TEOREMA HAHN-BANACH UNTUK FUNGSIONAL LINIER TERBATAS

SKRIPSI

OLEH
RAHMADITA WIDYA ASTUTI
NIM. 210601110025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

2025

TEOREMA HAHN-BANACH UNTUK FUNGSIONAL LINIER TERBATAS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
RAHMADITA WIDYA ASTUTI
NIM. 210601110025

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

TEOREMA HAHN-BANACH UNTUK FUNGSIONAL LINIER TERBATAS

SKRIPSI

Oleh
Rahmadita Widya Astuti
NIM. 210601110025

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 21 Mei 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M.Si	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 199400217 202012 2 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

TEOREMA HAHN-BANACH UNTUK FUNGSIONAL LINIER TERBATAS

SKRIPSI

Oleh
Rahmadita Widya Astuti
NIM. 210601110025

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 20 Juni 2025

Ketua Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rahmadita Widya Astuti

NIM : 210601110025

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Teorema Hahn-Banach untuk Fungsional Linier Terbatas

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Juni 2025
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
07E5EAMX340825638

Rahmadita Widya Astuti
NIM.210601110025

MOTO

“Dan aku belum pernah kecewa dalam berdoa kepada-Mu, ya Tuhanku.”

(QS. Maryam [19]:4)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini untuk kedua orang tua tercinta, Ayah Cukup dan Ibu Sundari yang senantiasa ikhlas melangitkan doa tiada henti, memberikan semangat, nasihat, dan arah dalam setiap langkah. Tidak lupa untuk adik Diana yang selalu menyemangati selama proses menyelesaikan tugas akhir ini, serta kepada diri sendiri yang telah berjuang dengan melibatkan Allah dalam setiap prosesnya.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa, atas limpahan rahmat, karunia, dan petunjuk-Nya, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Skripsi yang berjudul “Teorema Hahn-Banach untuk Fungsional Linier Terbatas” ini merupakan salah satu bentuk dari perjalanan panjang untuk memperoleh gelar sarjana dalam Program Studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam setiap langkah penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk, bimbingan, dan masukan serta dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dian Maharani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang penuh kesabaran, yang tidak pernah lelah memberikan arahan dan ilmu, serta selalu memberi motivasi kepada penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang penuh kesabaran, yang tidak pernah lelah memberikan arahan dan ilmu, serta selalu memberi motivasi kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Cinta pertama saya, Ayahanda Cukup dan kepada pintu surga saya, Ibunda Sundari. Terima kasih atas kepercayaan yang telah diberikan, atas pengorbanan yang tulus tiada henti, doa-doa yang selalu dilangitkan, dan terima kasih atas kasih sayang, dukungan, serta motivasi yang selalu ayah dan ibu berikan.
8. Almarhumah nenek Karpinah, Almarhum Kakek Koyo, yang telah merawat sejak kecil dengan penuh kasih sayang. Mbah Tuna, Mbah Paijan, terima kasih atas dukungan dan doa-doa yang senantiasa dipanjatkan.

9. Adik tercinta, Diana Lorenza Martalia. Terima kasih telah memberikan dukungan dan semangat setiap harinya.
10. Jihan Fikri Rasyidah, sahabat perantauan yang tulus membersamai, serta selalu memberi semangat dan dukungan
11. Safira, Sulastri, dan Mahmuda. Terima kasih atas semangat dan dukungan untuk terus berkembang.
12. Pihak-pihak lain yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca serta menjadi sumbangsih bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Malang, 20 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

T	: Operator linier
$D(T)$	: Domain dari operator linier
$R(T)$	: Range dari operator linier
f	: Fungsional linier pada subruang $Z \subseteq X$
$\tilde{f}$	: Fungsional linier yang sudah diperluas ke X
p	: fungsional sublinier
$D(f)$	: Domain dari fungsional linier
K	: Kodomain dari fungsional linier ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$)
X^*	: Ruang dual
$\|.\|$	: Norm

ABSTRAK

Astuti, Rahmadita Widya, 2025. **Teorema Hahn-Banach untuk Fungsional Linier Terbatas**. Skripsi. Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si, (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Teorema Hahn-Banach, Fungsional Linier, fungsional linier terbatas.

Fungsional linier f merupakan pemetaan dari suatu ruang vektor X ke lapangan K, baik ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) yang memenuhi dua sifat yakni aditivitas dan homogenitas. Adapun beberapa sifat lain dari fungsional linier, salah satunya yaitu sifat terbatas. Penelitian ini memiliki tujuan untuk membuktikan sifat fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach. Teorema Hahn-Banach merupakan teorema yang membahas mengenai perluasan fungsional linier. Dengan demikian, hasil penelitian ini telah menunjukkan bahwa dengan Teorema Hahn-Banach setiap elemen $x_0 \neq 0$ pada ruang bernorma dapat dihubungkan dengan suatu fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ yang memenuhi $\tilde{f}(x_0) = 1$ dan $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$. Kemudian Fungsional linier yang didefinisikan dari fungsional riil dapat diperluas ke ruang vektor kompleks dengan struktur $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ dan terbukti memenuhi $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dan dapat menjadi referensi tambahan.

ABSTRACT

Astuti, Rahmadita Widya, 2025. **The Hahn-Banach Theorem for Bounded Linear Functionals**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si, (II) Abdul Aziz, M.Si.

Keywords: Hahn-Banach Theorem, Linear Functional, Bounded Linear Functional.

A linear functional f is a mapping from a vector space X to a field K, ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), that satisfies two properties, additivity and homogeneity. Among the various properties of linear functionals, one important property is boundedness. This research is to prove the boundedness property of linear functionals using the Hahn-Banach Theorem. The Hahn-Banach Theorem addresses the extension of linear functionals. Thus, the results of this research show that with the Hahn-Banach Theorem, every element $x_0 \neq 0$ in a normed space can be associated with a bounded linear functional $\tilde{f}$ such that $\tilde{f}(x_0) = 1$ dan $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$. Furthermore, a linear functional defined on a real vector space can be extended to a complex vector space using the structure $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$, and it is proven that this extension satisfies $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$. This research is expected to be beneficial and serve as an additional reference.

مستخلص البحث

أستوتي, رحمديتا ويديا. ٢٠٢٥. **نظرية هان–باناخ للدوال الخطية المحدودة**. البحث الجامعي. قسم الرياضتات, كليته العلوم والتكنولوجيا, جامعية مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.
المشرفة: (١) ديان مهاراني, الماجستيرة فى العلوم (٢) عبد العزيز, الماجستير فى العلوم.

الكلمات الاساسية نظرية هان–باناخ، الدالة الخطية، الدالة الخطية المحدودة.

الدالة الخطية f هي تطبيق من فضاء متجه X إلى الحقل K، ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، وتحقق خاصيتين هما الإضافية والتجانس. بالإضافة إلى ذلك، هناك خصائص أخرى للدوال الخطية، من بينها خاصية المحدودية. هدف هذا البحث إلى إثبات خاصية المحدودية للدوال الخطية باستخدام نظرية هان–باناخ. نظرية هان–باناش هي نظرية أساسية تتعلق بتوسيع الدوال الخطية. وقد أظهرت نتائج هذا البحث أنه من خلال تطبيقق نظرية هان–باناخ، فإنه لكل عنصر غير صفري $x_0 \neq 0$ في فضاء معياري، توجد دالة خطية محدودة$\tilde{f}$ تحقق $\tilde{f}(x_0) = 1$ و $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$. بعد ذلك، يمكن توسيع دالة خطية معرفة على فضاء متجه حقيقي إلى فضاء متجه مركب بالصيغة $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ وقد ثبت أنها تحقق$\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$. ومن المأمول أن يكون هذا البحث مفيدًا وأن يشكل مرجعًا إضافيًا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam matematika, setiap fungsi memiliki domain dan kodomain (Lay, 2012). Jika suatu fungsi memiliki domain berupa ruang vektor X atas lapangan K, dan fungsi tersebut memetakan elemen dari X ke ruang vektor lain yang juga berada di atas lapangan K, dengan memenuhi syarat-syarat tertentu, maka fungsi tersebut disebut operator linier (Kreyszig, 1978). Adapun jika range dari operator linier tersebut adalah K (baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) maka operator tersebut disebut fungsional linier (Kreyszig, 1978). Fungsional linier merupakan pemetaan linier dari suatu ruang vektor X ke lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dengan memenuhi dua sifat, yaitu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk semua x dan y di ruang vektor X dan $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$) dan $x \in X$ (Werner, 2018).

Beberapa fungsional linier memiliki sifat keterbatasan dan kekontinuan. Fungsional linier f dikatakan terbatas apabila terdapat suatu konstanta bilangan riil $C > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$ untuk semua x dalam ruang vektor X (Kreyszig, 1978). Fungsional linier f dalam ruang vektor bernorma dikatakan kontinu jika dan hanya jika f terbatas (Kreyszig, 1978). Sifat kontinu sangat penting dalam pembuktian teorema-teorema, seperti pada Teorema Hahn-Banach. Teorema Hahn-Banach adalah teorema perluasan untuk fungsional linier (Kreyszig, 1978).

Salah satu topik bahasan terkait Teorema Hahn-Banach yaitu ruang dual. Dalam teori ruang dual, Teorema Hahn-Banach memastikan bahwa setiap fungsional linier kontinu yang didefinisikan pada subruang Y dari ruang norma X diperluas ke seluruh X tanpa mengubah sifat linieritas dan kontinuitasnya. Pada ruang dual X^*, setiap elemen f disebut sebagai fungsional linier yang memenuhi kondisi tertentu, yaitu bersifat linier, kontinu, dan memenuhi batas $|f(x)| \leq C\|x\|$. Contohnya, pada ruang l^2, seperti $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dengan $(a_n) \in l^2$ adalah elemen ruang dual yang memenuhi kondisi tersebut. Kondisi ini, juga digunakan dalam banyak aspek, salah satunya dalam pembuktian teorema representasi Riesz (Werner, 2018). Dalam teorema representasi Riesz, khususnya untuk ruang Hilbert, setiap fungsional linier terbatas pada ruang Hilbert H dapat direpresentasikan sebagai hasil kali dalam dua vektor, yaitu:

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ untuk semua } x \in H$$

di mana $y \in H$. (Conway, 1990).

Adapun beberapa penelitian terdahulu telah membahas penerapan Teorema Hahn-Banach dalam berbagai konteks, seperti penelitian oleh Zedam (2012) membahas penerapan teorema Hahn-Banach dalam konteks fungsional linier terbatas fuzzy. Dalam penelitian ini, Zedam membahas perluasan Teorema Hahn-Banach ke ruang bernorma linier fuzzy dan memberikan bukti bahwa jika u_0 adalah fungsional linier terbatas fuzzy pada subruang tertutup tertentu, maka terdapat perluasan linier dari u_0 ke seluruh ruang yang tetap terbatas dan mempertahankan nilai-nilai yang ditentukan pada subruang tersebut (Zedam, 2012).

Penelitian lainnya oleh Kebiche dan Giordano (2024) membahas penerapan Teorema Hahn-Banach dalam konteks ruang Colombeau, yang merupakan salah satu pendekatan dalam teori fungsi tergeneralisasi. Penelitian ini berfokus pada perluasan fungsional linier dalam ruang yang bersifat nonlinier dengan mempertimbangkan struktur ε-wise. Selain itu, penelitian ini juga menunjukkan aplikasi Teorema Hahn-Banach dalam pemisahan himpunan cembung dalam ruang Colombeau (Kebiche & Giordano, 2024).

