Dwivedi, 2022).

Dengan $\psi = \{\varphi | \varphi: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah kontinu, tak menurun dan $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\}$ (Rao dkk, 2015).

Definisi 2.37 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah himpunan tak kosong dan $A, B: L \to L$ merupakan pemetaan diri pada L. Jika $u = Ax = Bx$ untuk sebarang $x \in L$, maka x disebut titik koinsidensi pada A dan B, dan u disebut titik koinsidensi pada A dan B.

Definisi 2.38 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah himpunan tak kosong dan $A, B: L \to L$ merupakan pemetaan diri pada L. Maka A bersama B disebut kompatibel lemah jika $ABt = BAt$, dengan $At = Bt$ untuk sebarang $t \in L$.

Teorema 2.39 (Dwivedi, 2022)

Misalkan A, B, S dan T adalah empat pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga

$$A(L) \subseteq T(L), B(L) \subseteq S(L)$$

dan

$$p(Ax, By) \leq \varphi(max\{p(Sx, Ty), [p(Sx, Ax) + p(Ty, By)], [p(Sx, By) + p(Ty, Ax)]\}),$$

untuk semua $x, y \in L$, dengan $\varphi \in \psi$.

Jika satu dari *range* $A(L), B(L), T(L)$ dan $S(L)$ adalah sub himpunan tertutup dari (L, p), maka

1. A dan S mempunyai titik koinsidensi.
2. B dan T mempunyai titik koinsidensi.

Teorema 2.40 (Dwivedi, 2022)

Misalkan A, B, S dan T adalah empat pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga

$$A(L) \subseteq T(L), B(L) \subseteq S(L)$$

dan

$$p(Ax, By) \leq \varphi(max\{p(Sx, Ty), [p(Sx, Ax) + p(Ty, By)], [p(Sx, By) + p(Ty, Ax)]\}),$$

untuk semua $x, y \in L$, dengan $\varphi \in \psi$.

Jika pasangan (A, S) dan (B, T) adalah kompatibel lemah, maka A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum tunggal.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Pendekatan ini mengandalkan studi pustaka sebagai metode utama, yakni dengan mengumpulkan berbagai informasi yang relevan dengan tema yang sedang dikaji. Proses ini dilakukan dengan mengumpulkan beberapa sumber seperti buku dan artikel untuk memperoleh informasi yang lebih lengkap.

3.2 Pra Penelitian

Langkah awal sebelum memulai penelitian adalah mengumpulkan beragam referensi yang memiliki keterkaitan dengan topik yang dikaji. Berikut kajian terdahulu yang digunakan sebagai landasan dalam penelitian ini adalah buku karya Sihombing & Septiati (2018), serta terdapat penelitian lain, salah satunya yakni Dwivedi (2022) yang menjadi dasar dalam menyusun tahapan pembuktian.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut tahapan pada penelitian ini.

1. Mempelajari penelitian terdahulu maupun penelitian terkait topik penelitian.
2. Menguraikan definisi terkait ruang metrik dan ruang metrik parsial, barisan yang berlaku di dalamnya, dan kelengkapannya.

3. Menentukan serta mengkaji ayat al-Quran yang berkaitan dengan topik penelitian.
4. Menganalisa teori pendukung dari topik penelitian.
5. Membuktikan teorema titik tetap di ruang metrik parsial.
6. Membuat kesimpulan dari pembuktian teorema titik tetap di ruang metrik parsial.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Teorema Titik Tetap untuk Empat Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial

Sebelum membahas mengenai teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial akan dibahas kembali mengenai Definisi ruang metrik parsial dengan Definisi barisan di dalamnya seperti berikut.

Definisi 4.1 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah sebarang himpunan tak kosong dan p *(distance)* adalah metrik parsial pada L, sehingga untuk semua $x, y, z \in L$. Pemetaan $p : L \times L \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ memenuhi:

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ *(Equality Biimplies Indistancy)*

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$ *(Small Self-Distances)*

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$ (Simetri)

(P4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ *(Triangularity).*

(L,p) adalah ruang metrik parsial.

Pada ruang metrik terdapat sifat **(M2)** yaitu $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (*Equality Biimplies Indistancy)*, namun di dalam ruang metrik parsial tidak berlaku sebaliknya, seperti yang dijelaskan pada *remark* berikut.

Remark 4.2 (Dwivedi, 2022)

Jika $p(x,y) = 0$, maka dari (P1) dan (P2) diperoleh $x = y$. Tetapi jika $x = y$, maka $p(x,y) \neq 0$ atau positif.

<u>Bukti:</u>

1. Jika $p(x, y) = 0$ maka $x = y$.

   Berdasarkan sifat (P2) diperoleh

$$p(x, x) \leq p(x, y) = 0.$$

   Sehingga $p(x, x) \leq 0$, namun karena $p(x, x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ maka $p(x, x) = 0$.

   Berdasarkan sifat (P3) dan (P2) diperoleh

$$p(y, y) \leq p(y, x) = p(x, y) = 0$$

   Sehingga $p(y, y) = 0$.

   Jadi $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) = 0$, berdasarkan (P1) yaitu

$$x = y \text{ jika dan hanya jika } p(x, x) = p(x, y) = p(y, y).$$

   Dengan demikian terbukti bahwa jika $p(x, y) = 0$ maka $x = y$.

2. Jika $x = y$ maka $p(x, y) \neq 0$ atau positif.

   Berdasarkan sifat (P1) yaitu

$$x = y \text{ jika dan hanya jika } p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

   Apabila $x = y$, maka $p(x, y) = p(x, x)$.

   Tetapi pada ruang metrik parsial, tidak disyaratkan bahwa $p(x, x) = 0$. Berbeda dengan ruang metrik, sehingga pada ruang metrik parsial diketahui

$$p(x, x) \leq p(x, y).$$

   Artinya bisa saja $p(x, x) = c > 0$, maka bisa berlaku pada ruang metrik parsial. Sehingga $p(x, y) = p(x, x) = c > 0$.

