KONSTRUKSI FUNGSI *LYAPUNOV* PADA MODEL *LOTKA-VOLTERRA*

SKRIPSI

OLEH:
EKA PUTRI RIZKI APRILIANI
NIM. 210601110089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KONSTRUKSI FUNGSI *LYAPUNOV* PADA MODEL *LOTKA-VOLTERRA*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Eka Putri Rizki Apriliani
NIM. 210601110089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KONSTRUKSI FUNGSI *LYAPUNOV*
PADA MODEL *LOTKA-VOLTERRA*

SKRIPSI

Oleh
Eka Putri Rizki Aprilinai
NIM. 210601110089

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 27 Mei 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19650414 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

KONSTRUKSI FUNGSI *LYAPUNOV*
PADA MODEL *LOTKA-VOLTERRA*

SKRIPSI

Oleh:
Eka Putri Rizki Aprilinai
NIM. 210601110089

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 17 Juni 2025

Ketua Penguji	: Dr. Mohammad jamhuri, M.Si	.....
Anggota Penguji 1	: Juhari, M.Si	.....
Anggota Penguji 2	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	.....
Anggota Penguji 3	: Ach. Nashichuddin, M.A.	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Eka Putri Rizki Apriliani
NIM	:	210601110089
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Konstruksi Fungsi *Lyapunov* Pada Model Lotka-Volterra

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2025

Yang membuat pernyataan,

Eka Putri Rizki Apriliani

NIM. 210601110089

MOTO

"Segala sesuatu butuh waktu untuk menjadi stabil, termasuk diri sendiri. Namun keseimbangan bukanlah keadaan diam, melainkan hasil dari dinamika yang terkendali."

(Eka Putri Rizki Apriliani)

PERSEMBAHAN

Puji syukur peneliti panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat-nya, sehingga peneliti berhasil menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta menyelesaikan penulisan skripsi ini. Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

1. Bapak Usman Pagalay dan Bapak Ach. Nashichuddin. Beliau Yang telah membimbing saya dengan penuh kesabaran, ilmu, dan arahan selama proses penelitian ini. Terima kasih atas waktu, pemikiran, dan semangat yang diberikan.
2. Kedua orang tua saya, sumber doa dan kekuatan dalam setiap langkah saya. Terima kasih atas kasih sayang, dukungan, dan keikhlasan yang tiada henti. Cinta pertama dan panutan saya, ayahanda Yazid Bustomi dan pintu surgaku Ibunda Dwi windarani. Terimaksih atas segala pengorbanan dan tulus kasih yang diberikan. Semoga ayah ibu sehat, panjang umur dan bahagaia selalu.
3. Adik tersayang, Maulidya Dwi Rahmani. Semoga kamu tumbuh menjadi pribadi yang jauh lebih baik dari kakak. Teruslah belajar dan bermimpi tanpa memikirkan apapun, karena kakak akan selalu ada di belakangmu.
4. Keluarga Besar saya yang selalu menjadi sumber semangat dan tempat kembali dalam setiap langkah perjalanan saya. Terima kasih atas doa dan dukungan yang tidak pernah henti.
5. Sahabat yang selalu hadir dalam suka dan duka, Rifdah Nabila Fitriana. Terimaksih atas waktu, dukungan, dan ketulusanmu yang menguatkan saya dalam proses ini.
6. Diri saya sendiri, yang berhasil kuliah sambil bekerja yang sudah melewati hari-hari sulit, penuh tekanan, dan rasa ingin menyerah, terima kasih karena tetap bertahan. Semoga langkah selanjutnya bisa dijalani dengan lebih bijak dan tenang.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan proposal skripsi ini dengan baik. Proposal ini disusun sebagai salah satu syarat akademik dalam menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, penyusunan proposal ini tidak akan terselesaikan dengan lancar. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang dengan penuh kesabaran dan dedikasi telah meluangkan waktu, tenaga, serta memberikan bimbingan, arahan, dan masukan yang sangat berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II yang dengan penuh kesabaran dan dedikasi telah meluangkan waktu, tenaga, serta memberikan bimbingan, arahan, dan masukan yang sangat berharga kepada penulis.
6. Dr. Mohammad jamhuri, M.Si, selaku dosen ketua penguji yang telah bersedia memberikan ilmu, arahan, dan saran yang sangat berharga kepada penulis.
7. Juhari, M.Si, selaku dosen anggota penguji I yang telah bersedia memberikan ilmu, arahan, dan saran yang sangat berharga kepada penulis.
8. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen wali selama masa kuliah yang telah memberikan arahan dan semangat dalam perkuliahan.

9. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan inspirasi yang sangat berharga kepada penulis.
10. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan do'a, dukungan, serta semangat yang tiada henti kepada penulis.
11. Rizqi Ardika Akbar yang telah menemani dan membantu saya dalam perjalanan penelitian saya.
12. Seluruh mahasiswa angkatan 2021 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah memberikan dukungan, kebersamaan, dan semangat sehingga menciptakan lingkungan belajar yang penuh motivasi dan kolaborasi bagi penulis.
13. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan kontribusi dalam berbagai bentuk kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa proposal ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga proposal ini dapat bermanfaat bagi penulis serta memberikan kontribusi positif bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Matematika. Akhir kata, semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan ridha-Nya kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan proposal ini, serta memberi kelancaran dalam tahapan penelitian berikutnya.

Wassalammu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 17 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTO ..... **vi**
PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
DAFTAR GAMBAR ..... **xii**
DAFTAR SIMBOL ..... **xiii**
DAFTAR LAMPIRAN ..... **xiv**
ABSTRAK ..... **xv**
ABSTRACT ..... **xvi**
مستخلص البحث ..... **xvii**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 6
1.6 Definisi Istilah 6
BAB II KAJIAN TEORI **7**
2.1 Teori Pendukung 7
2.1.1 Sistem Diferensial 7
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier 8
2.1.3 Kestabilan dan Titik Kesetimbangan 10
2.1.4 Sistem Persamaan *Lotka-Volterra* 12
2.1.5 Konstruksi Fungsi *Lyapunov* 16
2.2 Keseimbangan Intelektual dan Spiritual dalam Islam 20
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 21
BAB III METODE PENELITIAN **23**
3.1 Jenis Penelitian 23
3.2 Tahapan Penelitian 23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **26**
4.1 Formulasi Model 26
4.2 Penentuan Titik Keseimbangan 28
4.3 Konstruksi Fungsi *Lyapunov* 31
4.3.1 Pembentukan Fungsi *Lyapunov* 32
4.3.2 Verifikasi Syarat Fungsi *Lyapunov* 34
4.4 Simulasi dan Interpretasi 35
4.4.1 Tujuan Simulasi 35
4.4.2 Hasil Simulasi Numerik dengan *Maple* 36
4.4.3 Interpretasi Hasil 36

4.5 Modifikasi Sistem *Lotka-Volterra* dalam Pandangan Islam 38
BAB V PENUTUP 40
5.1 Kesimpulan 40
5.2 Saran 41
DAFTAR PUSTAKA 42
LAMPIRAN 44
RIWAYAT HIDUP 47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Permukaan Fungsi *Lyapunov* untuk Sistem *Lotka-Volterra* Kompetitik 37
Gambar 4.2 Fungsi *Lyapunov* terhadap Waktu Menunjukkan Kecenderungan Sistem Menuju Kestabilan Pada Titik Keseimbangan 37
Gambar 4.3 Grafik 3D Trajektori Solusi terhadap Waktu (xt, yt, t) 38

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

x	:	Populasi *Prey*
y	:	Populasi *Predator*
t	:	Waktu
r	:	Laju pertumbuhan intrinsik *Prey*
k	:	Kapasitas lingkungan maksimum untuk *Prey*
a	:	Tingkat interkasi antara *Prey* dan *Predator*
c	:	Laju kematian *Predator*
β	:	Efisiensi reproduksi *Predator* per *Prey* yang dimangsa
$\dot{x}$	:	Turunan pertama x terhadap waktu, atau laju perubahan populasi *Prey*
$\dot{y}$	:	Turunan pertama y terhadap waktu, atau laju perubahan populasi *Predator*
$V(x, y)$	:	Fungsi *Lyapunov* untuk analisis kestabilan
$\dot{V}(x, y)$	:	Turunan waktu dari fungsi *Lyapunov*
E	:	Himpunan yang digunakan untuk titik kesetimbangan dalam analisis kestabilan
λ	:	Nilai Eigen
H	:	Himpunan invarian terbesar dalam analisis kestabilan *Lyapunov*
M	:	Himpunan solusi menuju $x(t)$ pada $t \to \infty$
$\mathbb{R}^n$	:	Ruang n-dimensi yang digunakan untuk merepresentasikan sistem dinamis

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program Maple Gambar (4.4) 45
Lampiran 2 Program Maple Gambar (4.5) 46
Lampiran 3 Program Maple Gambar (4.5) 47

ABSTRAK

Putri Rizki Apriliani, Eka. 2025. **Konstruksi Fungsi *Lyapunov* pada Model Lotka–Volterra**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Fungsi *Lyapunov* ; Model *Lotka–Volterra;* kestabilan Sistem.

Penelitian ini dilatarbelakangi oleh pentingnya analisis kestabilan dalam sistem dinamis yang memodelkan interaksi antara dua entitas yang saling bersaing. Model Lotka–Volterra digunakan untuk menggambarkan dinamika kompetisi antara dua populasi, kemudian dimodifikasi berdasarkan data pengguna sistem operasi Android dan iOS di Indonesia. Penelitian ini bertujuan untuk mengonstruksi fungsi Lyapunov guna membuktikan kestabilan sistem secara asimtotik lokal pada titik kesetimbangan non-trivial. Model dianalisis dengan pendekatan sistem nonlinier dua dimensi, dan fungsi Lyapunov dibentuk menggunakan bentuk umum logaritmik dengan titik ekuilibrium yang dihitung secara simbolik dan numerik. Hasil analisis menunjukkan bahwa fungsi Lyapunov yang dikonstruksi memenuhi sifat positif definit dan memiliki turunan waktu yang bernilai negatif di sekitar titik kesetimbangan. Simulasi numerik dengan Maple memperkuat hasil tersebut, menunjukkan bahwa solusi sistem cenderung menuju titik kestabilan secara monoton. Penelitian ini menyimpulkan bahwa pendekatan fungsi Lyapunov efektif dalam menganalisis kestabilan sistem kompetitif dua entitas, dan dapat digunakan untuk mengevaluasi dinamika model yang dimodifikasi sesuai konteks dunia nyata.

ABSTRACT

Putri Rizki Apriliani, Eka. 2025. **Construction of Lyapunov Function on Lotka–Volterra Model.** Undergraduate Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Lyapunov Function; Lotka–Volterra Model; System Stability.