Teorema Hahn-Banach juga dapat digunakan dalam pembuktian sifat-sifat fungsional linier terbatas. Fungsional linier terbatas awalnya hanya terdefinisi pada subruang tertentu dari ruang bernorma (Conway, 1990). Pada penelitian ini akan dijelaskan mengenai cara untuk memperluas fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

Sifat terbatas dalam fungsional linier memiliki batas tertentu pada ruang vektor, sehingga dapat dianalogikan dengan keterbatasan manusia sebagai makhluk Allah. Allah Subhanahu Wa Ta'ala berfirman:

للّٰهُ لَاۤ اِلٰهَ اِلَّا هُوَۚ اَلْحَيُّ الْقَيُّوْمُ ەۚ لَا تَأْخُذُهٗ سِنَةٌ وَّلَا نَوْمٌۗ لَهٗ مَا فِى السَّمٰوٰتِ وَمَا فِى
الْاَرْضِۗ مَنْ ذَا الَّذِيْ يَشْفَعُ عِنْدَهٗٓ اِلَّا بِاِذْنِهٖۗ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ اَيْدِيْهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْۚ وَلَا يُحِيْطُوْنَ
بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهٖٓ اِلَّا بِمَا شَاۤءَۚ وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضَۚ وَلَا يَـُٔوْدُهٗ حِفْظُهُمَاۚ وَهُوَ الْعَلِيُّ
الْعَظِيْمُ

(Kemenag, 2024a)

"Allah, tidak ada tuhan selain Dia. Yang Maha Hidup, yang terus-menerus mengurus (makhluk-Nya), tidak mengantuk dan tidak tidur. Milik-Nya apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi. Tidak ada yang dapat memberi syafaat di sisi-Nya tanpa izin-Nya. Dia mengetahui apa yang di hadapan mereka dan apa yang di belakang mereka dan mereka tidak mengetahui sesuatu apa pun tentang ilmu-Nya melainkan apa yang Dia kehendaki. Kursi-Nya meliputi langit dan bumi. Dan Dia tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Dia Maha Tinggi, Maha Besar." (QS. Al-Baqarah 2: Ayat 255).

Pada kalimat, “Dia mengetahui apa yang ada di hadapan mereka dan apa yang ada di belakang mereka. Mereka tidak mengetahui sesuatu apa pun dari ilmu-Nya, kecuali apa yang Dia kehendaki”. Allah selalu mengetahui segala sesuatu yang terjadi, baik yang ada di hadapan maupun di belakang makhluk-Nya, sementara mereka hanya mengetahui sebagian kecil dari ilmu Allah, sesuai dengan apa yang diizinkan-Nya untuk mereka ketahui. Kekuasaan Allah meliputi langit dan bumi. Pemeliharaan Allah terhadap seluruh makhluk di langit, bumi, dan seluruh alam ciptaan-Nya tidak memberatkan-Nya sedikit pun. Dia adalah Tuhan Yang Mahatinggi dan Mahabesar.

Manusia hanya memahami ilmu yang telah Allah tetapkan untuk mereka ketahui. Oleh karena itu, pengetahuan manusia terbatas pada apa yang diberikan Allah, dan hal tersebut sangat kecil dibandingkan dengan keluasan ilmu-Nya yang tak terbatas. Hal ini menegaskan bahwa manusia hanya memiliki ilmu yang terbatas, sementara ilmu Allah tidak terbatas (Kemenag, 2024).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana penerapan Teorema Hahn-Banach dalam pembuktian fungsional linier terbatas?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menerapkan Teorema Hahn-Banach dalam pembuktian fungsional linier terbatas.

1.4 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Bagi penulis, penelitian ini memberikan kesempatan untuk memperdalam pemahaman terhadap Teorema Hahn-Banach dan aplikasinya dalam fungsional linier terbatas. Penulis akan memperoleh wawasan yang lebih mendalam dalam memahami konsep fungsional linier dan Teorema Hahn-Banach, serta teknik pembuktiannya.

2. Bagi Pembaca

   Bagi pembaca, dari tulisan ini akan mendapat pemahaman tentang Teorema Hahn-Banach dalam memperluas fungsional linier. Selain itu, penelitian ini dapat menjadi referensi terkait dengan penerapan Teorema Hahn-Banach, khususnya dalam pembuktian fungsional linier terbatas.

3. Bagi Instansi

   Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi kepada instansi, khususnya jurusan matematika sebagai tambahan referensi akademik dalam bidang analisis. Penelitian ini juga dapat memperkaya kajian literatur dan menjadi inspirasi bagi penelitian lanjutan dalam bidang matematika murni.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada hal-hal berikut:

1. Penelitian hanya akan membahas fungsional linier terbatas yang didefinisikan pada ruang vektor bernorma.
2. Pembahasan akan difokuskan pada Teorema Hahn-Banach dan penerapannya dalam memperluas fungsional linier terbatas dari subruang ke seluruh ruang tanpa mengubah norma aslinya.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Vektor (Lay, 2012)

   Ruang vektor atas lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan antar vektor dan perkalian vektor dengan skalar.

2. Ruang bernorma (Kreyszig, 1978)

   Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$, baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Norma dari X adalah fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku:

   (N1) $\|x\| \geq 0$

   (N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

   (N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

   (N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3. Operator linier (Kreyszig, 1978)

   Operator linier T adalah operator yang memiliki domain $D(T)$ dari T berupa ruang vektor dan range T terletak pada ruang vektor atas lapangan yang sama. Untuk semua $x, y \in D(T)$ dan skalar α,

   $T(x + y) = Tx + Ty$

   $T(\alpha x) = \alpha Tx$

4. Fungsional Linier (Werner, 2018)

   Misalkan X adalah ruang vektor dengan lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan f adalah fungsional linier yang memetakan $f: X \to \mathbb{R}$ atau $f: X \to \mathbb{C}$ dengan memenuhi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dan $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk semua $x, y \in X$ dan skalar α.

5. Fungsional Sublinier (Werner, 2018)

   Fungsional sublinier adalah fungsi $p: X \to \mathbb{R}$ pada ruang vektor X yang memenuhi dua sifat utama, yaitu untuk semua $\alpha \geq 0$ dan $x \in X$, berlaku $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ dan untuk semua $x, y \in X$, berlaku $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

6. Ruang Dual (Axler, 2025)

   Ruang dual X^* dari suatu ruang vektor X adalah himpunan semua fungsional linier dari X ke $\mathbb{F}$, baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$.

7. Teorema Hahn-Banach (Kreyszig, 1978)

   Misalkan X adalah ruang vektor riil dan p adalah fungsional sublinier pada X. Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dai X dan memenuhi $f(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$. Maka f memiliki ekstensi linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$. $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X, memenuhi persamaan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$ dan $\tilde{f}(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in Z$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini, akan dikaji mengenai teori-teori pendukung yang terkait penelitian ini sebagai acuan dalam melakukan penelitian.

2.1.1 Ruang Vektor

Ruang vektor atas lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong V, yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu penjumlahan antar vektor dan perkalian vektor dengan skalar (Lay, 2012).

Definisi 2.1 (Lay, 2012)

Ruang vektor atas lapangan K adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi oleh dua operasi yakni penjumlahan $X \times X \to X$ yang dinotasikan sebagai $x + y$ dan perkalian skalar $K \times X \to X$ yang dinotasikan sebagai αx yang memenuhi delapan aksioma sebagai berikut untuk semua $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in K$.

(V1) $x + y = y + x$,

(V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(V3) Terdapat bilangan tunggal $0 \in X$, sedemikian sehingga $x + 0 = x$

(V4) Terdapat bilangan tunggal $-x \in X$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$

(V5) $1x = x$

(V6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(V7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(V8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Berdasarkan lapangan skalar K, ruang vektor diklasifikasikan menjadi dua jenis yaitu, ruang vektor riil dan ruang vektor kompleks (Lay, 2012). Ruang vektor riil adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor $X \times X \to X$, dan perkalian skalar $\mathbb{R} \times X \to X$ yang memenuhi delapan aksioma ruang vektor dengan skalar diambil dari $\mathbb{R}$. Maka V disebut ruang vektor atas $\mathbb{R}$ atau ruang vektor riil (Kolman & Hill, 2008). Begitupun ruang vektor kompleks, Ruang vektor kompleks adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor $V \times V \to V$, dan perkalian skalar $\mathbb{C} \times X \to X$ yang memenuhi delapan aksioma ruang vektor dengan skalar diambil dari $\mathbb{C}$. Maka V disebut ruang vektor atas $\mathbb{C}$ atau ruang vektor kompleks (Axler, 2025).

Contoh 2.2

Misalkan V adalah himpunan di $\mathbb{R}^2$, Misalkan terdapat $u, v, w \in V$, dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di mana,

$u = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

$v = (v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$w = (w_1, w_2)$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$

buktikan bahwa V merupakan ruang vektor.

Bukti:

Terdapat $u, v, w \in V$, dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di mana

$u = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

$v = (v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$w = (w_1, w_2)$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$

Akan ditunjukkan bahwa V adalah ruang vektor dengan memenuhi aksioma berikut.

(V1) $u + v = v + u$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$
$$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$
$$= v + u$$

(V2) $u + (v + w) = (u + v) + w$

$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

$u + (v + w) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2)$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$(u + v) + w = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2)$

Sehingga diperoleh $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(V3) Terdapat $0 = (0,0)$ sehingga,

$$u + 0 = (u_1 + 0, u_2 + 0) = (u_1, u_2) = u$$

(V4) Terdapat $-u = (-u_1, -u_2)$ sehingga,

$$u + (-u) = 0$$
$$(u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = (0,0) = 0$$

(V5) $1 \cdot u = u$

$$1 \cdot (u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = (u_1, u_2) = u$$

(V6) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$$\alpha(\beta u) = (\alpha(\beta[u_1, u_2]) = \alpha\beta[u_1, u_2]$$
$$= (\alpha\beta)[u_1, u_2]$$
$$= (\alpha\beta)u$$

(V7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$$\alpha(u+v) = \alpha((\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) + (\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2))$$

$$= \alpha(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) + \alpha(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)$$

$$= \alpha u + \alpha v$$

(V8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)[u_1, u_2]$$

$$= \alpha[u_1, u_2] + \beta[u_1, u_2]$$

$$= \alpha u + \beta u$$

Karena V memenuhi aksioma-aksioma ruang vektor, maka terbukti bahwa V merupakan ruang vektor.

2.1.2 Ruang Bernorma

Ruang vektor yang dilengkapi dengan norma disebut ruang bernorma. Ruang bernorma memiliki sifat-sifat tertentu. Berikut definisi dari ruang bernorma.

Definisi 2.3 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$, baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Norma dari X adalah fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ruang vektor X yang memiliki norma disebut ruang bernorma atau ruang vektor bernorma.

Contoh 2.4

Misalkan ruang $\mathbb{R}^2$ dengan norma Euclid, yang didefinisikan untuk setiap vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sebagai:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Buktikan $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Bukti:

(N1) $\|x\| \geq 0$

Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| \geq 0$

Karena $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, maka $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.

Jelas bahwa syarat (N1) terpenuhi karena $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}^2$ dan jika dikuadratkan hasilnya non-negatif.

(N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Jika $\|x\| = 0,$ maka $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$ yang berarti $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$, sehingga $x = 0$.

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Jika $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \|\alpha x_1, \alpha x_2\| \\
&= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)} \\
&= |\alpha| \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\
&= |\alpha|\|x\|
\end{aligned}$$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$,

Misalkan $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$. Maka:

$$\|x + y\| \leq \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

$$\leq \|x\| + \|y\|$$

Jadi, syarat (N4) terpenuhi.