   Dengan demikian terbukti bahwa jika $x = y$ maka $p(x, y) \neq 0$ atau positif.

Kemudian didefinisikan suatu pemetaan p^r pada himpunan tak kosong L dengan $p^r : L \times L \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in L$,

$$p^r(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y).$$

Karena p adalah metrik parsial di L, pemetaan p^r memenuhi sifat-sifat metrik di L.

1. Untuk sifat (M1), ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$.

   Diketahui $p : L \times L \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah metrik parsial, maka

   $$p(x,y), p(x,x), p(y,y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

   dengan

   $$p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y).$$

   Dari sifat (P2) yaitu

   $$p(x,x) \leq p(x,y) \text{ dan } p(y,y) \leq p(x,y),$$

   lalu

   $$p(x,x) + p(y,y) \leq 2p(x,y)$$

   Maka

   $$2p(x,x) - [p(x,x) + p(y,y)] \geq 0.$$

   Sehingga $p^r(x,y) \geq 0$.

   Karena jumlah $p(x,x) + p(y,y)$ tidak pernah lebih besar dari $2p(x,y)$ berdasarkan sifat (P2).

   Operasi pengurangan antara bilangan riil tetap menghasilkan bilangan riil.

   Dengan demikian terbukti bahwa $p^r(x,y) \in \mathbb{R}$.

   Diketahui fungsi p mempunyai kodomain $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

   Ambil sebarang $x, y \in L$. Diketahui p adalah metrik parsial, maka

   $$p(x,y), p(x,x), p(y,y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

   Karena $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, maka masing-masing $p(x,y), p(x,x), p(y,y) < \infty$.

   Pengurangan bilangan riil yang *finite* tetap menghasilkan bilangan riil yang *finite*. Dengan demikian $p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$ *finite*.

   Menggunakan (P2) yaitu,

$$p(x,x) \leq p(x,y) \text{ dan } p(y,y) \leq p(x,y).$$

Diperoleh

$$p(x,x) + p(y,y) \leq 2p(x,y)$$

$$2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \geq 0.$$

Terbukti $p^r(x,y) \geq 0$.

Dengan demikian terbukti $p^r(x,y) \in \mathbb{R}, p^r(x,y) < \infty, p^r(x,y) \geq 0$.

2. Untuk sifat (M2) akan dibuktikan $p^r(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

   ($\Rightarrow$) Jika $p^r(x,y) = 0$ maka $x = y$.

   Dari definisi

$$p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$$

$$2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y). \tag{1}$$

   Perhatikan (P2) bahwa

$$p(x,x) \leq p(x,y) \text{ dan } p(y,y) \leq p(x,y)$$

   sehingga

$$p(x,x) + p(y,y) \leq 2p(x,y). \tag{2}$$

   Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y) \leq 2p(x,y).$$

   Dari pertidaksamaan (1) maka $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$.

   Menggunakan (P1), jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ maka $x = y$.

   Dengan demikian terbukti jika $p^r(x,y) = 0$ maka $x = y$.

   ($\Leftarrow$) Jika $x = y$ maka $p^r(x,y) = 0$.

   Diketahui $x = y$, substitusi ke $p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$.

   Karena $x = y$, maka

$$p(x,y) = p(x,x)$$

$$p(y,y) = p(x,x).$$

Sehingga

$$p^r(x,y) = 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) = 2p(x,x) - 2p(x,x) = 0.$$

Dengan demikian terbukti jika $x = y$ maka $p^r(x,y) = 0$.

3. Untuk sifat (M3) akan dibuktikan $p^r(x,y) = p^r(y,x)$.

   Perhatikan $p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$.

   Karena p adalah metrik parsial, maka

$$p(x,y) = p(y,x)$$

   yang memenuhi (P3). Sehingga diperoleh

$$p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$p^r(y,x) = 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x).$$

   Karena $p(x,y) = p(y,x)$, maka

$$p^r(y,x) = 2p(x,y) - p(y,y) - p(x,x).$$

   Perhatikan

$$p^r(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$p^r(y,x) = 2p(x,y) - p(y,y) - p(x,x).$$

   Maka $p^r(y,x) = 2p(x,y) - p(y,y) - p(x,x) = p^r(x,y)$.

   Penjumlahan bilangan riil bersifat komutatif, walaupun susunannya berbeda, maka akan diperoleh hasil yang sama.

   Dengan demikian terbukti bahwa $p^r(x,y) = p^r(y,x)$.

4. Untuk sifat (M4) akan dibuktikan $p^r(x,y) \leq p^r(x,z) + p^r(z,y)$.

   Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   Dengan menggunakan (P4) yaitu $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
p^r(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&\leq 2\big(p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)\big) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(x,z) + 2p(z,y) - 2p(z,z) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(x,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(z,z) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y) \\
&= p^r(x,z) + p^r(z,y).
\end{aligned}
$$

Terbukti $p^r(x,y) \leq p^r(x,z) + p^r(z,y)$.

Dari aksioma P1, P2, P3 dan P4 untuk p, dapat ditunjukkan bahwa p^r juga berlaku sifat M1, M2, M3 dan M4, sehingga terbukti bahwa p^r adalah metrik pada L.

Definisi 4.3 (Dwivedi, 2022)

Misalkan (L,p) adalah ruang metrik parsial dan (x_n) adalah barisan di L, maka

1. (x_n) konvergen di titik $x \in L$, apabila $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$.
2. (x_n) disebut barisan Cauchy apabila $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ adalah *finite*.

Contoh 4.4:

Misalkan $L = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dengan metrik parsial $p(x,y) = max\,\{x,y\}$. Misalkan barisan (x_n) didefinisikan oleh

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$$

untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik parsial (L,p) konvergen ke 0.