This study is motivated by the importance of stability analysis in dynamical systems that model the interaction between two competing entities. The Lotka–Volterra model is used to describe the dynamics of competition between two populations and is modified using data on Android and iOS operating system users in Indonesia. The objective of this research is to construct a Lyapunov function to prove the local asymptotic stability of the system at a non-trivial equilibrium point. The model is analyzed through a two-dimensional nonlinear system approach, and the Lyapunov function is formulated using a general logarithmic form with equilibrium points obtained symbolically and numerically. The analysis results show that the constructed Lyapunov function satisfies the positive definite property and has a negative time derivative near the equilibrium point. Numerical simulations using Maple support these findings, indicating that the system solution converges monotonically to the equilibrium point. This study concludes that the Lyapunov function approach is effective in analyzing the stability of a competitive two-entity system and can be applied to evaluate modified models in real-world contexts.

مستخلص البحث

بوتري رزقي أبريلياني، إيكا. ٢٠٢٥. **بناء دوال ليابونوف في نموذج لوتكا-فولتيرا.** أطروحة. برنامج دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج. المشرفون: (١) الدكتور عثمان باجالاي، ماجستير علوم. (٢) الأخ ناشيتشودين، ماجستير في الآداب.

الكلمات المفتاحية: دالة ليابونوف؛ نموذج لوتكا-فولتيرا؛ استقرار النظام

ينبع هذا البحث من أهمية تحليل الاستقرار في الأنظمة الديناميكية التي تُنمذج التفاعل بين كيانين متنافسين. يُستخدم نموذج لوتكا-فولتيرا لوصف ديناميكيات المنافسة بين مجموعتين سكانيتين، ثم يُعدل بناءً على بيانات من مستخدمي أنظمة التشغيل أندرويد وiOS في إندونيسيا. تهدف هذه الدراسة إلى بناء دالة ليابونوف لإثبات استقرار النظام محليًا بشكل مقارب عند نقطة توازن غير تافهة. يُحلل النموذج باستخدام نهج نظام غير خطي ثنائي الأبعاد، وتُشكل دالة ليابونوف باستخدام صيغة لوغاريتمية عامة مع نقاط توازن محسوبة رمزيًا وعدديًا. تُظهر نتائج التحليل أن دالة ليابونوف المُنشأة تُلبي الخاصية المحددة الموجبة ولها مشتق زمني سالب حول نقطة التوازن. تُعزز المحاكاة العددية باستخدام مابل هذه النتائج، مما يُظهر أن حل النظام يميل إلى التحرك بشكل رتيب نحو نقطة الاستقرار. وتخلص هذه الدراسة إلى أن نهج دالة ليابونوف فعال في تحليل استقرار النظام التنافسي المكون من كيانين، ويمكن استخدامه لتقييم ديناميكيات النموذج المعدل وفقًا لسياق العالم الحقيقي..

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam era modern ini, pemahaman terhadap dinamika sistem kompleks menjadi semakin penting di berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dari ekologi hingga ekonomi, dari biologi hingga teknik, kita dihadapkan pada sistem-sistem yang saling berinteraksi dan berevolusi seiring waktu. Kemampuan untuk memahami, memprediksi, dan mengendalikan sistem-sistem ini tidak hanya menjadi kebutuhan akademis, tetapi juga memiliki implikasi praktis yang luas dalam mengatasi tantangan global seperti perubahan iklim, manajemen sumber daya, dan stabilitas ekonomi.

Salah satu pendekatan yang telah terbukti sangat berharga dalam studi sistem dinamis adalah penggunaan model matematika. Model-model ini memungkinkan kita untuk mengabstraksi kompleksitas dunia nyata ke dalam bentuk yang dapat dianalisis secara sistematis. Di antara berbagai model yang telah dikembangkan, Model *Lotka-Volterra* menempati posisi khusus karena kemampuannya dalam menggambarkan interaksi antar populasi dalam suatu ekosistem. Awalnya dikembangkan untuk menjelaskan dinamika *Predator*-mangsa, model ini telah menemukan aplikasi yang luas di luar ekologi, termasuk dalam analisis kompetisi pasar dan dinamika inovasi teknologi (Al-Idrus, 2022).

Model *Lotka-Volterra*, meskipun sederhana dalam formulasinya, mampu menangkap esensi dari interaksi kompleks dalam sistem nonlinear. Model ini menggambarkan bagaimana dua populasi yang saling berinteraksi dapat mengalami

fluktuasi periodik, mencapai keseimbangan, atau bahkan mengalami kepunahan, tergantung pada parameter-parameter yang menentukan kekuatan interaksi mereka. Keindahan model ini terletak pada kemampuannya untuk mengungkapkan pola-pola umum yang muncul dari interaksi sederhana, sebuah manifestasi dari prinsip bahwa kompleksitas sering kali muncul dari aturan-aturan dasar yang sederhana.

Namun, memahami dinamika sistem bukanlah tujuan akhir. Dalam banyak situasi, kita tidak hanya ingin memahami sistem, tetapi juga mengendalikannya untuk mencapai hasil yang diinginkan. Di sinilah teori kontrol masuk ke dalam gambar. Teori kontrol, yang berakar pada matematika dan teknik, menyediakan kerangka kerja untuk merancang mekanisme yang dapat mengarahkan perilaku sistem menuju tujuan yang diinginkan. Dalam konteks Model *Lotka-Volterra*, ini bisa berarti menjaga keseimbangan ekosistem, mengoptimalkan hasil panen dalam manajemen perikanan, atau menstabilkan dinamika pasar dalam ekonomi (Aufaniyah, 2023).

Salah satu pendekatan paling kuat dalam teori kontrol nonlinear adalah penggunaan fungsi *Lyapunov.* Dinamakan menurut matematikawan Rusia Aleksandr *Lyapunov*, fungsi ini menyediakan cara untuk menganalisis stabilitas sistem tanpa perlu memecahkan persamaan diferensial yang menggambarkan dinamikanya secara eksplisit. Fungsi *Lyapunov* dapat diibaratkan sebagai "energi" sistem, di mana stabilitas dicapai ketika energi ini menurun seiring waktu. Konstruksi fungsi *Lyapunov* yang tepat untuk suatu sistem bukan hanya alat analisis, tetapi juga bisa menjadi langkah kunci dalam merancang pengendali yang efektif (Sundari, 2017).

Integrasi antara Model *Lotka-Volterra*, teori kontrol, dan metode *Lyapunov* membuka jalan baru dalam pemahaman dan pengendalian sistem kompleks. Pendekatan ini tidak hanya relevan dalam konteks ekologi atau ekonomi, tetapi juga memiliki potensi aplikasi yang luas dalam bidang-bidang seperti manajemen sumber daya, perencanaan urban, dan bahkan dalam pengembangan strategi untuk mengatasi tantangan global seperti perubahan iklim atau penyebaran penyakit. Dalam konteks ini, penelitian tentang "Konstruksi Fungsi *Lyapunov* pada Model *Lotka-Volterra*" menjadi sangat relevan dan penting. Studi ini tidak hanya berkontribusi pada pemahaman teoretis tentang dinamika sistem kompleks, tetapi juga memiliki implikasi praktis yang signifikan. Dengan mengembangkan metode untuk mengkonstruksi fungsi *Lyapunov* yang tepat untuk Model *Lotka-Volterra*, penelitian ini membuka jalan untuk desain pengendali yang lebih efektif dan robust untuk berbagai aplikasi.

Selain relevansi model *Lotka–Volterra* dalam bidang ekologi dan biologi, model ini juga memiliki fleksibilitas untuk dianalisis dalam konteks persaingan dua entitas di dunia modern, seperti kompetisi pasar. Sebagai contoh, persaingan antara dua sistem operasi populer, Android dan iOS, dapat dianalogikan sebagai bentuk kompetisi populasi dalam lingkungan terbatas. Oleh karena itu, dalam penelitian ini, model *Lotka–Volterra* dimodifikasi dan dianalisis tidak hanya dari sisi matematis, tetapi juga melalui ilustrasi analogi kompetisi pasar teknologi, guna memberikan gambaran penerapan model dalam konteks kontemporer.

Aspek menarik dari pendekatan ini adalah bagaimana ia mencerminkan prinsip-prinsip keseimbangan dan harmoni yang sering kita temui dalam alam. Hal ini mengingatkan kita pada ajaran dalam Al-Quran Surat Al-'Alaq ayat 1-5, Allah

SWT mengajarkan pentingnya keseimbangan dalam kehidupan manusia, baik dari segi spiritual maupun intelektual. Ayat ini tidak hanya mengingatkan manusia akan asal-usulnya yang sederhana (dari segumpal darah), tetapi juga tentang kemampuan akal yang diberikan Allah untuk belajar dan memahami dunia melalui wahyu dan ilmu pengetahuan, yang berbunyi:

ٱقْرَأْ بِٱسْمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ (١) خَلَقَ ٱلْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ (٢) ٱقْرَأْ وَرَبُّكَ ٱلْأَكْرَمُ (٣)

ٱلَّذِي عَلَّمَ بِٱلْقَلَمِ (٤) عَلَّمَ ٱلْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (٥)

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya: "Bacalah dengan (menyebut) nama tuhanmu Yang menciptakan, Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan tuhanmulah Yang Maha Pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran qalam (pena). Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya." (QS. Al 'Alaq: 1-5)."

Menurut Tafsir Ibnu Katsir (Ibnu Katsir, 2003), ayat ini menunjukkan pentingnya hubungan antara ilmu pengetahuan dan spiritualitas. "Bacalah" tidak hanya merujuk pada membaca teks, tetapi juga mengajak manusia untuk membaca tanda-tanda alam dan mempelajari ciptaan Tuhan. Keseimbangan antara ilmu dan iman menjadi inti dari ayat ini, di mana manusia diperintahkan untuk tidak hanya memanfaatkan akalnya, tetapi juga menjaga hubungan spiritual dengan Sang Pencipta.

Tafsir Al-Jalalayn (Al-Mahalli & As-Suyuti, 1999) juga menekankan bahwa perintah untuk membaca adalah panggilan awal bagi manusia untuk mencari ilmu pengetahuan, sementara penciptaan manusia dari sesuatu yang sederhana (segumpal darah) mengajarkan tentang kerendahan hati dan kebesaran Allah yang memberikan manusia potensi intelektual.

