KEKONVERGENAN METRIK PARSIAL PADA $L^2(P)$

SKRIPSI

OLEH:
FATIMAH AZIZAH AMIN
NIM. 210601110070

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KEKONVERGENAN METRIK PARSIAL PADA $L^2(P)$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Fatimah Azizah Amin
NIM. 210601110070

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KEKONVERGENAN METRIK PARSIAL PADA $L^2(P)$

SKRIPSI

Oleh
Fatimah Azizah Amin
NIM. 210601110070

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 21 Mei 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M.Si.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

KEKONVERGENAN METRIK PARSIAL PADA $L^2(P)$

SKRIPSI

Oleh
Fatimah Azizah Amin
NIM. 210601110070

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 20 Juni 2025

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Fatimah Azizah Amin

NIM : 210601110070

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kekonvergenan Metrik Parsial Pada $L^2(P)$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan penambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya besedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Juni 2025

Fatimah Azizah Amin
NIM.210601110070

MOTO

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."
(QS. Al-Insyirah: 6)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Dengan segenap cinta dan syukur yang tak terhingga,
skripsi ini kupersembahkan kepada:

Bapak Amin dan Ibu Dewi tercinta,
yang selalu mengiringi setiap langkah usahaku dengan doa dan semangat,
tanpa lelah mendukung dan mengarahkanku dalam perjalanan panjang ini.
Terima kasih tak terhingga dan maaf bila belum sempurna.

Ketiga adekku, Tsaqifa, Azzam dan Aim,
yang menjadi penyemangat dan alasan untuk menjadi teladan yang baik.
Terima kasih telah hadir di hidup "mbak".

Yangkung, Yangti dan seluruh keluarga besar,
yang tanpa henti memberikan doa dan dukungan,
serta mengajarkan arti pulang dan bertumbuh.

Bapak, Ibu Guru serta Dosen,
yang telah mengajarkan ilmu dengan sabar,
membimbing bukan hanya dengan kata,
tetapi juga dengan teladan dan kasih dalam mendidik.

Terakhir untuk diriku sendiri,
yang tak henti berjuang dan mencoba,
yang perlahan belajar memaafkan, memahami, dan mengenal diri lebih dalam.
terima kasih telah bertahan sejauh ini.

Perjalanan ini akan selalu terkenang sebagai bagian penting di kehidupanku.
Banyak suka dan tawanya, pun luka dan jatuhnya.
Namun semua yang lalu, semoga dapat membawa diri
untuk selalu belajar menjadi pribadi yang lebih baik
dan sebagai bekal mewujudkan mimpi-mimpi dengan keberanian.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT dengan segala rahmat dan karunia-Nya. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing umat manusia keluar dari zaman jahiliah menuju cahaya terang yaitu agama islam.

Skripsi dengan judul “Kekonvergenan Metrik Parsial Pada $L^2(P)$ ” merupakan tugas akhir untuk menyelesaikan mata kuliah skripsi di program studi Matematika pada Fakultas Sains dan Teknolog Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Tersusunnya skripsi ini tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Maka dari itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah sabar membimbing dan memotivasi selama masa perkuliahan hingga proses penyusunan skripsi. Terima kasih atas waktu dan dedikasinya selama ini.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah sabar memberikan bimbingan dan pengetahuan selama menyusun proposal.
6. Dewi Ismiarti, M.Si., selaku dosen wali yang telah sabar membimbing, memberi saran selama masa perkuliahan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajarkan ilmu dengan penuh sabar dan dedikasi.
8. Bapak Aminudin dan Ibu Dewi Khusna yang senantiasa mengiringi langkah penulis dengan doa dan kasih tulus tak terhingga sejak dulu dan selamanya.
9. Adek Tsaqifa Aisyah Amin, M. Azzam Ash Shidiqi Amin, Yusuf Aiman As Shidiqi Amin, yang selalu menjadi penyemangat.

10. Sahabat terbaikku, Nadhiva Nurizzakiya Al-Ula, Andini Ferdiana, Nasywa Kamila Fandya, Verrenstissa Ariq Tama, Najwa Shalsabil Akbar Yusuf dan Abre Ratu Wafa yang selalu tulus hadir dalam senang maupun sedih selama perjalanan panjang penyusunan skripsi.
11. Teman-teman seperjuangan angkatan 2021 yang saling berbagi dan membantu selama masa perkuliahan untuk meraih gelar sarjana.
12. Terakhir, untuk diriku sendiri Fatimah Azizah Amin yang telah berani melangkah dan berjuang sejauh ini. Segala lelah yang telah lalu semoga menjadi berkah untuk perjalanan selanjutnya. Tetaplah bermimpi dan percaya pada diri sendiri. Sekarang dan selamanya.

Malang, 20 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	: Himpunan bilangan riil gabung 0
$L^2[a, b]$	: Ruang fungsi terintegralkan kuadrat pada interval $[a, b]$
$C[a, b]$	: Ruang semua fungsi kontinu pada interval $[a, b]$
$L^2(P)$	: Ruang fungsi terukur kuadrat pada himpunan parsial $P \subseteq [a, b]$
$d(x, y)$	: Metrik (fungsi jarak biasa)
$p(x, y)$	: Metrik parsial pada $\mathbb{R}$
$d^p(x, y)$	: metrik yang ditutrunkan dari metrik parsial
$d(f, g)$	: metrik pada $L^2[a, b]$
$p_1(f, g)$	: Metrik parsial intergal kuadrat berbasis d^p
$p_2(f, g)$	: Metrik parsial integral penuh di $C[a, b]$
$\sqsubseteq_p$	: Relasi urutan parsial dalam ruang metrik parsial p
P	: Himpunan terurut parsial (subset dari $[a, b]$)
$[a, b]$	: Interval tertutup dalam $\mathbb{R}$
ε	: Bilangan positif kecil (epsilon)
lim	: Limit barisan atau fungsi

ABSTRAK

Amin, Fatimah Azizah. 2025. **Kekonvergenan Metrik Parsial pada $\boldsymbol{L^2}$(P)**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Mohamad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Metrik parsial, ruang L^2(P), kekonvergenan, relasi parsial

Ruang metrik parsial merupakan generalisasi dari ruang metrik klasik di mana jarak antara suatu titik ke titik itu sendiri belum tentu nol. Ruang L^2(P) merupakan ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan kuadrat atas himpunan parsial terurut $P \subseteq [a, b]$ dengan $a, b \epsilon \mathbb{R}$. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat kekonvergenan barisan dalam ruang L^2(P) melalui pendekatan metrik parsial, terutama dengan menggunakan fungsi metrik parsial p yang menggunakan integral dari metrik d^p. Hasil penelitian menunjukkan bahwa konsep kekonvergenan pada ruang metrik $L^2[a, b]$ dapat dimodifikasi menjadi konsep kekonvergenan pada ruang metrik parsial di ruang $L^2(P)$ dengan $P \subseteq [a, b]$ adalah himpunan parsial terurut.

ABSTRACK

Amin, Fatimah Azizah. 2025. **Convergence of Partial Metric in L^2(P)**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Mohamad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Partial metric, L^2(P) space, convergence, partial order

This research discusses the convergence in the partial metric space L^2(P). The space L^2(P) is a colletion of measureable functions that are square-integrable over a partially ordered subset $P \subseteq [a, b]$. A partial metric space is a generalization of the classical metric space that does not necessarily satisfy symmetry and identity of indiscernibles. This research aims to prove the convergence properties in the space L^2(P) through a partial metric approach, primarily using the partial metric function p based on integral of the metric d^p.The results show that the concept of convergence in the classical metric space $L^2[a, b]$ can be modified into the concept of convergence in the partial metric space $L^2(P)$, where P is a partially ordered subset of $[a, b]$.

مستخلص البحث

امين، فاطمة عزيزة. ٢٠٢٥. **التقريب في القياس الجزئي في الفضاء $L^2(P)$.** البحث الجامعي قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرف:(١) ديان مهاراني، المجستيرة في العلوم (٢) محمد نافع جوهري، المجستير في العلوم

الكلمات الأساسية: القياس الجزئي، فضاء تت التقارب، الترتيب الجزئي

يتناول هذا البحث مفهوم التقرب في فضاء القياس الجزئي $L^2(\mathrm{P})$. إن الفضاء $L^2(\mathrm{P})$ هو مجموعة من الدوال القابلة للقياس والتي يمكن تربيعها وتكاملها عليمجموعة جزئية مرتبة جزئيا من المجال $[a,b]$. يعتبر فضاء القياس الجزئي تعميماً للفضاء المتري التقليدي، حيث لا يشترط فيه التماثل أو تطابق المسافة الذاتية. هدف هذا البحث إلى إثبات خصائص التقارب في الفضاء $L^2(\mathrm{P})$ باستخدام منهج القياس الجزئي، من خلال دالة المسافة الجزئية p الامبنية علي التكامل لمترية جزئية d^p. أظهرت النتائج أنّ مفهوم التقارب في الفضاء المتري الكلاسيكي $L^2[a,b]$ يمكن تعديله ليصبح مفهوما للتقارب في الفضاء المتري الجزئي $L^2(\mathrm{P})$, حيث إن P هو مجموعة جزعية مرتبة جزئيا من $[a,b]$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang metrik dalam matematika digunakan untuk mengukur jarak antara dua elemen dalam suatu himpunan. Sebuah ruang metrik (*X, d*), terdiri dari himpunan X dan fungsi jarak d: $X \times X \to \mathbb{R}$, yang harus memenuhi empat sifat: non-negativitas, identitas, simetri, dan ketidaksamaan segitiga untuk semua *x, y, z* $\in X$ (Kreyszig, 1978). Fungsi jarak ini memberikan cara untuk mengukur kedekatan elemen-elemen dalam suatu ruang. Selain itu, konsep ruang metrik juga mendasari teori matematika seperti limit, kontinuitas, dan konvergensi dalam analisis fungsional (Soemarsono et al., 2023). Salah satu contoh dari ruang metrik adalah ruang bilangan riil ($\mathbb{R}$, d) dengan fungsi metrik $d(x, y) = |x - y|$ untuk *x, y, z* $\in \mathbb{R}$ yang biasa digunakan dalam berbagai aplikasi teknis dan ilmiah.

Seiring berjalannya waktu, muncul beberapa pengembangan konsep ruang metrik. Salah satunya adalah ruang metrik parsial. Ruang metrik parsial didefiniskan untuk menangani situasi di mana sifat-sifat seperti simetri atau ketidaksamaan segitiga tidak selalu terpenuhi. Sebuah metrik parsial p pada himpunan *X* didefinisikan sebagai fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ untuk $x, y, z \in X$ yang memenuhi sifat non-negativitas dan ketaksamaan segitiga, tetapi jarak suatu elemen terhadap dirinya sendiri tidak selalu nol ($p(x, x) \neq 0$) dan jarak antara dua elemen mungkin tidak simetris ($p(x, y) = p(y, x)$) (Matthews, 1994). Hal ini yang menjadi pembeda antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial.

Pengembangan lebih lanjut dari ruang metrik parsial adalah penerapan pada himpunan parsial terurut. Himpunan parsial terurut *P* adalah himpunan yang dilengkapi dengan relasi urutan $\sqsubseteq_p$, yang bersifat refleksif ($x \sqsubseteq_p y$), antisimetri ($x \sqsubseteq_p$ dan $y \sqsubseteq_p x$ maka $x = y$), dan transitif ($x \sqsubseteq_p y$ dan $y \sqsubseteq_p z$ maka $x = z$). Dalam ruang metrik parsial, relasi urutan ini digunakan untuk mendefinisikan jarak berdasarkan hubungan antar elemen dalam himpunan. (Matthews, 1994).