<u>Bukti:</u>

Diketahui bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, dan

$$p(0,x_n) = \max\left\{0,\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}.$$

Sehingga $\lim_{n\to\infty}(0,x_n) = 0$.

Selain itu, $p(0,0) = \max\{0,0\} = 0$.

Maka berdasarkan definisi barisan konvergen di ruang metrik parsial, yaitu

$$(x_n) \longrightarrow x \text{ apabila } p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n),$$

dapat disimpulkan bahwa barisan (x_n) konvergen ke $x = 0$ dalam ruang metrik parsial.

Contoh 4.5:

Misalkan $L = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq 0\}$ dengan metrik parsial $p(x,y) = ma\,x\{x,y\}$. Misalkan barisan (x_n) didefinisikan oleh

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$$

untuk $n \in \mathbb{N}$ di dalam ruang metrik parsial (L,p). Barisan (x_n) adalah barisan Cauchy di L.

<u>Bukti:</u>

Untuk menunjukkan bahwa barisan (x_n) juga merupakan barisan Cauchy, periksa bahwa

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) \text{ adalah } \textit{finite}.$$

Karena

$$p(x_n,x_m) = \max\{\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{m}\} \longrightarrow 0 \text{ saat } m,n \longrightarrow \infty,$$

Maka nilai *limit* adalah 0, yang merupakan bilangan berhingga.

Oleh karena itu, barisan (x_n) adalah barisan Cauchy dalam ruang metrik parsial.

Definisi 4.6 (Dwivedi, 2022)

Ruang metrik parsial (L,p) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy (x_n) di dalamnya konvergen menuju suatu elemen di L, dengan $x \in L$ sedemikian sehingga

$$p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

Lemma 4.7 (Dwivedi, 2022)

Misalkan (L,p) adalah ruang metrik parsial, maka

1. Jika barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di ruang metrik (L,p^r), maka (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L,p).
2. (L,p) lengkap jika dan hanya jika ruang metrik (L,p^r) lengkap. Lebih jauh lagi $\lim_{n\to\infty} p^r(x_n,x)$ jika dan hanya jika $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$.

Bukti:

1. Diketahui (x_n) adalah barisan Cauchy di (L,p^r),

   akan dibuktikan bahwa (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L,p).

   Berdasarkan Definisi 2.13, barisan (x_n) dikatakan konvergen di (L,p^r).

   Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga

   $$\begin{aligned} p^r(x,x) = \lim_{n\to\infty} p^r(x_n,x_m) = \lim_{n\to\infty}\{2p(x_n,x_m) - p(x_n,x_n) - p(x_m,x_m)\} \\ = 2\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_m) - 0 - 0 \\ < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ < \varepsilon. \end{aligned}$$

   Terbukti bahwa barisan (x_n) konvergen di (L,p). Karena (x_n) adalah barisan konvergen, berdasarkan Teorema 2.18 juga merupakan barisan Cauchy. Sehingga terbukti bahwa (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L,p).
2. $(\Rightarrow)$ Jika (L,p^r) lengkap maka (L,p) lengkap.

   Diketahui bahwa (x_n) adalah barisan konvergen di (L,p^r).

Akan dibuktikan bahwa (x_n) juga merupakan barisan konvergen di (L, p).

Berdasarkan Definisi 2.13, barisan (x_n) merupakan barisan konvergen di (L, p^r).

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p^r(x,x) &= \lim_{n\to\infty} p^r(x_n, x) = \lim_{n\to\infty}\{2p(x_n,x) - p(x,x) - p(x_n,x_n)\} \\ &= 2\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) - \lim_{n\to\infty} p(x,x) - \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) - \lim_{n\to\infty} p(x,x) + \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) - \lim_{n\to\infty} p^r(x_n,x_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti (x_n) merupakan barisan konvergen di (L, p).

Karena (x_n) merupakan barisan konvergen di (L, p), berdasarkan Teorema 2.18 (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L, p). Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.6 (L, p) adalah lengkap.

$(\Leftarrow)$ Jika (L, p) lengkap maka (L, p^r) lengkap.

Diketahui bahwa (L, p) lengkap.

Berdasarkan Definisi 2.13, barisan (x_n) merupakan barisan konvergen di (L, p^r). Karena (x_n) merupakan barisan konvergen di (L, p^r), berdasarkan Teorema 2.18 (x_n) juga merupakan barisan Cauchy di (L, p^r). Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.6 (L, p^r) adalah lengkap.

Definisi 4.8 (Bukatin dkk, 2009)

Diberikan ruang metrik parsial (L, p). Pemetaan $T: L \longrightarrow L$ dikatakan pemetaan kontraktif pada L apabila terdapat bilangan riil $a \in [0,1)$, berlaku

$$p(T(x), T(y)) \leq ap(x, y)$$

untuk semua $x, y \in L$.

Teorema 4.9 (Dwivedi, 2022)

Misalkan T adalah pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga terdapat bilangan riil $a \in [0,1)$, berlaku

$$p(T(x), T(y)) \leq ap(x, y)$$

untuk semua $x, y \in L$, maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti:

1. Konstruksi barisan (x_n).

   Ambil sebarang $x_0 \in L$,

   Barisan $(x_n) = T(x_{n-1})$ untuk $n = 1,2,3, \ldots$ yaitu $x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \ldots$

   Barisan di atas merupakan barisan dari pemetaan T terhadap (x_n).

2. Akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik parsial lengkap.

   Karena T merupakan pemetaan kontraktif maka memenuhi

   $$p(Tx, Ty) \leq ap(x, y)$$
   $$a \in [0,1)$$

   sehingga diperoleh

   $$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) = p(Tx_{n-1}, Tx_n) &\leq ap(x_{n-1}, x_n) \\ &= ap(Tx_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\leq a^2 p(x_{n-1}, x_n) \ldots \\ &\leq a^n p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

   untuk $n = 1,2,3, \ldots.$

   Selanjutnya untuk $m > n$, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$
\begin{aligned}
p(x_m, x_n) = p(Tx_{m-1}, Tx_{n-1}) \\
&\le p(Tx_m, Tx_{m-1}) + p(Tx_{m+1}, Tx_m) + \cdots + p(Tx_{n+1}, Tx_n) \\
&\le a^{m-1} p(x_0, x_1) + \cdots + a^n p(x_0, x_1) \\
&\le (a^{m-1} + \cdots + a^n) p(x_0, x_1) \\
&= a^n (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots) p(x_0, x_1) \\
&= \frac{a^n}{1-a} p(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

dengan $\frac{a^n}{1-a} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$ dan $p(x_0, x_1)$ adalah konstanta.

Dengan demikian terbukti bahwa barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy.

3. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen di ruang metrik parsial lengkap.

   Karena (L, p) ruang metrik parsial lengkap dan (x_n) adalah barisan Cauchy,maka barisan (x_n) konvergen di dalam (L, p). Anggaplah (x_n) konvergen ke suatu titik $x \in L$, $(x_n) \longrightarrow x$.

4. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan T mempunyai titik tetap yaitu x.

   Telah diketahui bahwa T kontinu berdasarkan Lemma 2.26 dan (x_n) konvergen ke x, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$$

   karena $T(x_n) = x_{n+1}$, maka $T(x_n)$ konvergen ke x. Diperoleh

$$T(x_n) = \lim x_{n+1} = x$$

   Sehingga diperoleh $T(x) = x$, terbukti bahwa x merupakan titik tetap dari pemetaan T.

5. Akan ditunjukkan bahwa T mempunyai titik tetap tunggal.

Anggaplah e juga merupakan titik tetap T, sehingga $T(x) = x$ dan $T(e) = e$. Oleh karena itu

$$p(x, e) = p(Tx, Te) \leq ap(x, e)$$

Karena $a \in [0,1)$, maka $p(x, e) = 0$. Dengan demikian $x = e$.

Jadi terbukti bahwa T mempunyai titik tetap tunggal.

Definisi 4.10 (Dwivedi, 2022)

Pemetaan tak menurun $\varphi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ disebut pemetaan Gauge Bianchini-Grandolfi pada $\mathbb{R}^+$ jika $\sum_0^\infty \varphi^n(t)$ konvergen untuk setiap $t \in \mathbb{R}^+$, dengan φ^n adalah iterasi ke-n dari φ, dan $\varphi^0(t) = t$ dan seterusnya.

$$\varphi^0(t) = t, \varphi^1(t) = \varphi(t), \varphi^2(t) = \varphi\big(\varphi(t)\big), \dots, \varphi^n(t) = \varphi\big(\varphi^{n-1}(t)\big).$$

Lemma 4.11

Jika $\varphi \in \psi$, maka $\varphi(0) = 0$ dan $\varphi(t) < t$, untuk semua $t > 0$ (Dwivedi, 2022). Dengan $\psi = \{\varphi | \varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ adalah kontinu, tak menurun dan $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\}$ (Rao dkk, 2015).

Bukti:

1. Diketahui $\varphi \in \psi$, akan dibuktikan bahwa $\varphi(0) = 0$.

   Dari definisi himpunan ψ diketahui bahwa $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

   Artinya jika $t = 0$ maka $\varphi(0) = 0$ dan berlaku sebaliknya.

   Oleh karena itu, terbukti bahwa $\varphi(0) = 0$.

2. Diketahui $\varphi \in \psi$, akan dibuktikan bahwa $\varphi(t) < t$, untuk semua $t > 0$.

   Menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan $\varphi(t) \geq t$ untuk semua $t > 0$. Sehingga $\varphi(t) \geq t > 0$, maka $\varphi(t) \neq 0$.

   Berdasarkan definisi himpunan ψ diketahui bahwa $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

   Jadi jika $\varphi(t) = t$, maka $t = 0$ yang merupakan kontradiksi.

Oleh karena itu, tidak mungkin ada $t > 0$ dengan $\varphi(t) \geq t$. Artinya untuk semua $t > 0$, pasti $\varphi(t) < t$.

Definisi 4.12 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah himpunan tak kosong dan $A, B: L \to L$ merupakan pemetaan diri pada L. Jika $u = Ax = Bx$ untuk sebarang $x \in L$, maka x disebut titik koinsidensi pada A dan B, dan u disebut titik hasil koinsidensi pada A dan B.

Definisi 4.13 (Dwivedi, 2022)

Misalkan L adalah himpunan tak kosong dan $A, B: L \to L$ merupakan pemetaan diri pada L. Maka A bersama B disebut kompatibel lemah jika $ABt = BAt$, dengan $At = Bt$ untuk sebarang $t \in L$.

Teorema 4.14 Pemetaan Kontraktif Lemah (Dwivedi, 2022)

Misalkan A, B, S dan T adalah empat pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga

$$A(L) \subseteq T(L), B(L) \subseteq S(L)$$

dan

$$p(Ax, By) \leq \varphi(max\{p(Sx, Ty), [p(Sx, Ax) + p(Ty, By)], [p(Sx, By) + p(Ty, Ax)]\}), \quad (4.1)$$

untuk semua $x, y \in L$, dengan $\varphi \in \psi$.