Karena syarat N1, N2, N3, dan N4 terpenuhi, maka $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

2.1.3 Operator Linier

Dalam ruang vektor, khususnya ruang bernorma, suatu pemetaan disebut operator. Adapun operator linier yang dinotasikan sebagai T dengan domain berupa ruang vektor yang dinotasikan sebagai $D(T)$ dan range berupa ruang vektor yang dinotasikan sebagai $R(T)$(Kreyszig, 1978).

Definisi 2.5 (Kreyszig, 1978)

Operator linier T adalah operator yang memiliki domain $D(T)$ dari T berupa ruang vektor dan range T terletak pada ruang vektor atas lapangan yang sama. Untuk semua $x, y \in D(T)$ dan skalar α,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Contoh 2.6

Misalkan diberikan operator $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan oleh:

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 4x_1 - x_2)$$

Tunjukkan bahwa T adalah operator linier.

Bukti:

Akan ditunjukkan T merupakan operator linier,

1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$

   untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^2$.

   Misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$, maka

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= (2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2), 4(x_1+y_1) - \\ &\quad (x_2+y_2)) \\ &= (2x_1+3x_2, 4x_1-x_2) + (2y_1 + \\ &\quad 3y_2, 4y_1 - y_2) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

   untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1, \alpha x_2) &= (2\alpha x_1 + 3\alpha x_2, 4\alpha x_1 - \alpha x_2) \\ &= \alpha(2x_1 + 3x_2, 4x_1 - x_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Karena $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dan T memenuhi sifat $T(x+y) = Tx + Ty$ dan $T(\alpha x) = \alpha Tx$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka, T adalah operator linier.

2.1.4 Fungsional Linier

Fungsional linier pada umumnya dinotasikan dengan huruf kecil seperti f, g, h, dan seterusnya. Namun, pada penelitian inifungsional linier dinotasikan dengan f, domain dari f dinotasikan dengan $D(f)$, dan $D(f) \subseteq X$, di mana X merupakan ruang vektor. Fungsional linier f adalah pemetaan linier dari suatu ruang vektor X ke lapangan K di mana K adalah bilangan riil atau kompleks yang memenuhi dua sifat dasar, yaitu aditivitas dan homogenitas (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.7 (Brezis, 2010)

Misalkan domain $D(f)$ dari f adalah ruang vektor dengan lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan f adalah fungsional linier yang memetakan $f: D(f) \to \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ dengan memenuhi dua sifat berikut.

(F1) Aditivitas, untuk semua $x, y \in D(f)$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(F2) Homogenitas, untuk semua $x \in D(f)$ dan skalar α,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Contoh 2.8:

Misalkan ruang vektor $X = \mathbb{R}^3$, dan diberikan sebuah fungsional $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$, dengan $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Buktikan bahwa f adalah fungsional linier.

Bukti:

(F1) Akan ditunjukkan bahwa $f(x + y) = f(x) + f(y)$, untuk semua $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Hitung $f(x + y)$:

$$f(x + y) = f\big((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3)\big).$$

Dari definisi f,

$$f(x + y) = 4(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)$$

Sehingga menghasilkan:

$$f(x + y) = (4x_1 - 3x_2 + 2x_3) + (4y_1 - 3y_2 + 2y_3)$$

Karena $f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$ dan $f(y) = (4y_1 - 3y_2 + 2y_3)$, maka $(x + y) = f(x) + f(y)$.

Sifat (F1) terpenuhi.

(F2) Akan ditunjukkan bahwa $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, untuk semua $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hitung $f(\alpha x)$:

$$f(\alpha x) = f\big((\alpha x_1), (\alpha x_2), (\alpha x_3)\big)$$

Dari definisi f, maka:

$$f(\alpha x) = 4(\alpha x_1) - 3(\alpha x_2) + 2(\alpha x_3)$$

Faktorkan α:

$$f(\alpha x) = \alpha(4x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

Karena $f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$, maka $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Sifat (F2) terpenuhi.

Karena $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dan f memenuhi sifat (F1) dan (F2), maka $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$ adalah fungsional linier.

Definisi 2.9 (Kreyszig, 1978)

Fungsional linier f adalah operator linier dengan domain $D(f)$ dalam ruang vektor X dan range dalam lapangan skalar K dari ruang vektor X, sehingga,

$$f: D(f) \to K$$

di mana $K = \mathbb{R}$ jika X adalah riil dan $K = \mathbb{C}$ jika K adalah kompleks.

Contoh 2.10

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor riil berdimensi dua, dan definisikan fungsional $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2$$

Tunjukkan bahwa f adalah fungsional linier.

Bukti:

Fungsi f didefinisikan pada $X = \mathbb{R}^2$ dan skalar di $\mathbb{R}$. Maka $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sesuai dengan notasi $f: D(f) \to K$, dengan $D(f) = \mathbb{R}^2$ dan $K = \mathbb{R}$.

1. Akan dibuktikan $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

   Ambil dua vektor $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$, maka

   $$\begin{aligned} f(x + y) &= f\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) \\ &= 3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) \\ &= (3x_1 - 2x_2) + (3y_1 - 2y_2) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

   Sifat aditifitas terpenuhi.

2. Akan dibuktikan $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

   Ambil sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, maka

   $$\begin{aligned} (\alpha x) &= f(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= 3(\alpha x_1) - 3(\alpha x_2) \\ &= \alpha(3x_1 - 2x_2) \\ &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

   Sifat homogenitas terpenuhi.

   Karena $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dan sifat aditifitas dan homogenitas terpenuhi, maka f adalah fungsional linier.

Definisi 2.11 (Bartle, 2011)

Misalkan $f: A \to \mathbb{R}$, dengan $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu di titik $c \in A$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$

dengan $|x-c|<\delta$, berlaku $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$. f dikatakan kontinu di A apabila f kontinu di setiap titik dalam domain A.

Contoh 2.12

Misalkan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan c adalah sebarang titik di $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$f(x) = 2x + 1$$

Tunjukkan bahwa fungsi f kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x-c|<\delta$, berlaku,

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$$

untuk sebarang $x, c \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} |f(x)-f(c)| &= |(2x+1)-(2c+1)| \\ &= |2x-2c| \\ &= 2|x-c| \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa,

$$2|x-c|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-c|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan demikian, untuk setiap $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, maka untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $|x-c|<\delta$, berlaku

$$|f(x)-f(c)| = 2|x-c| < 2\,.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ ditemukan $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ yang memenuhi $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$. Maka berdasarkan definisi 4.3, fungsi $f(x) = 2x+1$ kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, $f(x) = 2x+1$ adalah fungsi yang kontinu di $\mathbb{R}$.

2.1.5 Fungsional Sublinier

Misalkan p adalah fungsional sublinier yang digunakan untuk memperluas fungsional linier f dari subruang $Z \subseteq X$ ke seluruh ruang X, dengan batasan berupa $p(x) \geq f(x)$ (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.13 (Werner, 2018)

Misalkan X adalah ruang vektor riil dan p adalah fungsional sublinier. Fungsi $p: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsional sublinier jika memenuhi,

1. Untuk semua $\alpha \geq 0$ dan $x \in X$, berlaku:
$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$
2. Untuk semua $x, y \in X$, berlaku:
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Contoh 2.14

Diberikan fungsi $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai:

$$p(x, y) = |x| + 2|y|$$

Buktikan bahwa p adalah fungsional sublinier.

Bukti:

Untuk membuktikan $p(x, y) = |x| + 2|y|$ adalah fungsional sublinier, yaitu harus menunjukkan bahwa fungsi tersebut memenuhi dua sifat utama:

1. Untuk semua $\alpha \geq 0$ dan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, maka perlu menunjukkan:
$$p(\alpha(x, y)) = \alpha p(x, y).$$
Substitusi $\alpha(x, y)$ ke dalam p:
$$p(\alpha(x, y)) = p(\alpha x, \alpha y) = |\alpha x| + 2|\alpha y| = \alpha|x| + 2\alpha|y|$$
$$= \alpha(|x| + 2|y|).$$
Karena $\alpha(|x| + 2|y|) = \alpha p(x, y)$, maka sifat (1) terpenuhi.

2. Untuk semua $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, maka perlu menunjukkan:

$$p((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq p(x_1, y_1) + p(x_2, y_2).$$

Substitusi $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ke dalam p:

$$p((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = p(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2| + 2|y_1 + y_2|.$$

Menggunakan ketaksamaan segitiga:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \qquad 2|y_1 + y_2| \leq 2|y_1| + |y_2|.$$

Maka:

$$|x_1 + x_2| + 2|y_1 + y_2| \leq (|x_1| + |x_2|) + 2(|y_1| + |y_2|)$$
$$= (|x_1| + 2|y_1|) + (|x_2| + 2|y_2|).$$

Jadi, $p((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq p(x_1, y_1) + p(x_2, y_2)$, sehingga sifat (2) terpenuhi.

Karena $p(x, y) = |x| + 2|y|$ memenuhi sifat (1) dan (2), maka p adalah fungsional sublinier.

2.1.6 Ruang Dual

Ruang dual X^* dari suatu ruang vektor X adalah himpunan semua fungsional linier dari X ke $\mathbb{F}$, baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ (Axler, 2025).

Definisi 2.15 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang bernorma, maka himpunan semua fungsional linier terbatas dari X ke $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) merupakan ruang dual X^* dengan norm yang didefinisikan sebagai,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

Contoh 2.16

Misalkan $X = \mathbb{R}^n$ dengan norm,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tentukan ruang dual X^* pada $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Misalkan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adalah fungsional linier. Maka,

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(ei)$$

di mana $\{e_i, \dots, e_n\}$ adalah basis kanonik $\mathbb{R}^n$.

Didefinisikan vektor $a = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) \in \mathbb{R}^n$, maka

$$f(x) = a.x$$

Sehingga, setiap fungsional linier kontinu pada $\mathbb{R}^n$ dengan demikian $f(x) = a.x$ dengan $a \in \mathbb{R}^n$ maka $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$.

2.1.7 Teorema Hahn-Banach

Teorema Hahn-Banach adalah teorema perluasan untuk fungsional linier. Dalam Teorema Hahn-Banach, objek yang akan diperluas adalah suatu fungsional linier f yang didefinisikan pada subruang Z dari ruang vektor X (Kreyszig, 1978). Berikut beberapa Teorema Hahn Banach dalam ruang vektor riil, Teorema Hahn-Banach secara generalisasi, Teorema Hahn-Banach dalam ruang bernorma, dan Teorema Hahn-Banach dalam fungsional linier terbatas.

Teorema 2.17 (Ruang Vektor)

Misalkan X adalah ruang vektor riil, p adalah fungsional sublinier dan Z adalah subruang dari X. Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dan memenuhi,

$$f(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in Z.$$

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \text{ untuk semua } x \in X.$$

yaitu $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X dan $\tilde{f}(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in Z$ (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Akan dibuktikan,

1. Himpunan E yaitu himpunan semua perluasan linier g dari f yang memenuhi $g(x) \leq p(x)$ pada domainnya $D(g)$ dan lemma Zorn menghasilkan elemen maksimal i dari E.

   Misalkan E adalah himpunan semua perluasan linier g dari f yang memenuhi kondisi,

   $$g(x) \leq p(x),$$

   untuk semua $x \in D(g)$. Jelas bahwa, $E \neq \emptyset$ karena $f \in E$. Pada E, dapat mendefinisikan pengurutan parsial dengan $g \leq h$. Artinya bahwa h adalah perluasan dari g. Secara definisi, $D(h) \supset D(g)$ dan $h(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in D(g)$.

   Untuk setiap rantai $C \subset E$, maka $\hat{g}$ didefinisikan sebagai,

   $$\hat{g}(x) = g(x) \text{ jika } x \in D(g) \text{ dan } g \in C.$$

   $\hat{g}$ adalah fungsional linier yang domainnya didefinisikan sebagai,

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

Domain ini merupakan ruang vektor karena C adalah rantai. Untuk $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ dengan $g_1, g_2 \in C$, maka $g_1(x) = g_2(x)$ karena C adalah rantai, sehingga $g_1 \leq g_2$ atau $g_2 \leq g_1$. Jelas bahwa, $g \leq \hat{g}$ untuk semua $g \in C$. Dengan demikian, g adalah batas atas dari C.

Karena $C \subset E$ bersifat sebarang, lemma Zorn menyatakan bahwa E memiliki elemen maksimal f. Berdasarkan definisi E, elemen ini adalah perluasan linier dari f yang memenuhi syarat $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, untuk $x \in D(\tilde{f})$.

2. f terdefinisi pada seluruh ruang X.

   Akan ditunjukkan bahwa $D(\tilde{f})$ mencakup seluruh X. Misalkan hal ini salah, maka dipilih $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ dan mempertimbangkan subruang Y_1 dari X yang direntangkan oleh $D(\tilde{f})$ dan y_1. Perhatikan bahwa $y_1 \neq 0$ karena $0 \in D(\tilde{f})$. Setiap $x \in Y_1$ dapat ditulis,

$$x = y + \alpha y_1,$$

   untuk $y \in D(\tilde{f})$.

   Jika $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ dengan $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$ maka hal ini mengimplikasikan $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$, di mana $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ sedangkan $y_1 \neq D(\tilde{f})$. Oleh karena itu, satu-satunya solusi adalah $y - \tilde{y} = 0$ dan $\beta - \alpha = 0$, hal ini telah membuktikan keunikan.

   Fungsional g_1 di Y_1 didefinisikan,

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$$

di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier. Selain itu, untuk $\alpha = 0$ maka $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Dengan demikian, g_1 adalah perluasan yang tepat dari f, yaitu perluasan di mana $D(\tilde{f})$ adalah himpunan bagian yang tepat dari $D(g_1)$.

Akibatnya, jika membuktikan bahwa $g_1 \in E$ dengan menunjukkan bahwa,

$$g_1(x) \leq p(x)$$

untuk semua $x \in D(g_1)$. Ini akan bertentangan dengan sifat maksimal dari $\tilde{f}$, sehingga pernyataan $D(\tilde{f}) \neq X$ adalah salah dan $D(\tilde{f}) = X$ adalah benar.

3. Relasi tambahan yang digunakan dalam (b).

Akan ditunjukkan bahwa g_1 dengan nilai c yang sesuai dalam $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$, di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier yang memenuhi $g_1(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in D(g_1)$. Perhatikan bahwa, sebarang y dan z dalam $D(\tilde{f})$. Dari persamaan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, untuk $x \in D(\tilde{f})$ dan $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, untuk semua $x, y \in X$ diperoleh,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y - z) &\leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y - z) \end{aligned}$$

kemudian memindahkan suku terakhir ke kiri dan suku $\tilde{f}(y)$ ke kanan, sehingga,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$$

di mana y_1 tetap.

Karena y tidak muncul di sisi kiri dan z tidak muncul di sisi kanan, ketaksamaan ini tetap berlaku jika mengambil supremum atas $z \in D(\tilde{f})$ di sisi kiri (disebut m_0) dan infimum atas $y \in D(\tilde{f})$ di sisi kanan (disebut m_1). Kemudian $m_0 \leq m_1$ dan untuk suatu c dengan $m_0 \leq c \leq m_1$ dari $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y)$, di mana y_1 tetap, diperoleh, $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c,$ untuk semua $z \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$ dan $c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$ untuk semua $y \in D(\tilde{f})$.

Akan dibuktikan $g_1(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in D(g_1)$ terlebih dahulu untuk α negatif dalam $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$, di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier, lalu untuk α positif. Untuk $\alpha < 0$ menggunakan persamaan $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c,$ untuk semua $z \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$ mengganti z dengan $\alpha^{-1}y$, yaitu,

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c.$$

Kemudian dikalikan dengan $-\alpha > 0$, diperoleh,

$$ap\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Dari $ap\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c$ dan $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha,$

Dengan menggunakan $y + \alpha y_1 = x$ diperoleh ketaksamaan yang diinginkan,

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}\, y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x)$$

Untuk $\alpha = 0$ maka $x \in \mathfrak{D}(\tilde{f})$ dan tidak ada yang perlu dibuktikan. Untuk $\alpha > 0$ menggunakan $c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$ untuk semua $y \in D(\tilde{f})$ dengan y diganti $\alpha^{-1}y$ untuk memperoleh,

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

dikalikan dengan $\alpha > 0$ diperoleh,

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y).$$

Dari $\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y)$ dan $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha,$ maka,

$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$ ■

Teorema 2.18 (Generalisasi)

Misalkan X adalah ruang vektor riil atau kompleks, dan p adalah fungsional bernilai riil pada X yang bersifat subaditif, yaitu untuk semua $x, y \in X$ berlaku,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

dan untuk setiap skalar α memenuhi,

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$$

misalkan f menjadi fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dari X yang memenuhi

$|f(x)| \leq p(x),$ untuk semua $x \in Z.$

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi,

$\left|\tilde{f}\,(x)\right| \leq p(x),$ untuk semua $x \in X$ (Kreyszig, 1978).

Bukti:

1. Ruang vektor riil

   Jika X adalah ruang vektor riil, kemudian $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$ mengimplikasikan $f(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.17, terdapat perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X sehingga,

$\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

dari hasil tersebut, $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ diperoleh,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |1|p(x) = p(x),$$

yang berarti, $\tilde{f}(x) \geq -p(x)$. Bersama dengan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$, hal ini membuktikan $\left|\tilde{f}\,(x)\right| \leq p(x),$ untuk semua $x \in X$.

2. Ruang vektor kompleks

Misalkan X adalah ruang vektor kompleks. Maka Z juga merupakan ruang vektor kompleks. Oleh karena itu, f bernilai kompleks dan dapat ditulis,

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad , x \in Z$$

di mana f_1 dan $f_2$bernilai riil. Untuk sementara, lihat X dan Z sebagai ruang vektor riil dan dinotasikan dengan X_r dan Z_r. Artinya, membatasi perkalian skalar hanya pada bilangan riil (bukan kompleks).

Karena f linier pada $Z,$ serta f_1 dan f_2 adalah bernilai riil, maka f_1 dan f_2 adalah fungsional linier pada Z_r. Selain itu, $f_1(x) \leq |f(x)|$ karena bagian riil dari sebuah bilangan kompleks tidak pernah melebihi nilai mutlaknya. Oleh karena itu, berdasarkan $|f(x) \leq p(x)|$ untuk semua $x \in Z$,

$$f_1(x) \leq p(x), \text{untuk semua } x \in Z_r.$$

Dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach 2.17, terdapat perluasan linier $\tilde{f}_1$ dari f_1 dari Z_r ke X_r, sehingga

$$\tilde{f}_1(x) \leq p(x), \text{untuk semua } x \in X_{r.}$$

kemudian untuk f_2, kembali ke Z dan menggunakan $f = f_1 + if_2$, maka untuk setiap $x \in Z$

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Bagian asli di kedua sisi harus sama:

$$f_2(x) = -f_1(ix), \qquad x \in Z.$$

jika untuk semua $x \in X$ ditetapkan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix), \qquad x \in X.$$

Dilihat dari sifat $f_2(x) = -f_1(ix)$, untuk $x \in Z$ bahwa $\tilde{f}(x) = f(x)$ pada Z. Hal ini menunjukkan bahwa $\tilde{f}$ adalah perluasan dari f dari Z ke X. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada ruang vektor kompleks X, dan $\tilde{f}$ memenuhi $\left|\tilde{f}(x) \leq p(x)\right|$ pada X.

Perhatikan bahwa, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$, untuk $x \in X$ dan sifat linier dari $\tilde{f}_1$ pada ruang vektor riil X_r. Di sini $a + ib$ dengan a dan b bilangan riil adalah sebarang saklar kompleks:

$$\tilde{f}\big((a+ib)x\big) = \tilde{f}_1(ax + ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx)$$

$$= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - \big[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)\big]$$

$$= (a+ib)\big[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)\big]$$

$$= (a+ib)\tilde{f}(x).$$

Kemudian akan dibuktikan $\tilde{f}$ memenuhi $\left|\tilde{f}(x) \leq p(x)\right|$ pada X. Untuk sebarang x sehingga $\tilde{f}(x) = 0$ ini berlaku karena $p(x) \geq 0$ dengan sifat $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ untuk semua $x, y \in X$ dan $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$. Jika x sedemikian rupa sehingga $\tilde{f}(x) \neq 0$. Maka dapat ditulis menggunakan bentuk polar dari bilangan kompleks,

$$\tilde{f}(x) = \left|\tilde{f}(x)\right| e^{i\theta}, \text{sehingga } \left|\tilde{f}(x)\right| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}\big(e^{-i\theta}x\big).$$

Karena $\left|\tilde{f}(x)\right|$ adalah bilangan riil, ekspresi terakhir juga riil dan sama dengan bagian riilnya. Oleh karena itu, berdasarkan sifat $(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$,

$$\left|\tilde{f}(x)\right| = \tilde{f}\big(e^{-i\theta}x\big) = \tilde{f}_1\big(e^{-i\theta}x\big) \leq p\big(e^{-i\theta}x\big) = \left|e^{-i\theta}\right| p(x) = p(x). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.19 (Ruang Bernorma)

Misalkan f adalah fungsional linier terbatas pada suatu subruang Z dari ruang bernorma X. Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X yang merupakan perluasan dari f ke X dan memiliki norma yang sama,

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$

di mana,

$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x\in X}|\tilde{f}\ (x)|$ dan $\|f\|_Z = \sup_{x\in Z}|f\ (x)|$

(dan $\|f\|_Z = 0$ dalam kasus trivial $Z = \{0\}$) (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Jika $Z = \{0\}$, maka $f = 0$, dan perluasannya adalah $\tilde{f} = 0$. Misalkan $Z \neq \{0\}$. Akan dibuktikan menggunakan Teorema 2.18, oleh karena itu terlebih dahulu menemukan fungsi p yang sesuai. Untuk semua $x \in Z$, maka

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z\|x\|.$$

hal ini berbentuk seperti $|f(x)| \leq p(x)$, untuk semua $x \in Z$, di mana

$$p(x) = \|f\|_Z\|x\|.$$

perhatikan bahwa p didefinisikan pada seluruh X. Selain itu, p memenuhi sifat $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ untuk semua $x, y \in X$ karena dengan ketaksamaan segitiga,

$$p(x + y) = \|f\|_Z\|x + y\| \leq \|f\|_Z(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

p juga memenuhi sifat $p(\alpha x) = |\alpha|\ p(x)$ pada X, karena

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z\|\alpha x\| = |\alpha|\|f\|_Z\|x\| = |\alpha|p(x).$$

Dengan demikian, Teorema 2.18 dapat diterapkan dan menyimpulkan bahwa ada fungsional linier $\tilde{f}$ pada X yang merupakan perluasan dari f dan memenuhi,

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|, \qquad x \in X.$$

Dengan mengambil supremum untuk semua $x \in X$ dengan norma 1, diperoleh ketaksamaan:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|-1}} \left|\tilde{f}(x)\right| \leq \|f\|_Z.$$

Karena norma tidak dapat berkurang dalam perluasan, maka terdapat $\left\|\tilde{f}\right\|_X \geq \|f\|_Z$. Dengan demikian, diperoleh sifat $\left\|\tilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z$ dan Teorema terbukti.