Penelitian ini juga mencerminkan upaya manusia untuk memahami dan mengelola kompleksitas dunia di sekitar. Dengan mengembangkan alat matematika

yang canggih seperti fungsi *Lyapunov* , manusia berusaha untuk menjembatani kesenjangan antara teori abstrak dan aplikasi praktis. Ini adalah manifestasi dari peran manusia sebagai khalifah di bumi, yang diberi amanah untuk mengelola dan menjaga keseimbangan alam dengan bijaksana. Dalam konteks yang lebih luas, studi tentang konstruksi fungsi *Lyapunov* untuk Model *Lotka-Volterra* ini mewakili langkah penting dalam perjalanan kita menuju pemahaman yang lebih dalam tentang dunia di sekitar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana mengkonstruksi fungsi *Lyapunov* yang digunakan untuk menganalisis kestabilan sistem model *Lotka-Volterra* ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berlandaskan rumusan masalah yang telah diuraikan diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkontruksi fungsi *Lyapunov* yang dapat digunakan dalam analisis kestabilan sistem pada model *Lotka-Volterra.*

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi pada pengembangan teori kontrol nonlinear, khususnya dalam konteks model *Lotka-Volterra.*
2. Memperdalam pemahaman tentang hubungan antara struktur model *Lotka-Volterra* dan bentuk fungsi *Lyapunov* yang sesuai.

3. Menyediakan kerangka kerja metodologis untuk analisis stabilitas sistem dinamis kompleks.

1.5 Batasan Masalah

Untuk memfokuskan penelitian ini, beberapa batasan masalah ditetapkan sebagai berikut:

1. Penelitian ini fokus pada model *Lotka-Volterra* klasik dan beberapa variasinya yang paling umum.
2. Analisis stabilitas dibatasi pada sistem autonomous (tidak bergantung waktu secara eksplisit).
3. Simulasi dan validasi model akan dilakukan menggunakan data sintetis dan studi kasus terbatas, bukan data lapangan yang ekstensif.

1.6 Definisi Istilah

Untuk memudahkan pemahaman terhadap istilah-istilah teknis yang digunakan dalam penelitian ini, berikut diberikan penjelasan singkat mengenai beberapa istilah penting:

Fungsi *Lyapunov* : Fungsi *Lyapunov* adalah fungsi energi atau fungsi potensial yang digunakan untuk menganalisis kestabilan sistem dinamik nonlinear. Fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Rusia Alexander *Lyapunov* dan menjadi alat fundamental dalam teori kendali modern untuk menentukan kestabilan sistem tanpa harus

menyelesaikan persamaan diferensial secara eksplisit.

Model *Lotka-Volterra* : Model *Lotka-Volterra*, juga dikenal sebagai persamaan *Predator-Prey*, adalah sistem persamaan diferensial nonlinear yang menggambarkan dinamika interaksi antara dua spesies dalam suatu ekosistem - satu sebagai pemangsa (*Predator*) dan yang lain sebagai mangsa (*Prey*). Model ini dikembangkan secara independen oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra.

Pengendali (Controller) : Pengendali adalah komponen atau sistem yang dirancang untuk mengatur perilaku sistem dinamik agar mencapai kondisi yang diinginkan. Dalam konteks model *Lotka-Volterra*, pengendali digunakan untuk mengatur populasi *Predator* dan *Prey* agar mencapai keseimbangan yang diinginkan.

Sistem Dinamik : Sistem dinamik adalah sistem matematika yang menggambarkan perubahan keadaan sistem terhadap waktu. Dalam konteks ini, sistem dinamik menjelaskan bagaimana populasi *Predator* dan *Prey* berubah seiring waktu berdasarkan interaksi antar keduanya.

Kestabilan	:	Kestabilan adalah kondisi di mana sistem mampu mempertahankan keadaan keseimbangannya atau kembali ke keadaan keseimbangan setelah mengalami gangguan. Dalam model *Lotka-Volterra*, kestabilan mengacu pada kemampuan sistem untuk mempertahankan populasi *Predator* dan *Prey* pada tingkat yang seimbang.
Titik Keseimbangan	:	Titik keseimbangan adalah kondisi di mana sistem berada dalam keadaan stabil tanpa perubahan terhadap waktu. Pada model *Lotka-Volterra*, titik keseimbangan terjadi ketika laju perubahan populasi *Predator* dan *Prey* sama dengan nol.
Sistem Nonlinear	:	Sistem nonlinear adalah sistem di mana output tidak proporsional dengan input, dan prinsip superposisi tidak berlaku. Model *Lotka-Volterra* merupakan contoh sistem nonlinear karena interaksi antara *Predator* dan *Prey* melibatkan perkalian antara kedua populasi.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Sistem Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan sekumpulan persamaan diferensial yang melibatkan n fungsi yang tidak diketahui. Sistem ini sering muncul secara alami dalam situasi yang melibatkan beberapa variabel bebas (misalnya x_1, x_2, … , x_n), di mana setiap variabel tersebut adalah fungsi dari satu variabel terikat (misalnya t) (Kartono, 2012). Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan n fungsi yang tak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua atau lebih. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten (Ekawati, 2021). Secara umum, bentuk suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial orde pertama dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots\dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n, t) \qquad (2.1)$$

Dalam konteks ini, x_1, x_2, … , x_n berfungsi sebagai variabel bebas, sedangkan t berperan sebagai variabel terikat. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, … , $x_n = x_n(t)$. Di sini, $\frac{dx_n}{dt}$ menunjukkan turunan dari fungsi x_n terhadap t (Neuhauser, 2004).

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier

Fungsi $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$ dikatakan sebagai linier jika F bersifat linier dan variabel-variabel yang terlibat adalah x, y, y', y'', y''', … , y^n. Secara umum, sistem persamaan diferensial biasa yang linier dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (2.2)$$

Menurut Baiduri (2012), persamaan (2.2) dianggap sebagai persamaan diferensial linier orde n jika:

1. Tidak ada bentuk perkalian antara variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau antara turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau antara variabel terikat dengan turunannya.
2. Variabel terikat y tidak merupakan fungsi transenden.

Misalkan koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, … , $a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu dalam suatu interval I. Jika fungsi $f(x) = 0$, maka persamaan (2.2) disebut sebagai persamaan homogen. Sebaliknya, jika $f(x) \neq 0$, maka persamaan (2.2) disebut sebagai persamaan non-homogen atau tak homogen. Apabila semua koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, … , $a_0(x)$ merupakan konstanta, maka persamaan (2.2) dikategorikan sebagai persamaan linier dengan koefisien tetap. Namun, jika semua variabelnya berupa fungsi, maka disebut sebagai persamaan linier dengan koefisien variabel.

Sistem persamaan diferensial linier adalah kumpulan dari n persamaan diferensial yang melibatkan n fungsi yang tidak diketahui, di mana n adalah bilangan bulat positif yang minimal bernilai 2. Bentuk umum dari sistem persamaan

diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang belum diketahui dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Dengan koefisien $a_{11}, \dots, a_{nn}$ dan fungsi $f_1, \dots, f_n$; semuanya merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu interval I, serta $x_1, \dots, x_n$ adalah fungsi t yang belum diketahui. Notasi titik di atas $x_1, \dots, x_n$ menunjukkan turunan terhadap variabel bebas t (Finizio & Ladas, 1988). Di sisi lain, sistem persamaan diferensial non linier adalah kumpulan dari n persamaan diferensial non linier yang melibatkan n fungsi yang tidak diketahui. Sistem ini juga dikenal sebagai sistem non linier. Sistem persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{2.4}$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix},$$

Jika $F(t, x)$ adalah fungsi non linier terhadap x_1, x_2, x_n, maka sistem tersebut disebut sebagai sistem persamaan diferensial non linier. Sebaliknya, jika F bersifat linier, maka sistem persamaan diferensial (2.4) dikategorikan sebagai persamaan diferensial linier. Contoh persamaan diferensial linier:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = \sin(t)$$

Persamaan ini dikategorikan sebagai linier karena variabel y dan turunannya $\frac{dy}{dt}$ tidak berpangkat atau terlibat dalam perkalian satu sama lain. Contoh persamaan diferensial nonlinier:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + \cos(y)$$

Persamaan ini merupakan contoh nonlinier karena terdapat pangkat y^2 dan fungsi trigonometri dari variabel terkait y, yaitu $\cos(y)$.

Dari berbagai jenis persamaan diferensial linier, hanya beberapa yang bisa diselesaikan secara eksplisit, seperti persamaan diferensial homogen dan eksak. Hal ini juga berlaku untuk sistem persamaan diferensial non linier. Selain itu, jika kita membandingkan antara sistem linier dan non linier, model matematis yang diwakili oleh sistem non linier lebih mendekati realitas yang ada (Boyce & Diprima, 2009).

2.1.3 Kestabilan dan Titik Kesetimbangan

Setiap sistem dinamik memiliki satu atau lebih titik kesetimbangan, yaitu keadaan sistem ketika tidak terjadi perubahan nilai terhadap waktu. Dalam sistem dinamik dua variabel seperti model Lotka-Volterra modifikasi, titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Titik kesetimbangan adalah pasangan nilai (x^*, y^*) yang memenuhi:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

Untuk mengetahui sifat dari titik-titik ini, diperlukan analisis kestabilan. Salah satu pendekatan untuk menilai kestabilan titik kesetimbangan adalah melalui analisis eigenvalue dari matriks Jacobian sistem pada titik tersebut.

Secara umum, klasifikasi kestabilan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Stabil, jika semua nilai eigen dari Jacobian memiliki bagian real negatif.
2. Tidak stabil, jika terdapat setidaknya satu nilai eigen dengan bagian real positif.
3. Asimtotik stabil, jika semua nilai eigen bernilai real negatif dan system kembali ke titik kesetimbangan seiring waktu.

Menurut Scheinerman (1995), analisis kestabilan non–linear dapat dilakukan melalui metode linearization atau *Lyapunov* functions. Fungsi *Lyapunov* adalah fungsi skalar $V: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang kontinu dan terdiferensialkan. Fungsi $V(x)$ disebut fungsi *Lyapunov* jika memenuhi:

1. $V(x^*) = 0$
2. $V(x) > 0$ untnuk semua $x \in D, x \neq x^*$
3. $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk semua $x \in D$

Jika $\dot{V}(x) < 0$, maka titk x^* bersifat asimtotik stabil. Jika $\dot{V}(x) \leq 0$, maka sistem stabil dalam arti *Lyapunov.* (Khalil, 2002).

Terdapat beberapa klasifikasi kestabilan yang berkaitan dengan sifat solusi $x(t)$ dari sistem terhadap kondisi awal (Khalil, 2002):

Sistem dikatakan:

1. Stabil, jika untuk setiap $\in > 0$ terdapat $\delta > 0$

   sehingga jika $\|x(0) - x^*\| < \delta$, maka $\|x(t) - x^*\| < \in$ untuk semua $t > 0$
2. Asimtotik stabil, jika sistem stabil dan:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$$

3. Eksponensial stabil, jika terdapat konstanta $M > 0,\ \lambda > 0$ sehingga:

$$\|x(t) - x^*\| \leq M\|x(0) - x^*\|e^{-\lambda t}$$

Diberikan sistem $x = \dot{f}(x)$, dan titik kesetimbangan $x^* \in D \subseteq \hbar\mathbb{R}^n$, maka: Jika terdapat fungsi $V(x) \in C^1(D)$ sedemikian sehingga:

1. $V(x^*) = 0$
2. $V(x) > 0$ untnuk semua $x \neq x^*$
3. $\dot{V}(x) \leq 0$

Maka, x^* adalah titik kesetimbangan stabil. Jika $\dot{V}(x) < 0$ maka x^* adalah asimtotik stabil.