Ruang metrik parsial juga membahas tentang kekonvergenan. Kekonvergenan dalam ruang metrik parsial memiliki karakteristik yang berbeda dibandingkan ruang metrik. Dalam ruang metrik parsial, barisan elemen dikatakan konvergen jika jarak antar elemen dalam barisan tersebut mendekati nilai tertentu dengan mempertimbangkan sifat parsial dari metrik yang digunakan. Hal ini mencakup urutan parsial pada elemen-elemen dalam ruang tersebut, yang memberikan struktur tambahan dan menjadikan analisis kekonvergenan lebih kompleks (Soemarsono et al., 2023).

Penerapan konsep kekonvergenan ini menjadi semakin menarik ketika diaplikasikan pada ruang fungsi $L^2(P)$. Ruang $L^2(P)$ menurut Soemarsono et al. (2023) merupakan himpunan fungsi-fungsi yang kuadratnya terintegrasi pada himpunan parsial terurut *P*. Dalam ruang $\mathcal{L}_2(P)$, himpunan fungsi *f* dikatakan berada dalam ruang tersebut jika fungsi tersebut memenuhi kondisi berikut.

$$L^2(P) = \left\{ f = f_i \in F \int_P [d^p(f(x), 0)]^2 \, dx < \infty \right\}$$

Kekonvergenan dalam ruang $L^2(P)$ dapat dimengrti dengan menggunakan metrik yang didasarkan pada relasi parsial dalam *P*. Dalam hal ini, suatu barisan fungsi (f_n) pada ruang $L^2(P)$ dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat *N* sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N$, jarak antara f_n dan suatu fungsi limit *f* dalam ruang $L^2(P)$ lebih kecil dari ε. Jarak ini didefinisikan berdasarkan norma L^2, yang diukur dengan memperhatikan sifat relasi parsial yang ada dalam P.

Kekonvergenan fungsi dalam ruang $L^2(P)$ dapat memberi pemahaman bagaimana suatu deret fungsi mendekati suatu nilai tertentu secara bertahap. Proses ini secara filosofis dapat dimaknai sebagai bentuk pendekatan yang berkesinambungan menuju satu titik tujuan yang pasti. Dalam ajaran Islam, konsep pendekatan ini juga tercermin dalam QS. Al-Baqarah: 186, yang menggambarkan kedekatan antara manusia dengan Tuhannya serta pentingnya kesungguhan dalam berdoa dan beriman. Dengan demikian, konsep kekonvergenan dalam ruang $L^2(P)$ tidak hanya bermakna secara matematis, tetapi juga dapat mencerminkan proses spiritual seorang hamba dalam mendekat kepada Allah melalui usaha dan konsistensi.

Sebagaimana pendekatan dalam analisis matematis yang tidak terjadi secara instan, tetapi melalui tahapan-tahapan yang terukur, begitu pula pendekatan spiritual yang dibangun atas dasar kesabaran dan ketekunan. Oleh karena itu, penelitian ini tidak hanya berfokus pada pembuktian sifat kekonvergenan dalam ruang $\mathcal{L}_2\,(P)$, tetapi juga menjadi bentuk refleksi bahwa ilmu dan nilai spiritual dapat berjalan seiring dalam membentuk pemahaman yang lebih utuh terhadap suatu konsep.

Sesuai dengan penjelasan di atas, maka dari itu peneliti tertarik untuk membahas lebih lanjut terkait kekonvergenan metrik parsial pada ruang $L^2(P)$.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang melandasi penelitian ini adalah bagaimana kekonvergenan metrik parsial pada ruang $L^2(P)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan kekonvergenan metrik parsial pada ruang $L^2(P)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya literatur tentang ruang metrik dan ruang metrik parsial, terutama dalam memahami ruang $L^2(P)$ dan kekonvergenannya. Dengan demikian, penelitian ini dapat mendorong perkembangan lebih lanjut dalam analisis fungsional dan teori ruang metrik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari rumusan masalah di atas dapat diuraikan sebagai sifat kekonvergenan ruang metrik parsial pada ruang $L^2(P)$. Dengan mempertimbangkan batasan tersebut, diharapkan penelitian dapat lebih terfokus dan memberikan kontribusi terhadap pemahaman tentang pengaruh ruang metrik dan kekonvergenan metrik parsial pada ruang $L^2(P)$.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Metrik

   Ruang metrik adalah himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d: $X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat non-negativitas, identitas, simetri, dan ketidaksamaan segitiga. (Kreyszig, 1978).

2. Metrik Parsial

   Metrik parsial adalah fungsi metrik yang tidak selalu memenuhi sifat simetri atau identitas. Dalam metrik parsial, jarak suatu titik ke dirinya sendiri mungkin tidak nol. (Matthews, 1994).

3. Ruang Fungsi C $[a, b]$

   Ruang C $[a, b]$ adalah himpunan semua fungsi kontinu bernilai riil yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$ dengan jarak antara dua fungsi x dan y dapat didefinisikan $d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$ (Kreyszig, 1978).

4. Ruang $L^2[a, b]$

   Ruang $L^2[a, b]$ adalah himpunan fungsi yang kuadratnya dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$, dan dilengkapi dengan metrik berbasis norma kuadrat, yaitu $\mathrm{d}(f, g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}$. (Moore, 2009)

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Adapun beberapa teori yang akan menjadi pendukung pada penelitian ini adalah sebegai berikut.

2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan dasar teori yang diperlukan untuk memahami ruang metrik parsial sehingga akan didefinisikan terlebih dahulu ruang metrik beserta contohnya.

Definisi 2.1 (Kreyszig, 1978)

Ruang metrik adalah sebuah pasangan (X, d), di mana X adalah himpunan tak kosong dan d merupakan metrik pada X, sehingga fungsi d: $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut ruang metrik jika untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi sifat berikut:

(M1) $d(x, y) \in \mathbb{R}$, $d(x, y) < \infty$, $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(x, y)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga)

Contoh 2.1

Misal $X = \mathbb{R}$ $x, y, z \in X$, didefinisikan d: $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Akan dibuktikan bahwa (X, d) adalah ruang metrik.

M1) $d(x, y) \in \mathbb{R}$, $d(x, y) < \infty$, $d(x, y) \geq 0$

Berdasarkan sifat nilai mutlak, jelas bahwa $d(x, y) = |x - y| \in \mathbb{R}$, $d(x, y) < \infty$, $d(x, y) \geq 0$ untuk suatu untuk suatu $x, y \in \mathbb{R}$.

Sehingga metrik $d(x, y) = |x - y|$ memenuhi M1.

M2) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

Akan dibuktikan dua arah.

$\rightarrow$	$d(x, y) = 0$	$\leftarrow$	$x = y$
	$\lvert x - y \rvert = 0$		$x - y = 0$
	$x = y$		$\lvert x - y \rvert = 0$
			$d(x, y) = 0$

Sehingga, metrik $d(x, y) = \lvert x - y \rvert$ memenuhi M2.

M3) $d(x, y) = d(x, y)$

$d(x, y) = \lvert x - y \rvert = \lvert y - x \rvert = d(y, x)$

Sehingga, metrik $d(x, y) = \lvert x - y \rvert$ memenuhi M3.

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \lvert x - y \rvert \\ &\leq \lvert x - z \rvert + \lvert z - y \rvert \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

2.1.2 Bola Buka dan Tutup pada Ruang Metrik

Pada pembahasan ruang metrik juga diperlukan definisi bola buka dan tutup pada ruang metrik sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Kreyszig, 1978)

Diberikan suatu titik $x_0 \in X$ dan bilangan riil $r > 0$, didefiniskan tiga himpunan yakni:

1. $B(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ (Bola Buka)
2. $\widetilde{B}(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ (Bola Tutup)
3. $S(x_0; r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ (Kulit Bola)

Dari definisi di atas, diketahui bahwa jarak *r* pada bola buka merupakan himpunan seluruh titik pada X yang dapat disimpulkan juga menjadi,

$$S(x_0;r) = \widetilde{B}(x_0;r)\text{-}B(x_0;r)$$

Contoh 2.2

Misal $X = \mathbb{R}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$. Ambil titik pusat $x_0 = 2$ dan $r = 3$. Sesuai definisi bola buka dan bola tutup diperoleh,

$B(2;3) = \{x \in X| \; | x - 2 | < 3\} = (-1, 5)$.

$\widetilde{B}(2;3) = \{x \in X| \; | x - 2 \leq 3\} = [-1, 5]$.

Sehingga keduanya memenuhi definisi bola buka dan bola tutup.

Definisi 2.3 (Kreyszig, 1978)

Sebuah himpunan bagian *M* pada ruang metrik *X* dikatakan terbuka jika terdapat bola di setiap titiknya. Himpunan bagian *K* pada *X* dikatakan tertutup jika setiap komplemen pada *X* adalah buka, sehingga $K^c = X - K$ adalah buka.

Selain bola buka dan tutup, diperlukan juga penjelasan terkait konvergensi pada ruang metrik. Berikut definisi dan contohnya.

Definisi 2.4 (Sihombing, 2018)

Suatu barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (*X*,*d*) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ sehingga } n \geq n_0 \rightarrow d\,(x_n, x) < \varepsilon$$

Dalam hal ini, disebut sebagai limit dari barisan $\{x_n\}$ disimbolkan sebagai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$.

Contoh 2.4

Misal $X = [0,1]$ dengan metrik $d(x, y) = | x - y |$. Maka barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ pada metrik (*X*,*d*) kovergen ke 0.

Bukti. Ambil sebarang ε > 0, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pilih $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ maka $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} <$ ε. Sehingga untuk setiap $n > n_0$ berlaku

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen di *X*.

2.1.3 Barisan Cauchy pada Ruang Metrik

Kekonvergenan pada ruang metrik memiliki kesinambungan dengan barisan Cauchy dan kelengkapan. Berikut definisi barisan Cauchy dan kelengkapan pada ruang metrik.

Definisi 2.6 (Sihombing, 2018)

Suatu barisan $\{x_n\}$dalam ruang metrik (*X, d*) dikatakan barisan Cauchy jika

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ sehingga } n, m \geq n_0 \rightarrow d\,(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

Contoh 2.6

Misal $\{x_n\}$ adalah barisan pada ℝ dengan $x_n = \frac{1}{n}$. Akan dibuktikan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang metrik (ℝ, *d*).

Ambil ε > 0, pilih *N* sedemikian hingga $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Untuk setiap $n,\ m \geq N,$

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| \leq \frac{1}{N}$$

karena $\frac{1}{N} <$ ε, maka $|x_n - x_m| <$ ε.

Teorema 2.1 (Sihombing, 2018)

Untuk setiap barisan $\{x_n\}$ yang konvergen dalam ruang metrik (*X, d*) merupakan barisan Cauchy.

Bukti.

Misal $\{x_n\}$ merupakan barisan dalam ruang metrik (*X, d*), dan misal $x \in X$ sedemikian hingga $x_n \to x$. Maka untuk setiap ε > 0 terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N$.

Ambil $m \geq n_0$, maka berlaku $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. sehingga untuk $m, n \geq n_0$ berlaku pertidaksamaan segitiga

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2.1.4 Ruang Metrik Parsial

Seiring perkembangan keilmuan para peniliti memperluas pembahasan ruang metrik ke ruang metrik parsial. Berikut definisi ruang metrik parsial beserta contohnya.

Definisi 2.8 (S.G. Matthews, 1992)

Diberikan suatu fungsi p pada himpunan tak-kosong X. Suatu fungsi p didefinisikan sebagai $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ disebut suatu metrik parsial jika untuk x, y, $z \in X$,

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;

(P2) $p(x, x) \leq p(x, y)$;

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$;

(P4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Contoh 2.8

Misal $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah himpunan bilangan riil yang lebih dari 0. Fungsi $p: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang didefinisikan oleh $p(x, y) = max\{x, y\}$ adalah metrik pada $\mathbb{R}^+$, sehingga $(\mathbb{R}^+, p)$, adalah ruang metrik parsial.