Teorema 2.20 (Fungsional Linier Terbatas)

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x_0 \neq 0$ adalah suatu elemen dari X. Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X, sehingga,

$\left\|\tilde{f}\right\| = 1$ dan $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$

(Kreyszig, 1978).

Bukti:

Subruang Z dari X, yang memuat semua elemen $x = \alpha x_0$ di mana α adalah sebuah skalar. Pada Z didefinisikan sebuah fungsional linier f dengan

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

f terbatas dan memiliki norma $\|f\| = 1$ karena,

$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$

Teorema 2.19 mengimplikasikan bahwa f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X, dengan norma $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\| = 1$. Dari definisi f dalam $f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$, dapat dilihat bahwa $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. ■

2.2 Kajian Integrasi dengan Al-Quran/Hadits

Teorema Hahn-Banach dapat digunakan dalam pembuktian sifat fungsional linier terbatas (Kreyszig, 1978). Fungsional linier yang terbatas hanya terdefinisi pada subruang tertentu dari ruang vektor (Conway, 1990). Pada fungsional linier, membahas mengenai sifat terbatas. Sifat terbatas memiliki relevansi pada Al-Qur'an dan hadits, di mana segala sesuatu di alam semesta ini diciptakan dengan ukuran, keseimbangan, dan batas. Islam mengajarkan bahwa segala sesuatu di dunia ini memiliki batas dan ukuran yang telah ditentukan oleh Allah. Konsep ini bisa dipandang sejajar dengan ide bahwa suatu fungsional linier terbatas memiliki batasan tertentu yang tidak dapat dilampaui. Allah Subhanahu Wa Ta'ala berfirman:

لَا يُكَلِّفُ اللّٰهُ نَفْسًا اِلَّا وُسْعَهَاۗ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ اِنْ نَّسِيْنَآ اَوْ اَخْطَأْنَاۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ اِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهٗ عَلَى الَّذِيْنَ مِنْ قَبْلِنَاۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهٖۚ وَاعْفُ عَنَّاۗ وَاغْفِرْ لَنَاۗ وَارْحَمْنَاۗ اَنْتَ مَوْلٰىنَا فَانْصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكٰفِرِيْنَ

(Kemenag, 2024b)

Artinya: "*Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya. Baginya ada sesuatu (pahala) dari (kebajikan) yang diusahakannya dan terhadapnya ada (pula) sesuatu (siksa) atas (kejahatan) yang diperbuatnya. (Mereka berdoa,) "Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami salah. Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau bebani kami dengan beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Wahai Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tidak sanggup kami memikulnya. Maafkanlah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah pelindung kami. Maka, tolonglah kami dalam menghadapi kaum kafir."*" (QS. Al-Baqarah 2: Ayat 286).

Ayat ini menjelaskan bahwa dalam mencapai tujuan hidup itu, manusia diberi beban oleh Allah sesuai kesanggupannya, mereka diberi pahala lebih dari yang telah diusahakannya dan mendapat siksa seimbang dengan kejahatan yang telah dilakukannya. Amal yang dibebankan kepada seseorang hanyalah yang sesuai dengan kesanggupannya. Agama Islam adalah agama yang tidak membebani manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam (Kemenag, 2024).

Ayat ini mengajarkan bahwa segala sesuatu di alam semesta ini memiliki ukuran dan batas yang jelas, yang serupa dalam matematika tentang adanya batasan dalam fungsi atau proses tertentu, seperti fungsional linier terbatas yang tidak bisa melebihi batas tertentu.

2.3 Kajian Teorema Hahn-Banach Dengan Teori Pendukung

Definisi 2.21 (Werner, 2018)

Misalkan domain $D(f)$ dari f adalah ruang vektor dengan lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan f adalah fungsional linier yang memetakan $f: D(f) \to \mathbb{R}$ atau $f: D(f) \to \mathbb{C}$ dengan memenuhi dua sifat berikut.

(F1) Aditivitas, untuk semua $x, y \in D(f)$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(F2) Homogenitas, untuk semua $x \in D(f)$ dan skalar α,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Sifat 2.22 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang vektor kompleks, dan $\tilde{f}$ adalah suatu fungsional linier pada X, jika untuk semua $x \in X$, didefinisikan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix), \tag{1}$$

maka berlaku,

$$\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x). \tag{2}$$

Definisi 2.23 (Kreyszig, 1978)

Misalka X dan Y adalah ruang bernorma dan $T: D(T) \to Y$ adalah operator linier, di mana $D(T) \subseteq X$. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil C sedemikian sehingga untuk semua $x \in D(T)$,

$$\|Tx\| \leq C\|X\|.$$

Definisi 2.24 (Kreyszig, 1978)

Fungsional linier terbatas f adalah operator linier terbatas dengan range dalam lapangan skalar $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$) ruang bernorma X di mana domain $D(f)$ berada. Fungsional linier f dikatakan terbatas jika terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga untuk semua $x \in D(f)$,

$$|f(x)| \leq C\|x\|.$$

Sifat 2.25 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang bernorma, dan misalkan $x_0 \in X$ dengan $x_0 \neq 0.$ Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}: X \to K$, dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga,

1. $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$
2. $\tilde{f}(x_0) = 1$

Definisi 2.26 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $f: D(f) \to Y$ adalah sebarang operator yang belum tentu linier, di mana $D(f) \subseteq X$ dan X, Y adalah ruang bernorma. Fungsional f kontinu pada $x_0 \in D(f)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$\|fx - fx_0\| < \varepsilon$, untuk semua $x \in D(f)$ berlaku $\|x - x_0\| < \delta$.

Teorema 2.27 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $f: D(f) \to K$ (dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah fungsional linier, di mana $D(f)$ merupakan domain dari ruang bernorma X. Maka f bersifat kontinu jika dan hanya jika f terbatas, yaitu terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$, untuk semua $x \in D(f)$.

Sifat 2.28 (Kreyszig, 1978)

Misalkan p fungsional bernilai riil pada ruang vektor X yang bersifat subaditif dan untuk semua $x, y \in X$ memenuhi sifat-sifat berikut.

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

Untuk setiap skalar α memenuhi, $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

sehingga untuk setiap $x_0 \in X$, terdapat sebuah fungsional linier f pada X sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$,

1. $f(x_0) = p(x_0)$
2. $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Sifat 2.29 (Kreyszig, 1978)

Jika X dalam Teorema 2.16 adalah ruang bernorma dan $p(x) \leq k\ \|x\|$ untuk $k > 0$. Maka $\|\tilde{f}\| \leq k$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yaitu menggunakan metode tinjauan literatur, yang bertujuan untuk memahami secara mendalam dan menafsirkan konsep serta fenomena yang diteliti. Dalam penelitian kualitatif, salah satu teknik yang sering digunakan adalah studi pustaka. Studi pustaka melibatkan pengumpulan data melalui pembacaan dan analisis sumber-sumber tertulis, seperti buku, jurnal, artikel ilmiah, dan sumber tertulis lainnya.

3.2 Pra Penelitian

Studi ini dilaksanakan dengan melakukan pengumpulan data yang relevan dengan topik yang sedang diteliti, yakni melalui buku, jurnal, dan artikel. Dalam penelitian ini, peneliti memanfaatkan sejumlah referensi untuk menentukan topik. Kemudian, menentukan menentukan rumusan masalah dan menentukan tujuan serta manfaat dari penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian yang digunakan yaitu penelitian kualitatif. Berikut tahapan-tahapan penelitian kualitatif:

1. Memahami dan mengkaji jurnal atau buku referensi utama.
2. Mencari sumber atau referensi lain yang relevan dengan topik.

3. Memaparkan dan mengkaji integrasi terkait sifat keterbatasan fungsional linier pada ayat-ayat Al-Qur’an.
4. Membuktikan fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibuktikan mengenai sifat-sifat fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

4.1 Sifat-Sifat Fungsional Linier Terbatas

Untuk membuktikan sifat-sifat fungsional linier terbatas, akan dipaparkan terlebih dahulu definisi fungsional linier dan fungsional linier terbatas sebagai berikut.

Definisi 4.1 (Brezis, 2020)

Misalkan domain $D(f)$ dari f adalah ruang vektor dengan lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan f adalah fungsional linier yang memetakan $f: D(f) \to \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ dengan memenuhi dua sifat berikut.

(F1) Aditivitas, untuk semua $x, y \in D(f)$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(F2) Homogenitas, untuk semua $x \in D(f)$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Contoh 4.2

Misakan $X = \mathbb{R}^2$ dengan norm Euclid $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, dan $f(x)$ didefinisikan sebagai,

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2.$$

Buktikan bahwa f adalah fungsional linier.

Bukti:

Perhatikan bahwa, untuk dua vektor $x = (x_1 . x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka akan ditunjukkan f memenuhi sifat aditivitas dan homogenitas.

(F1) Akan ditunjukkan f memenuhi sifat aditivitas,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\ &= 3(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) \\ &= 3x_1 + 3y_1 + 4x_2 + 4y_2 \\ &= (3x_1 + 4x_2) + (3y_1 + 4y_2) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat aditivitas.

(F2) Akan ditunjukkan f memenuhi sifat homogenitas,

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f\big((\alpha x_1, \alpha x_2)\big) \\ &= 3(\alpha x_1) + 4(\alpha x_2) \\ &= \alpha(3x_1 + 4x_2) \\ &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, sifat homogenitas terpenuhi.

Karena sifat aditivitas dan homogenitas terpenuhi, maka f adalah fungsional linier.

Dalam Teorema Hahn-Banach, fungsional linier selain terdefinisi dalam ruang vektor atas lapangan bilangan riil, juga dapat terdefinisi pada ruang vektor atas lapangan bilangan kompleks (Kreyszig, 1978). Misalkan X adalah ruang vektor kompleks, sehingga $Z \subseteq X$ juga merupakan ruang vektor kompleks.oleh karena itu, f adalah fungsional linier bernilai kompleks yang didefinisikan sebagai, $f(x) =$

$f_1(x) + if_2(x)$, untuk setiap $x \in Z$, di mana f_1 dan f_2 bernilai riil. Kemudian, dengan menggunakan $f = f_1 + if_2$, untuk setiap $x \in Z$, diperoleh

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Sehingga,

$$f_2(x) = -f_1(ix), x \in Z$$

dan apabila untuk semua $x \in X$ ditetapkan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix).$$

Sifat 4.3 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang vektor kompleks, dan $\tilde{f}$ adalah suatu fungsional linier pada X, jika untuk semua $x \in X$, didefinisikan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix), \tag{1}$$

maka berlaku,

$$\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x). \tag{2}$$

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X.

   Berdasarkan sifat (1) untuk setiap $x, y \in X$, maka

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x+y) &= \tilde{f}_1(x+y) - i\tilde{f}_1(i(x+y)\\ &= \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i\left(\tilde{f}_1(ix) + \tilde{f}_1(iy)\right)\\ &= \left(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)\right) + \left(\tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(iy)\right)\\ &= \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)\end{aligned}$$

   Dengan demikian, $\tilde{f}$ memenuhi sifat aditivitas. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\tilde{f}$ memenuhi sifat homogenitas yaitu,

   Misalkan $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$, dan $\alpha = a + ib$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(\alpha x) &= \tilde{f}_1(\alpha x) - i\tilde{f}_1(i\alpha x) \\
&= \tilde{f}_1\big((a+ib)x\big) - i\tilde{f}_1(i(a+ib)x) \\
&= \alpha\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i\big[\alpha\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)\big] \\
&= \left(\alpha\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix)\right) - i\left(\alpha\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)\right) \\
&= \left(\alpha\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix)\right) - i\alpha\tilde{f}_1(ix) - ib\tilde{f}_1(x) \\
&= \left(\alpha\tilde{f}_1(x) + ib\tilde{f}_1(x)\right) - \left(b\tilde{f}_1(ix) - ia\tilde{f}_1(x)\right) \\
&= (a+ib)\tilde{f}_1(x) - i(a+ib)\tilde{f}_1(ix) \\
&= \alpha\left(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)\right) \\
&= \alpha\tilde{f}(x)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, $\tilde{f}$ juga memenuhi sifat homogenitas. Karena sifat aditivitas dan homogenitas terpenuhi, maka $\tilde{f}$ adalah fungsional linier.

2. Akan ditunjukkan $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(ix) &= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1\big(i(ix)\big) \\
&= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(-x) \\
&= \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_1(x)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
i\tilde{f}(x) &= i\left(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)\right) \\
&= i\tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(ix)
\end{aligned}
$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(ix) &= \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_1(x) \\
&= i\tilde{f}(x)
\end{aligned}
$$

■

Definisi 4.4 (Kreyszig, 1978)

Misalka X dan Y adalah ruang bernorma dan $T: D(T) \to Y$ adalah operator linier, di mana $D(T) \subseteq X$. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil C sedemikian sehingga untuk semua $x \in D(T)$,

$$\|Tx\| \leq C\|X\|.$$

Contoh 4.5

Misalkan $X = Y = \mathbb{R}^2$ dengan norma Euclidean $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Didefinisikan operator $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sebagai,

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2).$$

Buktikan apakah operator T adalah operator linier terbatas.

Bukti:

Sebelum membuktikan T adalah operator linier terbatas, maka akan dibuktikan terlebih dahulu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm.

1. Akan dibuktikan bahwa $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm di $\mathbb{R}^2$.

   Berdasarkan definisi ruang bernorma, sebuah fungsi $\|.\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah norm sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

   (N1) $\|x\| \geq 0$

   Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| \geq 0$

   Karena $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, maka $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.

   Jelas bahwa syarat (N1) terpenuhi karena $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}^2$ hasilnya non-negatif.

   (N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

   Jika $\|x\| = 0$, maka $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$. Dengan menggunakan sifat operasi akar pada himpunan bilangan riil, maka $x_1 + x_2$ haruslah non-negatif

$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0\right)$. Ini berakibat $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Karena kuadrat dari bilangan riil pasti non-negatif ($x_1^2 \geq 0$ dan $x_2^2 \geq 0$), maka $x_1^2 = x_2^2 = 0$.

Jika $x = 0$, maka $\|x\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0$.

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Jika $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \|\alpha x_1, \alpha x_2\| \\
&= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)} \\
&= |\alpha| \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\
&= |\alpha|\|x\|
\end{aligned}$$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$,

Misalkan $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$. Maka:

$\|x + y\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \|x\| + \|y\|$.

Karena syarat N1 sampai N4 terpenuhi, maka $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm di $\mathbb{R}^2$.

2. Akan dibuktikan T adalah operator linier.

   Misalkan $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a. $$\begin{aligned}
T(x + y) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
&= \left(3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),\ 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\right) \\
&= (3x_1 + 3y_1 + x_2 + y_2,\ 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2)
\end{aligned}$$

$$= T(x) + T(y)$$

b. $T(\alpha x) = T(\alpha x_1, \alpha x_2)$

$$= (3\alpha x_1 + \alpha x_2,\ 2\alpha x_1 - \alpha x_2)$$

$$= \alpha T(x)$$

Karena T memenuhi kedua sifat operator linier, maka T adalah operator linier.

3. Akan dibuktikan T adalah operator linier terbatas.

Berdasarkan definisi 4.4, terdapat suatu bilangan riil C, sehingga $\|Tx\| \leq C\|X\|$. Kemudian akan dihitung $\|Tx\|$ dalam norm Euclid.

$$T(x) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$$

$$\|T(x)\| = \sqrt{(3x_1 + x_2)^2 + (2x_1 - x_2)^2}$$

Kita akan membatasi $\|T(x)\|$ dalam bentuk $C\|x\|$, di mana $\|x\| = x_1^2 + x_2^2$, sehingga,

$$\|Tx\|^2 = (3x_1 + x_2)^2 + (2x_1 - x_2)^2$$

$$= 9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (9+4)x_1^2 + (1+1)x_2^2 + (6-4)x_1x_2$$

$$= 13x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$$

Kemudian dengan,

$\|Tx\|^2 \leq 13x_1^2 + 2x_2^2 + 2\,|x_1x_2| \leq 13x_1^2 + 2x_2^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 = 14x_1^2 + 3x_2^2$

diperoleh,

$$\|T(x)\| \leq \sqrt{14x_1^2 + 3x_2^2} \leq \sqrt{\max\{14{,}3\}\,(x12 + x_2^2)} = \sqrt{14}\|x\|.$$

Jadi, T adalah operator linier terbatas dengan $C = \sqrt{14}$.

Definisi 4.6 (Kreyszig, 1978)

Fungsional linier terbatas f adalah operator linier terbatas dengan range dalam lapangan skalar ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), dan terdapat domain $D(f)$ pada ruang bernorma X. Sehingga, fungsional linier f dikatakan terbatas jika terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga untuk semua $x \in D(f)$,

$$|f(x)| \leq C\|x\|.$$

Contoh 4.7

Misakan $X = \mathbb{R}^2$ dengan norm Euclid $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, dan $f(x)$ didefinisikan sebagai,

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2.$$

Buktikan bahwa f adalah fungsional linier terbatas.

Bukti:

Sebelum membuktikan f adalah fungsional linier terbatas, maka akan dibuktikan terlebih dahulu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm.

1. Akan dibuktikan bahwa $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm di $\mathbb{R}^2$.

   Berdasarkan definisi ruang bernorma, sebuah fungsi $\|.\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah norm sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

   (N1) $\|x\| \geq 0$

   Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| \geq 0$

   Karena $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, maka $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^2$.

   Jelas bahwa syarat (N1) terpenuhi karena $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}^2$ hasilnya non-negatif.

   (N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Jika $\|x\| = 0$, maka $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$. Dengan menggunakan sifat operasi akar pada himpunan bilangan riil, maka $x_1 + x_2$ haruslah non-negatif $\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0\right)$. Ini berakibat $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Karena kuadrat dari bilangan riil pasti non-negatif ($x_1^2 \geq 0$ dan $x_2^2 \geq 0$), maka $x_1^2 = x_2^2 = 0$.

Jika $x = 0$, maka $\|x\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0$.

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Jika $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \|\alpha x_1, \alpha x_2\| \\ &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2)} \\ &= |\alpha| \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ &= |\alpha|\|x\| \end{aligned}$$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbb{R}^2$,

Misalkan $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$. Maka:

$\|x + y\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \|x\| + \|y\|$.

Karena syarat N1 sampai N4 terpenuhi, maka $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ adalah norm di $\mathbb{R}^2$.

2. Akan dibuktikan f adalah fungsional linier

   Perhatikan bahwa, untuk dua vektor $x = (x_1 . x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, maka akan ditunjukkan f memenuhi sifat aditivitas dan homogenitas.

a. Akan ditunjukkan f memenuhi sifat aditivitas,

$$f(x+y) = f((x_1+y_1, x_2+y_2))$$

$$= 3(x_1+y_1) + 4(x_2+y_2)$$

$$= 3x_1 + 3y_1 + 4x_2 + 4y_2$$

$$= (3x_1 + 4x_2) + (3y_1 + 4y_2)$$

$$= f(x) + f(y)$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat aditivitas.

b. Akan ditunjukkan f memenuhi sifat homogenitas,

$$f(\alpha x) = f\big((\alpha x_1, \alpha x_2)\big)$$

$$= 3(\alpha x_1) + 4(\alpha x_2)$$

$$= \alpha(3x_1 + 4x_2)$$

$$= \alpha f(x)$$

Dengan demikian, sifat homogenitas terpenuhi.

Karena sifat aditivitas dan homogenitas terpenuhi, maka f adalah fungsional linier.

3. Akan dibuktikan f terbatas.

Berdasarkan definisi 4.1, akan dicari konstanta bilangan riil $C > 0$ sedemikian sehingga,

$$|f(x)| \leq C\|x\|$$

untuk semua $x \in \mathbb{R}^2$. Dengan $f(x) = 3x_1 + 4x_2$ dan $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ maka,

$$|f(x)| = |3x_1 + 4x_2\,| \leq \sqrt{3^2 + 4^2}.\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$= |3x_1 + 4x_2\,| \leq 5.\|x\|$$

Sehingga, dapat diambil $C = 5$, maka

$$|f(x)| \leq 5. \|x\|$$

Dengan demikian, $f(x) = 3x_1 + 4x_2$ adalah fungsional linier terbatas karena memetakan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ secara linier dan memenuhi batasan $|f(x)| \leq C\|x\|$.

Teorema 2.20 (Fungsional Linier Terbatas)

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x_0 \neq 0$ adalah suatu elemen dari X. Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X, sehingga,

$\|\tilde{f}\| = 1$ dan $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$

(Kreyszig, 1978).

Sifat 4.8 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang bernorma, dan misalkan $x_0 \in X$ dengan $x_0 \neq 0$. Berdasarkan asumsi Teorema 2.20, maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}: X \to K$, dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga,

1. $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$
2. $\tilde{f}(x_0) = 1$

Bukti:

Misalkan diambil subruang $Z \subset X$ dengan $Z = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$, $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Kemudian didefinisikan fungsional linier f pada Z dengan,

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha$$

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $Z = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\}$ adalah ruang bernorma. Untuk setiap $x, y \in Z$ dan $\lambda \in K$ berlaku:

1. (N1) $\|x\| \geq 0$

   Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$ maka,

$$\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\| \geq 0$$

Karena $|\alpha| \geq 0$ dan $\|x_0\| > 0$ (sebab $x_0 \neq 0$) maka $\|x\| \geq 0$.

Syarat **(**N1**)** terpenuhi.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Jika $\|x\| = 0$, maka

$$|\alpha| \cdot \|x_0\| = 0$$

Karena $\|x_0\| > 0$, ini berakibat $|\alpha| = 0$, sehingga $\alpha = 0$ dan $x = \alpha x_0 = 0$

Jika $x = 0$, maka

$$\begin{aligned} \|x\| &= |0| \cdot \|x_0\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Syarat (N2) terpenuhi.

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Misalkan $x = \alpha x_0$ dan $\lambda x = \lambda \alpha x_0 = (\lambda \alpha) x_0$, maka

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= |\lambda \alpha| \cdot \|x_0\| \\ &= |\lambda| \cdot |\alpha| \cdot \|x_0\| \\ &= |\lambda| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Syarat (N3) terpenuhi.

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Misalkan $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0$, $x + y = (\alpha + \beta) x_0$, $\|x + y\| = |\alpha + \beta| \cdot \|x_0\|$.

$$\|x + y\| \leq (|\alpha| + |\beta|) \cdot \|x_0\| = \|x\| + \|y\|$$

Syarat (N4) terpenuhi.

Karena syarat (N1) sampai (N4) terpenuhi, maka fungsi $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$, untuk $x = \alpha x_0 \in Z$, adalah norma pada ruang Z

2. Untuk sebarang $x, y \in Z$ dan skalar $\alpha \in K$, akan diperiksa f bersifat linier.

a. Ambil sebarang $x = ax_0 \in Z$ dan $y = bx_0 \in Z$, maka

$$f(x + y) = f((a + b)x_0)$$

$$= f(ax_0) + f(bx_0)$$

$$= f(x) + f(y)$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat aditivitas.

b. Ambil sebarang $x = bx_0 \in Z$ dan $\alpha \in K$, maka

$$f(\alpha x) = f((\alpha b)x_0)$$

$$= \alpha f(bx_0)$$

$$= \alpha f(x)$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat homogenitas.

Karena f memenuhi sifat aditivitas dan homogenitas, maka f adalah fungsional linier.

3. Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsional linier terbatas.

Berdasarkan definisi, fungsional linier f dikatakan terbatas apabila terdapat suatu konstanta bilangan riil $C > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$, untuk semua $x \in Z$.

Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$, $f(x) = \alpha$ dan $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$ maka $|f(x)| = |\alpha|$ dan $|\alpha| = \frac{\|x\|}{\|x_0\|}$, kemudian disubstitusikan sehingga,

$$|f(x)| = |\alpha| = \frac{\|x\|}{\|x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|}. \|x\|$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\|x_0\|}. \|x\|$$

Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah fungsional linier terbatas dengan $C = \frac{1}{\|x_0\|}$.

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$ dan $\tilde{f}(x_0) = 1$

   Ambil $x = \alpha x_0, f(x) = \alpha,$ dan $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$. Maka berdasarkan definisi fungsional linier terbatas, norm dari f didefinisikan sebagai,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

$$= \frac{|\alpha|}{|\alpha| \cdot \|x_0\|}$$

$$= \frac{1}{\|x_0\|}$$

$$= \|x_0\|^{-1}$$

   Berdasarkan Teorema Hahn-Banach 2.20, setiap fungsional linier terbatas f yang disefinisikan pada subruang $Z \subset X$ dapat diperluas menjadi fungsional linier terbatas $\tilde{f}: X \to K$ dengan $\|\tilde{f}\| = \|f\| = \frac{1}{\|x_0\|}$. Karena $\tilde{f}$ memperluas f dan $f(x_0) = 1,$ maka $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1.$

4.2 Kekontinuan dan Keterbatasan Fungsional Linier

Pada subbab sebelumnya, telah dibahas mengenai sifat terbatas fungsional linier, maka pada subbab ini akan dibahas mengenai hubungan antara keterbatasan dan kekontinuan fungsional linier dalam ruang bernorma.

Definisi 4.9 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $f: D(f) \to Y$ adalah sebarang operator yang belum tentu linier, di mana $D(f) \subseteq X$ dan X, Y adalah ruang bernorma. Fungsional f kontinu pada $x_0 \in D(f)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$\|fx - fx_0\| < \varepsilon,$ untuk semua $x \in D(f)$ berlaku $\|x - x_0\| < \delta.$

Teorema 4.10 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $f: D(f) \rightarrow K$ (dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah fungsional linier, di mana $D(f)$ merupakan domain dari ruang bernorma X. Maka f bersifat kontinu jika dan hanya jika f terbatas, yaitu terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$, untuk semua $x \in D(f)$.

Bukti:

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika f terbatas, maka f kontinu.

Misalkan $f \neq 0$, diasumsikan f adalah fungsional linier terbatas dan ambil sebarang $x_0 \in D(f)$, Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka untuk setiap $x \in D(f)$ dengan $\|x - x_0\| < \delta$, di mana $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ berlaku,

$$\|f(x) - (x_0)\| = \|f(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| < C.\delta = \varepsilon.$$

Karena $x_0 \in D(f)$ dipilih sebarang, maka f kontinu.

($\Rightarrow$)Akan dibuktikan jika f kontinu, maka f terbatas.

Diambil sebarang $y \in D(f)$ dengan $y \neq 0$, karena f kontinu di sebarang titik $x_0 \in D(f)$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga, untuk $x \in D(f)$ dengan $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$ maka $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, untuk semua $x \in D(f)$ berlaku $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Dengan demikian,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x - x_0)\| = \left\|f\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|f(y)\|$$

Sehingga, $\frac{\delta}{\|y\|}\|fy\| \leq \varepsilon$.

Dengan demikian, $\|f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}y$ dapat ditulis $\|f(y)\| \leq C\|y\|$. Jadi, f terbatas dengan konstanta $C = \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Dari pembuktian dua sisi tersebut, maka telah terbukti bahwa fungsional linier f kontinu jika dan hanya jika f terbatas.

4.3 Fungsional Sublinier pada Fungsional Linier

Fungsional sublinier memiliki keterkaitan pada fungsional linier. Dalam bentuk umum Teorema Hahn-Banach, di mana fungsional linier terbatas dapat diperluas ke seluruh ruang tanpa melampaui nilai dari fungsional sublinier yang membatasi (Rudin, 1991).

Sifat 4.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan p fungsional bernilai riil pada ruang vektor X yang bersifat subaditif dan untuk semua $x, y \in X$ memenuhi sifat-sifat berikut.

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

Untuk setiap skalar α memenuhi, $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

sehingga untuk setiap $x_0 \in X$, terdapat sebuah fungsional linier $\tilde{f}$ pada X sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$,

1. $\tilde{f}(x_0) = p(x_0)$
2. $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

Misalkan $Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang dari X.

f_0 didefinisikan sebagai $f_0: Z \to \mathbb{R}$ sehingga,

$$f_0(\alpha x_0) \coloneqq \alpha p(x_0), \text{ untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $f_0(\alpha x_0) \leq p(\alpha x_0)$ untuk semua $x \in Z$.

Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0)$ dan $p(x) = p(\alpha x_0) = |\alpha| p(x_0)$.

karena p adalah homogen positif,

1 Jika $\alpha \geq 0$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0) = |\alpha|p(x_0) = p(x)$

2 Jika $\alpha < 0$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0) = -|\alpha|p(x_0) = -p(x)$ dan $p(x) = |\alpha|p(x_0)$

Jadi, untuk semua $x \in Z$ berlaku $f_0(x) = -p(x) \Rightarrow f_0(x) \leq p(x)$.

Karena f_0 adalah fungsional linier pada subruang $Z \subset X$, p adalah fungsional sublinier, dan $f_0(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$. Maka menggunakan Teorema Hahn-Banach untuk memperluas suatu fungsional linier f di seluruh ruang X, Sehingga, dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach, terdapat perluasan $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ yang linier dan memenuhi,

$\tilde{f} = \widetilde{f_0}$ dan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$, dan berlaku

$$\tilde{f}(x_0) = \widetilde{f_0}(x_0) = p(x_0).$$

Kemudian, akan dibuktikan $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Jika $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ dan $\tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, maka

$-\tilde{f}(x) \leq p(x) \Longrightarrow -p(x) \leq \tilde{f}(x)$ sehingga $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$.

Dengan demikian, telah dibuktikan bahwa untuk setiap $x_0 \in X$, jika p adalah fungsional sublinier, maka ada fungsional linier $\tilde{f}$ pada X sehingga:

1. $\tilde{f}(x_0) = p(x_0)$
2. $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Teorema 2.18 (Generalisasi)

Misalkan X adalah ruang vektor riil atau kompleks, dan p adalah fungsional bernilai riil pada X yang bersifat subaditif, yaitu untuk semua $x, y \in X$ berlaku,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

dan untuk setiap skalar α memenuhi,

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$$

misalkan f menjadi fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dari X yang memenuhi

$|f(x)| \leq p(x)$, untuk semua $x \in Z$.

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi,

$|\tilde{f}\,(x)| \leq p(x)$, untuk semua $x \in X$ (Kreyszig, 1978).

Sifat 4.12 (Kreyszig, 1978)

Jika X dalam Teorema 2.18 adalah ruang bernorma dan $p(x) \leq k\,\|x\|$ untuk $k > 0$. Maka $\|\tilde{f}\| \leq k$.

Bukti:

Diketahui X adalah ruang bernorma, $p(x) \leq k\|x\|$ untuk suatu konstanta $k > 0$, f adalah fungsional linier yang terdefinisi pada subruang $Z \subset X$, $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$, dan $\tilde{f}$ adalah perluasan linier dari f ke seluruh X yang memenuhi $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Akan ditunjukkan bahwa $\|\tilde{f}\| \leq k$ adalah norm dari fungsional linier $\tilde{f}$ yang dibatasi oleh konstanta k.

Berdasarkan Teorema Hahn-Banach, perluasan $\tilde{f}$ dari f memenuhi,

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in X.$$

Asumsikan $p(x) \leq k\|x\|$, diperoleh

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \leq k\|x\|, \qquad\qquad \forall x \in X.$$

Dari definisi norm dari fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada ruang bernorma X, bahwa,

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)|$$

Karena untuk setiap x dengan $\|x\| = 1$ berlaku $|\tilde{f}(x)| \leq k$, maka

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \leq k$$

$$\|\tilde{f}\| \leq k$$

Dari hasil di atas, telah ditunjukkan bahwa norma dari fungsional linier hasil perluasan $\tilde{f}$ tetap terbatas oleh k, yaitu $\|\tilde{f}\| \leq k$.

4.4 Konstruksi Teorema Hahn-Banach

Dalam Teorema Hahn-Banach, terbagi menjadi beberapa bagian. Seperti Teorema Hahn-Banach untuk perluasan fungsional linier dan Teorema Hahn-Banach untuk fungsional linier terbatas. Pada subbab ini, akan dilakukan konstruksi dari kedua Teorema Hahn-Banach berikut.

Teorema 2.17 (Perluasan Fungsional Linier)

Misalkan X adalah ruang vektor riil dan p adalah fungsional sublinier pada X. Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dari X dan memenuhi,

$f(x) \leq p(x)$, untuk semua $x \in Z$.

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi,

$\tilde{f}(x) \leq p(x)$, untuk semua $x \in X$.

yaitu $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X dan $\tilde{f}(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in Z$ (Kreyszig, 1978).

Teorema 2.20 (Fungsional Linier Terbatas)

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x_0 \neq 0$ adalah suatu elemen dari X. Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X, sehingga,

$\|\tilde{f}\| = 1$ dan $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$ (Kreyszig, 1978).

Dari Teorema 2.17 yang akan di konstruksikan ke Teorema 2.20, maka akan ditunjukkan,

1. $\tilde{f}$ yang linier di seluruh X
2. $\tilde{f}$ terbatas dan kontinu terhadap norm
3. $\tilde{f}$ memenuhi $\|\tilde{f}\| = 1$ dan $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$

Diberikan $x_0 \in X$, didefinisikan subruang Z sebagai himpunan semua vektor yang berupa kelipatan skalar dari x_0, yaitu

$$Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Kemudian didefinisikan fungsional $f \in Z$ yaitu $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fungsional sublinier p, yaitu $p(x) = \|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Perhatikan bahwa,

$f(x) \leq p(x)$, untuk semua $x \in Z$.

Diambil $x = \alpha x_0 \in Z$, maka

a. Jika $\alpha > 0$,

$$f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = p(\alpha x_0)$$

b. Jika $\alpha = 0$,

$$f(0) = 0 = p(0)$$

c. Jika $\alpha < 0$

$$f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\| < |\alpha|\|x_0\| = p(\alpha x_0)$$

Dengan demikian, untuk semua $x \in Z$, maka $f(x) \leq p(x)$.

Kemudian menerapkan Teorema 2.17 bahwa terdapat perluasan linier $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ di mana,

1. $\tilde{f}$ linier di seluruh X
2. $\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|x\|$, untuk semua $x \in X$,
3. $\tilde{f}(x) = f(x)$, untuk semua $x \in Z$. Sehingga,

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$$

Karena $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ dan $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in X$. Maka,

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{X \neq 1} \frac{|\tilde{f}(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

sehingga,

$$\|\tilde{f}\| = 1$$

Dengan demikian, $\tilde{f}$ adalah fungsional linier terbatas dengan

$\|\tilde{f}\| = 1$,

$\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

4.5 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam

Ukuran memiliki keterkaitan dalam kehidupan sehari-hari, seperti panjang, waktu, luas, kecepatan, dan lain-lain. Pada bab Sebelumya, telah dijelaskan mengenai ukuran dan batasan ilmu atau pengetahuan manusia serta batasan kemampuan manusia ketika Allah mengujinya. Kemudian, pada subbab ini akan memaparkan kembali mengenai ukuran kelemahan atau kecerdasan yang dimiliki oleh manusia. Allah SWT berfirman,

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ

(Kemenag, 2025a)

Artinya: "*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran*." (QS. Al-Qamar 54: Ayat 49).

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu dengan ketetapan dan takdir yang telah ditentukan sebelumnya. Tidak ada satu pun ciptaan-Nya yang terjadi secara kebetulan atau tanpa perhitungan yang matang. Segala sesuatu yang ada di alam semesta telah ditentukan oleh Allah sejak sebelum penciptaannya, baik dalam bentuk, ukuran, maupun waktunya (Ghoffar dkk, 2004). Seluruh makhluk diciptakan-Nya sesuai ketentuan dan hukum-hukum yang telah ditetapkan-Nya. Karena itu bila seseorang dihukum karena ketetapan dan hukum-hukumnya itu. Dan segala sesuatu akan terjadi sesuai ketetapan-Nya. Dalam ayat lain Allah juga berfirman mengenai ketetapan atau takdir yaitu,

الَّذِيْ لَهٗ مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّهٗ شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهٗ تَقْدِيْرًا

(Kemenag, 2025b)

Artinya:" *(Yaitu Zat) yang milik-Nyalah kerajaan langit dan bumi, (Dia) tidak mempunyai anak, dan tidak ada satu sekutu pun dalam kekuasaan(-Nya). Dia telah menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat.*" (QS. Al-Furqan 25: Ayat 2).

Pada ayat ini, juga menjelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat, teliti, dan penuh hikmah (Ghoffar dkk, 2004). Tetapi manusia wajib berusaha sesuai firman Allah,

وَاَنْ لَّيْسَ لِلْاِنْسَانِ اِلَّا مَا سَعٰىۙ ٣٩ وَاَنَّ سَعْيَهٗ سَوْفَ يُرٰىۖ ٤٠

(Kemenag, 2025c)

Artinya: " *Dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya dan sesungguhnya usahanya itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya)*." (QS. An-Najm 53:Ayat 39-40).

Dalam hadis sahih yang diriwayatkan Aḥmad dan Muslim dari Abū Hurairah: Rasulullah saw bersabda, “Minta tolonglah kepada Allah, dan jangan bersikap lemah. Bila sesuatu menimpamu, maka katakanlah, Allah telah menetapkannya. Apa yang Dia kehendaki, Dia kerjakan, dan jangan kamu berkata: seandainya aku berbuat begini maka akan begitu. Sesungguhnya kata “seandainya” membuka (kemungkinan pada) perbuatan setan (Sunarto dkk, 1991). Sesuai dengan hadis Rasulullah saw:

حَدَّثَنِي عَبْدُ الْأَعْلَى بْنُ حَمَّادٍ قَالَ قَرَأْتُ عَلَى مَالِكِ بْنِ أَنَسٍ ح و حَدَّثَنَا قُتَيْبَةُ بْنُ سَعِيدٍ عَنْ مَالِكٍ فِيمَا قُرِئَ عَلَيْهِ عَنْ زِيَادِ بْنِ سَعْدٍ عَنْ عَمْرِو بْنِ مُسْلِمٍ عَنْ طَاوُسٍ أَنَّهُ قَالَ أَدْرَكْتُ نَاسًا مِنْ أَصْحَابِ وَسَمِعْتُ عَبْدَ اللَّهِ بْنَ عُمَرَ يَقُولُ قَالَ رَسُولِ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُولُونَ كُلُّ شَيْءٍ بِقَدَرٍ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ كُلُّ شَيْءٍ بِقَدَرٍ حَتَّى الْعَجْزِ وَالْكَيْسِ أَوْ الْكَيْسِ وَالْعَجْزِ

Artinya: “*Abdul A'la bin Hammad telah memberitahukan kepadaku, ia berkata, aku membacakan hadits kepada Malik bin Anas (H) Qutaibah bin Sa'id telah memberitahukan kepada kami, dari Malik dalam hadits yang dibacakan kepadanya, dari Amr bin Muslim, dari Thawus, bahwa ia berkata, "Aku menjumpai beberapa shahabat Rasulullah Shallallahu Alaihi wa Sallam mereka mengatakan, “Segala sesuatu itu telah ditakdirkan. Ia melanjutkan, "Aku mendengar Abdullah bin Umar berkata, “Rasulullah Shallallahu Alaihi wa Sallam bersabda, “Segala sesuatu itu telah ditakdirkan, hingga lemah (malas) dan rajin, atau hingga rajin dan lemah (malas).*” (HR. Muslim No. 4799).
Dalam hadis tersebut, Rasulullah Shallallahu Alaihi wa Sallam bersabda,

كُلُّ شَيْءٍ بِقَدَرٍ حَتَّى الْعَجْزِ وَالْكَيْسِ أَوْ الْكَيْسِ وَالْعَجْزِ

“*Segala sesuatu itu telah ditakdirkan, hingga lemah (malas) dan rajin, atau hingga rajin dan lemah (malas).*"

Al-Qadhi mengatakan, “kemungkinan yang dimaksudkan dengan “lemah” di sini sebagimana arti literalnya, yaitu, tiadanya kemampuan.” Dikatakan juga bahwa maksudnya adalah meninggalkan hal-hal yang seharusnya dikerjakan, menunda-nunda serta mengakhirkan pelaksanaannya dari waktu yang semestinya. Al-Qadhi melanjutkan, bisa jadi juga yang dimaksudkan adalah ketidak-mampuan seseorang dalam menjalankan ketaatan. Intinya, Orang yang giat itu telah ditakdirkan sebelumnya bahwa dia akan menjadi orang yang giat, begitu juga orang yang malas telah ditakdirkan sebelumnya bahwa dia akan menjadi orang yang malas (Kitab Shahih Muslim Karya Imam Nawawi jilid 11).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab 4, dapat disimpulkan sifat-sifat fungsional linier sebagai berikut.

1. Fungsional linier yang didefinisikan dari fungsional riil dapat diperluas ke ruang vektor kompleks dengan struktur $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ dan terbukti memenuhi $f(ix) = if(x)$.
2. Dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach, setiap elemen $x_0 \neq 0$ pada ruang bernorma dapat dihubungkan dengan suatu fungsional linier terbatas f yang memenuhi $f(x_0) = 1$ dan $\|f\| = \|x_0\|^{-1}$.
3. Fungsional linier f bersifat kontinu jika dan hanya jika f terbatas.
4. Untuk setiap fungsional sublinier p, terdapat fungsional linier f yang mendekati atau dibatasi oleh p, dengan $|f(x)| \leq p(x)$.
5. Perluasan fungsional linier $\tilde{f}$ melalui Teorema Hahn-Banach tetap memiliki norma yang dibatasi oleh konstanta k, selama fungsi sublinier p memenuhi $p(x) \leq k\|x\|$.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini, hanya berfokus pada aplikasi Teorema Hahn-Banach untuk pembuktian sifat-sifat fungsional linier. Selanjutnya, diharapkan dapat diteliti terkait aplikasi Teorema Hahn-Banach dalam suatu ruang seperti pada ruang Hilbert atau ruang Banach dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

Axler, S. (2025). *Linear Algebra Done Right* (4th ed.). Switzerland: Springer.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). United States of America: Wiley.

Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York, NY: Springer.

Conway, J. B. (1990). *A course in functional analysis* (2nd ed.). New York, NY: Springer.

Ghoffar dkk. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Kebiche, D. E., & Giordano, P. (2024). *The Hahn-Banach Theorem in Spaces of Nonlinear Generalized Functions*. Diakses dari https://arxiv.org/abs/2410.08679

Kemenag. (2024a). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/2/255 (Diakses 20 Desember 2024)

Kemenag. (2024b). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/2/286 (Diakses 20 Desember 2024)

Kemenag. (2025a). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/54/49 (Diakses 15 April 2025)

Kemenag. (2025b). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/25/2 (Diakses 15 April 2025)

Kemenag. (2025c). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/53/39-40 (Diakses 15 April 2025)

Kolman, B., & Hill, D. R. (2008). *Elementary Linear Algebra with Applications* (9th ed.). United States of America: Pearson Prentice Hall

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Mesir: Wiley.

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Maryland:Pearson.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. Singapura: McGraw-Hill Book.

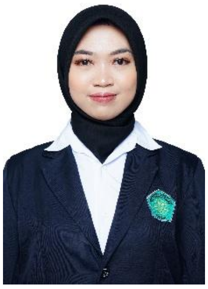
Sunarto dkk. (1991). *Tarjamah Shahih Bukhari*. Semarang: CV. Asy-Syifa.

Syarah Shahih Muslim oleh Imam An-Nawawi Jilid 11 No. 6693. Diakses pada 16 April 2025, dari https://archive.org/details/syarah-shahih-muslim-1/SYARAH%20SHAHIH%20MUSLIM%201/page/n1/mode/2up

Werner, D. (2018). *Funktionalanalysis* (8th ed.). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Zedam, L. (2012). *An application of Hahn-Banach theorem to fuzzy bounded linear functionals*. Los Angeles: Journal of Fuzzy Mathematics, 20(1), 123-13

RIWAYAT HIDUP



Rahmadita Widya Astuti, lebih dikenal dengan panggilan Dita. Lahir di Mojokerto pada 15 Juni 2003 sebagai anak pertama dari Bapak Cukup dan Ibu Sundari. Selama masa pendidikan, penulis menempuh pendidikan mulai dari pendidikan dasar di SDN Manduro 1, Ngoro, Mojokerto yang lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan menengah pertama di SMPN 1 Ngoro dan lulus pada tahun 2018. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang menengah atas di MA Al-Islamy Sedati hingga tahun 2021. Pada tahun 2021, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Selama perkuliahan, penulis cukup aktif dalam mengikuti organisasi kampus. Salah satunya, sebagai anggota UKM LKP2M PRA 23 UIN Malang pada tahun 2022. Apabila terdapat pertanyaan, saran, atau kritik dari penelitian ini, pebulis dapat dihubungi melalui email (dita58001@gmail.com) atau sosial media instagram (https://instagram.com/widyadita_).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rahmadita Widya Astuti
NIM : 210601110025
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Teorema Hahn-Banach untuk Fungsional Linier Terbatas
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 September 2024	Konsultasi Topik	1.
2.	27 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	2 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	11 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	21 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	22 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	29 November 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	7.
8.	2 Desember 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	8.
9.	4 Desember 2024	ACC Bab I, II, dan III	9.
10.	5 Desember 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	10.
11.	9 Desember 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	11.
12.	10 Desember 2024	ACC Kajian Agama Bab II	12.
13.	31 Januari 2025	ACC Seminar Proposal	13.
14.	24 Februari 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	14.
15.	14 Maret 2025	Konsultasi Bab IV dan V	15.
16	15 April 2025	Konsultasi Bab IV dan V	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
17.	22 April 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	17.
18.	24 April 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	14 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	19.
20.	15 Mei 2025	ACC Bab IV dan V	20.
21.	16 Mei 2025	ACC Seminar Hasil	21.
22.	26 Mei 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	22.
23.	11 Juni 2025	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	23.
24.	12 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	24.
25.	20 Juni 2025	ACC Keseluruhan	25.

Malang, 20 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005