2.1.4 Sistem Persamaan *Lotka-Volterra*

Sistem persamaan *Lotka-Volterra*, yang juga dikenal sebagai model *Predator-Prey*, merupakan salah satu model matematika paling fundamental dalam ekologi matematis yang menggambarkan interaksi dinamis antara dua spesies dalam suatu ekosistem. Model ini pertama kali dikembangkan secara independen oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Sistem ini terdiri dari sepasang persamaan diferensial nonlinear orde pertama yang mendeskripsikan bagaimana populasi *Predator* dan *Prey* berevolusi dari waktu ke waktu dalam suatu lingkungan dengan sumber daya terbatas (Salwa, 2023).

Model *Lotka-Volterra* terdiri dari sepasang persamaan diferensial yang menggambarkan interaksi antara *Predator* dan mangsa dalam konteks yang paling sederhana. Model ini mengandalkan beberapa asumsi berikut:

1. Populasi mangsa akan tumbuh secara eksponensial saat tidak ada *Predator*.
2. Populasi *Predator* akan mengalami penurunan jika tidak ada mangsa yang tersedia.
3. *Predator* dapat mengonsumsi mangsa dalam jumlah yang tidak terbatas.

4. Lingkungan dianggap homogen, artinya kedua populasi bergerak secara acak dalam suatu area yang seragam (Neuhauser, 2004).

Selanjutnya, deskripsi verbal ini diterjemahkan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Diasumsikan bahwa x mewakili populasi mangsa dan y mewakili populasi *Predator*; populasi mangsa akan berkurang ketika *Predator* membunuhnya, dan akan tetap bertahan (tanpa mengurangi populasi mangsa) jika *Predator* hanya melakukan serangan tanpa hasil.

Memulai dari pengamatan terhadap populasi *Predator* ketika tidak ada mangsa sebagai sumber makanan, dapat diharapkan bahwa laju penurunan populasi *Predator* akan berlangsung secara eksponensial. Laju kematian *Predator* dalam keadaan tanpa mangsa diasumsikan sebagai c, sehingga persamaannya dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Persamaan tersebut melibatkan hasil kali antara jumlah *Predator* (y) dan laju kematian *Predator* (c). Laju transisi dari mangsa ke *Predator* diasumsikan sebagai α, sementara laju transisi dari *Predator* ke mangsa diasumsikan sebagai β. Persamaan ini menggambarkan penurunan laju populasi *Predator* seiring berjalannya waktu, yang ditunjukkan oleh tanda negatif di sisi kanan persamaan. Meskipun ada pengurangan tersebut, hal ini diimbangi oleh laju kelahiran *Predator* yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy), di mana laju serangan (β) dikalikan dengan jumlah *Predator* (y) dan jumlah mangsa (x). Jumlah *Predator* dan mangsa akan meningkat ketika frekuensi pertemuan antara keduanya meningkat, namun laju aktual konsumsi sangat bergantung pada laju serangan (β). Dengan demikian, persamaan untuk populasi *Predator* menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Perkalian βy mencerminkan respons numerik *Predator* atau peningkatan per kapita terkait dengan kelimpahan mangsa. Sementara itu, perkalian βxy menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi *Predator* sebanding dengan kelimpahan mangsa. Beranjak ke populasi mangsa, diasumsikan bahwa tanpa serangan dari *Predator*, populasi mangsa akan tumbuh secara eksponensial. Persamaan berikut menggambarkan laju pertumbuhan populasi mangsa seiring waktu, di mana r adalah laju pertumbuhan intrinsik dari mangsa dan x adalah jumlah populasi mangsa.

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

Model *Lotka-Volterra* memiliki kelemahan, yaitu kenyataan bahwa tanpa kehadiran *Predator*, populasi mangsa akan tumbuh tanpa batas. Untuk mengatasi masalah ini, digunakan model logistik yang merupakan pendekatan untuk pertumbuhan populasi. Dalam konteks kehadiran *Predator*, populasi mangsa tidak dapat terus meningkat secara eksponensial, karena model *Predator*-mangsa beroperasi dalam waktu yang kontinu dan mengindikasikan pertumbuhan populasi, sehingga termasuk dalam kerangka model logistik. Dengan demikian, persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

Di mana x menunjukkan laju pertumbuhan populasi dan *K* adalah kapasitas maksimum atau kemampuan lingkungan untuk mendukung populasi. Kehadiran *Predator*, bagaimanapun, menghambat pertumbuhan ini melalui laju kematian mangsa akibat serangan *Predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy),

dengan laju serangan (α) dikalikan dengan jumlah *Predator* (y) dan jumlah mangsa (x). Jumlah *Predator* dan mangsa akan menurun ketika frekuensi interaksi antara keduanya meningkat, namun laju konsumsi yang sebenarnya akan bergantung pada laju serangan (α). Oleh karena itu, persamaan untuk populasi mangsa menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Dalam konteks kontrol sistem, model *Lotka-Volterra* menjadi objek studi yang menarik karena sifat nonlinearnya dan tantangan dalam mengendalikan dinamika populasinya. Metode kontrol yang dikembangkan untuk sistem ini sering menggunakan pendekatan berbasis fungsi *Lyapunov* untuk menjamin stabilitas dan konvergensi ke titik kesetimbangan yang diinginkan.

Aplikasi model *Lotka-Volterra* telah meluas jauh melampaui konteks ekologis aslinya. Model ini telah diadaptasi untuk menggambarkan berbagai fenomena dalam bidang seperti epidemiologi (interaksi antara patogen dan sistem imun), ekonomi (dinamika kompetisi pasar), kimia (reaksi oscillatory), dan bahkan dalam analisis jaringan sosial (penyebaran informasi dan tren). Keberhasilan dan fleksibilitas model ini dalam menjelaskan berbagai fenomena kompleks membuatnya tetap relevan dalam penelitian kontemporer di berbagai disiplin ilmu (Winarni, 2022).

Konstruksi fungsi *Lyapunov* untuk sistem *Lotka-Volterra* merupakan aspek krusial dalam analisis stabilitas. Fungsi *Lyapunov* yang tepat harus mampu mengkarakterisasi energi sistem dan memberikan kondisi yang cukup untuk

stabilitas. Dalam konteks ini, pemilihan fungsi *Lyapunov* sering kali memerlukan pertimbangan cermat terhadap struktur nonlinear sistem dan sifat-sifat dinamiknya yang unik. Pendekatan umum melibatkan konstruksi fungsi energi yang mempertimbangkan deviasi dari titik kesetimbangan yang diinginkan, dengan memperhatikan kontribusi dari kedua populasi dan interaksi mereka (Kemalasari, 2020).

2.1.5 Konstruksi Fungsi *Lyapunov*

Pembangunan fungsi Lyapunov dapat dilakukan dengan berbagai pendekatan, baik secara langsung maupun melalui metode-metode tertentu. Terdapat beberapa teknik yang umum digunakan untuk membentuk fungsi Lyapunov, di antaranya sebagai berikut:

1. Metode Variabel Gradien

   Metode variabel gradien merupakan salah satu pendekatan yang digunakan dalam konstruksi fungsi Lyapunov, khususnya untuk sistem dinamik nonlinear. Metode ini membentuk fungsi Lyapunov $V(x) \in \mathbb{R}$ dengan mendefinisikan gradiennya $g(x) = \nabla V(x)$, kemudian menyesuaikan agar gradien tersebut menghasilkan turunan total pada lintasan sistem.

   Diberikan suatu sistem dinamik dengan bentuk umum:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

   Dan fungsi Lyapunov $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, maka turunan V sepanjang lintasan system diberikan oleh:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \dot{f}_i(x) = \nabla V(x)^T f(x)$$

Selanjutnya, konstruksi fungsi $g(x)$ dilakukan sedemikian rupa sehingga:

$$\dot{V}(x) = g^T(x)f(x) < 0, \qquad \forall x \in D, x \neq x^*$$

Untuk sistem dengan struktur populasi atau ekologi, seperti model Lotka-Volterra, gradien $g(x)$ sering dibentuk dari fungsi entropi relatif, misalnya:

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x^*}{x} \\ 1 - \dfrac{y^*}{y} \end{bmatrix}$$

Dengan (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sitem. Fungsi Lyapunov $V(x, y)$ dapat diperoleh dari gradien tersebut melalui integral:

$$V(x,y) = \int_0^x \left(1 - \frac{x^*}{\xi}\right) d\xi + \int_0^y \left(1 - \frac{y^*}{\eta}\right) d\eta$$

yang menghasilkan bentuk eksplisit:

$$V(x,y) = x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) + y - y^* - y^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right)$$

Bentuk ini merupakan fungsi yang positif definit terhadap titik kesetimbangan (x^*, y^*) dan banyak digunakan dalam sistem predator-mangsa seperti Lotka-Volterra dengan pertumbuhan logistik:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Metode variabel gradien ini memungkinkan konstruksi fungsi Lyapunov tanpa harus menyelesaikan sistem secara eksplisit, namun cukup melalui struktur sistem dan properti lokal di sekitar titik kesetimbangan.

2. Metode Krasovskii

Metode Krasovskii merupakan salah satu pendekatan klasik dalam konstruksi fungsi Lyapunov yang sering digunakan untuk sistem nonlinier. Dalam metode ini, fungsi *Lyapunov* dibentuk dari fungsi sistem itu sendiri.

Misalkan sistem dinamik diberikan oleh:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Maka kandidat fungsi Lyapunov Krasovskii dapat dituliskan sebagai:

$$V(x) = f^T(x)Pf(x)$$

Di mana $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks simetris positif definit, dan $f(x)$ adalah vector fungsi system.

Turunan total fungsi *Lyapunov* terhadap waktu adalah:

$$\dot{V}(x) = 2f^T(x)P\dot{f}(x)$$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan x^*, analisis dilakukan terhadap tanda dari $\dot{V}(x)$ di sekitar x^*. Jika $\dot{V}(x) < 0$, maka sistem stabil dalam arti Lyapunov.

Metode ini bersifat umum dan kuat, namun pemilihan matriks P yang sesuai dapat menjadi tantangan, terutama untuk sistem dengan nonlinearitas tinggi.

3. Metode Energi Casimir

Metode energi Casimir digunakan untuk sistem Hamiltonian atau sistem dengan struktur Lie–Poisson. Dalam pendekatan ini, fungsi *Lyapunov* dibentuk dari gabungan energi dan fungsi Casimir yang merupakan invariant sistem.