Bukti.

(P1) Akan ditunjukkan $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ maka $x = y$.

Ambil x, $y \in \mathbb{R}^+$,

$p(x,x) = p(x,y)$

$= max\{x, x$

$= x$ ......(1)

$p(y,y) = p(x,y)$

$= max\{y, y\}$

$= y$ ......(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ maka $x = y$.

(P2) Akan ditunjukkan bahwa $p(x,x) \leq p(x,y)$ untuk setiap x, $y \in \mathbb{R}^+$.

Ambil x, $y \in \mathbb{R}^+$, maka:

$p(x,x) = max\{x, x\}$

$\leq max\{x, y\}$

$= p(x,y)$

Jadi terbukti bahwa $p(x,x) \leq p(x,y)$ untuk setiap x, $y \in \mathbb{R}^+$

(P3) Akan ditunjukkan bahwa $p(x,y) = p(y,x)$ untuk setiap x, $y \in \mathbb{R}^+$

Ambil x, $y \in \mathbb{R}^+$, maka:

$$p(x,y) = max\{x, y\} = max\{y, x\} = p(y,x)$$

Sehingga terbukti bahwa $p(x,y) = p(y,x)$ untuk setiap x, $y \in \mathbb{R}^+$

(P4) Akan ditunjukkan $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ untuk setiap x, $y \in \mathbb{R}^+$maka:

$$p(x,z) + p(y,y) = max\{x, z\} + max\{y, y\} \leq max\{x, y\} + max\{y, z\}$$

$$\leq p(x,y) + p(y,z)$$

Sehingga dapat ditulis dengan $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

Jadi terbukti, $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

2.1.5 Bola Buka dan Tutup pada Metrik Parsial

Seperti pada pembahasan ruang metrik, pada ruang metrik parsial juga terdapat pembahasan terkait bola buka dan tutup. Berikut definisi dan teoremanya.

Definisi 2.9 (S.G. Matthews, 1992)

Diberikan suatu fungsi p pada himpunan tak-kosong X. Suatu fungsi p didefinisikan sebagai $p: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut suatu bola buka jika untuk x, $y \in X$,

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X |\, p(x,y) < \varepsilon\}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in X$.

Teorema 2.2 (S.G. Matthews, 1992)

Untuk setiap metrik parsial : $X \times X \to \mathbb{R}$, bola buka $B_\varepsilon(a)$, dan $x \in$ A,

$$x \in B_\varepsilon(a) \to \exists\, \delta > 0,\ x \in B_\delta(x) \subseteq B_\varepsilon(a)$$

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $x \in B_\varepsilon(a)$

Maka $p\,(x, a) < \varepsilon$

Misal $\delta = \varepsilon - p\,(x, a) + p\,(x, x)$

Maka $\delta > 0$ sebagai $\varepsilon > p\,(x, a)$

Juga berlaku $p\,(x, x) < \delta$ sebagai $\varepsilon > p\,(x, a)$

Sehingga $x \in B_\delta(x)$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $y \in B_\delta(x)$

Maka $p(y, x) < \delta$

Misal $p(y, x) < \varepsilon - p(x, a) + p(x, x)$

Maka $p(y, x) + p(x, a) - p(x, x) < \varepsilon$

Maka $p(y, x) < \varepsilon$

Sehingga $B_\delta(x) \subseteq B_\varepsilon(a)$

2.1.6 Urutan Parsial

Selain bola buka dan tutup, ruang metrik parsial juga membahas urutan parsial. Berikut definisi dan teoremanya.

Definisi 2.10 (S.G. Matthews, 1992)

Untuk setiap metrik parsial $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\sqsubseteq_p \subseteq X \times X$ adalah relasi biner yang didefinisikan dengan,

$$\forall\, x,\ y \in X \quad . \ x \sqsubseteq_p y \quad \leftrightarrow \quad p(x, x) = p(x, y)$$

Teorema 2.3 (S.G. Matthews, 1992)

Untuk setiap metrik parsial : $X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\sqsubseteq_p$ adalah urutan parsial.

Bukti.

$\forall\, x \in$ A, $x \sqsubseteq_p x$ didefinisikan $p(x, x) = p(x, x)$

$\forall\, x, y \in$ A, $x \sqsubseteq_p y$ dan $x \sqsubseteq_p$ x

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \quad \text{(berdasarkan P3)}$$

$$x = y \quad \text{(berdasarkan P1)}$$

$\forall\, x, y, z \in$ A, $x \sqsubseteq_p y$ dan $y \sqsubseteq_p z$

$$p(x, x) = p(x, y) \text{ dan } p(y, y) = p(y, z)$$

Tetapi, berdasarkan P4 $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$

Sehingga diperoleh $p(x, z) \leq p(x, x)$

Berdasarkan P2 diperoleh $p(x, z) = px, x)$

Sehingga terbukti $x \sqsubseteq_p z$

Definisi 2.11 (Annisa, 2023)

Suatu pasangan $(X, \sqsubseteq_{\mathrm{p}})$ dikatakan sebagai himpunan parsial terurut. Misal himpunan *X* adalah himpunan tak kosong dan notasi $\sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ melambangkan urutan parsial di *X*. Pada ruang metrik parsial dengan metrik parsial $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, relasi biner $\sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ terdefinisi di *X*. Untuk setiap $x, y \in X$, suatu relasi $x \sqsubseteq_{\mathrm{p}} y$ terpenuhi jika dan hanya jika $p(x, x) = p(x, y)$.

Teorema 2.4 (Annisa, 2023)

Jika $\sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ adalah relasi biner pada ruang metrik parsial (*X*, *p*), maka relasi biner $\sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ adalah parsial terurut untuk setiap metrik parsial *p*.

Bukti.

Relasi biner $\sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ dapat dibuktikan menggunakan tiga sifat berikut untuk semua metrik *p* membentuk suatu urutan parsial:

1. Refleksif: $x \sqsubseteq_{\mathrm{p}} y$ untuk $x, y \in X$;
2. Antisimetri: Jika $x \sqsubseteq_{\mathrm{p}} y$ dan $y \sqsubseteq_{\mathrm{p}} x$, maka $x = y$ untuk $x, y \in X$;
3. Transitif: Jika $x \sqsubseteq_{\mathrm{p}} y$ dan $y \sqsubseteq_{\mathrm{p}} x$, maka $x \sqsubseteq_{\mathrm{p}}$ z untuk $x, y \in X$.

2.1.7 Konvergensi pada Ruang Metrik Parsial

Pembahasan selanjutnya adalah definisi terkait konvergensi pada ruang metrik parsial.

Definisi 2.12 (Sihombing, 2018)

Misal (*X*, *p*) adalah suatu ruang metrik parsial. Suatu barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik parsial (*X*, *p*) dengan $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n \to \infty} p(x_n, x)$

Contoh.

Misalkan $x_n = \frac{1}{n}$ dan $x = 0$. Maka barisan $\{x_n\} \subset X = [0, \infty)$.

Akan dibuktikan apakah $x_n \to x$ dalam metrik parsial, di mana

$$p\ (x_n, x) = max\ \{\frac{1}{n}, 0\} = \frac{1}{n},$$

$$p(x, x) = p(0,0) = 0.$$

Kemudian ambil nilai limitnya sehingga diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} p\ (x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = p(0, 0).$$

Maka, sesuai definisi konvergensi pada metrik parsial:

$$x_n \to x = 0.$$

Walaupun $p(x, x) \neq 0$ secara umum dalam metrik parsial, fungsi p di sini memungkinkan $p(x, x) = 0$ hanya jika $x = 0$. Maka barisan yang mendekati nol juga akan memiliki jarak parsial yang mendekati nol terhadap nol bukan karena nol adalah limit biasa, tetapi karena nilai self-distance dari titik limitnya.

2.1.8 Barisan Cauchy pada Metrik Parsial

Berkaitan dengan konvergensi pada ruang metrik parsial, terdapat pembahasan yakni terkait barisan Cauchy yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.13 Barisan Cauchy (Sihombing, 2018)

Misal (*X*, *p*) adalah suatu ruang metrik parsial. Suatu barisan $\{x_n\}$pada ruang metrik parsial (*X*, *p*) dengan $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dikatakan sebagai barisan Cauchy jika dan hanya jika $\lim_{n, m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga.

Teorema 2.5 (Sihombing, 2018)

Misal (*X, p*) adalah suatu ruang metrik parsial danbarisan $\{x_n\}$di dalam *X*. Jika $\{x_n\}$ konvergen, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti.

Misal barisan$\{x_n\}$ konvergen ke $a \in X$, maka untuk sebarang ε > 0 terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku:

$$p(x_n, a) - p(a, a) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } p(x_n, a) - p(x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Kemudian untuk *m, n* > N berlaku persamaan yang sama.

Melalu ketaksamaan segitiga, maka diperoleh:

$$|p(x_n, x_m) - p(a, a)| = |p(x_n, x_m) - p(x_n, a) + p(x_n, a) - p(a, a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$|p(x_n, x_m) - p(a, a)| < \varepsilon$

$|p(x_n, x_m) - 0| < \varepsilon$

$|p(x_n, x_m)| < \varepsilon$

Sehingga, terbukti bahwa barisan yang konvergen dalam ruang metrik parsial adalah Cauchy.

2.1.9 Ruang $L^2[a, b]$

Ruang $L^2[a, b]$ merupakan salah satu contoh dari ruang Lebesgue L^p, yaitu ruang fungsi terukur yang memenuhi syarat intgrabilitas p-kuadrat terhadap ukuran Lebesgue. Secara khusus, $L^2[a, b]$ didefiniskan sebagai himpunan semua fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terukur dan memenuhi:

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Ruang ini dilengkapi dengan metrik yang diturunkan dari norma L^2, yaitu:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

Dari norm tersebut, didefinisikan metrik di mana untuk setiap *f, g* $\in L^2[a,b]$, metrik $d : L^2[a,b] \times L^2[a,b] \to \mathbb{R}$ dapat di definiskan sebagai:

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Metrik ini mengukur jarak rata-rata kuadrat antara dua fungsi. Dengan metrik ini, ruang $L^2[a,b]$ merupakan ruang metrik lengkap, artinya setiap barisan Cauchy dalam $L^2[a,b]$ konvergen ke suatu elemen dalam ruang tersebut (Kreyszig, 1978).

Akan dibuktikan bahwa $L^2[a,b]$ yang dilengkapi dengan metrik $d$adalah ruang metrik lengkap.

Bukti.

Misal $\{f_n\}$ adalah barisan Cauchy dalam $L^2[a,b]$, artinya:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ sehingga } d(f_n, f_m) < \varepsilon \text{ untuk semua } n, m > N.$$

Dengan kata lain:

$$\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2.$$

Suatu barisan dikatakan Cauchy dalam norma $L^2[a,b]$ jika setiap barisannya konvergen ke dalam norma tersebut. Karena $\{f_n\}$ Cauchy dalam $L^2[a,b]$, maka terdapat fungsi $f \in L^2[a,b]$, sehingga:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0,$$

Untuk suatu $x_0 \in [a,b]$, $\{f_n(x_0)\}$ konvergen $f(x_0)$ yang berarti:

$$d\,(f_n, f) = 0 \text{ saat } n \to \infty \text{, atau}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0.$$

Karena limitnya tetap berada dalam $L^2[a, b]$, sehingga terbukti bahwa $L^2[a, b]$ adalah ruang metrik lengkap.■

Konsep konvergensi dalam ruang $L^2[a, b]$ mengikuti definisi konvergensi pada ruang metrik yang telah dibahas pada Bab 2, di mana suatu barisan $\{f_n\} \subseteq L^2[a, b]$ dikatakan konvergen ke $f \epsilon\, L^2[a, b]$ jika $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$, dengan d adalah metrik yang diturunkan dari norma L^2. Dalam hal ini, norma L^2 menghasilkan metrik $d\,(f, g)$, sehingga konvergensi dalam norma dan konvergensi dalam metrik adalah ekuivalen.