Jika satu dari *ranges* $A(L), B(L), T(L)$ dan $S(L)$ adalah sub himpunan tertutup dari (L, p), maka

1. A dan S mempunyai titik koinsidensi.
2. B dan T mempunyai titik koinsidensi.

<u>Bukti:</u>

1. Konstruksi barisan (x_n) dan (y_n).

Ambil sebarang $x_0 \in L$,

karena $A(L) \subseteq T(L)$, terdapat $x_1 \in L$ sedemikian sehingga

$$Tx_1 = Ax_0$$

karena $B(L) \subseteq S(L)$, terdapat $x_1 \in L$ sedemikian sehingga

$$Sx_2 = Bx_1.$$

Barisan (x_n) dan (y_n) di L didefinisikan

$$y_{2n} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n}, y_{2n+1} = Sx_{2n+2} = Bx_{2n+1}, \tag{4.2}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik parsial.

Ambil $n, m \in \mathbb{N}, n > m$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
p(y_{2m}, y_{2m+1}) &= p(Ax_{2m}, Bx_{2m+1}) \\
&\leq \varphi(max\{p(Sx_{2m}, Tx_{2m+1}), [p(Sx_{2m}, Ax_{2m}) \\
&\qquad + p(Tx_{2m+1}, Bx_{2m+1})], [p(Sx_{2m}, Bx_{2m+1}) \\
&\qquad + p(Tx_{2m+1}, Ax_{2m})]\}) \\
&\leq \varphi(max\{p(y_{2m-1}, y_{2m}), [p(y_{2m-1}, y_{2m}) + \\
&\quad p(y_{2m}, y_{2m+1})], [p(y_{2m-1}, y_{2m+1}) + p(y_{2m}, y_{2m})]\}) \\
&\leq \varphi(max\{p(y_{2m-1}, y_{2m}), [p(y_{2m-1}, y_{2m+1}) + \\
&\quad p(y_{2m}, y_{2m})], [p(y_{2m-1}, y_{2m+1}) + p(y_{2m}, y_{2m})]\}). \\
&\leq \varphi(max\{p(y_{2m-1}, y_{2m}), p(y_{2m-1}, y_{2m+1}), p(y_{2m-1}, y_{2m+1})\}) \\
&\leq \varphi(max\{p(y_{2m-1}, y_{2m}), p(y_{2m-1}, y_{2m+1})\}). \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$p(y_{2m+1}, y_{2m+2}) \tag{4.4}$$
$$\leq \varphi(max\{p(y_{2m}, y_{2m+1}), p(y_{2m}, y_{2m+2})\}).$$

Oleh karena itu dari (4.3) dan (4.4), diperoleh

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \varphi(max\{p(y_{n-1}, y_n), p(y_n, y_{n+1})\}). \tag{4.5}$$

Misalkan terdapat $m \in \mathbb{N}$ sehingga

$$p(y_{2m-1}, y_{2m}) = 0$$

maka diperoleh $y_{2m-1} = y_{2m}$.

Dari (4.3) diperoleh

$$p(y_{2m-1}, y_{2m}) \leq \varphi\{p(y_{2m}, y_{2m+1})\}.$$

Karena $\varphi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$, diperoleh

$$p(y_{2m}, y_{2m+1}) = 0$$

maka

$$y_{2m} = y_{2m+1}.$$

Dari (4.4) diperoleh

$p(y_{2m+1}, y_{2m+2}) \leq \varphi\{p(y_{2m+1}, y_{2m+2})\}$, maka $y_{2m+1} = y_{2m+2}$.

Sehingga

$$y_{2m-1} = y_{2m} = y_{2m+1} = y_{2m+2} = \cdots \tag{4.6}$$

Jadi (y_n) adalah barisan Cauchy di (L, p).

3. Akan ditunjukkan bahwa (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik (L, p^r).

   Selanjutnya asumsikan bahwa $p(y_n, y_{n+1}) > 0$, dengan n lebih besar dari (4.5) pada $\varphi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$, diperoleh

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \varphi(max\{p(y_{n-1}, y_n), p(y_n, y_{n+1})\})$$
$$= \varphi(p(y_{n-1}, y_n))$$

Sehingga

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \varphi\{p(y_{n-1}, y_n)\}. \qquad (4.7)$$

Mengganti ketaksamaan n kali, diperoleh

$$p(y_n, y_{n+1}) \leq \varphi^n\{p(y_0, y_1)\} \qquad (4.8)$$

menggunakan (P1) dan (P2), diperoleh

$$\max\{p(y_n, y_n), p(y_{n+1}, y_{n+1})\} \leq p(y_n, y_{n+1}) \qquad (4.9)$$

Oleh karena itu dari (4.8) dan (4.9), diperoleh

$$\max\{p(y_n, y_n), p(y_{n+1}, y_{n+1})\} \leq \varphi^n\{p(y_n, y_{n+1})\}. \qquad (4.10)$$

Jadi

$$\begin{aligned} p^r(y_n, y_{n+1}) &= 2p(y_n, y_{n+1}) - p(y_n, y_n) - p(y_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\leq 2p(y_n, y_{n+1}) - p(y_n, y_n) - p(y_{n+1}, y_{n+1}) \\ &\leq 4\varphi^n\{p(y_0, y_1)\}. \qquad (4.11) \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk metrik p^r, berdasarkan ketaksamaan segitiga untuk sebarang $l, n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\begin{aligned} p^r(y_n, y_{n+1}) &\leq p^r(y_n, y_{n+1}) + p^r(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + p^r(y_{n+l-1}, y_{n+l}) \\ &\leq 4\varphi^n\{p(y_0, y_1)\} + 4\varphi^{n+1}\{p(y_0, y_1)\} + \cdots \\ &\qquad + 4\varphi^{n+l-1}\{p(y_0, y_1)\} \\ &\leq 4[\textstyle\sum_{i=n}^{n+l-1} \varphi^i\{p(y_0, y_1)\}]. \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan positif n_0 sehingga

$p^r(y_n, y_{n+1}) \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$ dan semua $l \in \mathbb{N}$.

Sehingga (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik (L, p^r).

4. Akan ditunjukkan bahwa barisan (y_n) adalah konvergen di ruang metrik parsial lengkap.

Karena (L, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, maka dari Lemma 4.7, (L, p^r) adalah ruang metrik lengkap. Oleh karena itu barisan (y_n) konvergen ke suatu titik, anggaplah $y \in L$.

Dari Lemma 4.7, diperoleh

$$p(y, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y) = \lim_{n,m\to\infty} p(y_n, y_m) \tag{4.12}$$

Karena (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik (L, p^r), maka

$$\lim_{n,m\to\infty} p^r(y_n, y_m) = 0.$$

Oleh karena itu dari Lemma 4.7, diperoleh

$$\lim_{n,m\to\infty} p(y_n, y_m) = 0. \tag{4.13}$$

Dengan demikian dari definisi p^r dan (4.13), diperoleh

$$\lim_{n\geq m\to\infty} p(y_n, y_m) = 0.$$

Oleh karena itu dari (4.12), diperoleh

$$p(y, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y) = \lim_{n\geq m\to\infty} p(y_n, y_m) = 0. \tag{4.14}$$

Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty} p(y_{2n}, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_{2n-1}, y) = 0, \tag{4.15}$$

karena itu, dari (4.15), diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} p(Ax_{2n}, y) = \lim_{n\to\infty} p(Tx_{2n+1}, y) = 0 \tag{4.16}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} p(Bx_{2n-1}, y) = \lim_{n\to\infty} p(Sx_{2n}, y) = 0 \tag{4.17}$$

Karena $B(L) \subseteq S(L)$ dan $y \in S(L)$, maka dari (4.17) terdapat $u \in L$ sehingga $y = Su$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $p(Au, y) = 0$.

Misalkan bahwa $p(Au, y) > 0$, maka diperoleh

$p(Au, y) \leq p(y, Bx_{2n+1}) + p(Bx_{2n+1}, Au) - p(Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1})$

$\leq p(y, Bx_{2n+1}) + p(Bx_{2n+1}, Au)$

$\leq p(y, Bx_{2n+1}) + p(Au, Bx_{2n+1})$

$\leq p(y, y_{2n+1}) + \varphi(\max\{p(Su, Tx_{2n+1}), p(Su, Au)$

$+ p(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1})\}, \{p(Su, Bx_{2n+1}) + p(Tx_{2n}, Au)\})$

$\leq p(y, y_{2n+1}) + \varphi(\max\{p(Su, y_{2n}), p(Su, Au)$

$+ p(y_{2n}, y_{2n+1})\}, \{p(Su, y_{2n+1}) + p(y_{2n}, Au)\})$

$\leq p(y, y_{2n+1}) + \varphi(\max\{p(y, y_{2n}), p(y, Au)$

$+ p(y_{2n}, y_{2n+1})\}, \{p(y, y_{2n+1}) + p(y_{2n}, Au)\})$

Ambil nilai limit $\to \infty$, diperoleh

$p(y, Au) \leq \lim_{n\to\infty} p(y, y_{2n+1})$

$+ \varphi(\lim_{n\to\infty} max\ \{p(y, y_{2n}), [p(y, Au)$

$+ p(y_{2n}, y_{2n+1})][p(y, y_{2n+1}) + p(y_{2n}, Au)]\})$

$= 0 + \varphi\big(p(y, Au)\big) = \varphi(p(y, Au))$

Karena itu untuk $t > 0, \varphi(t) < t$ diperoleh

$$p(y, Au) < p(y, Au),$$

yang merupakan kontradiksi.

Oleh karena itu $p(y, Au) = 0$ maka $y = Au$. (4.18)

Karena $y = Su$, maka $Au = Su$.

Dengan demikian u disebut titik koinsidensi dari A dan S.

Oleh karena itu, terbukti bahwa A dan S mempunyai titik koinsidensi yaitu u.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa B dan T mempunyai titik koinsidensi.

Karena $A(L) \subseteq T(L)$, maka dari (4.18) diperoleh $y \in T(L)$. Karena itu terdapat $v \in L$ sehingga $y = Tv$.

Akan dibuktikan bahwa $p(Bv, y) = 0$. Menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan bahwa $p(Bv, y) > 0$.

Perhatikan bahwa $y = Su = Au = Tv$, dari (4.1) diperoleh

$$
\begin{aligned}
p(y, Bv) &= p(Au, Bv) \\
&\leq \varphi(\max\{p(Su, Tv), [p(Su, Au) + p(Tv, Bv)], [p(Su, Bv) \\
&\qquad + p(Tv, Au)]\}) \\
&\leq \varphi(\max\{p(y, y), [p(y, y) + p(y, Bv)], [p(y, Bv) + p(y, y)]\}) \\
&\leq \varphi(\max\{p(y, Bv), p(y, Bv)\}) \\
&\leq \varphi(p(y, Bv)) \\
&< p(y, Bv)
\end{aligned}
$$

yang merupakan kontradiksi. Karena itu diperoleh

$$p(Bv, y) = 0 \text{ dan } y = Bv = Tv. \tag{4.19}$$

Dengan demikian v disebut titik koinsidensi dari B dan T.

Oleh karena itu, terbukti bahwa B dan T mempunyai titik koinsidensi yaitu v.

Teorema 4.15 Pemetaan Kontraktif Lemah (Dwivedi, 2022)

Misalkan A, B, S dan T adalah empat pemetaan diri pada ruang metrik parsial lengkap (L, p) sehingga

$$A(L) \subseteq T(L), B(L) \subseteq S(L)$$

dan

$$p(Ax, By) \leq \varphi(max\{p(Sx, Ty)\,, [p(Sx, Ax) + p(Ty, By)], [p(Sx, By)$$
$$+ p(Ty, Ax)]\}),$$

untuk semua $x, y \in L$, dengan $\varphi \in \psi$.

Jika pasangan (A, S) dan (B, T) adalah kompatibel lemah, maka A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum tunggal.

Pada Teorema 4.9 membahas titik tetap dari satu pemetaan kontraktif yaitu T, yang merupakan contoh dari titik tetap biasa. Sedangkan pada Teorema ini membahas titik tetap umum dari empat pemetaan kontraktif lemah, yaitu A, B, S dan T. Titik tetap umum merupakan suatu titik yang menjadi titik tetap lebih dari satu pemetaan.

<u>Bukti:</u>

1. Akan dibuktikan bahwa pemetaan A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum.

   Diketahui bawah (A, S) adalah kompatibel lemah, maka dari (4.18) diperoleh

   $$Ay = ASu = SAu = Sy.$$

   Akan dibuktikan bahwa $p(Ay, y) = 0$.

   Menggunakan pembuktian kontradiksi, misalkan bahwa $(Ay, y) > 0$, maka diperoleh

   $$\begin{aligned} p(Ay, y) &\leq (Ay, y_{2n+1}) + p(y_{2n+1}, y) - p(y_{2n+1}, y_{2n+1}) \\ &\leq p(Ay, y_{2n+1}) + p(y_{2n+1}, y) \\ &\leq p(Ay, By_{2n+1}) + p(y_{2n+1}, y) \\ &\leq \varphi(\max\{p(Sy, Tx_{2n+1}), [p(Sy, Ay) \\ &\qquad + p(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1})], [p(Sy, Bx_{2n+1}) \\ &\qquad + p(Tx_{2n+1}, Ay)]\}) + p(y_{2n+1}, y) \end{aligned}$$

$$\leq \varphi(\max\{p(Ay, y_{2n}), [p(Ay, Ay)$$

$$+ p(y_{2n+1}, y_{2n+1})], [p(Ay, y_{2n+1})$$

$$+ p(y_{2n}, Ay)]\}) + p(y_{2n+1}, y)$$

$$\leq \varphi(\max\{p(Ay, y), 0, [p(Ay, y) + p(y, Ay)]\})$$

$$\leq \varphi(p(Ay, y))$$

$$< p(y, Ay)$$

$p(Ay, y) < p(y, Ay)$

yang merupakan kontradiksi.

Sehingga diperoleh

$p(Ay, y) = 0$ dan $Ay = Sy = y$. (4.20)

Selanjutnya, diketahui bahwa (B, T) adalah kompatibel lemah, maka dari (4.19) diperoleh

$$By = BTv = TBv = Ty.$$

Dengan demikian terbukti $p(By, y) = 0$.

Misalkan bahwa $p(By, y) > 0$, maka dari (4.19) dan (4.20), diperoleh

$p(y, By) = p(Ay, By)$

$\leq \varphi(\max\{p(Sy, Ty), [p(Sy, Ay) + p(Ty, By)], [p(Sy, By) + p(Ty, Ay)]\}$

$\leq \varphi(\max\{p(y, By), [p(y, y) + p(By, By)], [p(y, By) + p(By, y)]\}$

$\leq \varphi\big(p(y, By)\big)$

yang merupakan kontradiksi. Oleh karena itu diperoleh

$p(By, y) = 0$ dan $By = Ty = y$ (4.21)

Dari (4.20) dan (4.21), diperoleh

$$y = Ay = By = Sy = Ty$$

Oleh karena itu terbukti bahwa pemetaan A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum yaitu y.

2. Akan dibuktikan bahwa A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum yang tunggal.

   Anggaplah w juga merupakan titik tetap pemetaan A, B, S dan T. Misalkan bahwa $p(w, y) > 0$, maka menggunakan (4.1), diperoleh

   $$\begin{aligned} p(y, w) &= p(Ay, Bw) \\ &\leq \varphi(\max\{p(Sy, Tw), [p(Sy, Ay) + p(Tw, Bw)], [p(Sy, Bw) \\ &\qquad + p(Tw, Ay)]\}) \\ &\leq \varphi(\max\{p(y, w), [p(y, y) + p(w, w)], [p(y, w) + p(w, y)]\}) \\ &\leq \varphi(\max\{p(y, w), 0, [p(y, w) + p(w, y)]\}) \\ &\leq \varphi\big(2p(y, w)\big) \\ &< p(y, w) \end{aligned}$$

   yang merupakan kontradiksi.

   Oleh karena itu $p(y, w) = 0$, sehingga $y = w$.

   Jadi terbukti bahwa pemetaan A, B, S dan T mempunyai titik tetap yang tunggal.

4.2 Integrasi Pembuktian dalam al-Quran/Hadits

Pada pembahasan sebelumnya, yaitu membahas bukti teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial. Diketahui bahwa di dalam pembuktian teorema tersebut terdapat beberapa langkah pembuktian, yaitu:

1. membangun barisan (x_n) dan (y_n)

2. membuktikan barisan (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik parsial lengkap
3. membuktikan barisan (y_n) adalah barisan konvergen di ruang metrik parsial lengkap
4. membuktikan pemetaan A, S dan B, T masing-masing mempunyai titik koinsidensi
5. membuktikan pemetaan A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum
6. membuktikan pemetaan A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum tunggal.

Pembuktian tersebut ada agar dapat mencapai kebenaran teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial.

Hal ini sesuai dengan yang tercantum dalam firman Allah SWT di dalam al-Quran surah *al-An'am*[6] ayat 143 bahwa pembuktian itu sangat penting. Pada terjemahan ayat tersebut dijelaskan bahwa pentingnya menunjukkan bukti suatu pernyataan agar dapat dijadikan pedoman yang baik dan benar. Dengan demikian pernyataan tersebut adalah teorema pada topik penelitian ini.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dalam penelitian ini terkait teorema titik tetap untuk empat pemetaan pada ruang metrik parsial, dapat disimpulkan bahwa sebelum membuktikan ketunggalan titik tetap, terlebih dahulu perlu ditunjukkan bahwa ruang metrik parsial bersifat lengkap. Suatu ruang dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan demikian, dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap untuk empat pemetaan tersebut menjamin keberadaan titik tetap yang bersifat tunggal dalam ruang metrik parsial. Dalam pembuktian teorema, menggunakan teorema pemetaan kontraktif lemah yaitu

$$A(L) \subseteq T(L), B(L) \subseteq S(L)$$

dan

$$p(Ax, By) \leq \varphi(max\{p(Sx, Ty), [p(Sx, Ax) + p(Ty, By)], [p(Sx, By) + p(Ty, Ax)]\}),$$

untuk semua $x, y \in L$, dengan $\varphi \in \psi$ dan $\psi = \{\varphi | \varphi: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah kontinu, tak menurun dan $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\}$. Dari empat pemetaan di atas, yaitu A, B, S dan T Sehingga (A, S) dan (B, T) mempunyai titik koinsidensi, dan jika (A, S) dan (B, T) adalah kompatibel lemah maka A, B, S dan T mempunyai titik tetap umum tunggal yaitu y di L.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, menggunakan pemetaan kontraktif lemah dalam membuktikan titik tetap untuk empat pemetaan di ruang metrik parsial. Selanjutnya, disarankan penelitian selanjutnya agar meneliti tentang bukti teorema titik tetap untuk empat pemetaan di ruang yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Andy dkk. (2020). Eksistensi Dan Ketunggalan Titik Tetap pada Pemetaan Kontraksi Tergeneralisasi dalam Ruang b-Metrik. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi*, *16*(2), 208-218.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). Urbana: University of Illinois.

Bukatin dkk. (2009). Partial Metric Spaces. *The Mathematical Association of America*, 708-718. doi:10.4169/193009709X460831

Dwi dkk. (2023). Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang Metrik Parsial Rectangular. *Limits*, *20*(1), 1-10. doi:http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.6376

Dwivedi, P. K. (2022). Common Fixed Point Theorem on Partial Metric Space. *International Jurnal of Mathematics Trends and Technology*, *68*(4), 30-37. doi:https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V6814P506

Ghoffar dkk. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir.* Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Kementrian Agama. (2014). *Quran Kemenag.*

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications.* Canada: University of Windsor.

Rahmat dkk. (2021). Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Cone. *Jurnal Matematika UNAND*, *10*(3), 268-279.

Rao dkk. (2015). A Common Fixed Point Theorem for Four Maps under (ψ-φ) Contractive Condition of Integral Type in Ordered Partial Metric Spaces. *Mathematical Sciences Letters*(1), 25-31.

Samreen dkk. (2014). Fixed point theorems for φ-contractions. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-16.

Sihombing, S. C., & Septiati, E. (2018). *Ruang Metrik & Ruang Metrik Parsial* (1 ed.). Yogyakarta: Deepublish.

Sukaesih, E. (2015). Teorema Titik Tetap Banach. *UIN Sunan Gunung DJati Bandung*, 114-135.

Suzuki, T. (2008). A Generalized Banach Contraction Principle That Characterizes Metric Completeness. *Proceedings Of The American Mathematical Society*, *136*(5), 1861-1869.

RIWAYAT HIDUP

Lubaba Ufa, lahir di Kab. Tuban pada tangga 08 Juni 2002. Anak pertama dari dua bersaudara dari Abah Wahid dan Ibu Ni'mah. Selama di kampus, Lubaba aktif menjadi angoota organisasi PAKPT IPPNU UIN Malang. Selain itu, Lubaba juga pernah aktif mengikuti beberapa kepanitiaan, contohnya panitia PBAK Fakultas Saintek. Lubaba juga pernah mengkuti Olimpiade Matematika mahasiswa PUSKANAS tingkat nasional dan merai medali perak.

Adapun Riwayat Pendidikan Lubaba yaitu: MI Dahlaniyyah Senori, MTS Manbail Futuh, dan MA Unggulan KH. Abd. Wahab Hasbulloh Tambak Beras Jombang. Lubaba aktif berorganisasi IPPNU dan aktif mengikuti kepanitiaan di acara sekolah pada masa Aliyyah.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lubaba Ufa
NIM : 210601110031
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Teorema Titik Tetap untuk Empat Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	06 Maret 2024	Konsultasi Topik.	1.
2.	03 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III dengan catatan memperbaiki latar belakang masalah dan menambah penelitian terdahulu mengenai teorema titik tetap.	2.
3.	02 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III dengan catatan memperbaiki definisi ruang metrik dan ruang metrik parsial.	3.
4.	02 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I.	4.
5.	24 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dengan catatan menjelaskan pembahasan Bab 1.	5.
6.	29 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III dengan catatan mempelajari ciri-ciri titik tetap.	6.
7.	30 Oktober 2024	ACC Proposal Skripsi	7.
8.	01 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II dengan catatan memperbaiki penulisan Al-Qur'an menjadi al-Quran.	8.
9.	06 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II dengan catatan memperbaiki penjelasan tafsir Q.S. al-An'am[6]:143.	9.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

10.	07 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II dengan catatan memperbaiki format penulisan.	10.
11.	08 November 2024	ACC Kajian Agama.	11.
12.	12 Maret 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal dan Bab IV & V.	12.
13.	16 April 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	17 April 2025	ACC Bab IV dan V dengan catatan menambahkan contoh pada definisi di Bab IV.	14.
15.	25 April 2025	ACC Kajian Agama Bab IV dan V.	15.
16.	08 Mei 2025	ACC Seminar Hasil lanjutan	16.
17.	26 Mei 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	17.
18.	13 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	20 Juni 2025	ACC Keseluruhan	19.

Malang, 20 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005