Sistem Hamiltonian umumnya dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x)$$

Dengan:

$H(x)$: Fungsi energi Hamiltonian

$J(x)$: Matriks struktur (antisimetris)

$\nabla H(x)$: Gradien energi

Untuk sistem seperti ini, fungsi Lyapunov dapat dikonstruksi sebagai:

$$V(x) = H(x) + C(x)$$

Dengan $C(x)$ adalah fungsi Casimir yang memenuhi:

$$J(x)\nabla C(x) = 0$$

Metode ini cocok untuk sistem konservatif dan banyak digunakan dalam mekanika, kontrol geometri, dan sistem fluida. Meskipun model Lotka-Volterra bukan sistem Hamiltonian murni, pendekatan ini dapat menginspirasi penggunaan fungsi energi yang termodifikasi.

4. Metode Bebas Linier

Metode bebas linier (linearly independent method) digunakan dalam kasus di mana sistem dinamik tidak dapat diselesaikan secara eksplisit, tetapi memungkinkan penyusunan fungsi Lyapunov melalui kombinasi linier bebas dari fungsi-fungsi tertentu.

Misalkan terdapat basis fungsi $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ yang diketahui memiliki sifat tertentu (misalnya positif definit). Maka, fungsi *Lyapunov* dapat disusun sebagai:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i(x)$$

dengan $\alpha_i > 0$. Pemilihan basis ϕ_i dapat berupa fungsi kuadrat, logaritmik, atau bentuk lain yang sesuai dengan struktur sistem.

Metode ini fleksibel dan dapat diterapkan pada berbagai jenis sistem, termasuk model ekologi, epidemi, dan sosial ekonomi.

Fungsi *Lyapunov* yang baik harus memiliki sifat definit positif terhadap titik kesetimbangan yang dianalisis. Berikut definisi formal:

Fungsi definit positif:

$V(x) > 0$ untuk semua $x \neq x^*, \quad V(x^*) = 0$

Fungsi definit negatif:

$V(x) < 0$ untuk semua $x \neq x^*, \quad V(x^*) = 0$

Semi-definit positif/negatif jika ketidaksamaan hanya non-ketat ($\geq$ atau $\leq$)

Sifat-sifat ini penting untuk menentukan kestabilan sistem:

Jika V definit positif dan $\dot{V} \leq 0$, maka sistem stabil dalam arti *Lyapunov*

Jika V definit positif dan $\dot{V} < 0$, maka sistem asimtotik stabil

2.2 Keseimbangan Intelektual dan Spiritual dalam Islam

Dalam upaya mengembangkan ilmu pengetahuan, Islam menekankan pentingnya menjaga keseimbangan antara aspek intelektual dan spiritual. Hal ini tercermin dalam Surat Al-'Alaq ayat 1–5, di mana Allah SWT memerintahkan manusia untuk membaca, belajar, dan mencari ilmu dengan tetap menyandarkan diri kepada-Nya:

"Bacalah dengan (menyebut) nama tuhanmu Yang menciptakan, Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan tuhanmulah Yang Maha Pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran qalam (pena). Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya." (QS. Al 'Alaq: 1-5)."

Menurut Tafsir Al-Mazhari (*Al-Zubaidi, 2001*), perintah "Iqra'" (bacalah) dalam ayat pertama surat Al-'Alaq tidak hanya merujuk pada membaca secara

tekstual, tetapi mencakup pembacaan terhadap alam semesta dan peristiwa kehidupan sebagai sarana untuk memahami tanda-tanda kebesaran Allah. Bacaan tersebut merupakan bentuk dari proses berpikir dan merenung, yang menjadi fondasi bagi tumbuhnya ilmu pengetahuan dan kesadaran spiritual manusia.

Sementara itu, dalam Tafsir Fi Zilalil Qur'an, Sayyid Qutb menjelaskan bahwa penyebutan "pena" dalam ayat keempat menunjukkan betapa pentingnya alat tulis dalam sejarah peradaban manusia. Allah mengajarkan manusia apa yang tidak diketahuinya, dan melalui pena—sebagai simbol tulisan—ilmu dapat diwariskan dan dikembangkan dari generasi ke generasi (*Qutb, 2003*). Hal ini menunjukkan bahwa Islam memberikan perhatian besar terhadap ilmu pengetahuan dan pendidikan sebagai instrumen pembentukan akhlak dan kemajuan umat.

Dengan demikian, ayat ini menjadi dasar penting bagi integrasi ilmu dan agama dalam Islam. Ilmu tidak dipisahkan dari nilai-nilai ketuhanan, dan aktivitas akademik harus dilakukan dalam rangka mendekatkan diri kepada Allah. Inilah esensi keseimbangan antara intelektualitas dan spiritualitas dalam pandangan Islam.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Dalam penelitian Wang et al. (2021), metode yang digunakan meliputi pengembangan model keseimbangan tiga populasi berdasarkan model *Lotka-Volterra* tiga dimensi, analisis sistem simbiosis dari dua aspek: perkembangan seimbang tiga spesies dan evolusi kompetitif, serta penggunaan data volume penjualan tiga perusahaan otomotif lokal di China sebagai sampel untuk analisis empiris. Hasil penelitian ini menemukan kemungkinan keseimbangan dan timbal balik dalam pertumbuhan tiga populasi produk otomotif, menunjukkan bahwa

tindakan kooperatif lebih baik daripada strategi kompetitif, dan menyimpulkan bahwa kerjasama komprehensif merupakan kondisi ideal dari sistem simbiosis tiga populasi.

Dalam penelitian yang akan dilakukan dapat diadaptasi dengan mengganti tiga perusahaan otomotif dengan tiga sistem operasi seluler utama di Indonesia (misalnya Android, iOS, dan sistem operasi lainnya), serta menggunakan model *Lotka-Volterra* tiga dimensi untuk menganalisis interaksi dan dinamika persaingan antar sistem operasi. Analisis data dapat dilakukan dengan menggunakan data pangsa pasar atau jumlah pengguna dari masing-masing sistem operasi di Indonesia selama periode waktu tertentu, menggantikan volume penjualan otomotif. Dengan adaptasi ini, penelitian yang akan dilakukan dapat memanfaatkan kerangka kerja dan metodologi dari Wang et al. (2021), sambil fokus pada konteks spesifik sistem operasi seluler di Indonesia. Hal ini akan memberikan perspektif baru dalam memahami dinamika pasar teknologi mobile di Indonesia menggunakan model ekologi yang telah terbukti efektif dalam analisis persaingan industri.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang bertujuan untuk mengkonstruksi dan menganalisis fungsi *Lyapunov* pada model *Lotka-Volterra* kompetitif dua entitas. Model yang digunakan diadaptasi dari Puspita et al. (2024), yang merepresentasikan dinamika kompetisi dua sistem operasi seluler di Indonesia. Penelitian ini memfokuskan pada analisis matematis sistem tersebut melalui:

1. Penentuan titik keseimbangan,
2. Formulasi fungsi *Lyapunov.*
3. Analisis kestabilan menggunakan pendekatan *Lyapunov*
4. Simulasi numerik dengan perangkat lunak *Maple*.

3.2 Tahapan Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Formulasi Model *Lotka-Volterra* Kompetitif

   Model yang digunakan merupakan sistem diferensial nonlinier yang menggambarkan interaksi dua populasi yang bersaing (misalnya Android dan iOS). Model ini tidak bergantung secara eksplisit pada waktu (autonomous) dan bersifat nonlinier karena mengandung suku hasil kali antar variabel:

$$\frac{dx}{dt} = 0.4748x - 0.00489x^2 - 0.00348xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08137y - 0.00067y^2 - 0.00207xy$$

Model ini diambil dari artikel Puspita et al. (2024) sebagai contoh studi kasus untuk membuktikan validitas metode *Lyapunov* .

2. Penentuan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan ditentukan dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$.

Dengan menyelesaikan sistem ini, diperoleh dua titik keseimbangan:

a. Titik keseimbangan trivial: $E_0 = (0,0)$

b. $E^* = (x^*, y^*)$ yang nilainya dihitung langsung dari parameter sistem.

3. Konstruksi Fungsi *Lyapunov*

Fungsi *Lyapunov* dikonstruksi untuk menganalisis kestabilan sistem tanpa menyelesaikan sistem diferensial secara eksplisit. Bentuk yang digunakan adalah bentuk logaritmik, bentuk fungsi *Lyapunov* logaritmik seperti ini telah digunakan dalam berbagai literatur, salah satunya oleh Aziz-Alaoui dan Okiye (2003), yang menerapkan fungsi

$$V(x,y) = a_1\left(x - x^* - x^* \ln\frac{x}{x^*}\right) + a_2\left(y - y^* - y^* \ln\frac{y}{y^*}\right)$$

Dengan $a, b > 0$, dan (x^*, y^*) adalah titik keseimbangan. Fungsi ini dipilih karena memenuhi sifat positif definit dan umum digunakan untuk sistem dua populasi. pada sistem *Lotka–Volterra* kompetitif. Mereka menunjukkan bahwa fungsi ini positif definit dan menurun terhadap waktu, sehingga dapat digunakan untuk membuktikan kestabilan titik keseimbangan global dari sistem. *(Tang, Y., Yuan, R., & Ma, Y. (2013).*

4. Analisis Kestabilan melalui Fungsi *Lyapunov*

   Setelah mentukan fungsi *Lyapunov* , dilakukan analisis kestabilan dengan menghitung turunan total $V(x, y)$ terhadap waktu:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

   Jika $\frac{dV}{dt} \leq 0$ di sekitar titik tetap E^*, maka titik tetap tersebut dianggap stabil. Tahap ini dilakukan dengan bantuan perangkat lunak *Maple* untuk melakukan perhitungan simbolik dan numerik, sehingga validitas fungsi *Lyapunov* dapat diuji lebih akurat.

5. Implementasi dan Simulasi dengan Maple

   Fungsi Lyapunov yang telah dikonstruksi kemudian dianalisis melalui simulasi numerik menggunakan perangkat lunak Maple. Simulasi dilakukan untuk memvisualisasikan arah vektor dan perilaku trajektori terhadap fungsi Lyapunov yang telah dibentuk.