2.1.10 Ruang $C[a, b]$

Setelah sebelumnya dibahas ruang $L^2[a, b]$ yang merupakan ruang fungsi kuadrat-integrabel, pada bagian ini akan digunakan ruang fungsi kontinu $C[a, b]$. Menurut Kreyszig, (1978) Ruang $C[a, b]$ adalah himpunan semua fungsi bernilai riil yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ yang dilengkapi dengan norma

$$\|f\| = \max_{x\,\epsilon\,[a,b]} |f(x)|\,.$$

Dalam konteks skripsi ini, ruang $C[a, b]$ digunakan untuk mendefinisikan metrik parsial berbasis fungsi, yang disebut sebagai $p_1(f, g)$. Metrik ini didefinisikan melalui integrasi dari metrik parsial pada $\mathbb{R}$, dan dibuktikan memiliki sifat-sifat metrik parsial saat diterapkan pada fungsi-fungsi dalam $C[a, b]$. Hal ini dirumuskan secara formal dalam Proposisi berikut.

Proposisi 2.1 Misal $f, g \in C[a, b]$ dengan fungsi jarak $p: C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ didefinisikan sebagai,

$$p(f,g) = \int_a^b d^p\,(f(x)\,,g(x))\,dx,$$

maka fungsi p adalah metrik parsial pada ruang $C[a,\ b]$, dengan d^p adalah metrik yang diinduksi oleh metrik parsial p.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $p(f,g)$ memenuhi empat aksioma metrik parsial.

(P1) $f = g$ jika dan hanya jika $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$;

→ Jika $f = g$ maka $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$.

Misal $f = g$, maka untuk setiap titik $x \in [a,\ b]$, terdapat:

$$f(x) = g(x).$$

Karena d^p adalah metrik yang diinduksi metrik parsial, maka berlaku:

$$d^p(f(x),g(x)) = d^p(f(x),f(x)).$$

Berdasarka sifat metrik $d^p(f(x),f(x)) = 0$ untuk setiap x, maka:

$$p\,(f,g) = \int_a^b d^p\,(f(x)\,,g(x))\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0.$$

Berlaku juga pada $p(f,f) = p(g,g) = 0$.

Maka berlaku jika $f = g$ maka $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$.

← Jika $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$, maka $f = g$.

Misal $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$.

Karena $d^p(f(x),f(x)) = 0$ untuk setiap x, maka:

$$p(f,g) = \int_a^b 0\,dx = 0.$$

Karena $p\,(f,g) = 0$, maka:

$$\int_a^b d^p\,(f(x)\,,g(x))\,dx = 0.$$

Karena $d^p\ (f(x)\ , g(x))\ dx \geq 0$ untuk semua x (sifat metrik), dan integral dari fungsi non-negatif adalah nol hanya jika fungsi itu nol hampir di mana-mana, maka:

$$d^p\ (f(x)\ , g(x))\ dx = 0 \text{ hampir di semua } x \in [a,\ b].$$

Kemudian, karena $d^p\ (f(x)\ , g(x))\ dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = g(x)$ untuk setiap x, maka:

$$f(x) = g(x) \text{ hampir di semua } x.$$

Dan karena f dan g kontinu pada $[a,\ b]$, maka:

$$f(x) = g(x) \text{ untuk semua } x \in [a,\ b].$$

Sehingga, terbukti bahwa jika $p(f, f) = p(f, g) = p(g, g)$, maka $f = g$.

(P2) $p(f, f) \leq p(f, g)$.

Diketahui dari sifat metrik parsial bahwa untuk semua $x \in [a,\ b]$,

$$d^p(f(x), f(x)) \leq d^p(f(x), g(x)).$$

Berdasarkan sifat metrik yakni $d^p(f(x), f(x)) = 0$, maka:

$$0 \leq d^p(f(x), g(x)).$$

Kemudian integralkan kedua ruas:

$$\int_a^b d^p\ (f(x)\ , f(x))\ dx \leq \int_a^b d^p\ (f(x)\ , g(x))\ dx,$$

Yang ekuivalen dengan:

$$p(f, f)\ \leq\ p(f, g).$$

Sehingga, terbukti bahwa $p(f, f)\ \leq\ p(f, g)$.

(P3) $p(f, g) = p(g, f)$.

Diketahui dari sifat metrik parsial bahwa untuk semua $x \in [a,\ b]$,

$$d^p(f(x), g(x)) \leq d^p(g(x), f(x)).$$

Berdasarkan definisi integral diperoleh:

$$p(f, g) = \int_a^b d^p(f(x)\,, g(x))\, dx = \int_a^b d^p(g(x)\,, f(x))\, dx = p(g, f)$$

Sehingga terbukti bahwa $p(f, g) = p(g, f)$.

(P4) $p(f, h) \leq\ p(f, g) + p(g, h) - p(g, g)$.

Gunakan ketaksamaan segitiga parsial untuk setiap titik $x \in [a, b]$:

$$d^p(f(x), h(x))\ \leq\ d^p(f(x), g(x)) + d^p(g(x), h(x)) - d^p(g(x), g(x)).$$

Integralkan kedua ruas dari *a* ke *b* memberikan:

$$\begin{aligned}\int_a^b d^p(f(x)\,, h(x))\, dx & \\ &\leq \int_a^b (d^p(f(x)\,, g(x))\, dx + d^p(g(x), h(x)) \\ &- d^p(g(x), g(x))\,)dx.\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat linearitas integral memisahkan integral:

$$\begin{aligned}\int_a^b d^p(f(x)\,, h(x))\, dx & \\ &\leq \int_a^b d^p(f(x)\,, g(x))\, dx + \int_a^b d^p(g(x)\,, h(x))\, dx \\ &- \int_a^b d^p(g(x)\,, g(x))\, dx\,,\end{aligned}$$

menjadi:

$$p(f, h) \leq\ p(f, g) + p(g, h) - p(g, g).$$

Sehingga, terbukti bahwa $p_1(f, h) \leq\ p_1(f, g) + p_1(g, h) - p_1(g, g)$ terpenuhi.

Karena $p(f, g)$ memenuhi keempat aksioma metrik parsial, maka p terbukti sebagai metrik parsial pada ruang $C[a, b]$. ■

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Dalam QS. Al-Baqarah ayat 185 Allah SWT. tegas berfirman:

شَهْرُ رَمَضَانَ الَّذِيْ أُنْزِلَ فِيْهِ الْقُرْاٰنُ هُدًى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنٰتٍ مِّنَ الْهُدٰى وَالْفُرْقَانِ

Artinya: "*Bulan Ramadan adalah (bulan) yang di dalamnya diturunkan Al-Qur'an sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan mengenai petunjuk itu serta pembeda (antara yang hak dan yang batil).* "

Ayat ini menegaskan bahwa Al-Qur'an diturunkan sebagai hudā li al-nās (petunjuk bagi manusia), serta sebagai penjelas dan pembeda antara kebenaran dan kebatilan. Al-Qur'an tidak hanya mengatur aspek spiritual, tetapi juga mencakup berbagai sisi kehidupan manusia, termasuk aspek-aspek yang dapat dikaji melalui pendekatan sains. Kandungan Al-Qur'an yang bersifat universal menjadikannya sumber rujukan yang kaya akan nilai dan makna, baik dalam konteks teologis maupun ilmiah.

Salah satu bentuk aktualisasi dari fungsi petunjuk ini adalah integrasi antara ilmu pengetahuan dan ajaran Islam, termasuk dalam bidang matematika. Integrasi tersebut bertujuan untuk menemukan kesinambungan antara ilmu pengetahuan modern dengan nilai-nilai Al-Qur'an. Al-Qur'an sebagai sumber utama dalam Islam mengandung banyak isyarat ilmiah yang dapat dikaji lebih lanjut dalam berbagai disiplin ilmu. Pendekatan ini tidak hanya memperkaya wawasan ilmiah, tetapi juga memperkuat keyakinan bahwa sains dan agama dapat berjalan beriringan dalam memahami fenomena alam maupun konsep-konsep abstrak dalam ilmu pengetahuan (Nasr, 1996)

Dalam konteks ini, kajian terhadap konsep kekonvergenan dalam ruang metrik dan ruang metrik parsial menjadi menarik untuk ditinjau tidak hanya dari sudut pandang matematis, tetapi juga spiritual. Konsep kekonvergenan yang secara matematis merujuk pada proses pendekatan elemen-elemen dalam suatu barisan menuju sebuah titik limit, dapat dianalogikan dengan proses pendekatan spiritual manusia kepada Tuhannya. Salah satu ayat yang relevan dengan makna pendekatan ini adalah QS. Al-Baqarah ayat.186. Allah SWT berfirman:

وَاِذَا سَاَلَكَ عِبَادِيْ عَنِّيْ فَاِنِّيْ قَرِيْبٌ ۗ اُجِيْبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ اِذَا دَعَانِ ۙ فَلْيَسْتَجِيْبُوْا لِيْ
وَلْيُؤْمِنُوْا بِيْ لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُوْنَ ﴿١٨٦﴾

Artinya: *"Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang Aku, maka sesungguhnya Aku dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia berdoa kepada-Ku. Maka hendaklah mereka itu memenuhi (perintah)-Ku dan beriman kepada-Ku, agar mereka memperoleh kebenaran."* (Kementerian Agama RI, 2019).

Ayat ini menegaskan bahwa kedekatan Allah dengan hamba-Nya bukanlah sesuatu yang bersifat fisik, melainkan lebih kepada aspek spiritual dan keterikatan batin antara seorang mukmin dengan Tuhannya. Kedekatan ini dapat dianalogikan dengan konsep kekonvergenan dalam matematika, di mana suatu barisan dikatakan konvergen jika nilai-nilai elemennya semakin mendekati suatu limit tertentu.

Dalam Tafsir Ibnu Katsir, ayat ini dijelaskan bahwa Allah Maha Mendengar doa hamba-Nya dan selalu memberikan jawaban, meskipun dalam bentuk yang tidak selalu sesuai dengan keinginan manusia. Ibnu Katsir menjelaskan bahwa kedekatan Allah bukan berarti bahwa setiap doa akan dikabulkan secara langsung sesuai permintaan, tetapi bahwa Allah menjawab dengan cara yang terbaik bagi hamba-Nya. Hal ini menunjukkan bahwa ada proses dalam pengabulan doa yang bisa dianalogikan dengan pendekatan bertahap dalam kekonvergenan, di mana suatu kondisi tercapai melalui serangkaian langkah yang mendekati titik akhir (Ibnu Katsir, 2000).

Senada dengan hal tersebut, dalam Tafsir al-Misbah, Quraish Shihab menafsirkan ayat ini sebagai penegasan bahwa Allah selalu dekat dengan hamba-Nya, bahkan tanpa perantara. Ia menjelaskan bahwa kata "dekat" dalam ayat ini menunjukkan bahwa Allah tidak hanya mendengarkan, tetapi juga memahami kebutuhan dan perasaan hamba-Nya secara langsung. Tafsir ini memperkuat gagasan bahwa usaha manusia dalam mendekatkan diri kepada Allah sejalan dengan prinsip kekonvergenan dalam matematika, di mana semakin besar usaha yang dilakukan, semakin dekat seseorang dengan tujuan akhirnya (Quraish Shihab, 2002).

Dengan demikian, ayat QS. Al-Baqarah ayat 186 tidak hanya mengandung nilai-nilai teologis, tetapi juga memberikan landasan filosofis dalam memahami konsep kekonvergenan dalam matematika, khususnya dalam ruang metrik dan metrik parsial. Integrasi antara kajian matematis dan pemahaman spiritual ini memperlihatkan bahwa usaha ilmiah dalam memahami struktur abstrak seperti konvergensi dapat diarahkan untuk memperkuat nilai-nilai keimanan. Oleh karena itu, penelitian ini tidak hanya bertujuan menjelaskan kekonvergenan dalam ruang $L^2(P)$, tetapi juga berupaya menggali makna spiritual di balik proses pendekatan dalam matematika sebagai cerminan perjalanan seorang hamba menuju kedekatan dengan Tuhannya.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Sifat 2.1 Misal P adalah sebuah himpunan parsial terurut. Untuk setiap $f, g \in L^2(P)$, suatu fungsi $p : L^2(P) \times L^2(P) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dapat di definiskan sebagai

$$p(f,g) = \left(\int_P [d^p(f,g)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

maka fungsi p_1 adalah metrik parsial yang dalam hal ini sama seperti suatu metrik pada $L^2(P)$.

Proposisi 2.2 Misal $P \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebarang himpunan interval tertutup. Fungsi $p : P \times P \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ untuk setiap $[s, t], [u, v] \in P$ di definisikan sebagai,

$$p([s, t], [u, v]) = max\ \{|s - u|, |t - v|\},$$

fungsi p tersebut menunjukkan sebuah metrik parsial pada $P \subseteq \mathbb{R}$..

Proposisi 2.3 Pada suatu himpunan parsial terurut P, suatu metrik parsial $p\colon P \times P \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\ \forall\ [s, t], [u, v] \in P$, didefinisikan dengan

$$p([s, t], [u, v]) = max\ \{|s - u|, |t - v|\}.$$

menunjukkan sebuah metrik pada ruang $C[a, b]$ dengan d: $C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $f, g \in C[a, b]$,

$$d\ (f, g) = \max_{x \in [a, b]} \{|\ f\ (x) - g(x)|\},$$

sehingga metrik *d* adalah metrik parsial pada ruang $C[a, b]$.

Proposisi 2.4 Sebuah himpunan interval tertutup P dengan urutan parsial $\sqsubseteq_p$ ditunjukkan sebagai $(P, \sqsubseteq_p)$, adalah himpunan parsial terurut dengan fungsi metrik parsial $p: P \times P \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ di mana untuk setiap $[s, t], [u, v] \in$ P didefinisikan dengan,

$$p([s, t], [u, v]) = max\ \{|s - u|, |t - v|\}.$$

Corollary 2.1 Suatu barisan $\{f_n\}$ pada ruang $L^2(P)$ konvergen ke $f \in L^2(P)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $p(f_n, f) < \varepsilon$ untuk setiap $n > n_0$.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan jenis penelitian kualitatif berupa kajian pustaka. Kajian pustaka yang dimaksud adalah mengumpulkan referensi literatur terkait dengan topik baik berupa jurnal, buku, artikel berupa definisi, teorema, proposisi, corollary beserta langkah pembuktiannya.

3.2 Pra Penelitian

Pada tahap ini, peneliti mengumpulkan beberapa referensi yang berkaitan dengan topik untuk dijadikan rujukan dalam penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Beberapa tahapan yang diperlukan untuk menyusun penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Melaksanakan pengumpulan data atau refernsi terkait kekonvergenan metrik parsial pada $L^2(P)$;
2. Mengkaji teori pendukung yang berkaitan dengan kekonvergenan metrik parsial pada $L^2(P)$;
3. Menentukan integrasi Al-Qur'an yang berkaitan dengan penelitian.
4. Membuktikan beberapa teorema kekonvergenan metrik parsial pada $L^2(P)$.
5. Membuat kesimpulan dari penelitian.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metrik Parsial

Misal X himpunan tak kosong, diberikan suatu fungsi p didefinisikan sebagai $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ disebut suatu metrik parsial apabila untuk $x, y, z \in X$ berlaku,

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;

(P2) $p(x, x) \leq p(x, y)$;

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$;

(P4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Ruang metrik parsial (X, p), adalah pasangan di mana X merupakan himpunan tak kosong dan p adalah metrik parsial pada X.

Kemudian didefinisikan suatu fungsi d^p pada himpunan tak-kosong X dengan $d^p: X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in X$

$$d^p(x, y) = 2\,p(x, y) - p(x, x) - p(y, y). \quad (1)$$

Karena p adalah metrik parsial di X, maka fungsi d^p memenuhi sifat -sifat metrik di X. Akan ditunjukkan bahwa d^p memenuhi aksioma metrik M1-M4. Untuk sifat **(M1)** $d^p(x, y) \in \mathbb{R}$, $d^p(x, y) < \infty$, $d^p(x, y) \geq 0$.

1. $d^p(x, y) \in \mathbb{R}$

Diketahui $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ artinya $p(x, y), p(x, x), p(y, y)$ merupakan bilangan riil tak-negatif.

Karena penjumlahan operasi dan pengurangan bilangan riil tetap menghasilkan bilangan riil, maka operasi:

$$d^p(x, y) = 2\, p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \in \mathbb{R}$$

Sehingga, $d^p(x, y) \in \mathbb{R}$.

2. $d^p(x, y) < \infty$

Karena $p: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, maka $p(x, y) < \infty$ untuk $x, y \in X$, $2p(x, y) < \infty$.

Karena $p(x, x) \leq p(x, y)$dan $p(y, y) \leq p(x, y)$, maka:

$$d^p(x, y) = 2\, p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

Tidak mungkin menghasilkan nilai tak hingga.

Sehingga, $d^p(x, y) < \infty$.

3. $d^p(x, y) \geq 0$

Gunakan sifat metrik parsial **(P2)** yaitu $p(x, x) \leq p(x, y)$ dan $p(y, y) \leq p(x, y)$, sehingga:

$$p(x, x) + p(y, y) \leq 2p(x, y)$$

$$2p(x, y) - (p(x, x) + p(y, y)) \geq 0$$

$$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \geq 0$$

$$d^p(x, y) \geq 0$$

Maka terbukti bahwa $d^p(x, y) \in \mathbb{R}$, $d^p(x, y) < \infty$, $d^p(x, y) \geq 0$.

Sifat **(M2)** akan ditunjukkan $d^p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

$\to$ Jika $d^p(x, y) = 0$ maka $x = y$

Karena $d^p(x, y) = 0$, maka:

$2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0$.

$2p(x, y) = p(x, x) + p(y, y)$ ……(2)

Namun dari sifat metrik parsial diketahui $p(x, x) \leq p(x, y)$ dan $p(y, y) \leq p(x, y)$.

Sehingga agar (2) terpenuhi, maka haruslah $p(x,x) = p(x,y)$ dan $p(y,y) = p(x,y)$ yang berakibat $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$.

Kemudian berdasarkan aksioma metrik parsial **(P1)**, diketahui bahwa:

$$x = y \text{ jika dan hanya jika } p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$$

di mana menurut aksioma **(P1)** berarti $x = y$.

Sehingga, terbukti bahwa $d^p(x, y) = 0$, maka $x = y$.

← Jika $x = y$ maka $d^p(x, y) = 0$

Karena $x = y$, maka:

$$p(x,x) = p(x,y) = p(y,y).$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} d^p(x,x) = d^p(x,y) &= 2p(x,x) - p(x,x) - p(x,x) \\ &= (2 - 1 - 1) \cdot p(x,x) \\ &= 0 \cdot p(x,x) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga, terbukti bahwa jika $x = y$, maka $d^p(x, y) = 0$.

Maka terbukti $d^p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

Sifat **(M3)** akan ditunjukkan $d^p(x,y) = d^p(y,x)$.

Karena metrik parsial memiliki sifat simetris $p(x, y) = p(y, x)$ dari aksioma **(P3)**, maka:

$$\begin{aligned} d^p(x, y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\ &= d^p(y,x) \end{aligned}$$

Sehingga, terbukti bahwa $d^p(x,y) = d^p(y,x)$.

Dan sifat **(M4)** akan ditunjukkan $d^p(x,z) \le d^p(x,y) + d^p(y,z)$

Diketahui dari definisi d^p diperoleh

$$d^p(x,z) = 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z)$$

Dari aksioma metrik parsial **(P4)**, diketahui bahwa:

$$p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$$

Kalikan kedua ruas dengan 2 menjadi

$$2p(x,z) \leq 2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y)$$

Subtitusikan nilai $2p(x,z)$ ke $d^p(x,z)$

$$\begin{aligned}
d^p(x,z) &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) \\
&\leq (2p(x,y) + 2p(y,z) - 2p(y,y)) - p(x,x) - p(z,z) \\
&\leq 2p(x,y) + 2p(y,z) - p(y,y) - p(y,y) - p(x,x) - p(z,z) \\
&\leq 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) + 2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z) \\
&\leq d^p(x,y) + d^p(y,z)
\end{aligned}$$

Sehingga, terbukti bahwa $d^p(x, y) \leq d^p(x, z) + d^p(z, y)$.

Karena fungsi d^p telah terbukti memenuhi aksioma (M1 - M4) maka terbukti bahwa fungsi d^p merupakan metrik pada X. ■

4.2 Ruang $L^2(P)$

Ruang $L^2(P)$ adalah himpunan fungsi yang terdefinisi pada domain himpunan parsial terurut $P \subseteq \mathbb{R}$ dengan ukuran Lebesgue positif yaitu $\mu(P) > 0$ yang memiliki sifat terintegralkan kuadrat. Artinya, kuadrat dari suatu ukuran jarak fungsi terhadap nol dapat diintegralkan pada domain tersebut dan hasilnya berhingga. Ruang $L^2(P)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$L^2(P) = \left\{ f = f_i \mid \int_P \; [d^p(f(x), 0)]^2 \, dx < \infty \right\} \tag{3}$$

Dalam konteks penelitian ini, himpunan P diasumsikan sebagai himpunan parsial terurut yang merupakan subhimpunan dari interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ dan memiliki ukuran Lebesgue positif, yaitu $\mu(P) > 0$. Pembatasan ini dipilih untuk menjaga konsistensi dengan ruang fungsi $L^2[a,b]$ yang telah dibahas pada Bab 2, dan juga dengan ruang $C[a,b]$ yang akan dibahas pada bagian selanjutnya. Selain itu, asumsi ini menjamin bahwa integral Lebesgue terhadap domain P tetap terdefinisi dan menghasilkan nilai hingga, sehingga fungsi-fungsi dalam ruang $L^2(P)$ memenuhi syarat terintegralkan kuadrat.

Ruang $L^2(P)$ juga merupakan perluasan konsep dari $L^2[a,b]$ dengan mengganti nilai mutlak $|f(x)|$ menjadi $d^p(f(x),0)$. Di mana metrik d^p yang digunakan pada ruang $L^2(P)$ merupakan metrik yang diinduksi oleh metrik parsial p. Berikut definisi dan teorema dari metrik d^p.

Sebelumnya telah berhasi didefiniskan metrik d^p yang diturunkan dari metrik parsial p, serta terbukti bahwa d^p memenuhi seluruh aksioma metrik (riil, berhingga, tak-negatif, identitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga). Selanjutnya metrik ini akan dikembangkan dalam konteks ruang fungsi $L^2(P)$. Pengembangan ini bertujuan untuk mempertahankan hubungan struktural yang telah ditemukan dalam ruang metrik parsial sebelumnya pada persamaan (2). Oleh karena itu, dalam ruang $L^2(P)$, metrik d^p didefinisikan sebagai:

$$d^p(f,g) = 2p(f,g) - p(f,f) - p(g,g).$$

4.3 Metrik Parsial dalam Himpunan Interval Tertutup P

Setelah sebelumnya dibahas ruang $L^2(P)$ sebagai himpunan fungsi-fungsi kuadrat-integrabel yang terdefinisi pada himpunan parsial $P \subseteq [a,b]$, maka pada bagian selanjutnya akan dibahas struktur metrik parsial yang digunakan untuk mendefinisikan jarak antar elemen dalam ruang tersebut. Untuk itu, perlu dikaji terlebih dahulu bentuk metrik parsial yang sesuai pada himpunan P, khususnya ketika P terdiri dari interval-interval tertutup $[s, t] \subseteq \mathbb{R}$.

Analisis metrik parsial pada himpunan interval tertutup ini penting karena akan menjadi dasar dalam pembentukan relasi urutan parsial. Selain itu, sifat-sifat dari metrik ini akan digunakan dalam pembuktian kekonvergenan $L^2(P)$. Kajian terhadap metrik tersebut disusun melalui beberapa proposisi berikut.

Proposisi 4.2 Misal $P \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebarang himpunan interval tertutup. Fungsi $p: P \times P \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ untuk setiap $[s, t], [u, v] \in P$ di definisikan sebagai,

$$p([s,\ t], [u,\ v]) = max\ \{|s - u|, |t - v|\} \tag{4}$$

fungsi p tersebut menunjukkan sebuah metrik parsial pada $P \subseteq \mathbb{R}$.

Bukti.

(P1) $[s,\ t], [u,\ v]$ jika dan hanya jika $p([s, t], [u, v]) = p([s, t], [s, t]) = p([u, v], [u, v])$.

$\rightarrow$ Jika $[s, t] = [u,\ v]$ maka $p([s,\ t], [u,\ v]) = p([s,\ t], [s, t]) = p([u, v], [u,\ v])$.

Misal $[s, t] = [u,\ v]$, maka $s = u$ dan $t = v$.

Kemudian nilai-nilai berikut menjadi:

$$p([s, t], [s, t]) = max\{|s - s|, |t - t|\} = max\{0, 0\} = 0,$$

$$p([s, t], [u, v]) = max\{|s - u|, |t - v|\} = max\{0, 0\} = 0,$$

$$p([u, v, [u, v]) = max\{|u - u|, |v - v|\} = max\{0, 0\} = 0.$$

Sehingga, terbukti jika $[s, t] = [u,\ v]$ maka $p([s,\ t], [u,\ v]) = p([s,\ t], [s, t]) = p([u, v], [u,\ v])$.

$\leftarrow$ Jika $p([s,\ t], [u,\ v]) = p([s,\ t], [s, t]) = p([u, v], [u,\ v])$ maka $[s, t] = [u,\ v]$.

Misal:

$$p([s, t], [u, v]) = p([s, t], [s, t]) = p([u, v], [u, v]) = c.$$

Evaluasi:

$$p([s,t],[s,t]) = max\{|s-s|,|t-t|\} = 0.$$

maka:

$$c = 0.$$

Sehingga diperoleh:

$$p([s,t],[u,v]) = max\{|s-u|,|t-v|\} = 0.$$

Karena fungsi $max|s-u|,|t-v| = 0$ berlaku hanya jika:

$$|s-u| = 0 \text{ dan } |t-v| = 0 \rightarrow s = u, t = v.$$

Maka, terbukti bahwa $p([s,\ t],[u,\ v]) = p([s,\ t],[s,t]) = p([u,v],[u,\ v])$ maka $[s,t] = [u,\ v]$.

Sehingga terbukti bahwa $[s,\ t]$=$[u,\ v]$ jika dan hanya jika $p([s,t],[u,v]) = p([s,t],[s,t]) = p([u,v],[u,v])$ terpenuhi oleh fungsi p.

(P2) $p([s,t],[s,t]) \leq p([s,t],[u,v])$ untuk semua $[s,t],[u,v] \epsilon P$.

Diketahui bahwa:

$$p([s,t],[s,t]) = max\{|s-s|,|t-t|\} = 0.$$

Karena $p([s,t],[u,v]) \geq 0$ untuk semua pasangan interval (karena nilai mutlak selalu tak negatif), maka:

$$0 \leq p([s,t],[u,v]).$$

Sehingga terbukti bahwa $p([s,t],[s,t]) \leq p([s,t],[u,v])$ untuk semua $[s,t],[u,v] \epsilon P$.

(P3) $p([s,t],[u,v]) = p([u,v],[s,t])$.

Berdasarkan definisi fungsi:

$$p([s,t],[u,v]) = max\{|s-u|,|t-v|\} = 0.$$

dan karena:

$$|s-u| = |u-s|, |t-v| = |v-t|,$$

maka:

$$\max|s-u|,|t-v| = max|u-s|,|v-t| = p([u,v],[s,t]).$$

Sehingga, terbukti bahwa $p([s,t],[u,v]) = p([u,v],[s,t])$.

(P4) $p([s,t],[m,n]) \leq p([s,t],[u,v]) + p([u,v],[m,n]) - p([u,v],[u,v])$.

Dari **(P1)** diketahui bahwa $p([u,v],[u,v] = 0$, maka cukup dbuktikan bahwa:

$$p([s,t],[m,n]) \leq p([s,t],[u,v]) + p([u,v],[m,n]).$$

Akan ditunjukkan bahwa:

$$max\{|s-m|,|t-n|\} \leq max\{|s-u|,|t-v|\} + max\{|u-m|,|v-n|\}.$$

Analisis menggunakan ketaksamaan segitiga pada bilangan riil:

$$|s-m| \leq |s-u| + |u-m|, |t-n| \leq |t-v| + |v-n|.$$

Maka:

$$max\{|s-m|,|t-n|\} \leq max\{|s-u| + |u-m|\},\{|t-v| + |v-n|\}.$$

Kemudian, berdasarkan sifat max:

$$max\{a+b, c+d\} \leq max\{a,c\} + max\{b,d\},$$

Sehingga diperoleh:

$$max\{|s-m|,|t-n|\} \leq max\{|s-u|,|t-v|\} + max\{|u-m|,|v-n|\}$$

$$p([s,t],[m,n]) \leq p([s,t],[u,v]) + p([u,v],[m,n]).$$

Sehingga, terbukti bahwa $p([s,t],[m,n]) \leq p([s,t],[u,v]) + p([u,v],[m,n]) - p([u,v],[u,v])$ terpenuhi.

Kemudian, setelah fungsi $p([s,\ t],[u,\ v]) = max\{|s-u|,\ |t-v|\}$ terbukti pada keempat aksioma metrik parsial, maka fungsi p pada (4) adalah metrik parsial pada himpunan interval tertutup $P \subseteq \mathbb{R}$. ■

Pembahasan dilanjutkan dengan menyusun fungsi metrik $d(f,g)$ yang diturunkan dari metrik parsial p, untuk melihat hubungan antara struktur metrik dengan struktur metrik parsial. Proposisi kedua akan menunjukkan bahwa fungsi $d^p(f, g) = 2p(f, g) - p(f, f) - p(g, g)$ merupakan metrik pada ruang fungsi tersebut.

Proposisi 4.3 Pada suatu himpunan parsial terurut P, suatu metrik parsial $p: P \times P \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\forall$ $[s, t], [u, v] \in P$, didefinisikan dengan

$$p([s, t], [u, v]) = max\ \{|s - u|, |t - v|\}. \tag{5}$$

menunjukkan sebuah metrik pada ruang $C[a, b]$ dengan d: $C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ untuk setiap $f, g \in C[a, b]$,

$$d\ (f, g) = \underset{x \in [a, b]}{max} \{|\ f(x) - g(x)|\}, \tag{6}$$

sehingga metrik *d* adalah metrik parsial pada ruang $C[a, b]$.

Sebelumnya telah dibuktikan pada proposisi 4.2 di mana fungsi p yang didefinisikan pada (5) merupakan metrik parsial pada interval tertutup $[s, t], [u, v] \in P \subset \mathbb{R}$. Kemudian akan dibuktikan bagaimana suatu metrik parsial dapat dipresentasikan sebagai metrik pada ruang fungsi $C[a, b]$.

Bukti.

Diketahui dari (6) terdapat dua fungsi yang terdiri dari himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ yakni $f(x)$ dan $g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$,

$$f(x) \text{ di mana } f: [a, b] \to \mathbb{R},$$

$$g(x) \text{ di mana } g: [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Kemudian dari (5) diketahui bahwa *s, t, u, v* $\in \mathbb{R}$ menandakan suatu nilai. Sehingga nilai tersebut dapat mewakili nilai fungsi *f* dan *g* dengan notasi:

$$s = f(a), t = f(b), u = g(a), v = g(b).$$

Maka dua fungsi tersebut dapat direpresentasikan oleh dua interval:

$$[s, t] = [f(a), f(b)] \text{ dan } [u, v] = [g(a), g(b)].$$

Kemudian berdasarkan definisi metrik parsial pada (5) diperoleh:

$$\begin{aligned} p([s,\ t],[u,\ v]) &= max\ \{|s-u|,\ |t-v|\} \\ &= max\ \{|[f(a)-g(a)]|, |f(b)-g(b)|\}. \end{aligned}$$

Dalam ruang fungsi $C[a,\ b]$ pada (5), didefinisikan metrik supremum:

$$d\ (f,\ g) = \max_{x \in [a,\ b]} \{|f(x)-g(x)|\}.$$

Karena *f* dan *g* kontinu, maka $|f(x)-g(x)|$ mencapai nilai maksimum pada titik-titik tertentu dalam $[a,\ b]$, khususnya nilai pada $x = a$ dan $x = b$ bisa menjadi kandidiat maksimum:

$$\max_{x \in [a,\ b]} |f(x)-g(x)| \ \geq\ max\ \{|[f(a)-g(a)]|, |f(b)-g(b)|\}.$$

Tetapi jika dibatasi pada tiap ujung domain, maka metrik parsial p menjadi representasi khusus dari metrik supremum yakni menjadi:

$$p([f(a), f(b)], [g(a), g(b)]) = \max_{x \in [a,\ b]} \{|\ f\ (x)-g(x)|\}.$$

atau

$$p(f, g) = \max_{x \in [a,\ b]} \{|\ f\ (x)-g(x)|\}. \tag{7}$$

di mana fungsi (7) merupakan metrik yang tidak hanya menggunakan titik *a* dan *b*, tetapi pada seluruh domain. Berdasarkan definisinya, fungsi $p(f,\ g)$ ini memenuhi keempat aksioma metrik yaitu:

(M1) $p(f, g) \geq 0$,

(M2) $p(f, g) = 0$,

(M3) $p(f, g) = p(g, f)$,

(M4) $p(f, h) \leq p(f, g) + p(g, h)$.

Sehingga, p adalah metrik.■

Perlu dicatat bahwa fungsi $d\,(f,\,g) = \max_{x \in [a,\,b]} \{|\,f\,(x) - g(x)|\}$ dalam Proposisi 4.3 adalah metrik pada ruang fungsi kontinu $C[a,\,b]$ karena memenuhi seluruh aksioma M1-M4. Namun, bentuk metrik tersebut identik dengan metrik parsial (5) yang telah didefinisikan pada Proposisi 4.2. Hal ini menunjukkan bahwa metrik di ruang fungsi dapat mewakili karakteristik dari metrik parsial pada himpunan yang lebih sederhana, seperti himpunan interval tertutup.

Sehingga, dapat dikatakan bahwa metrik maksimum pada ruang fungsi $C[a,\,b]$ dilihat sebagai representasi hubungan parsial antara elemen-elemen di himpunan interval P. Oleh karena itu, selanjutnya pada Proposisi 4.4 akan dibuktikan bahwa himpunan interval tertutup P dengan suatu urutan parsial $\sqsubseteq_p$ merupakan himpunan parsial terurut $P = (P, \sqsubseteq_p)$ dengan p yang diberikan pada (5).

Proposisi 4.4 Sebuah himpunan interval tertutup P dengan urutan parsial $\sqsubseteq_p$ ditunjukkan sebagai $(P, \sqsubseteq_p)$, adalah himpunan parsial terurut dengan untuk suatu metrik parsial $p: P \times P \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ di mana untuk setiap $[s, t], [u, v] \in$ P didefinisikan sebagai,

$$p([s, t], [u, v]) = max\,\{|s - u|, |t - v|\}. \tag{8}$$

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan bahwa p pada (8) adalah metrik parsial. Pada Proposisi 4.2 telah dibuktikan bahwa fungsi tersebut merupakan metrik parsial.

Kemudian diketahui bahwa P merupakan himpunan interval tertutup

$$P = \{[s, t] \subseteq \mathbb{R} \mid s \leq t\}$$

dan metrik parsial

$$p([s,t],[u,v]) = max\{|s-u|,|t-v|\},$$

didefinisikan relasi:

$$[s,t] \sqsubseteq_p [u,v] \leftrightarrow p([s,t],[s,t]) = p([s,t],[u,v]).$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $(P, \sqsubseteq_p)$ merupakan himpunan parsial terurut menggunakan tiga sifat berikut.

1. Refleksif

   Untuk setiap $[s,t] \in$ P, berlaku:

   $$p([s,t],[s,t]) = p([s,t],[s,t]),$$

   Maka:

   $$[s,t] \sqsubseteq_p [s,t],$$

   Sehingga sifat refleksif terpenuhi.

2. Antisimetri

   Misalkan:

   $$[s,t] \sqsubseteq_p [u,v] \; dan \; [u,v] \sqsubseteq_p [s,t]$$

   Artinya:

   $$p([s,t],[s,t]) = p([s,t],[u,v]) \text{ dan } p([u,v],[u,v]) = p([u,v],[s,t]).$$

   Tapi $p([s,t],[s,t]) = 0$, sehingga:

   $$p([s,t],[u,v]) = 0 \rightarrow max\{|s-u|,|t-v|\} = 0,$$

   Yang berarti $s = u$ dan $t = v$, sehingga:

   $$[s,t] = [u,v],$$

   Sehingga memenuhi sifat antisimetri.

3. Transitif

Misalkan:

$$[s,t] \sqsubseteq_p [u,v] \ dan \ [u,v] \sqsubseteq_p [m,n].$$

Maka:

$$p([s,t],[s,t]) = p([s,t],[u,v]), dan \ p([u,v],[u,v]) = p([u,v],[m,n])$$

Dari relasi pertama $[s,t] \sqsubseteq_p [u,v]$:

$$p([s,t],[u,v]) = 0 \rightarrow s = u, t = v,$$

Dari relasi kedua $[u,v] \sqsubseteq_p [m,n]$:

$$p([u,v],[m,n]) = 0 \rightarrow u = m, v = n,$$

Kemudian gabungkan menjadi $s = m, t = n$, maka diperoleh:

$$p([s,t],[m,n]) = 0 = p([s,t],[s,t]) \rightarrow [s,t] \sqsubseteq_p [m,n],$$

Sehingga sifat transitif terpenuhi.

Karena relasi $\sqsubseteq_p$ pada *P* memenuhi ketiga sifat himpunan terurut parsial. Maka $(P, \sqsubseteq_p)$ adalah himpunan parsial terurut.■

4.4 Metrik Parsial dalam Ruang $L^2(P)$

Setelah membahas bagaimana metrik parsial dapat didefinisikan dan diterapkan pada himpunan interval tertutup *P*, pembahasan selanjutnya diarahkan kembali ke ruang fungsi $L^2(P)$. Pada ruang inilah objek utama dalam skripsi ini, yaitu fungsi-fungsi kuadrat-integrabel pada domain parsial, akan dianalisis lebih lanjut menggunakan pendekatan metrik parsial.

Metrik parsial khusus yang dibentuk dari integrasi fungsi jarak antara nilai-nilai fungsi tersebut digunakan untuk dapat mengukur jarak antar fungsi dalam ruang $L^2(P)$. Metrik ini diturunkan dari metrik parsial sehingga menghasilkan suatu bentuk metrik parsial baru yang disebut p_2 sebagaimana dijelaskan dalam sifat berikut.

Sifat 4.1 Misal P adalah sebuah himpunan parsial terurut. Untuk setiap *f, g* $\in L^2(P)$, *s*uatu fungsi $p : L^2(P) \times L^2(P) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dapat di definiskan sebagai

$$p\,(f,g) = \left(\int_P \; [d^p(f,g)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

maka fungsi p_2 adalah metrik parsial yang dalam hal ini sama seperti suatu metrik pada $L^2(P)$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $p\,(f,g)$ adalah metrik parsial.

(P1) $f = g$ jika dan hanya jika $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$;

→ Jika $f = g$ maka $p(f,f) = p(f,g) = p(g,g)$.

Jika $f = g$, maka untuk setiap titik $x \in P$, terdapat:

$$f(x) = g(x).$$

Karena p adalah metrik parsial, maka berlaku:

$$p(f(x), f(x)) = p(f(x), g(x)) = p(g(x), g(x)).$$

Ambil kuadrat, lalu integralkan:

$$p(f,f)^2 = \int_P \; [p((f(x), f(x))]^2\, dx;$$

$$p(f,g)^2 = \int_P \; [p((f(x), g(x))]^2\, dx;$$

$$p(g,g)^2 = \int_P \; [p((g(x), g(x))]^2\, dx.$$

Karena semua integran sama ($f(x) = g(x)$), maka:

$$p(f,f) \;=\; p(f,g) \;=\; p(g,g).$$

Sehingga, terbukti bahwa jika $f = g$ maka $p(f, f) = p(f, g) = p(g, g)$.

← Diketahui $p(f, f) = p(f, g) = p(g, g)$, maka $f = g$.

Asumsikan:

$$p(f, f) = p(f, g) = p(g, g).$$

Ingat:

$$p(f, f)^2 = \int_P [p((f(x), f(x))]^2 \, dx;$$

$$p(f, g)^2 = \int_P [p((f(x), g(x))]^2 \, dx;$$

$$p(g, g)^2 = \int_P [p((g(x), g(x))]^2 \, dx.$$

Karena ketiganya sama persis, maka hampir di semua titik $x \in P$, berlaku:

$$p(f(x), f(x)) = p(f(x), g(x)) = p(g(x), g(x)).$$

Dari aksioma **(P1)** pada metrik parsial di titik x, diketahui:

$$p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \text{ jika dan hanya jika } x = y.$$

Jadi:

$$f(x) = g(x) \text{ hampir di semua } x \in P.$$

Karena f dan g sama hampir di semua titik dan merupakan anggota $L^2(P)$, maka:

$$f = g \text{ dalam } L^2(P)$$

Sehingga, terbukti bahwa jika $p(f, f) = p(f, g) = p(g, g)$, maka $f = g$.

Maka terbukti $f = g$ jika dan hanya jika $p(f, f) = p(f, g) = p(g, g)$.

(P2) $p(f, f) \leq p(f, g)$;

Diketahui dari metrik parsial bahwa untuk semua $x \in P$,

$$p(f(x), f(x)) \leq p(f(x), g(x)).$$

Maka, karena fungsi kuadrat integral mempertahankan ketidaksamaan:

$$\int_P [p((f(x), f(x))]^2\, dx \leq \int_P [p((f(x), g(x))]^2\, dx.$$

Ambil akar kuadrat kedua ruas:

$$p(f, f) \leq p(f, g).$$

Sehingga, terbukti bahwa $p_2(f, f) \leq p_2(f, g)$.

(P3) $p(f, g) = p(g, f)$;

Dari aksioma simetri pada metrik parsial

$$p(f(x), g(x)) = p(g(x), f(x)).$$

Maka:

$$p(f, g)^2 = \int_P [p((f(x), f(x))]^2\, dx \leq \int_P [p((f(x), g(x))]^2\, dx = p(g, f)^2.$$

Ambil akar:

$$p(f, g) = p(g, f).$$

Sehingga,terbukti bahwa $p_2(f, g) = p_2(g, f)$.

(P4) $p(f, h) \leq p(f, g) + p(g, h) - p(g, g)$.

Gunakan ketaksamaan segitiga parsial untuk setiap titik $x \in P$:

$$p(f(x), h(x)) \leq p(f(x), g(x)) + p(g(x), h(x)) - p(g(x), g(x)).$$

Kuadratkan kedua ruas, lalu integralkan:

$$p(f(x), h(x))^2 \leq (p(f(x), g(x)) + p(g(x), h(x)) - p(g(x), g(x))^2.$$

Integralkan seluruh ruas:

$$\int_P [p(f(x), h(x))]^2\, dx \leq \int_P [p(f(x), g(x)) + p(g(x), h(x)) - p(g(x), g(x))]^2 dx.$$

Akar dari kedua ruas menghasilkan:

$$p(f, h) \leq p(f, g) + p(g, h) - p(g, g).$$

Sehingga terbukti bahwa $p(f, h) \leq p(f, g) + p(g, h) - p(g, g)$.

Karena $p\ (f, g)$ memenuhi keempat aksioma metrik parsial, maka terbukti bahwa $p(f, g)$ adalah metrik parsial. ■

4.5 Kekonvergenan pada Ruang $L^2(P)$

Pertama akan ditinjau kekonvergenan metrik di ruang $L^2[a, b]$. Seperti yang telah dibahas sebelumnya didefinisikan suatu metrik pada ruang ini sebagai:

$$d^p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Suatu barisan $\{f_n\}$ dalam ruang $L^2[a, b]$ dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku,

$$d^p(f_n, f) = \left(\int_P\ [|f_n(x) - f(x)|]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{10}$$

Bentuk kekonvergenan ini merupakan dasar umum dalam ruang metrik lengkap.

Selanjutnya, kekonvergenan diperluas ke dalam kerangka metrik parsial pada ruang $L^2(P)$ yaitu ruang fungsi-fungsi terukur pada domain $P \subseteq [a, b]$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > n_0$ berlaku $p_2(f_n, f) < \varepsilon$ dengan $f \in L^2(P)$ dan P adalah himpunan parsial terurut. Dari (9) diperoleh bahwa metrik parsial p merupakan integral kuadrat dari metrik d^p. Pada penelitian ini, digunakan metrik d^p yang terinduksi dengan metrik parsial p pada (8). Metrik d^p pada kasus ini memiliki representasi yang sama dengan metrik d^p pada ruang $L^2[a, b]$. Sehingga diperoleh,

$$p(f_n, f) = \left(\int_P\ [d^p(f_n, f)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{11}$$

Persamaan (11) menjelaskan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen di ruang $L^2(P)$.

Hal ni merupakan konsekuensi dari kekonvergenan di ruang $L^2[a,b]$ yang ditunjukkan pada Corollary 4.1. (Soemarsono, dkk. 2023)

Corollary 4.1 Suatu barisan $\{f_n\}$ pada ruang $L^2(P)$ konvergen ke $f \in L^2(P)$ jika untuk setiap ε > 0, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $p(f_n, f) <$ ε untuk setiap $n > n_0$.

Dengan metrik parsial p_2 didefinisikan sebagai:

$$p(f,g) = \left(\int_P [d^p(f(x), g(x))]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

dan metrik d^p diturunkan dari metrik parsial p melalui:

$$d^p(f,g) = 2p(f,g) - p(f,f) - p(g,g).$$

Bukti.

Misalkan

$$p(f_n, f) = \left(\int_P [d^p(f_n(x), f(x))]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

jika

$$\lim_{n\to\infty} p(f_n, f) = p(f,f) = 0$$

Maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n > n_0$:

$$p(f_n, f) < \varepsilon.$$

Karena integran $[d^p(f_n(x), f(x))]^2 \geq 0,$ maka jika integralnya menuju nol, diperoleh:

$$\int_P [d^p(f_n(x), f(x))]^2 \, dx \to 0.$$

Artinya, $d^p(f_n(x), f(x)) \to 0$ untuk hampir semua $x \in P$, sehingga:

$$\lim_{n\to\infty} d^p(f_n, f) = 0 \,.$$

Jadi, $\{f_n\}$ konvergen ke f dalam metrik d^p dan sekaligus dalam metrik parsial p.■

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa konsep kekonvergenan dalam ruang metrik parsial $L^2(P)$ secara alami memperluas definisi kekonvergenan dalam ruang metrik. Melalui metrik parsial p yang terdefinisi sebagai integral kuadrat dari metrik d^p, barisan $\{f_n\} \subseteq L^2(P)$ konvergen ke fungsi $f \in L^2(P)$ apabila nilai $p(f_n, f)$ mendekati $p(f, f)$. Pada bukti diatas, menunjukkan bahwa dalam kondisi tersebut, barisan fungsi f_n tidak hanya konvergen dalam metrik d^p, tetapi juga memenuhi definisi kekonvergenan dalam kerangka metrik parsial.

4.6 Kajian Penelitian dalam Prespektif Islam

Telah dibahas sebelumnya bahwa kekonvergenan dalam ruang $L^2(P)$ bergantung pada struktur metrik parsial yang ditentukan oleh relasi parsial dalam himpunan *P*. Dalam konteks ini, suatu barisan fungsi dalam $L^2(P)$ dikatakan konvergen jika memenuhi ketentuan jarak yang ditentukan oleh fungsi metrik parsial p, yaitu:

$$p(f, g) = \left(\int_P [d^p(f(x), g(x))]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Fungsi ini mempertimbangkan nilai-nilai jarak berdasarkan metrik yang diinduksi dari struktur parsial, yang berarti bahwa kedekatan antara fungsi-fungsi tidak hanya diukur dari nilai kuadrat perbedaannya, tetapi juga dari keterikatan relasional antar elemen domain (yakni dalam *P*). Ini menciptakan pendekatan terhadap konvergensi yang tidak bersifat absolut, melainkan bergantung pada konteks, posisi, dan nilai intrinsik masing-masing elemen.

Jika dikaitkan dengan pandangan Islam, konsep ini memiliki kemiripan dengan makna pendekatan spiritual seorang hamba kepada Tuhannya sebagaimana yang tersirat dalam QS. Al-Baqarah: 186, yang menyatakan bahwa Allah SWT sangat dekat dan selalu menjawab permohonan hamba-Nya yang berdoa dengan keimanan. Kedekatan ini tidak bersifat fisik, melainkan bersifat batiniah dan spiritual, sebagaimana dalam ruang metrik parsial jarak terhadap diri sendiri $p(x,x)$ pun tetap dihitung, yang mencerminkan bahwa kualitas internal sangat menentukan.

Dalam penelitian ini, pada subbab 4.1 hingga 4.5, terbukti bahwa fungsi d^p yang dibentuk dari metrik parsial tetap memenuhi aksioma metrik seperti non-negativitas, identitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Ini mengindikasikan bahwa bahkan dari struktur yang tampak tidak sempurna (karena tidak selalu simetris atau nol terhadap dirinya sendiri), masih dapat dibentuk struktur yang tertib dan konsisten. Dalam perspektif Islam, ini selaras dengan ajaran bahwa manusia yang tidak sempurna tetap diberi jalan oleh Allah untuk memperbaiki dirinya dan mendekat kepada-Nya, selama ia berusaha dan istiqamah.

Analoginya, seperti fungsi yang berulang kali didekati oleh barisan fungsi lain dalam ruang $L^2(P)$, hamba juga mendekat kepada Allah secara bertahap melalui ibadah, doa, dan amal saleh. Tidak ada satu lompatan besar, tetapi ada akumulasi usaha yang mendekatkan pada kedekatan spiritual yang sejati. Prinsip ini tercermin dalam tafsir QS. Al-Baqarah: 186 yang menekankan bahwa Allah mengabulkan permohonan hamba-Nya sebagai bentuk interaksi langsung tanpa perantara, namun melalui proses yang menguji iman dan keistiqamahan.

Lebih jauh lagi, relasi parsial dalam himpunan P yang menjadi dasar dalam membentuk metrik parsial menunjukkan bahwa kedekatan dalam ruang ini bersifat kontekstual, sebagaimana hubungan manusia dengan Tuhannya juga bersifat personal dan tidak identik satu sama lain. Setiap orang memiliki jalan spiritual yang berbeda, sebagaimana setiap fungsi dalam ruang $L^2(P)$ memiliki cara yang berbeda dalam mendekati fungsi limitnya.

Maka dari itu, pembahasan dalam penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi terhadap pemahaman matematis dalam ruang metrik parsial, tetapi juga menawarkan refleksi filosofis dan spiritual bahwa pendekatan terhadap suatu nilai kebenaran baik dalam ilmu maupun iman adalah proses yang bertahap, penuh perjuangan, dan tidak selalu linier. Integrasi antara konsep kekonvergenan dalam ruang $L^2(P)$ dengan nilai-nilai Islam memperlihatkan bahwa ilmu pengetahuan dan spiritualitas dapat saling melengkapi, serta menjadi landasan yang kuat dalam membangun keilmuan yang bermakna dan bernilai ibadah.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan pembuktian dalam penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa:

1. Ruang fungsi $L^2(P)$, yaitu ruang fungsi yang terukur kuadrat pada himpunan parsial terurut $P \subseteq [a, b]$, dapat dilengkapi dengan struktur metrik parsial.
2. Dengan mendefinisikan fungsi p sebagai metrik parsial berbasis integral dari d^p, maka diperoleh struktur metrik parsial yang valid pada $L^2(P)$.
3. Berdasarkan pembuktian Proposisi 1 hingga 4 dan Corollary yang dikaji dari jurnal referensi, ditunjukkan bahwa barisan $\{f_n\} \subseteq L^2(P)$ dapat dikatakan konvergen terhadap suatu $f \in L^2(P)$ jika memenuhi syarat:

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ sehingga untuk semua } n \geq n_0 \Rightarrow p(f_n, f) < \varepsilon.$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Topik penelitian mengenai kekonvergenan dalam ruang metrik parsial, khususnya pada ruang fungsi $L^2[a, b]$, masih menyisakan banyak kemungkinan pengembangan lebih lanjut. Penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk mengkaji sifat-sifat ruang metrik parsial pada ruang fungsi lain seperti L^p dengan $p \neq 2$ atau pada ruang-ruang abstrak lainnya seperti ruang Banach dan ruang Hilbert. Selain itu, penelitian mengenai kekonvergenan dalam ruang metrik parsial juga dapat dikembangkan melalui pendekatan numerik dan simulasi untuk memperkuat hasil analisis teoretis.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Bukhari, M. I. bin I., & Muslim, H. (2000). Shahih Bukhari dan Shahih Muslim. Riyadh: Darussalam.

Al-Maraghi, A. (1993). Tafsir Al-Maraghi. Beirut: Dar Al-Fikr.

Al-Muyassar. (2007). Tafsir Al-Muyassar. Riyadh: *King Fahd Complex for the Printing of the Holy Quran*.

Al-Qur'an dan Terjemahannya (2016). Kementerian Agama Republik Indonesia. Jakarta: PT. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.

An-Nawawi, Y. S. (2002). Riyadhus Shalihin. Beirut: Dar al-Kutub al-Ilmiyyah.

Annisa. R. Soemarsono, Y. M, Erna. A, Adam. A. (2023). Convergence and Completness in $\mathscr{L}2$ (p) with respect to a Partial Metric *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, Vol. 9, No.1, Februari.

Kemenag. (2025). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/2?from=185&to=186

Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Application Universitas Windsor, Wiley Classic Library, Kanada.

Quraish Shihab, M. (2002). Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Quran. Jakarta: Lentera Hati.

R.E. Moore, R. B. Kearfott, and M. J Cloud. (2009) Introduction to Interval Analysis, SIAM.

Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.

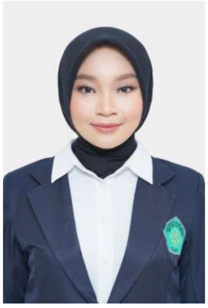
Septiati, N., & Sihombing, A. (2018). Konvergensi dan Kelengkapan pada Ruang Metrik Parsial. Jurnal Matematika dan Aplikasinya, 15(2), 103–115.

Simmons, G. F. (2004). Introduction to Topology and Modern Analysis. McGraw-Hill.

SG. Matthews. (1994). Partial Metric Topology Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 728, no. 1, pp. 183-197.

Teschl. (1998).Topics In Real and Functional Analysis thttp://www.mat.unive.ac.at/ gerald.

RIWAYAT HIDUP



Fatimah Azizah Amin atau lebih dikenal sebagai Fafa. Ia lahir di Malang, 21 Juni 2003 sebagai putri pertama dari pasangan Bapak Aminudin dan Ibu Dewi Khusna. Selama masa pendidikan, penulis sempat menempuh pendidikan dasar di SDIT Al-Islam Kudus saat masih tinggal di Kudus, Jawa Tengah. Kemudian, pada tahun 2012 penulis pindah ke kota Malang dan melanjutkan sekolah di SD Plus Al-Kautsar Malang, lulus pada tahun 2015. Setelah itu, pada tahun 2015 penulis menimba ilmu agama di Pondok Modern Al-Rifa'ie 2 dan menempuh jenjang pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Modern Al-Rifa'ie, lulus pada tahun 2018. Kemudian penulis masih melanjutkan menimba ilmu di Pondok Modern Al-Rifa'ie 2 dan menempuh jenjang pendidikan sekolah menengah atas di SMA Modern Al-Rifa'ie, lulus pada tahun 2021. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan setelah diterima sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN pada tahun 2021. Selama masa perkuliahan, penulis cukup aktif mengembangkan diri dengan meraih gelar Runner Up 1 Nimas Saintek 2022 dan Top 6 Duta Kampus UIN Malang 2023. Ia juga aktif dalam mengikuti organisasi kampus yakni menjadi Bendahara Umum di Unit Kegiatan Mahasiswa Komunitas Musik Studio Tiga (UKM KOMMUST) selama 2 periode yakni periode 2023 dan 2024. Juga menjadi Koordinator Informasi, Media dan Publikasi (IMEP) di Paguyuban Duta Kampus UIN Malang pada tahun 2023. Selain itu, penulis juga aktif menjadi MC, juri perlombaan dan pembicara di beberapa kegiatan kampus. Apabila terdapat pertanyaan, saran, ataupun kritik dari penelitian ini, penulis dapat dihubungi melalui email (fatimahazizahamin@gmail.com) atau sosial media instagram (https://www.instagram.com/fafa_azizah/).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fatimah Azizah Amin
NIM : 210601110070
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Kekonvergenan Metrik Parsial Pada $L^2(P)$
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Agustus 2024	Konsultasi Topik dan Jurnal	1.
2.	21 Oktober 2024	Konsultasi Topik dan Jurnal	2.
3.	24 Oktober 2024	Konsultasi Topik dan Jurnal	3.
4.	10 Januari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	17 Januari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	22 Januari 2025	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	4 Februari 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	10 Februari 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	12 Februari 2025	ACC Seminar Proposal	9.
10.	29 April 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	8 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	14 Mei 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	14 Mei 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	20 Mei 2025	ACC Seminar Hasil	14.
15.	6 Juni 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	15.
16.	10 Juni 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.

17.	10 Juni 2025	ACC Revisi Seminar Hasil	17.
18.	13 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	20 Juni 2025	ACC Keseluruhan	19.

Malang, 20 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005