6. Analisis hasil dan penarikan Kesimpulan

   Tahapan akhir dari penelitian ini adalah menganalisis semua hasil yang telah diperoleh, baik secara analitik maupun numerik. Berdasarkan hasil tersebut, ditarik kesimpulan mengenai kestabilan sistem Lotka-Volterra berdasarkan pendekatan fungsi *Lyapunov.*

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Formulasi Model

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini merupakan modifikasi dari model Lotka–Volterra klasik dengan menambahkan komponen pertumbuhan logistik pada populasi Android (diasosiasikan sebagai mangsa). Hal ini bertujuan untuk merepresentasikan kondisi lingkungan yang memiliki keterbatasan sumber daya. Bentuk umum model Lotka–Volterra kompetitif dua entitas adalah:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1 - \dfrac{x}{k}\right) - axy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \beta xy \end{cases}$$

dengan:

$x(t)$: Populasi mangsa pada waktu t

$y(t)$: Populasi predator pada waktuu t

r : Laju pertumbuhan alami populasi mangsa

k : Kapasitas dukung lingkungan terhadap populasi mangsa

a : Laju interaksi predator terhadap mangsa

c : Laju kematian predator

β : Efisiensi konversi mangsa menjadi pertumbuhan predator

Model ini bersifat autonomous, karena tidak secara eksplisit bergantung pada waktu, dan nonlinier karena mengandung hasil kali antara variabel.

Model sistem diferensial yang digunakan pada penelitian ini diambil dari Puspita et al. (2024) sebagai contoh kasus dalam menguji validitas metode

Lyapunov. Parameter-parameter pada sistem tidak dihitung sendiri, melainkan diadopsi langsung dari hasil estimasi regresi nonlinier dalam jurnal tersebut.

Selanjutnya, model ini ditransformasikan ke dalam bentuk numerik dengan substitusi parameter hasil estimasi dari data nyata. Proses transformasinya adalah sebagai berikut:

1. Ekspansi Model x

Model x:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy = rx - \frac{r}{k}x^2 - axy$$

dengan:

r: 0.4748

$\frac{r}{k}$: $0.00489 \Rightarrow k = \frac{0.4748}{0.00489} \approx 97.086$

$a = 0.00348$

Maka:

$$\frac{dx}{dt} = 0.4748x - 0.00489x^2 - 0.00348xy$$

2. Ekspansi Model y

Model y:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy = \beta xy - cy$$

Ditambahkan interaksi intra-spesies untuk y, sehingga:

$$\frac{dy}{dt} = dy - ey^2 - fxy$$

Dengan:

$d = \beta x = 0.08137$

$c = 0.00067y$ (diubah menjadi ey^2 sebagai bentuk kompetisi intra-spesies ios)

$f = \beta = 0.00207$

Sehingga:

$$\frac{dy}{dt} = 0.08137y - 0.00067y^2 - 0.00207xy$$

Semua parameter diperoleh dari pengolahan data pasar pengguna Indonesia selama periode Juli 2021–Desember 2022 yang tersedia di Statcounter dan diolah oleh penulis jurnal tersebut. Penggunaan parameter ini bertujuan untuk menyediakan kerangka sistem nyata agar metode *Lyapunov* yang dikembangkan dalam skripsi ini dapat diuji dengan lebih konkret. Namun demikian, fokus utama penelitian tetap pada aspek matematis, yaitu konstruksi dan analisis fungsi *Lyapunov* terhadap sistem tersebut.

4.2 Penentuan Titik Keseimbangan

Sistem *Lotka-Volterra* dua spesies yang ditinjau pada penelitian ini dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

1. Menuliskan Kembali Model

   Model diferensial yang digunakan adalah:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1 - \dfrac{x}{k}\right) - axy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \beta xy \end{cases}$$

   Di mana:

   $x(t)$: Populasi spesies pertama (mangsa)

   $y(t)$: Populasi spesies kedua (predator)

   r, k, a, c, β: Parameter positif sistem

   Titik keseimbangan terjadi ketika:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ dan } \frac{dy}{dt} = 0$$

3. Menyelesaikan $\frac{dy}{dt=0}$

$$-cy + \beta xy = 0$$

$$y(-c + \beta x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ atau } x = \frac{c}{\beta}$$

4. Menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$

$$rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy = 0$$

$$x\left(r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - ay\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = ay$$

Kasus 1: $x = 0$→ substitusi ke y

Jika $x = 0$, maka dari $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \Rightarrow y = 0$$

Jadi, titik keseimbangan Trivial:

$$E_0 = (0,0)$$

Kasus 2: $x = \frac{c}{\beta}$→ substitusi ke persamaan $\frac{dx}{dt}$

Menggunakan $x = \frac{c}{\beta}$ ke:

$$r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = ay \Rightarrow y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

Substitusi $x = \frac{c}{\beta}$:

$$y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right) \Rightarrow y = \frac{r}{a} - \frac{rc}{a\beta k} \Rightarrow y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{ac}{r\beta}\right) = y^*$$

$$x^* = \frac{c}{\beta}, y^* = k\left(1 - \frac{ac}{r\beta}\right)$$

Jadi, titik keseimbangan Non-Trivial:

$$E^* = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right)\right)$$

5. Menentukan titik kesetimbangan Non-Trivial

$$\begin{cases} 0 = rx - \frac{r}{k}x^2 - axy \\ 0 = dy - ey^2 - fxy \end{cases}$$

Dari persamaan pertama:

$$rx - \frac{r}{k}x^2 - axy = 0 \Rightarrow x\left(r - \frac{r}{k}x - ay\right) = 0$$

Abaikan solusi trivial $x = 0$, maka:

$$r - \frac{r}{k}x - ay = 0 \Rightarrow y = \frac{r - \frac{r}{k}x}{a}$$

Dari persamaan kedua:

$$dy - ey^2 - fxy = 0 \Rightarrow y(d - ey - fx) = 0$$

Abaikan $y = 0$, maka:

$$d - ey - fx = 0 \Rightarrow y = \frac{d - fx}{e}$$

Substitusikan:

$$\frac{r - \frac{r}{k}x}{a} = \frac{d - fx}{e}$$

$$e\left(r - \frac{r}{k}x\right) = a(d - fx)$$

$$er - \frac{er}{k}x = ad - afx$$

$$x\left(-\frac{er}{k} + af\right) = ad - er$$

Parameter yang digunakan pada penelitian ini diambil dari Puspita et al. (2024), dengan:

$r = 0.4748$

$k = 97.086$

$a = 0.0348$

$d = 0.08137$

$e = 0.00067$

$f = 0.00207$

$$ad - er = (0.0348)(0.08137) - (0.00067)(0.4748)$$

$$= 0.002833676 - 0.000318116 \approx 0.00251556$$

$$-\frac{er}{k} + af = -\frac{(0.00067)(0.4748)}{97.086} + (0.0348)(0.00207)$$

$$= -0.000003277 + 0.000072036 \approx 0.000068759$$

$$x^* = \frac{0.00251556}{0.000068759} \approx 36.58$$

$$y^* = \frac{d - fx^*}{e} = \frac{0.08137 - 0.00207 \cdot 36.58}{0.00067} = \frac{0.00567}{0.00067} \approx 8.46$$

4.3 Konstruksi Fungsi *Lyapunov*

Pada penelitian ini, konstruksi fungsi Lyapunov dilakukan menggunakan metode variabel gradien, yaitu dengan membentuk turunan parsial dari fungsi Lyapunov yang kemudian diintegrasikan terhadap masing-masing variabel sistem Lotka-Volterra.

4.3.1 Pembentukan Fungsi *Lyapunov*

1. Asumsikan bentuk turunan (gradien) dari fungsi *Lyapunov*

Asumsi ini diambil dari bentuk fungsi *Lyapunov* berbasis entropi relative, umumnya digunakan bentuk:

$$V(x, x^*) = x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right)$$

Menurunkan bentuk ini:

$$\frac{dV}{dt} = \left(x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right)\right) = 1 - \frac{x}{x^*}$$

Maka:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a_1\left(1 - \frac{x^*}{x}\right)$$

Demikian pula:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = a_2\left(1 - \frac{y^*}{y}\right)$$

Agar fungsi $V(x, y)$ bersifat positif definit terhadap titik kesetimbangan (x^*, y^*), maka ditentukan bentuk turunannya sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a_1\left(1 - \frac{x^*}{x}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = a_2\left(1 - \frac{y^*}{y}\right)$$

Konstanta a_1 dan a_2 merupakan bobot positif untuk menyeimbangkan pengaruh kedua variabel. Di mana $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ adalah konstanta positif.

2. Integralkan masing-masing komponen gradien

Untuk menemukan fungsi $V(x, y)$, integralkan gradien tersebut terhadap variabelnya masing-masing.

Integrasi terhadap x:

$$V_x(x) = \int a_1\left(1 - \frac{x^*}{x}\right) dx$$

$$= a_1 \int \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) dx$$

$$= a_1(x - x^* \ln x) + C_1$$

Agar berbasis terhadap titik kesetimbangan x^*, bentuk ini dimodifikasi:

$$V_x(x) = a_1\left(x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right)\right)$$

Integrasi terhadap y:

$$V_y(y) = \int a_2\left(1 - \frac{y^*}{y}\right)dy$$

$$= a_2 \int \left(1 - \frac{y^*}{y}\right)dy$$

$$= a_2(y - y^* \ln y) + C_2$$

Modifikasi ke bentuk berbasis titik kesetimbangan y^*:

$$V_y(y) = a_2\left(y - y^* - y^* \ln\left(\frac{y}{y^*}\right)\right)$$

3. Gabungkan hasil integrasi

$$V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$$

$$V(x,y) = a_1\left(x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right)\right) + a_2\left(y - y^* - y^* \ln\left(\frac{y}{y^*}\right)\right)$$

4.3.2 Verifikasi Syarat Fungsi *Lyapunov*

Syarat 1: $V(x,y) > 0$ dan $V(x^*,y^*) = 0$

$$V(x,y) = a_1\left(x - \frac{c}{\beta} - \frac{c}{\beta}\ln\left(\frac{\beta x}{c}\right)\right) + a_2\left(y - \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right)\ln\left(\frac{ya}{r(1-\frac{c}{\beta k}}\right)\right)$$

1. Di titik E^*

Substitusi:

$x^* = \frac{c}{\beta}$, maka $\ln(1) = 0$

$y^* = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right)$, maka $\ln(1) = 0$

$$V(x^*,y^*) = a_1(0-0) + a_2(0-0) = 0$$

Dan untuk $x \neq x^*$, bagian $x - x^* - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) > 0$

Jadi, syarat 1 terpenuhi di titik non-trivial

2. Di titik $E_0 = (0,0)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{c}{\beta} - \frac{c}{\beta}\ln\left(\frac{\beta x}{c}\right)\right) \to -\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{y\to 0^+}\left(y - \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right) - \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right)\ln\left(\frac{y}{\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{\beta k}\right)}\right)\right) \to -\infty - (-\infty) = +\infty$$

Sehingga :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)^+} V(x,y) = +\infty \Rightarrow V(x,y) > 0$ disekitar $(0,0)$

Jadi, syarat pertama (positif definit) terpenuhi untuk kedua titik kesetimbangan.

Syarat 2: Fungsi kontinu dan terdiferensialkan

$x, y \rightarrow$ fungsi polinomial→terdiferensialkan

$\ln(x), \ln(y) \rightarrow$ terfiferensialkan untuk $x > 0, y > 0$

Fungsi $V(x,y)$ terdiri dari kombinasi linier dari:

Polynomial:x, y

Logaritma:$\ln(x), \ln(y)$

Maka:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a_1\left(1 - \frac{c}{\beta x}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = a_2\left(1 - \frac{r}{ay}\left(1 - \frac{c}{\beta k}\right)\right)$$

Di titik non-trivial $x^*, y^* > 0$ fungsi terdiferensialkan

Di titik trivial $x = 0,\ y = 0$

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \rightarrow \infty \rightarrow$turunan tidak terdefinisi

Menggunakan pendekatan limit dari kanan dan dapat dianalisis secara lokal

Maka syarat 2 dipenuhi secara lokal dan global

Syarat 3: Turunan waktu $\dot{V}(x,y) \leq 0$

Turunan total:

$$\dot{V} = a_1\left(1-\frac{c}{\beta x}\right)\cdot\left[rx\left(1-\frac{x}{k}\right)-axy\right]+a_2\left(1-\frac{r}{ay}\left(1-\frac{c}{\beta k}\right)\right)\cdot$$

$$[-cy+\beta xy]$$

Di titik non-trivial:

$$x=\frac{c}{\beta}\Rightarrow\left(1-\frac{c}{\beta x}\right)=0$$

$$y=\frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{\beta k}\right)\Rightarrow\left(1-\frac{r}{ay}\left(1-\frac{c}{\beta k}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x^*,y^*)=0$$

Syarat 3 terpenuhi di titik non-trivial

Di titik trivial:

$$\left(1-\frac{c}{\beta x}\right)\rightarrow-\infty,\quad \frac{dx}{dt}\rightarrow 0\rightarrow 0^-$$

$$\left(1-\frac{r}{ay}\left(1-\frac{c}{\beta k}\right)\right)\rightarrow-\infty,\quad \frac{dy}{dt}\rightarrow 0\rightarrow)^-$$

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)^+}\dot{V}(x,y)\leq 0$$

Syarat 3 terpenuhi di titik trivial secara limit

4.4 Simulasi dan Interpretasi

4.4.1 Tujuan Simulasi

Simulasi numerik dilakukan untuk:

1. Memverifikasi kestabilan titik keseimbangan E^* menggunakan fungsi *Lyapunov*

2. Mengamati perilaku sistem secara dinamis dari waktu ke waktu
3. Menunjukkan bahwa $V(x(t), y(t))$ menurun menuju minimum, yaitu kestabilan

4.4.2 Hasil Simulasi Numerik dengan *Maple*

Simulasi dilakukan menggunakan perangkat lunak *Maple* dengan metode numerik *dsolve* dan perintah DEplot untuk menyelesaikan dan memvisualisasikan sistem diferensial. Kondisi awal yang digunakan adalah:

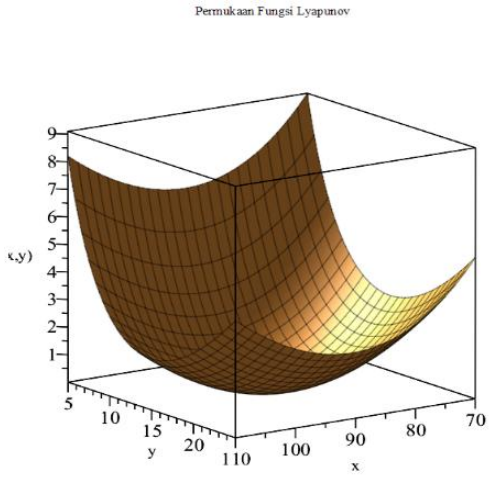
$$x(0) = 90.87, \quad y(0) = 8.89$$

Simulasi dilakukan pada interval waktu $t \in [0,100]$

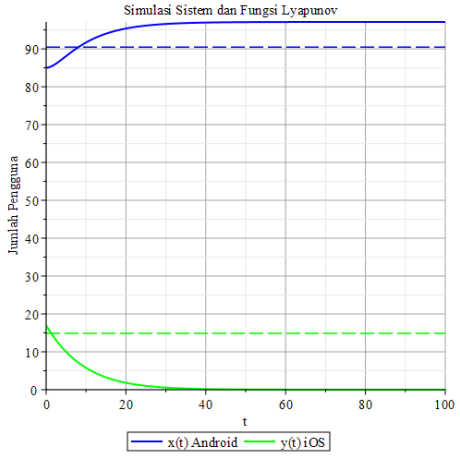
Hasil grafik menunjukkan bahwa:

1. Populasi pengguna Android $x(t)$ meningkat perlahan dari nilai awal menuju nilai stabil sekitar 90.464%.
2. Populasi pengguna iOS $y(t)$ menurun sedikit sebelum mencapai kestabilan sekitar 14.894%.
3. Nilai fungsi *Lyapunov* $V(x(t), y(t))$ menurun secara monoton terhadap waktu dan mendekati nol, yang mengindikasikan bahwa solusi sistem bergerak menuju titik keseimbangan stabil E^*.

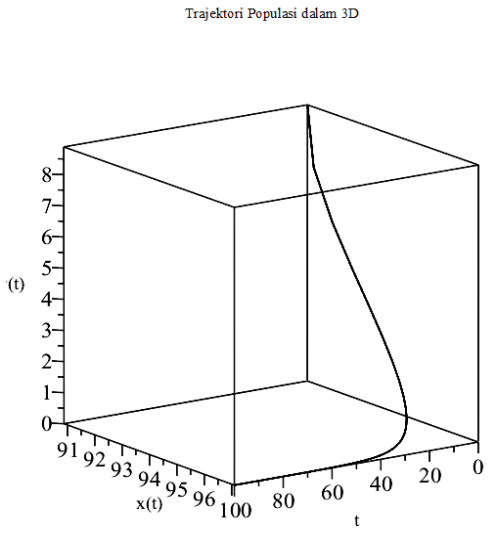
4.4.3 Interpretasi Hasil



Gambar 4.1 Permukaan Fungsi *Lyapunov* untuk Sistem *Lotka-Volterra* Kompetitik



Gambar 4.2 Fungsi *Lyapunov* terhadap Waktu Menunjukkan Kecenderungan Sistem Menuju Kestabilan Pada Titik Keseimbangan



Gambar 4.3 Grafik 3D Trajektori Solusi terhadap Waktu $(\boldsymbol{x(t)}, \boldsymbol{y(t)}, \boldsymbol{t})$

Hasil grafik menunjukkan bahwa nilai fungsi *Lyapunov* $V(x(t), y(t))$ mengalami penurunan seiring waktu dan akhirnya mendekati nilai minimum, yaitu:

$$\lim_{t\to\infty} V\big(x(t), y(t)\big) \to 0$$

Hal ini mengindikasi bahwa:

1. Sistem mendekati titik keseimbangan E^*
2. Tidak terjadi osilasi liar atau ketidakteraturan dalam jangka Panjang
3. Fungsi *Lyapunov* yang dikonstruksi valid dan efektif dalam membuktikan kestabilan system

Dengan demikian, secara numerik terbukti bahwa sistem berada dalam kondisi asimtotik stabil di titik E^*, yang memperkuat pembuktian teoritis sebelumnya.

4.5 Modifikasi Sistem *Lotka-Volterra* dalam Pandangan Islam

Penelitian ini tidak hanya mengkaji aspek matematis dari sistem *Lotka-Volterra* yang dimodifikasi, tetapi juga berupaya mengintegrasikan nilai-nilai

keislaman ke dalam pemahaman ilmiah tersebut. Salah satu titik penting dalam analisis ini adalah munculnya titik keseimbangan, yang secara tidak langsung merepresentasikan harmoni atau keteraturan dalam ciptaan Allah.

Dalam pandangan Islam, keseimbangan bukan hanya aspek biologis atau ekologis, tetapi juga mencakup aspek intelektual dan spiritual. Sebagaimana telah dibahas dalam Bab II melalui Surat Al-‘Alaq ayat 1–5, Islam menekankan pentingnya mencari ilmu tanpa meninggalkan nilai-nilai ketuhanan. Perintah membaca dan belajar diiringi dengan menyebut nama Tuhan menunjukkan bahwa pengembangan ilmu harus selalu diimbangi dengan kesadaran akan tanggung jawab sebagai hamba Allah.

Dalam konteks ini, fungsi *Lyapunov* yang diturunkan untuk membuktikan kestabilan sistem merupakan hasil dari kerja intelektual yang tinggi. Namun, sebagaimana ditegaskan dalam ayat tersebut, ilmu pengetahuan tidak boleh berdiri sendiri. Harus ada integrasi antara pengembangan ilmu (intelektualitas) dan tanggung jawab moral (spiritualitas). Inilah bentuk keseimbangan yang sejati, sebagaimana diperintahkan Allah dalam wahyu pertama yang diturunkan.

Dengan demikian, keseimbangan dalam sistem *Lotka-Volterra* dapat dimaknai sebagai cerminan keseimbangan intelektual dan spiritual yang dituntut dalam ajaran Islam. Manusia sebagai khalifah di bumi dituntut untuk menjaga keteraturan dan keharmonisan lingkungan melalui ilmu pengetahuan, tetapi tidak terlepas dari nilai-nilai ketuhanan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi fungsi *Lyapunov* yang sesuai untuk model *Lotka-Volterra* kompetisi dua populasi serta menganalisis kestabilan titik keseimbangannya. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Sistem persamaan diferensial yang digunakan diadaptasi dari jurnal Puspita et al. (2024), yang merepresentasikan persaingan dua entitas, dan digunakan dalam penelitian ini sebagai contoh pembuktian metode *Lyapunov* .Penentuan titik keseimbangan menunjukkan adanya dua titik tetap, yaitu:
2. Fungsi *Lyapunov* dikonstruksi dalam bentuk logaritmik yang umum digunakan untuk sistem dua populasi, yaitu:

$$V(x,y) = a\left(x - x^* - x^* \ln\frac{x}{x^*}\right) + b\left(y - y^* - y^* \ln\frac{y}{y^*}\right)$$

   Dengan $a, b > 0$, dan (x^*, y^*) adalah titik keseimbangan non-trivial.
3. Berdasarkan hasil perhitungan turunan $\frac{dV}{dt}$, fungsi *Lyapunov* terbukti positif definit dan menurun terhadap waktu, yang mengindikasikan bahwa sistem berada dalam keadaan stabil asimtotik lokall di sekitar titik keseimbangan E^*.
4. Simulasi numerik menggunakan Maple menunjukkan bahwa solusi $x(t)$ dan $y(t)$ menuju titik keseimbangan dan fungsi *Lyapunov* $V(x(t), y(t))$

menurun monoton menuju nol. Hal ini memperkuat hasil analitik yang telah dibuktikan secara simbolik.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa fungsi *Lyapunov* yang dikonstruksi berhasil digunakan untuk menganalisis kestabilan sistem dinamis *Lotka-Volterra* secara efektif.

5.2 Saran

1. Penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan meninjau model *Lotka-Volterra* yang lebih kompleks, misalnya dengan memasukkan waktu tunda, variasi musiman, atau efek bifurkasi.
2. Selain itu, metode *Lyapunov* juga dapat dibandingkan dengan metode lain seperti linearization, metode eigen, atau simulasi numerik berbasis bifurkasi untuk memperluas pemahaman dinamika sistem.
3. Untuk pengembangan praktis, pemilihan parameter model dari data nyata hendaknya dilakukan dengan mempertimbangkan konteks sistem secara mendalam agar hasil interpretasi lebih bermakna.

DAFTAR PUSTAKA

Al Idrus, A. S., Gani, A. P. A., & Zaid, N. (2022). Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Struktur Usia dan Perilaku Anti-*Predator*. *Research in the Mathematical and Natural Sciences*, *1*(2), 22-29.

Al-Mahalli, Jalaluddin, dan Jalaluddin As-Suyuti. *Tafsir Al-Jalalayn*. Dar Al-Kutub Al-Ilmiyah, 1999.

Al-Zubaidi. *Tafsir Al-Mazhari*. Beirut: Dar al-Kutub al-'Ilmiyyah, 2001.

Arsyad, A., & Megasari, M. (2022). Analisis Pangsa Pasar Produsen Telepon Seluler::"Aplikasi Matriks Markov"(Studi Kasus Mahasiswa Iain Palopo). *Eqien-Jurnal Ekonomi Dan Bisnis*, *11*(1), 331-341.

Aufaniyah, N. L., & Abadi, A. (2023). Dynamics of *Prey-Predator* Interaction with Type II Holling Response Function, Additional Food, and Anti-*Predator* Behavior. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *11*(03), 422-433.

Aziz-Alaoui, M. A., & Okiye, M. D. (2003). *Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes*. Applied Mathematics Letters, 16(7), 1069–1075. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)90096-6

Baiduri. (2012). *Persamaan diferensial dan matematika model*. Malang: UMM Press.

Boyce, E., & Diprima, C. (2009). *Elementary differential equations and value problems* (9th ed.). New York: Wiley and Sons.

Darajat, P. P. (2023). Dynamical Analysis Of Cervical Cancer Disease Model With Treatment. *Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, *8*(1), 113-122.

Ekawati, D. (2021). Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 23-30.

Finizio, N., & Ladas, G. (1988). *Persamaan diferensial biasa dengan penerapan modern*. Jakarta: Erlangga.

Ibnu Katsir. *Tafsir Al-Qur'an Al-'Azhim*. Dar Al-Kutub Al-Ilmiyah, 2003, jilid 10.

Kartono. (2012). *Persamaan diferensial biasa: Model matematika fenomena perubahan*. Jakarta: Graha Ilmu.

Kemalasari, A., Reorita, R., & Renny, R. (2022). analisis dinamik model leslie-gower dengan pengaruh waktu tunda dan pemanenan proporsional. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP)*, *14*(1), 59-68.

Kementerian Agama Saudi Arabia. *Tafsir Al-Muyassar*. Dar Al-Salam, 2010.

Kementerian Agama. (2022). *Qur'an Kemenag*

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems* (3rd ed.). Prentice Hall.

Neuhauser, C. (2004). *Calculus for biology and medicine*. New Jersey: Pearson Education.

Puspita, A. S. H., Sutrima, S., Setiyowati, R., & Wibowo, S. (2024). *Stability analysis of cellular operating system market share in Indonesia with the competitive LOTKA-VOLTERRA model*. Barekeng: Journal of Mathematics and ItsApplications,18(1),0333–0340. T

Scheinerman, E. R. (1995). *Invitation to Dynamical Systems*. Prentice Hall.

Qutb, Sayyid. *Fi Zilalil Qur'an*. Kairo: Dar al-Shuruq, 2003.

Salwa, S. I., Shakira, L. A., & Savitri, D. (2023). Dinamika Model Mangsa-Pemangsa Lotka Volterra Dengan Adanya Kerja Sama Berburu Pada Pemangsa. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, *7*(2), 195-205.

Sundari, R., & Apriliani, E. (2017). Konstruksi fungsi *LYAPUNOV* untuk menentukan kestabilan. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, *6*(1), A7-A11.

Tang, Y., Yuan, R., & Ma, Y. (2013). Dynamical behaviors determined by the *LYAPUNOV* function in competitive Lotka–Volterra systems. *Physical Review E*, 87(1), 012708. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.012708

Wang, S. Y., Chen, W. M., & Wu, X. L. (2021). Competition Analysis on Industry Populations Based on a Three-Dimensional Lotka–Volterra Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2021*(1), 9935127.

Winarni, A., & Hayati, A. (2020). Analisis Pengaruh Tingkat Kompetisi dan Interaksi antara *Prey* dan *Predator* pada Perilaku Model Dinamik Diskrit *Lotka-Volterra*. *Square: Journal of Mathematics and Mathematics Education*, *2*(2), 109-118.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Maple Gambar (4.4)

Gambar 4.1 Permukaan Fungsi *Lyapunov* Untuk Sistem *Lotka-Volterra* Kompetitik

```
restart:
with(plots):
x_star := 90.4642;
y_star := 14.8938;
V := (x, y) -> x - x_star - x_star*ln(x/x_star) + y - y_star - y_star*ln(y/y_star);
plot3d(V(x, y), x = 70 .. 110, y = 5 .. 25, axes = boxed, labels = ["x", "y",
        "V(x,y)"], title = "Permukaan Fungsi LYAPUNOV ", color = gold);
```

Lampiran 2. Program Maple Gambar (4.5)

Gambar 4.2 Fungsi *Lyapunov* terhadap Waktu Menunjukkan Kecenderungan Sistem Menuju Kestabilan Pada Titik Keseimbangan

```
restart:
with(plots):
with(DEtools):
a := 0.4748: b := 0.00489: c := 0.00348:
d := 0.08137: e := 0.00067: f := 0.00207:
xstar := 90.464:
ystar := 14.894:
de1 := diff(x(t), t) = a*x(t) - b*x(t)^2 - c*x(t)*y(t):
de2 := diff(y(t), t) = d*y(t) - e*y(t)^2 - f*x(t)*y(t):
ics := x(0) = 85, y(0) = 17:
sol := dsolve({de1, de2, ics}, {x(t), y(t)}, numeric, output = listprocedure):
p1 := odeplot(sol, [t, x(t)], 0 .. 100, color = blue, thickness = 2, legend = "x(t)
        Android"):
p2 := odeplot(sol, [t, y(t)], 0 .. 100, color = green, thickness = 2, legend = "y(t)
        iOS"):
hx := plot(xstar, t = 0 .. 100, color = blue, linestyle = dash, thickness = 1):
hy := plot(ystar, t = 0 .. 100, color = green, linestyle = dash, thickness = 1):
display([p1, p2, hx, hy],
      title = "Simulasi Sistem dan Fungsi LYAPUNOV ",
      labels = ["t", "Jumlah Pengguna"],
      labeldirections = [horizontal, vertical],
      legendstyle = [location = bottom],
      gridlines = true);
```

Lampiran 3. Program Maple Gambar (4.5)

Gambar 4.3 Grafik 3D Trajektori Solusi terhadap Waktu $(\boldsymbol{x(t)}, \boldsymbol{y(t)}, \boldsymbol{t})$

```
restart:
with(plots):
de1 := diff(x(t), t) = 0.4748*x(t) - 0.00489*x(t)^2 - 0.00348*x(t)*y(t);
de2 := diff(y(t), t) = 0.08137*y(t) - 0.00067*y(t)^2 - 0.00207*x(t)*y(t);
ics := x(0) = 90.87, y(0) = 8.89;
sol := dsolve({de1, de2, ics}, numeric, output = listprocedure);
xt := rhs(sol[2]);
yt := rhs(sol[3]);
plot3d([t, xt(t), yt(t)], t = 0 .. 100, axes = boxed, labels = ["t", "x(t)", "y(t)"],
        title = "Trajektori Populasi dalam 3D", color = red);
```

RIWAYAT HIDUP

Eka Putri Rizki Apriliani, lahir di Gresik pada 02 April 2003. Penulis merupakan anak kesatu dari pasangan Bapak Yazid Bustomi dan Ibu Dwi Windarani serta kakak dari Maulidya Dwi Rahmani. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK Sunan Prapen yang lulus pada tahun 2009, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di MI Ma'arif Sidomukti dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di Mts Ma'arif Sidomukti dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMAN 1 Kebomas dan lulus pada tahun 2021.

Pada tahun yang sama melalui jalur SBMPTN, penulis diterima menjadi mahasiswa pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis aktif terlibat sebagai anggota organisasi HMPS Matematika, Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Talangsuko, Kecamatan Turen, Kabupaten Malang selama satu bulan sebagai anggota Publikasi dan Dokumentasi pada tahun 2024. Selain itu pada tahun 2024 pada bulan Juni–Juli penulis juga mengikuti program Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT. PLN ULP Giri Gresik yang melaksanakan tugas seperti scanning document, arsip, processing data dan editing.

Menjalani kehidupan tentu tidak lepas dari berbagai rintangan dan ujian. Penulis meyakini bahwa setiap kesulitan hadir sebagai bagian dari proses pendewasaan diri. Dengan tekad yang kuat dan sikap optimis, penulis berusaha untuk terus maju dan belajar dari setiap pengalaman. Ketika menghadapi kegagalan, penulis tidak memilih untuk berhenti, tetapi menjadikannya sebagai pijakan untuk bangkit dan tumbuh lebih baik. Penulis berharap bahwa perjalanan hidup ini tidak hanya memberikan makna bagi diri sendiri, tetapi juga bisa memberikan dampak positif bagi lingkungan sekitar dan orang-orang yang ditemui di sepanjang jalan kehidupan.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Eka Putri Rizki Apriliani
NIM : 210601110089
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Konstruksi Fungsi Lyapunov pada Model Lotka-Volterra
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Agustus 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	16 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	23 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	30 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	4 November 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	12 November 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	19 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	26 November 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	28 November 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	23 April 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	30 April 2025	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	7 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	14 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	20 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	21 Mei 2025	ACC Bab IV dan V	15.
16.	25 Mei 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.

Dipindai dengan CamScanner

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	26 Mei 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	27 Mei 2025	ACC Seminar Hasil	18.
19.	28 Mei 2025	ACC Seminar Hasil lanjutan	19.
20.	3 Juni 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	4 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	17 Juni 2025	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 17 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Hily Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner