

# **SIFAT METRIK PADA RUANG $\oplus$ - $S_b$ -METRIK**

**SKRIPSI**

**OLEH:  
RISMA MILLATUL ASHFA  
NIM. 210601110085**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2025**

# **SIFAT METRIK PADA RUANG $\oplus$ - $S_b$ -METRIK**

## **SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Risma Millatul Ashfa  
NIM. 210601110085**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2025**

# SIFAT METRIK PADA RUANG $\oplus$ - $S_b$ -METRIK

## SKRIPSI

Oleh  
**Risma Millatul Ashfa**  
**NIM. 210601110085**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 27 Mei 2025

Dosen Pembimbing I



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

Dosen Pembimbing II



Erna Herawati, M.Pd  
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

# SIFAT METRIK PADA RUANG $\oplus$ - $S_b$ -METRIK

## SKRIPSI

Oleh  
**Risma Millatul Ashfa**  
**NIM. 210601110085**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

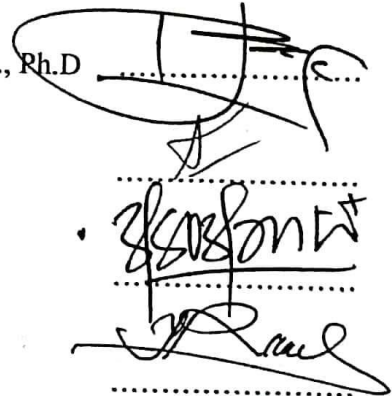
Tanggal 20 Juni 2025

Ketua Penguji : Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D

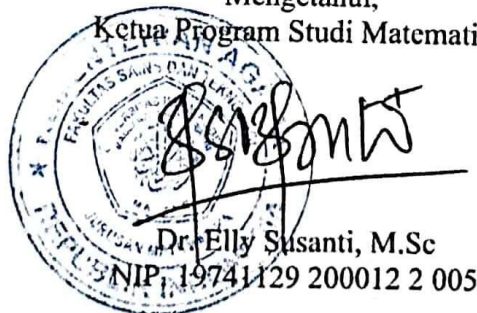
Anggota Penguji 1 : Dian Maharani, M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Elly Susanti, M.Sc

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama : Risma Millatul Ashfa

NIM : 210601110085

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Metrik pada Ruang  $\oplus$ - $S_b$ -Metrik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan penambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Juni 2025



Risma Millatul Ashfa  
NIM. 210601110085

## **MOTTO**

“Bisikanlah, terimakasih pada diri sendiri. Hebat dia, terus menjagamu dan sayangimu”

Tulus-Diri

## **PERSEMBAHAN**

Bismillahirrahmanirrahiim

Dengan penuh rasa syukur ke hadirat Allah SWT, skripsi ini penulis persembahkan untuk kedua orang tua tercinta. Pertama, kepada Bapak Moh hasyim cinta pertama dan sosok yang sangat menginspirasi dan menjadi panutan penulis. Di tengah segala kesibukan dan lelah dalam mencari nafkah, bapak tidak pernah berhenti untuk mendoakan, memotivasi, dan menguatkan penulis untuk terus maju dan pantang menyerah. Terima kasih telah menjadi panutan dalam bersikap, dalam sabar, dalam tanggung jawab, dan dalam cinta yang tak pernah meminta balasan. Doa-doamu yang tulus adalah penuntun jalan penulis, bahkan di saat penulis hampir kehilangan arah. Terima kasih bapak, gadis kecilmu sudah tumbuh besar dan siap melanjutkan mimpi yang lebih tinggi.

Kedua, kepada Ibu Ida Farida pintu surgaku yang menjadi pelipur dalam setiap keluh, dan pelindung dalam setiap ragu. Terima kasih atas cinta yang tak terhitung jumlahnya, atas air mata yang mungkin tak terlihat, dan atas pengorbanan yang bahkan tak sempat penulis pahami sepenuhnya. Doa dan restumu adalah alasan penulis masih mampu bertahan hingga saat ini. Terima kasih ibu, berkat ridhomu sekarang anak pertama perempuan yang selama ini bahunya harus setegar karam di lautan telah berhasil menyelesaikan tanggung jawabnya.

Tak lupa kepada Adik Jazilah Nailatun Ni'mah, adikku tercinta yang selalu merepotkan kakaknya. Terima kasih untuk setiap doa, support dan lelucon yang diberikan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini. Tumbuh lebih baik adikku.

Skripsi ini juga penulis persembahkan untuk diri sendiri, sebagai wujud nyata dari perjuangan, kesabaran, dan ketekunan yang telah dilalui selama proses perkuliahan. Terimakasih telah bertanggung jawab sampai akhir, untuk semua malam panjang yang dilalui, untuk setiap kegagalan yang tak terlihat, dan untuk keberanian yang tumbuh pelan-pelan meski sering diselimuti ragu. Semoga pencapaian ini menjadi pijakan awal untuk terus belajar, berkembang, dan memberi manfaat bagi orang lain.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala ramat, hidayah, dan karunia-Nya. Shalawat serta slaam senantiasa tercurahkan kepada baginda Nabi Muhammad SAW sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan tugas akhir dengan baik.

Skripsi dengan judul “Sifat metrik pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik” merupakan salah satu tugas akhir untuk menyelesaikan mata kuliah skripsi di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Ibu Dr. Elly Susanti M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, motivasi, serta dukungan selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan kontribusi dan masukan penulis dalam kajian topik Al-Qur'an dan Hadits pada penyusunan skripsi ini.
5. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., P.hD., selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun pada penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Dian Maharani, M.Si., selaku anggota penguji 1 yang telah memberikan arahan, ilmu, dan masukan penting demi peningkatan kualitas penyusunan skripsi ini.
7. Bapak Hisyam Fahmi, M.Kom., selaku dosen wali yang senantiasa membimbing, memberi arahan, dan mendampingi penulis selama masa perkuliahan.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan dukungan dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
9. Cinta Pertamaku, Bapak Moh. Hasyim dan pintu surgaku, Ibu Ida Farida yang senantiasa mendoakan, memberi dukungan dan memberi kepercayaan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
10. Saudara-saudariku Alm. Kakak Ibrahim, dan Adek Jazilah Nailatun Ni'mah tercinta.
11. Sahabat-sahabat terbaik yakni Keluarga Indomie dan Tareem Til Jannah yang telah menjadi rumah sambat untuk melepas segala keluh kesah, selalu memberikan semangat dan canda tawa tiada akhir.
12. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2021 yang saat ini juga berjuang untuk menggapai gelar sarjana.
13. Terakhir, untuk diriku sendiri Risma Millatul Ashfa. Terima kasih sudah melangkah sejauh ini. Terima kasih sudah memilih untuk tetap berusaha, bahkan ketika rasa lelah datang bertubi-tubi dan dunia terasa sunyi. Tidak mudah, namun kamu berhasil melewati hari-hari penuh keraguan dan tetap percaya bahwa semua ini akan bermuara pada sesuatu yang berharga.

Malang, 20 Juni 2025

Penulis

## DAFTAR ISI

|                                                                          |              |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>HALAMAN JUDUL .....</b>                                               | <b>i</b>     |
| <b>HALAMAN PENGAJUAN.....</b>                                            | <b>ii</b>    |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN.....</b>                                          | <b>iii</b>   |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN .....</b>                                          | <b>iv</b>    |
| <b>PERNYATAAN KEASLIAN</b>                                               |              |
| <b>TULISAN.....</b>                                                      | <b>Error</b> |
| ! Bookmark not defined.                                                  |              |
| <b>MOTTO .....</b>                                                       | <b>vi</b>    |
| <b>PERSEMBAHAN.....</b>                                                  | <b>vii</b>   |
| <b>KATA PENGANTAR.....</b>                                               | <b>viii</b>  |
| <b>DAFTAR ISI.....</b>                                                   | <b>x</b>     |
| <b>DAFTAR SIMBOL .....</b>                                               | <b>xi</b>    |
| <b>ABSTRAK .....</b>                                                     | <b>xii</b>   |
| <b>ABSTRACK.....</b>                                                     | <b>xiii</b>  |
| <b>مستخلص البحث.....</b>                                                 | <b>xiv</b>   |
| <b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>                                           | <b>1</b>     |
| 1.1 Latar Belakang .....                                                 | 1            |
| 1.2 Rumusan Masalah .....                                                | 4            |
| 1.3 Tujuan Penelitian.....                                               | 4            |
| 1.4 Manfaat Penelitian.....                                              | 4            |
| 1.5 Batasan Masalah.....                                                 | 5            |
| <b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>                                         | <b>6</b>     |
| 2.1 Teori Pendukung .....                                                | 6            |
| 2.1.1 Ruang Metrik.....                                                  | 6            |
| 2.1.1.1 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup .....                     | 8            |
| 2.1.1.2 Kekonvergenan dan Kelengkapan .....                              | 12           |
| 2.1.1.3 Barisan Cauchy .....                                             | 14           |
| 2.1.2 Ruang $b$ -Metrik.....                                             | 17           |
| 2.1.3 Ruang $Sb$ -Metrik.....                                            | 21           |
| 2.1.4 <i>Extended t-Conorm</i> .....                                     | 24           |
| 2.1.5 Basis dan Sub Basis.....                                           | 26           |
| 2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits .....                 | 26           |
| 2.3 Kajian Topik dan Teori Pendukung .....                               | 30           |
| <b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>                                   | <b>32</b>    |
| 3.1 Jenis Penelitian.....                                                | 32           |
| 3.2 Pra Penelitian.....                                                  | 32           |
| 3.3 Tahapan Penelitian .....                                             | 32           |
| <b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>                                  | <b>34</b>    |
| 4.1 Ruang $\oplus$ - $Sb$ -metrik.....                                   | 34           |
| 4.2 Sifat-Sifat Metrik di Ruang $\oplus$ - $Sb$ -metrik .....            | 41           |
| 4.3 Kajian Al-Qur'an dan Hadits dalam Ruang $\oplus$ - $Sb$ -Metrik..... | 53           |
| <b>BAB V PENUTUP .....</b>                                               | <b>58</b>    |
| 5.1 Kesimpulan.....                                                      | 58           |
| 5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan .....                                | 58           |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>                                              | <b>60</b>    |

|                            |           |
|----------------------------|-----------|
| <b>RIWAYAT HIDUP .....</b> | <b>61</b> |
|----------------------------|-----------|

## DAFTAR SIMBOL

|                 |                          |
|-----------------|--------------------------|
| $d$             | : Jarak/ <i>distance</i> |
| $(M, d)$        | : Ruang metrik           |
| $(M, b)$        | : Ruang $b$ -metrik      |
| $(M, S_b)$      | : Ruang $S_b$ -metrik    |
| $B(a; r)$       | : Bola buka              |
| $\bar{B}(a; r)$ | : Bola tutup             |
| $\mathfrak{B}$  | : Basis                  |
| $\tau$          | : Topologi               |
| $(X, \tau)$     | : Ruang topologi         |
| $\oplus$        | : Oplus                  |
| $r$             | : Radius                 |

## ABSTRAK

Ashfa, Risma Millatul. 2025. **Sifat Metrik pada Ruang  $\oplus$ - $S_b$ -Metrik**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (2) Erna Herawati, M.Pd.

**Kata Kunci:**  $\oplus$ - $S_b$ -metrik,  $b$ -metrik, *Extended t-conorm*, Ruang Metrik,  $S$ -metrik,  $S_b$ -metrik, Sifat Metrik

Ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik merupakan generalisasi dari ruang  $b$ -metrik, yang secara struktural memperluas ruang  $b$ -metrik dengan adanya konstanta  $k \geq 1$  dan menggantikan operasi penjumlahan biasa pada sifat *triangle inequality* dengan suatu operasi biner  $\oplus$  yang disebut *extended t-conorm*. Operasi biner  $\oplus$  memenuhi sifat asosiatif, komutatif, monoton dan memiliki elemen netral. Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk mengkaji dan membuktikan sifat metrik pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik. Hasil yang diperoleh meliputi pembuktian sifat metrik pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, yakni sifat kekonvergenan barisan, sifat barisan Cauchy, sifat kepadatan himpunan, dan sifat kekontinuan fungsi. Hal ini menunjukkan bahwa banyak sifat dasar ruang metrik yang dapat diperluas secara alami ke dalam kerangka ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

## ABSTRACT

Ashfa, Risma Millatul. 2025. **Metric Properties in  $\oplus$ - $S_b$ -Metric Space**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (2) Erna Herawati, M.Pd.

**Keywords:**  $\oplus$ - $S_b$ -metric,  $b$ -metric, Extended  $t$ -conorm, Metric Space,  $S$ -metric,  $S_b$ -metric, Metric Properties

$\oplus$ - $S_b$ -metric space is a generalization of the  $b$ -metric space, which structurally extends the classical  $b$ -metric by incorporating a constant  $k \geq 1$  and replacing the usual addition in the triangle inequality with a binary operation  $\oplus$  known as an *extended  $t$ -conorm*. The binary operation  $\oplus$  satisfies associativity, commutativity, monotonicity, and possesses a neutral element. The primary objective of this study is to investigate and establish the metric properties of  $\oplus$ - $S_b$ -metric spaces. The results obtained include proofs of convergence of sequences, Cauchy sequences, density of subsets, and continuity of functions within this space. These findings demonstrate that many fundamental properties of classical metric spaces can be naturally extended to the framework of  $\oplus$ - $S_b$ -metric spaces.

## مستخلص البحث

عشقة، رسمة ملة الأشفاء. ٢٠٢٥. خصائص المترية في فضاء  $\oplus-S_b$  متري. رسالة البكالوريوس. برنامج دراسة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانغ. المشرفان: (١) الدكتورة إلي سوسانتي، ماجستير في العلوم. (٢) إرنا هيرواتي، ماجستير في التربية.

الكلمات المفتاحية:  $\oplus-S_b$  مترية،  $b$ -مترية،  $t$ -conorm الموسع، الفضاء المترية،  $S$ -مترية،  $S_b$ -مترية، خصائص مترية

تُعدّ فضاء  $\oplus-S_b$  مترية تعميماً لفضاء  $b$  مترية، حيث يُوسّع هذا الفضاء هيكلياً من خلال إدخال ثابت  $k \geq 1$  واستبدال عملية الجمع التقليدية في خاصية لا مساواة المثلث بعملية ثنائية  $\oplus$  تُعرف باسم  $t$ -conorm الموسع. تلبي العملية الثنائية  $\oplus$  خصائص الترابط، والتبادلية، والترتيب، وتمتلك عنصراً محايداً. الهدف الأساسي من هذا البحث هو دراسة وإثبات الخصائص المترية في فضاء  $\oplus-S_b$  مترية. تشمل النتائج التي تم التوصل إليها إثبات تقارب المتتاليات، وكون المتتالية كوشي، وكثافة المجموعات الجزئية، واستمرار الدوال داخل هذا الفضاء. وتُبين هذه النتائج أن العديد من الخصائص الأساسية لفضاءات المترية التقليدية يمكن تعميمها بشكل طبيعي إلى إطار فضاء  $\oplus-S_b$  مترية.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Metrik merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen dari suatu himpunan dan memenuhi beberapa aturan. Aturan-aturan yang dimaksudkan adalah *real-valued*, *finite*, *non-negative*, *identity*, *symmetry*, dan *triangle inequality*. Suatu himpunan jika dilengkapi dengan metrik, maka disebut dengan ruang metrik. Konsep ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Maurice Frechet pada tahun 1906 (Kreyszig, 1989).

Pada ruang metrik fungsi jarak tidak hanya terbatas pada pasangan berurutan dari dua elemen, tetapi juga dapat diperluas untuk mencakup pasangan berurutan dari tiga elemen atau lebih. Seperti halnya pada ruang *S*-metrik yang mencakup tiga himpunan. Ruang *S*-metrik diperkenalkan oleh Sedghi sebagai perluasan dari ruang metrik, dengan fungsi jarak yang didefinisikan untuk tiga titik dalam suatu himpunan. Ruang *S*-metrik memiliki aturan yang berbeda, yakni *identity* dan *rectangle inequality* atau ketaksamaan persegi di mana terdapat tiga titik utama dan satu titik tambahan tetap yang berarti jarak diukur melalui tiga arah dengan titik acuan yang tetap (Sedghi dkk., 2012). Selain ruang *S*-metrik terdapat juga ruang *b*-metrik.

Ruang *b*-metrik muncul sebagai perluasan dari konsep ruang metrik dengan memberikan fleksibilitas tambahan pada definisi jarak. Dalam ruang metrik, jarak antar dua titik yang memenuhi beberapa aturan seperti *real-valued*, *finite*, *non-negative*, *identity*, *symmetry*, dan *triangle inequality*. Namun dalam ruang *b*-metrik,

sifat *triangle inequality* dimodifikasi. Dalam ruang  $b$ -metrik sifat *triangle inequality* diperluas dengan mengalikan skalar konstanta  $b$  di mana  $b \geq 1$ . Dari konsep ini, berkembanglah menjadi ruang  $S_b$ -metrik yang merupakan generalisasi lebih lanjut dari ruang  $b$ -metrik.

Ruang  $S_b$ -metrik merupakan gabungan konsep ruang  $S$ -metrik dengan ruang  $b$ -metrik. Dalam ruang  $S_b$ -metrik, jarak didefinisikan oleh fungsi yang melibatkan tiga titik sekaligus dan memiliki aturan yang serupa dengan  $S$ -metrik. Namun, terdapat aturan yang berbeda yakni pada *triangle inequality* adanya tambahan konstanta  $b$ , sehingga menghasilkan ruang yang lebih fleksibel (Taş & Özgür, 2021). Dalam hal ini, untuk membuktikan ruang  $S_b$ -metrik harus memenuhi aturan secara terurut. Hal ini selaras dengan aturan dalam melaksanakan rukun wudhu yang harus dilakukan secara berurutan sebagaimana firman Allah SWT pada Q.S Al-Maidah ayat 6 yakni (Kemenag, 2024)

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قُمْتُمْ إِلَى الصَّلَاةِ فَاغْسِلُوا وُجُوهَكُمْ وَأَيْدِيَكُمْ إِلَى الْمَرَافِقِ وَامْسَحُوا بِرُءُوسِكُمْ وَأَرْجُلَكُمْ إِلَى الْكَعْبَيْنِ وَإِنْ كُنْتُمْ جُنُبًا فَاطَّهَّرُوا وَإِنْ كُنْتُمْ مَرْضَىٰ أَوْ عَلَىٰ سَفَرٍ أَوْ جَاءَ أَحَدٌ مِّنْكُمْ مِنَ الْغَائِطِ أَوْ لَمَسْتُمُ النِّسَاءَ فَلَمْ تَجِدُوا مَاءً فَتَيَمَّمُوا صَعِيدًا طَيِّبًا فَامْسَحُوا بِوُجُوْهِكُمْ وَأَيْدِيكُمْ مِنْهُ مَا يُرِيدُ اللَّهُ لِيَجْعَلَ عَلَيْكُمْ مِنْ حَرَجٍ وَلَكِنْ يُرِيدُ لِيُطَهِّرَكُمْ وَلِيُتِمَّ نِعْمَتَهُ عَلَيْكُمْ لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٦﴾

Artinya: “Wahai orang-orang beriman, apabila kamu berdiri hendak melaksanakan shalat, maka basuhlah wajahmu dan tanganmu sampa ke siku serta usaplah kepalamu dan (basuh) kedua kakimu sampai kedua mata kaki. Jika kamu junub, maka mandilah. Dan jika kamu sakit atau sedang dalam perjalanan atau kembali dari tempat buang air (kakus) atau menyentuh perempuan, maka jika kamu tidak memperoleh air maka bertayamumlah dengan debu yang baik (suci); usaplah wajahmu dan tanganmu dengan (debu) itu. Allah SWT tidak ingin menjadikan bagimu sedikit pun kesulitan, tetapi Dia hendak membersihkan kamu dan menyempurnakan nikmat-Nya bagimu agar kamu bersyukur”.

Pada ayat di atas menjelaskan bahwa wudhu bukan sekedar aktivitas fisik untuk membersihkan diri, tetapi juga sebagai bentuk ketaatan terhadap perintah

Allah SWT. Dijelaskan juga terkait rukun wudhu yang mana dijelaskan lebih lanjut dalam kitab fathul qorib bahwa terdapat enam perkara rukun wudhu yakni niat, membasuh wajah, membasuh kedua tangan, mengusap sebagian kepala, memasuh kedua kaki, dan tertib (Abdillah, 2021). Hal ini merupakan urutan rukun wudhu yang harus terpenuhi sebelum melaksanakan ibadah sholat. Fenomena ini selaras dalam aturan pada  $S_b$ -metrik yang harus dibuktikan secara terurut.

Sebagai bentuk perluasan dari ruang  $S_b$ -metrik, dikembangkanlah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik. Pada ruang ini, operasi penjumlahan diganti dengan suatu operasi biner  $\oplus$  yang bersifat lebih umum. Perubahan ini membuat ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dapat digunakan untuk mengkaji sesuatu yang lebih kompleks. Salah satu pendekatan dalam mendefinisikan operasi  $\oplus$  ini adalah melalui *continuous extended t-conorm*, yaitu suatu jenis operasi biner yang bersifat asosiatif, komutatif, monoton, dan memiliki elemen netral (Öner & Šostak, 2020).

Dalam penelitian sebelumnya, pada jurnal yang ditulis oleh Šostak A. dkk. (2023) menjelaskan bahwa ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik lebih besar dibandingkan dengan ruang  $b$ -metrik atau  $S$ -metrik, sehingga memungkinkan untuk pengembangan lebih lanjut. Terdapat beberapa teorema yang penting dan menjadi landasan dalam studi ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik meliputi teorema 2.2 hingga teorema 2.5 mengenai kelengkapan ruang, konsistensi sifat konvergensi dan barisan Cauchy, penerapan teorema kategori Baire, dan kelanjutan fungsi dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik (Šostak dkk., 2023). Berdasarkan perkembangan penelitian, ruang metrik menarik untuk dikaji hingga saat ini, terutama pada ruang  $S_b$ -metrik yang belum banyak dikaji oleh para ahli matematika. Oleh karena itu, penelitian ini akan berfokus menguraikan hasil dari jurnal “On Topological and Metric Properties of  $\oplus$ - $S_b$ -Metric Spaces”

serta melengkapi tahapan pembuktian teorema di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik serta sifat-sifat yang mendukung teorema tersebut.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat metrik dan pembuktian teorema pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dipaparkan, penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat metrik di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat kepada berbagai pihak. Adapun manfaatnya sebagai berikut:

### 1. Bagi Penulis

Penelitian ini menjadi sarana untuk memperdalam pemahaman terhadap konsep dan teori yang berkaitan dengan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, khususnya pada sifat-sifatnya yang relevan. Dengan penelitian ini, penulis dapat mengasah kemampuan dalam mengembangkan kemampuan berpikir logis dan sistematis dalam menyelesaikan permasalahan abstrak di ruang metrik.

### 2. Bagi Pembaca

Penelitian ini menjadi referensi tambahan dalam memahami dan mengaplikasikan teori ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dalam berbagai konteks, termasuk penyelesaian masalah matematis lainnya. Penelitian ini juga diharapkan dapat

menginspirasi pembaca untuk mengeksplorasi topik serupa, sehingga berkontribusi pada pengembangan wawasan akademik yang lebih luas di bidang analisis matematika.

### 3. Bagi Lembaga

Penelitian ini mendukung pengembangan keilmuan di lingkungan akademik, khususnya dalam lingkup program studi matematika. Hasil penelitian ini memperkaya koleksi literatur ilmiah, sehingga dapat digunakan sebagai sumber belajar dan acuan penelitian di masa mendatang.

## 1.5 Batasan Masalah

Batasan dalam penelitian ini hanya akan mencakup pembahasan tentang pembuktian sifat-sifat metrik di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan sifat-sifat yang mendukung pembuktian teorema di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik pada jurnal yang ditulis oleh Šostak A, dkk. (2023).

## BAB II

### KAJIAN TEORI

#### 2.1 Teori Pendukung

##### 2.1.1 Ruang Metrik

###### Definisi 2.1

Ruang metrik adalah sepasang  $(M, d)$  di mana  $M$  merupakan himpunan tak kosong dan  $d$  merupakan metrik di  $M \times M$  untuk semua  $p, q, r \in M$  memenuhi sifat-sifat berikut.

1.  $d(p, q) \geq 0$  untuk semua  $p, q \in M$  (*Real-value, Finite, dan Non-negative*)
2.  $d(p, q) = 0$  jika dan hanya jika  $p = q$
3.  $d(p, q) = d(q, p)$ , untuk semua  $p, q \in M$  (*Symmetry*)
4.  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ , untuk setiap  $p, q \in M$  (*Triangle inequality*)

Himpunan  $M$  yang dilengkapi dengan suatu metrik  $d$  disebut ruang metrik dan dituliskan dengan  $M$  jika metriknya diketahui atau  $(M, d)$  (Kreyzig, 1978).

###### Contoh 2.1

Diberikan fungsi yang didefinisikan  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yaitu

$$d(p, q) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$$

dengan  $p = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $q = (\beta_1, \beta_2)$ , di mana  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Tunjukkan bahwa fungsi  $d$  adalah ruang metrik.

###### Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa  $d$  adalah ruang metrik. Ambil sebarang  $p, q \in \mathbb{R}^2$  dengan  $p = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $q = (\beta_1, \beta_2)$  di mana  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

1. Berdasarkan sifat aljabar dari  $\mathbb{R}$ , operasi  $(\alpha_i - \beta_i)^2$  bernilai real, sehingga

$\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$  yakni  $d(p, q)$  bernilai real (*Real-value*).

Karena  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ , maka  $\alpha_i, \beta_i$  finite, sehingga  $(\alpha_i - \beta_i)^2$  bernilai finite

juga, akibatnya nilai  $d(p, q) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$  bernilai finite.

Karena  $(\alpha_i - \beta_i)^2$  bernilai non-negative, maka nilai dari  $(\alpha_1 - \beta_1)^2 +$

$(\alpha_2 - \beta_2)^2 \geq 0$  sehingga  $\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}$

juga bernilai non-negative.

2.  $d(p, q) = 0$  jika dan hanya jika  $p = q$

$$\sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2} = 0$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 = 0$$

kondisi ini berlaku jika dan hanya jika  $(\alpha_1 - \beta_1)^2 = 0$  dan  $(\alpha_2 - \beta_2)^2 = 0$ .

Akibatnya,

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \text{ dan } \alpha_2 - \beta_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ dan } \alpha_2 = \beta_2.$$

Jadi terbukti bahwa  $d(p, q) = 0$  jika dan hanya jika  $p = q$

3.  $d(p, q) = d(q, p)$

Untuk setiap  $p = (\alpha_1, \alpha_2)$  dan  $q = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ , maka

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2} \\ &= \sqrt{(-(\beta_1 - \alpha_1))^2 + (-(\beta_2 - \alpha_2))^2} \\ &= \sqrt{((-1)^2(\beta_1 - \alpha_1))^2 + ((-1)^2(\beta_2 - \alpha_2))^2} \\ &= \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2} \\ &= d(q, p) \text{ (Symmetry)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $d(p, q) = d(q, p)$ .

$$4. \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(p, q)$$

di mana  $r = (\gamma_1, \gamma_2)$ , sehingga

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2} \\ &= [(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\alpha_1 - \gamma_1 + \gamma_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \gamma_2 + \gamma_2 - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [(\alpha_1 - \gamma_1)^2 + (\gamma_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \gamma_2)^2 + (\gamma_2 - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\alpha_1 - \gamma_1)^2 + (\alpha_2 - \gamma_2)^2 + (\gamma_1 - \beta_1)^2 + (\gamma_2 - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad (\text{komutatif}) \\ &\leq [(\alpha_1 - \gamma_1)^2 + (\alpha_2 - \gamma_2)^2]^{\frac{1}{2}} + [(\gamma_1 - \beta_1)^2 + (\gamma_2 - \beta_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad (\text{Triangle Inequality}) \\ &= d(p, r) + d(p, q) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(p, q)$ .

Berdasarkan uraian satu sampai empat, terbukti bahwa  $d$  adalah ruang metrik.

#### 2.1.1.1 Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

##### Definisi 2.2

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, untuk setiap  $p \in M$  dan bilangan real  $r > 0$ , dapat disebut dengan bola buka di sekitar titik  $p$  dengan radius  $r$  didefinisikan sebagai himpunan

$$B(p; r) = \{x \in M \mid d(x, p) < r\}$$

(Kreyszig, 1989).

Selanjutnya akan diberikan contoh bola buka pada ruang metrik.

**Contoh 2.2**

Diberikan ruang metrik  $(M, d)$  untuk setiap  $x, y \in M$  dengan metrik  $d(x, y) = |x - y|$ . Jika dipilih  $p = 3$  dan radius  $r = 2$ , maka berdasarkan definisi bola buka diperoleh

$$B(3; 2) = \{x \in M \mid |x - 3| < 2\}.$$

Perhatikan bahwa,

$$|x - 3| < 2$$

$$-2 < x - 3 < 2$$

$$1 < x < 5$$

Sehingga bola  $(3; 2)$  terbuka di interval  $(1, 5)$ .

**Definisi 2.3**

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, untuk setiap  $p \in M$ , dan bilangan real  $r > 0$ , dapat disebut dengan bola tutup di sekitar titik  $p$  dengan radius  $r$  didefinisikan sebagai himpunan

$$\bar{B}(p; r) = \{x \in M \mid d(x, p) \leq r\}$$

(Kreyszig, 1989).

Selanjutnya akan diberikan contoh bola tutup pada ruang metrik.

**Contoh 2.3**

Diberikan ruang metrik  $(M, d)$  untuk setiap  $x, y \in M$  dengan metrik  $d(x, y) = |x - y|$ , jika dipilih  $p = 3$  dan radius  $r = 2$ , maka berdasarkan definisi bola tutup diperoleh

$$\bar{B}(3; 2) = \{x \in M \mid |x - 3| \leq 2\}.$$

Perhatikan bahwa,

$$|x - 3| \leq 2$$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

$$1 \leq x \leq 5$$

Sehingga bola  $(3; 2)$  tertutup di interval  $[1, 5]$ .

#### **Definisi 2.4**

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, untuk titik  $p \in M$  dan bilangan real  $r > 0$  disebut sebagai *neighborhood* dari titik  $p$  terhadap radius  $r$  adalah

$$N_r(p) = \{x \in M | d(p, x) < r\}$$

(Kreyszig, 1989).

#### **Definisi 2.5**

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, dan himpunan  $E \subset M$ . Titik  $p \in M$  disebut titik limit dari himpunan  $E$  jika untuk setiap  $r > 0$  terdapat titik  $q \in E$  dengan  $q \neq p$  dan  $q \in N_r(p)$  (Kreyszig, 1989).

#### **Definisi 2.6**

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, dan himpunan  $E \subset M$ . Titik  $p \in M$  disebut dengan titik interior dari himpunan  $E$  jika terdapat  $r > 0$  sedemikian sehingga *neighborhood* dari  $p$  yaitu  $N_r(p) \subset E$  (Kreyszig, 1989).

#### **Definisi 2.7**

Misalkan  $M$  merupakan suatu himpunan tak kosong,  $(M, d)$  adalah ruang metrik, dan himpunan  $E \subset M$ . Himpunan  $E$  dikatakan himpunan terbuka jika setiap titik  $p \in E$  adalah titik interior dari himpunan  $E$ , yaitu untuk setiap  $p \in E$ , terdapat  $r > 0$  sedemikian sehingga  $N_r(p)$  (Kreyszig, 1989).

### Contoh 2.4

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik, untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , di mana  $d(x, y) = |x - y|$ . Akan dibuktikan bahwa himpunan  $E = (0, 1) \subset M$  merupakan himpunan terbuka.

### Penyelesaian

Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $E$  merupakan himpunan terbuka dan setiap titik di dalamnya merupakan titik interior. Berdasarkan definisi himpunan terbuka bahwa untuk setiap  $p \in E$  terdapat  $r > 0$  sedemikian sehingga bola terbuka  $N_r(p) = \{x \in \mathbb{R} | d(x, p) < r\}$  sepenuhnya berada di dalam himpunan  $E$ . Andaikan  $p$  adalah sebarang titik dalam interval  $(0, 1)$ . Karena  $p$  berada pada interval  $(0, 1)$ , maka dapat dipilih radius  $r$  yang cukup kecil sehingga bola terbuka  $N_r(p)$  tetap berada di dalam interval  $(0, 1)$ .

Akan dipilih  $r$  sebagai nilai minimum antara  $p$  dan  $1 - p$  yaitu  $r = \min(p, 1 - p)$ . Sehingga, bola terbuka  $N_r(p)$  adalah interval  $(p - r, p + r)$ . Interval  $(p - r, p + r)$  mencakup titik-titik yang sangat dekat dengan  $p$  dalam dua arah, tetapi masih berada dalam batas interval  $(0, 1)$ . Karena  $p - r \geq 0$  dan  $p + r \leq 1$  maka bola terbuka  $N_r(p)$  berada sepenuhnya dalam interval  $(0, 1)$ . Karena untuk setiap  $p \in E$  dapat ditemukan radius  $r$  sedemikian sehingga bola terbuka  $N_r(p) \subset E$ , maka  $E = (0, 1)$  adalah himpunan terbuka dan setiap titik dalam  $E$  adalah titik interiornya.

### Definisi 2.8

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik, dan himpunan  $E \subset M$ . Himpunan  $E$  dikatakan himpunan tertutup jika himpunan  $E$  memuat semua titik limitnya,

dengan kata lain himpunan tertutup merupakan komplemen dari himpunan terbuka (Kreyszig, 1989).

### Contoh 2.5

Berdasarkan contoh 2.3 himpunan  $E = (0,1)$  merupakan himpunan terbuka, sehingga mengakibatkan himpunan  $F = E^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$  merupakan himpunan tertutup.

### Definisi 2.9

Suatu himpunan  $M$  dikatakan *countable* jika  $M$  berhingga (memiliki banyak elemen yang tak terhingga) atau jika dapat mengaitkan dengan bilangan bulat positif dengan elemen-elemen dari  $M$  sedemikian sehingga untuk setiap elemen  $M$  berkorespondensi secara unik dengan sebuah bilangan bulat positif, dan sebaliknya setiap bilangan bulat positif  $1,2,3,\dots$  berkorespondensi secara unik dengan sebuah elemen  $M$  (Kreyszig, 1989).

### Definisi 2.10

Suatu himpunan bagian  $M$  dari suatu ruang metrik dikatakan *dense* di  $X$  jika

$$\bar{M} = X$$

$X$  dikatakan *separable* (dapat dipisahkan) jika memiliki suatu himpunan *countable* yang *dense* di  $X$  (Kreyszig, 1989).

#### 2.1.1.2 Kekonvergenan dan Kelengkapan

### Definisi 2.11

Barisan  $\{x_n\}$  dalam ruang metrik  $M = (M, d)$  dikatakan barisan terbatas jika terdapat bilangan real  $r > 0$  dan suatu titik  $x \in M$  sedemikian sehingga

$$d(x_n, x) < r \text{ untuk setiap } n \in N$$

(Kreyszig, 1989).

**Definisi 2.12**

Barisan  $\{x_n\}$  dalam ruang metrik  $M = (M, d)$  dikatakan konvergen jika terdapat  $x \in M$  sehingga memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Selanjutnya  $x$  dikatakan limit dari  $\{x_n\}$  dan dapat ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

atau secara sederhananya  $x_n \rightarrow x$ .  $\{x_n\}$  dikatakan konvergen ke  $x$  atau mempunyai limit  $x$ . Barisan  $\{x_n\}$  yang tidak mempunyai limit dikatakan barisan divergen (Kreyszig, 1989).

**Contoh 2.6**

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik di mana  $d(x, y) = |x - y|$ , dengan  $x, y \in M$  adalah jarak pada bilangan real. Diberikan barisan  $\{x_n\}$  yang didefinisikan sebagai:

$$x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

Akan ditunjukkan barisan  $\{x_n\}$  konvergen dan mempunyai limit.

**Penyelesaian**

Misalkan  $x = 0$ , akan dibuktikan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = 0$$

karena  $x_n = \frac{1}{n}$ , maka

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &= |x_n - 0| \\ &= \left| \frac{1}{n} - 0 \right| \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Kemudian akan dicari limit dari  $x_n$ , karena  $\frac{1}{n}$  konvergen 0 saat  $n \rightarrow \infty$ , maka diperoleh:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = 0$$

Berdasarkan definisi konvergen, karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = 0$$

maka barisan  $\{x_n\}$  konvergen ke 0. Dengan demikian, dapat ditulis  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  atau  $x_n \rightarrow 0$ .

Jadi, barisan  $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  adalah barisan konvergen di ruang metrik  $(M, d)$  dengan limit 0.

### 2.1.1.3 Barisan Cauchy

#### Definisi 2.13

Barisan  $\{x_n\}$  di ruang metrik  $M = (M, d)$  dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $N = N(\varepsilon)$  seperti  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  untuk setiap  $m, n > N$ .

Ruang  $M$  dikatakan komplit jika untuk setiap barisan Cauchy di  $M$  konvergen, yakni mempunyai limit yang merupakan elemen  $M$  (Kreyszig, 1989).

#### Contoh 2.7

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik di mana  $d(x, y) = |x - y|$ , dan  $x_n = \frac{1}{n}$ , dengan  $n \in \mathbb{N}$ . Buktikan bahwa  $\{x_n\}$  adalah barisan Cauchy di ruang metrik

#### Penyelesaian

Misalkan  $x_n = \frac{1}{n}$  dan  $x_m = \frac{1}{m}$  untuk  $n, m \in \mathbb{N}$

maka jarak  $x_n$  dan  $x_m$  adalah

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= |x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &= \left| \frac{m - n}{mn} \right| = \frac{|m - n|}{mn} \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $N$  sedemikian sehingga untuk setiap  $m, n \geq N$ , memiliki

$$\frac{|m - n|}{mn} < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa ketika  $n$  dan  $m$  menjadi besar maka nilai  $mn$  juga menjadi besar, sehingga  $\frac{|m-n|}{mn}$  bisa menjadi sekecil mungkin.

Kemudian akan dipilih  $N$  sedemikian sehingga  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , sehingga untuk  $m, n \geq N$  akan memiliki  $m, n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Karena  $m, n \geq N$  maka  $mn \geq N^2$ . Jadi,

$$mn \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

dengan  $m, n \geq N$  diperoleh  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , yang menunjukkan bahwa barisan ini adalah barisan Cauchy. Dengan demikian, terbukti bahwa barisan  $(x_n) = \frac{1}{n}$  adalah barisan Cauchy di ruang metrik  $(M, d)$ .

### **Teorema 2.1**

Setiap barisan konvergen di ruang metrik adalah barisan Cauchy.

#### **Bukti**

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik dan  $\{x_n\}$  adalah barisan dalam  $M$  yang konvergen ke suatu elemen  $x \in M$ . Akan dibuktikan bahwa  $\{x_n\}$  adalah barisan Cauchy.

Berdasarkan definisi barisan konvergen, barisan  $\{x_n\}$  dikatakan konvergen ke  $x$  jika  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga  $\forall n \geq N$ , berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Berdasarkan definisi barisan Cauchy, suatu barisan  $\{x_n\}$  dikatakan Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan bulat  $N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk semua  $m, n \geq N$ ,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Dengan menggunakan sifat ruang metrik yakni ketaksamaan segitiga, dinyatakan bahwa untuk sembarang  $x, y, z$  di ruang metrik  $(X, d)$  berlaku:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$$

Karena  $\{x_n\}$  konvergen ke  $x$ , maka terdapat  $N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n, m \geq N$  berlaku:

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sehingga untuk setiap  $m, n \geq N$ , diperoleh bahwa:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Karena  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga  $\forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , maka barisan  $\{x_n\}$  memenuhi definisi barisan Cauchy. Dengan demikian terbukti bahwa setiap barisan konvergen di ruang metrik adalah barisan Cauchy.

Berdasarkan definisi ruang metrik, kekonvergenan di ruang metrik, dan barisan Cauchy di ruang metrik lebih lanjut ruang metrik yang konvergen dan Cauchy disebut dengan ruang metrik lengkap.

### 2.1.2 Ruang $b$ -Metrik

#### Definisi 2.14

Misalkan  $M$  adalah himpunan tak kosong, dan diberikan suatu bilangan real  $a \geq 1$ , serta suatu fungsi  $b: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  untuk setiap  $x, y, z \in M$  memenuhi kondisi berikut

1.  $b(x, y) = 0$  jika dan hanya jika  $x = y$
2.  $b(x, y) = b(y, x)$
3.  $b(x, z) \leq a[b(x, y) + b(y, z)]$

Maka fungsi  $b$  yang demikian dinamakan  $b$ -metrik di  $M$  dan pasangan  $(M, b)$  dinamakan ruang  $b$ -metrik (Kir & Kiziltunc, 2013).

#### Contoh 2.8

Misalkan  $(M, b)$  adalah ruang metrik di mana  $M = \mathbb{R}$ , dan fungsi  $b: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  didefinisikan sebagai:

$$b(x, y) = |x - y| + |x - y|^2$$

dengan  $a = 2$ . Akan ditunjukkan bahwa fungsi  $b(x, y)$  merupakan ruang  $b$ -metrik.

#### Penyelesaian

1.  $b(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Diberikan fungsi  $b(x, y) = |x - y| + |x - y|^2$

- Jika  $b(x, y) = 0$ , maka  $x = y$

Misalkan  $b(x, y) = 0$ , maka

$$|x - y| = 0 + |x - y|^2 = 0$$

Karena  $|x - y| \geq 0$  dan  $|x - y|^2 \geq 0$ , sehingga jumlah dua bilangan non-negatif sama dengan nol hanya jika keduanya nol:

$$|x - y| = 0 \text{ dan } |x - y|^2 = 0$$

Berdasarkan sifat mutlak, haruslah  $x - y = 0$  sehingga mengakibatkan  $x = y$ .

- Jika  $x = y$ , maka  $b(x, y) = 0$

Misalkan  $x = y$ , maka:

$$|x - y| = |y - y| = 0$$

Substitusi  $|x - y| = 0$  ke fungsi  $b(x, y)$ :

$$\begin{aligned} b(x, y) &= |x - y| + |x - y|^2 \\ &= 0 + 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dari kedua implikasi di atas, terbukti bahwa  $b(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Fungsi  $b(x, y) = |x - y| + |x - y|^2$  memenuhi sifat identitas karena nolnya fungsi  $b$  hanya terjadi jika  $x = y$ , dan jika  $x = y$  maka fungsi  $b$  bernilai nol.

2.  $b(x, y) = b(y, x)$

Definisi dari  $b(x, y)$  dan  $b(y, x)$  adalah

$$\begin{aligned} b(x, y) &= |x - y| + |x - y|^2 \\ b(y, x) &= |y - x| + |y - x|^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat mutlak,  $|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{jika } x \geq y \\ y - x, & \text{jika } x < y \end{cases}$

secara umum,

$$\begin{aligned} |x - y| &= |-(y - x)| \\ &= |y - x| \end{aligned}$$

Kemudian untuk  $|x - y|^2$ , karena kuadrat nilai mutlak bersifat non-negatif

$$|x - y|^2 = (|x - y|)^2 = (|y - x|)^2 = |y - x|^2$$

maka

$$\begin{aligned} b(x, y) &= |x - y| + |x - y|^2 \\ &= |y - x| + |y - x|^2 \\ &= b(y, x) \end{aligned}$$

Karena  $b(x, y) = b(y, x)$  terbukti bahwa untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , maka fungsi  $b(x, y)$  memenuhi sifat simetri.

3.  $b(x, z) \leq a[b(x, y) + b(y, z)]$  dengan  $a = 2$

Diberikan

$$\begin{aligned} b(x, z) &= |x - z| + |x - z|^2, \\ b(x, y) &= |x - y| + |x - y|^2, \\ b(y, z) &= |y - z| + |y - z|^2. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan

- Sisi kiri:  $b(x, z)$

Berdasarkan definisi,

$$b(x, z) = |x - z| + |x - z|^2$$

Dari sifat nilai mutlak diperoleh

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

kemudian dikuadratkan kedua sisi

$$\begin{aligned} |x - z|^2 &\leq (|x - y| + |y - z|)^2 \\ |x - z|^2 &\leq |x - y|^2 + 2|x - y||y - z| + |y - z|^2 \end{aligned}$$

Gabungkan  $|x - z|$  dan  $|x - z|^2$

$$\begin{aligned} b(x, z) &= |x - z| + |x - z|^2 \leq (|x - y| + |y - z|) + (|x - y|^2 + \\ &2|x - y||y - z| + |y - z|^2) \end{aligned}$$

Gabungkan semua komponen

$$b(x, z) \leq |x - y| + |x - y|^2 + |y - z| + |y - z|^2 + 2|x - y||y - z|$$

- Sisi kanan:  $2 \cdot [b(x, y) + b(y, z)]$

Berdasarkan definisi,

$$b(x, y) + b(y, z) = (|x - y| + |x - y|^2 + |y - z| + |y - z|^2),$$

kemudian mengalikan kedua ruas dengan  $a = 2$ , diperoleh

$$2 \cdot [b(x, y) + b(y, z)] = 2 \cdot (|x - y| + |x - y|^2 + |y - z| + |y - z|^2)$$

$$2 \cdot [b(x, y) + b(y, z)] = 2|x - y| + 2|x - y|^2 + 2|y - z| + 2|y - z|^2$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & |x - y| + |y - z| + |x - y|^2 + |y - z|^2 + 2|x - y||y - z| \\ & \leq 2|x - y| + 2|y - z| + 2|x - y|^2 + 2|x - y| + 2|y - z|. \end{aligned}$$

Karena semua komponen pada  $b(x, z) \leq a[b(x, y) + b(y, z)]$ , maka

fungsi  $b(x, y) = |x - y| + |x - y|^2$  memenuhi sifat *triangle inequality*.

### Definisi 2.15

Diberikan ruang  $b$ -metrik  $(M, b)$ , barisan  $(x_n)$  di  $M$  dikatakan barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n, m \geq n(\varepsilon)$  memenuhi  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  (Kir & Kiziltunc, 2013).

### Definisi 2.16

Diberikan ruang  $b$ -metrik  $(M, b)$ , barisan  $(x_n)$  di  $M$  dikatakan barisan konvergen jika dan hanya jika terdapat  $x \in M$  sehingga untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $n \geq n(\varepsilon)$  memenuhi  $d(x_n, x) < \varepsilon$ . Pada kasus ini dapat ditulis  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  (Kir & Kiziltunc, 2013).

### 2.1.3 Ruang $S_b$ -Metrik

#### Definisi 2.17

Misalkan  $M$  adalah himpunan tak kosong, dan misalkan  $k \geq 1$  dan  $S_b: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  suatu fungsi yang memenuhi kondisi:

1.  $S_b(x, x) = 0$  untuk setiap  $x \in M$ ;
2.  $S_b(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  untuk setiap  $x, y \in M$ ;
3.  $S_b(x, y) = S_b(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in M$ ;
4.  $S_b(x, z) \leq S_b(x, y) + k \cdot S_b(y, z)$  untuk setiap  $x, y, z \in M$ .

maka fungsi  $S_b$  dinamakan  $S_b$ -metrik di  $M$  dan pasangan  $(M, S_b)$  dinamakan ruang  $S_b$ -metrik (Šostak dkk., 2023).

Secara umum, ruang  $S_b$ -metrik adalah generalisasi dari ruang  $S$ -metrik, Namun, tidak semua ruang  $S_b$ -metrik generalisasi dari ruang  $S$ -metrik.

#### Contoh 2.9

Misalkan  $M = \mathbb{R}$  yaitu himpunan bilangan real, dan fungsi  $S_b: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  didefinisikan dengan

$$S_b(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in M,$$

dengan mengambil  $k = 1$ . Akan ditunjukkan bahwa fungsi  $S_b$  memenuhi semua syarat dalam definisi 2.17, sehingga merupakan  $S_b$ -metrik pada  $M$ .

#### Penyelesaian

1.  $S_b(x, x) = 0$  untuk setiap  $x \in M$

Diketahui bahwa fungsi  $S_b$  didefinisikan

$$S_b(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

Untuk memverifikasi syarat pertama, substitusikan  $y = x$  sehingga diperoleh

$$S_b(x, x) = |x - x|$$

$$= |0|$$

$$= 0$$

Karena  $x \in \mathbb{R}$  dipilih secara sembarang, maka kesamaan tersebut berlaku untuk setiap  $x \in M$ . Dengan demikian,

$$\forall x \in M, S_b(x, x) = 0,$$

yang berarti syarat pertama terbukti.

2.  $S_b(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  untuk setiap  $x, y \in M$

Asumsikan bahwa

$$S_b(x, y) = 0.$$

Sehingga

$$S_b(x, y) = |x - y|$$

$$|x - y| = 0.$$

Berdasarkan sifat dasar dari nilai mutlak dalam bilangan real, yaitu:

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{R},$$

Maka

$$|x - y| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y.$$

Karena dari asumsi  $S_b(x, y) = 0$  dapat disimpulkan bahwa  $x = y$ . Maka fungsi  $S_b(x, y) = |x - y|$  terbukti.

3.  $S_b(x, y) = S_b(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in M$

Definisi dari  $S_b(x, y)$  dan  $S_b(y, x)$  adalah

$$S_b(x, y) = |x - y|,$$

$$S_b(y, x) = |y - x|$$

Berdasarkan sifat mutlak,  $|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{jika } x \geq y \\ y - x, & \text{jika } x < y \end{cases}$

Sehingga

$$|x - y| = |y - x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dengan menggunakan sifat ini, diperoleh

$$S_b(x, y) = |x - y| = |y - x| = S_b(y, x)$$

$$S_b(x, y) = S_b(y, x).$$

karena  $S_b(x, y) = S_b(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , maka fungsi  $S_b(x, y) = |x - y|$  terbukti.

4.  $S_b(x, z) \leq S_b(x, y) + k \cdot S_b(y, z)$  untuk setiap  $x, y, z \in M$

Diberikan

$$S_b(x, z) = |x - z|,$$

$$S_b(x, y) = |x - y|,$$

$$S_b(y, z) = |y - z|.$$

Untuk membuktikan bahwa fungsi ini memenuhi syarat, akan ditunjukkan bahwa

$$|x - z| \leq |x - y| + k \cdot |y - z|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

dengan  $k \geq 1$ .

Berdasarkan sifat nilai mutlak, diketahui bahwa ketaksamaan segitiga berlaku, yaitu:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Karena  $k \geq 1$ , maka

$$|x - y| + |y - z| \leq |x - y| + k \cdot |y - z|.$$

Sehingga diperoleh

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

$$\leq |x - y| + k \cdot |y - z|.$$

Dengan demikian, ketaksamaan

$$S_b(x, z) \leq S_b(x, y) + k \cdot S_b(y, z)$$

terpenuhi untuk setiap  $x, y, z \in \mathbb{R}$  dan untuk setiap  $k \geq 1$ .

#### 2.1.4 Extended *t*-Conorm

##### Definisi 2.18

Misalkan  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ . Suatu operasi biner  $\oplus: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah *extended t-conorm* jika untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  memenuhi:

1.  $\oplus$  adalah komutatif, yaitu  $a \oplus b = b \oplus a$ ;
2.  $\oplus$  adalah asosiatif, yaitu  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ ;
3.  $\oplus$  adalah monoton, yaitu  $a \leq b \Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c$ ;
4. 0 adalah elemen netral untuk  $\oplus$ , yaitu  $a \oplus 0 = a$ .

Berdasarkan definisi 2.17, akan diberikan contoh sebagai berikut.

##### Contoh 2.10

Misalkan didefinisikan suatu operasi biner  $\oplus: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  dengan

$$a \oplus b := a + b, \quad \text{untuk setiap } a, b \in \mathbb{R}^+$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi  $\oplus$  tersebut merupakan *extended t-conorm*.

##### Penyelesaian

Akan dilakukan verifikasi terhadap keempat sifat pada definisi 2.21, sebagai berikut:

1. Komutatif

Untuk setiap  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , diperoleh:

$$a \oplus b = a + b = b + a = b \oplus a,$$

sehingga sifat komutatif terpenuhi.

## 2. Asosiatif

Untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , diperoleh:

$$a \oplus (b \oplus c) = a + (b + c) = (a + b) + c = (a \oplus b) \oplus c,$$

sehingga sifat asosiatif juga terpenuhi.

## 3. Monoton

Misalkan  $a \leq b$  dan  $c \in \mathbb{R}^+$ , maka:

$$a \oplus c = a + c \leq b + c = b \oplus c,$$

menunjukkan bahwa  $\oplus$  bersifat monoton terhadap urutan.

## 4. Elemen netral

Untuk setiap  $a \in \mathbb{R}^+$ , diperoleh:

$$a \oplus 0 = a + 0 = a,$$

yang berarti 0 merupakan elemen netral terhadap operasi  $\oplus$ .

Dengan demikian, operasi  $a \oplus b := a + b$  memenuhi syarat *extended t-conorm*.

### Definisi 2.19

1.  $\oplus$  dikatakan semi-distributif jika untuk setiap  $a, b, k \in \mathbb{R}^+$

$$k \cdot (a \oplus b) \leq k \cdot a \oplus k \cdot b.$$

2.  $\oplus$  dikatakan distributif jika untuk setiap  $a, b, k \in \mathbb{R}^+$ .

$$k \cdot (a \oplus b) = k \cdot a \oplus k \cdot b.$$

3.  $\oplus$  dikatakan dapat dikompres jika

$$a \leq b \oplus c \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1} \oplus \frac{c}{c+1}.$$

4.  $\oplus$  dikatakan kontinu jika

$\oplus: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah fungsi dua argumen yang kontinu.

### Corollary 2.1

Jika  $\oplus$  *extended t-conorm* kontinu, maka untuk setiap  $r > 0$ , setiap konstanta  $k \geq 1$  dan setiap  $n \in \mathbb{N}$  terdapat  $m \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga  $\oplus_{i=1}^n \frac{k}{m} < r$ .

### 2.1.5 Basis dan Sub Basis

#### Definisi 2.20

Basis untuk suatu topologi  $\tau$  pada himpunan  $X$  adalah koleksi himpunan bagian  $\mathfrak{B}$  dari  $\tau$  sedemikian sehingga setiap himpunan terbuka dapat dinyatakan sebagai gabungan dari himpunan-himpunan di dalam  $\mathfrak{B}$ . Dengan kata lain,  $\mathfrak{B}$  disebut basis dari topologi  $\tau$  jika untuk setiap himpunan terbuka  $U \in \tau$  dan setiap titik  $x \in U$ , terdapat suatu himpunan  $V \in \mathfrak{B}$  sedemikian sehingga  $x \in V \subseteq U$ . Himpunan-himpunan dalam  $\mathfrak{B}$  disebut sebagai basis himpunan terbuka dari ruang  $X$ .

## 2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits

Keterurutan merupakan konsep dasar dalam analisis matematika untuk menunjukkan hubungan antar titik dalam ruang, terkhusus pada ruang  $S_b$ -metrik. Suatu ruang dikatakan  $S_b$ -metrik jika memenuhi aturan-aturan yang terdapat di dalamnya secara terurut. Konsep keterurutan ini juga diterapkan dalam ajaran Islam, seperti yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surah Al-Maidah ayat 6. Ayat tersebut menjelaskan wudhu dan rukun wudhu. Wudhu mengingatkan Muslim untuk menjaga kebersihan, yang merupakan sebagian dari iman, serta menjadikan dirinya dalam keadaan suci ketika menghadap Allah SWT dalam ibadah. Pada ayat di atas dijelaskan juga bahwa terdapat fardhu wudhu, yang mana dijelaskan pula dalam kitab fathul qorib terdapat enam perkara fardhu wudhu yakni niat, membasuh

wajah, membasuh kedua tangan mengusap sebagian kepala, membasuh kedua kaki, dan tertib (Abdillah, 2021).

Fardhu wudhu yang pertama adalah niat, yakni menyengaja sesuatu beserta dengan pelaksanaannya. Niat dilaksanakan bersamaan ketika membasuh awal wajah. Kedua, membasuh wajah dengan batas dari tempat tumbuh rambut kepala sampai ke ujung dagu dan antara kedua telinga. Ketiga, membasuh kedua tangan sampai siku, termasuk bulu, jari dan kuku. Keempat, mengusap sebagian kepala, baik laki-laki maupun perempuan. Kelima, membasuh kedua kaki sampai kedua mata kaki, termasuk bulu, jari dan kuku. Keenam adalah tertib. Tertib berarti tidak mendahulukan antara satu fardhu wudhu dengan wudhu yang lain (Abdillah, 2021).

Tertib dalam fardhu wudhu merupakan pelaksanaan yang harus dilakukan secara berurutan sesuai dengan yang ditetapkan dalam syariat Islam. Setiap bagian wudhu itu harus dilakukan secara teratur tanpa mendahului atau melompati urutan yang seharusnya. Tertib memiliki hikmah yang mendalam, seperti meningkatkan konsentrasi dan mengajarkan keteraturan. Dengan menjaga tertib, seorang Muslim menunjukkan kesungguhan dalam mempersiapkan diri untuk ibadah salat dan mencerminkan kebersihan lahir dan batin. Menurut Madzhab Syafi'i dan Hanbali tertib adalah wajib, sehingga pelanggaran terhadap urutan fardhu wudhu ini akan menyebabkan tidak sahnya wudhu tersebut.

Selain dalam surah Al-Maidah ayat 6, terdapat pula konsep terkait ketetapan waktu salat. Ketetapan waktu salat ini menunjukkan bahwa salat harus dilaksanakan pada waktu-waktu yang telah ditentukan oleh Allah SWT sebagai bagian besar dari kewajiban ibadah umat Islam. Dalam Al-Qur'an Allah SWT memerintahkan umat

Islam untuk melaksanakan salat, sebagaimana disebutkan dalam firman Allah SWT dalam Surah Hud ayat 114 yakni (Kemenag, 2024)

وَأَقِمِ الصَّلَاةَ طَرَفَيِ النَّهَارِ وَزُلْفًا مِّنَ اللَّيْلِ إِنَّ الْحَسَنَاتِ يُذْهِبْنَ السَّيِّئَاتِ ذَلِكَ ذِكْرَى لِلذَّكِّرِينَ ﴿١١٤﴾  
Artinya: “Dirikanlah salat pada kedua ujung hari (pagi dan petang) dan pada bagian-bagian malam. Sesungguhnya perbuatan-perbuatan baik menghapus kesalahan-kesalahan. Itu adalah peringatan bagi orang-orang yang selalu mengingat (Allah SWT)”.

Ayat di atas menyebutkan bahwa ketetapan waktu-waktu salat, yang mana harus dilaksanakan sesuai dengan teratur sesuai dengan ketentuan, syarat, rukun dan sunnahnya. Meskipun pada ayat di atas tidak secara langsung menyebutkan ketetapan lima waktu salat, tetapi terdapat gambaran tentang pentingnya salat pada waktu “kedua ujung hari” yakni pagi dan petang atau Shubuh, Dzuhur, dan Ashar. Kemudian pada “permulaan malam” yang merujuk pada waktu Magrib dan Isya’ (Shihab, 2002). Penjelasan mengenai waktu salat dapat ditemukan dalam kitab Bulughul Maram hadits 151 yakni (Hajar, 2008)

عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ عَمْرٍو رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا؛ أَنَّ نَبِيَّ اللَّهِ - صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ - قَالَ: - وَفَتْ الظُّهْرُ إِذَا زَالَتْ الشَّمْسُ، وَكَانَ ظِلُّ الرَّجُلِ كَطَوْلِهِ مَا لَمْ يَخْضُرِ الْعَصْرُ، وَوَفَتْ الْعَصْرُ مَا لَمْ تَصْفَرَّ الشَّمْسُ، وَوَفَتْ صَلَاةُ الْمَغْرِبِ مَا لَمْ يَغِبِ الشَّفَقُ، وَوَفَتْ صَلَاةُ الْعِشَاءِ إِلَى نِصْفِ اللَّيْلِ الْأَوْسَطِ، وَوَفَتْ صَلَاةُ الصُّبْحِ مِنْ طُلُوعِ الْفَجْرِ مَا لَمْ تَطْلُعِ الشَّمْسُ - رَوَاهُ مُسْلِمٌ

Artinya: Dari ‘Abdullah bin ‘Amr radhiyallahu ‘anhuma, Nabi SAW bersabda, “Waktu Dzuhur dimulai sejak matahari sudah tergelincir sampai bayang-bayang seseorang sama dengan tingginya selama belum masuk waktu ashar. Waktu salat Ashar selama matahari cahayanya belum menguning. Waktu salat Magrib selama syafaq (cahaya merah) belum hilang. Waktu salat Isya’ hingga pertengahan malam dan waktu salat Shubuh dimulai dari terbitnya fajar sampai terbitnya matahari.” H.R Muslim

Selain penjelasan waktu salat dalam kitab Bulughul Maram terdapat pula penjelasan mengenai lima salat yang diwajibkan dalam Matan Safinatun Najah, yakni Shubuh, Dhuhur, Ashar, Magrib, dan Isya’, Setiap salat terdapat waktu awal

dan akhir dari pelaksanaan. Shubuh dimulai ketika terbitnya fajar shadiq dan berakhir saat matahari terbit. Dhuhur dimulai setelah tergelincirnya matahari ke arah timur dan berakhir saat bayangan suatu benda sama dengan panjangnya. Ashar dimulai setelah bayangan suatu benda sedikit lebih panjang dari bendanya dan berakhir saat matahari terbenam. Magrib dimulai setelah matahari terbenam sepenuhnya dan berakhir saat mega merah di ufuk barat hilang. Isya' dimulai setelah mega merah dari ufuk barat hilang dan berakhir saat fajar shadiq terbit (Hajar, 2008). Salat tidak hanya harus dilakukan tepat waktu, terdapat juga pelaksanaan sesuai rukun.

Rukun salat merupakan bagian yang wajib dilakukan tertib agar salat tersebut sah. Dalam kitab Fathul Qorib dijelaskan bahwa terdapat 18 rukun salat. Pertama, niat, yakni menyengaja sesuatu beserta dengan pelaksanaannya. Kedua, berdiri bagi yang mampu, atau duduk jika tidak mampu dengan posisi *iftirasy* lebih diutamakan. Ketiga, takbiratul ihram yang dilakukan bersamaan dengan niat dalam hati. Keempat, membaca al-fatihah dengan urutan tertib. Kelima, ruku' sempruna dengan meluruskan punggung leher, serta thuma'ninah (diam sejenak) dalam ruku' yang merupakan rukun keenam. Ketujuh dan kedelapan, i'tidal serta thuma'ninah. Kesembilan dan kesepuluh, sujud serta thuma'ninah. Sebelas dan kedua belas, duduk diantara dua sujud serta thuma'ninah. Ketiga belas dan keempat belas, duduk tasyahud akhir dan membaca tasyahud akhir. Kelima belas, membaca sholawat kepada Nabi SAW. Keenam belas, membaca salam yang pertama dalam posisi duduk. Ketujuh belas, niat keluar salat, tetapi ini adalah pendapat yang *marjuh* (lemah). Kedelapan belas, melakukan setiap rukun salat dengan tertib.

Prinsip tertib memiliki kesamaan dengan prinsip pada  $S_b$ -metrik yang mengutamakan urutan dan keteraturan dalam pembuktian sifat-sifat ruang. Dalam  $S_b$ -metrik, sifat-sifat harus dibuktikan sesuai dengan urutan untuk memastikan bahwa setiap sifat terpenuhi kriteria yang sah. Sebagaimana dalam salat, di mana setiap rukun dilakukan dengan urutan yang tepat untuk mencapai salat yang sempurna. Dengan mengikuti urutan yang tepat, baik dalam salat maupun pembuktian  $S_b$ -metrik, dapat dipastikan bahwa setiap langkah atau sifat yang dilaksanakan memberikan hasil yang sah dan sesuai dengan tujuan yang ingin di capai.

### 2.3 Kajian Topik dan Teori Pendukung

Pada bab ini akan diuraikan berbagai teori yang berkaitan dengan penelitian ini, yang berfungsi sebagai landasan pemikiran dan membantu mempermudah pembahasan hasil utama pada bab berikutnya. Secara khusus, pembahasan akan difokuskan pada beberapa teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat dalam  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, yakni

#### **Teorema 2.2**

Misalkan  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu,  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  adalah barisan. Jika  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen, maka limitnya adalah tunggal.

#### **Teorema 2.3**

Misalkan  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu,  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  adalah barisan. Jika  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen, maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

**Teorema 2.4**

Misalkan  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu dan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik yang lengkap. Maka, irisan dari sejumlah himpunan terbuka yang *dense* juga merupakan himpunan yang *dense*.

**Definisi 2.21**

Misalkan  $M$  adalah ruang topologi,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu, dan  $(N, d)$  merupakan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik,  $f_n: M \rightarrow N$  dan  $f: M \rightarrow N$  adalah koleksi dari fungsi kontinu.

Dikatakan bahwa barisan  $\{f_n\}$  konvergen seragam terhadap  $f$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in M.$$

**Teorema 2.5**

Misalkan  $M$  adalah ruang topologi,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm*,  $(N, d)$  merupakan  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan misalkan  $f_n: M \rightarrow N$  adalah keluarga dari fungsi kontinu. Jika barisan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen seragam ke sebuah fungsi  $f: M \rightarrow N$ , maka fungsi  $f$  juga kontinu.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Metode penelitian yang digunakan adalah pendekatan kualitatif melalui studi literatur, di mana data dari berbagai sumber perpustakaan dikumpulkan, dianalisis, dan dikelola. Penelitian ini merujuk pada jurnal utama yang berjudul “*On Topological and Metric Properties of  $\oplus$ - $S_b$ -Metric Spaces*” yang ditulis oleh Šostak A. dkk pada tahun 2023.

#### **3.2 Pra Penelitian**

Pada tahap pra-penelitian, dilakukan berbagai persiapan untuk memastikan pemahaman mengenai konsep yang akan dikaji. Persiapan tersebut mencakup mempelajari konsep dasar ruang metrik serta mempelajari beberapa generalisasi dari ruang metrik untuk memahami perluasan konsep serta penerapannya dalam penelitian.

#### **3.3 Tahapan Penelitian**

Dalam penelitian ini, digunakan beberapa tahapan penelitian yang dijelaskan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah utama yang ingin diselesaikan terkait sifat metrik pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, berdasarkan jurnal penelitian yang berjudul “*On Topological and Metric Properties of  $\oplus$ - $S_b$ -Metric Spaces*” yang ditulis oleh Šostak A. dkk pada tahun 2023.

2. Mengumpulkan referensi ilmiah lain yang berkaitan dengan sifat-sifat pada ruang  $S_b$ -metrik dan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.
3. Menyusun paparan definisi dan konsep dasar yang terkait.
4. Menentukan ayat Al-Qur'an yang memiliki keterkaitan dengan penelitian.
5. Mengkaji bagaimana teori  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan sifat metrik  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dapat diintegrasikan dengan nilai-nilai dalam Al-Qur'an.
6. Menyusun pembuktian lebih lanjut terkait teorema yang membahas mengenai sifat-sifat pada ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.
7. Menyimpulkan hasil-hasil yang diperoleh dari pembuktian teorema di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan hasil dan pembahasan terkait sifat-sifat di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, sebagaimana didefinisikan pada bab sebelumnya. Pembahasan difokuskan pada pemahaman sifat metrik dari ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik berdasarkan beberapa teorema.

#### 4.1 Ruang $\oplus$ - $S_b$ -metrik

##### Definisi 4.1

Misalkan  $M$  adalah himpunan tak kosong,  $\oplus$  adalah sebuah *extended t-conorm* yang kontinu, dengan  $k \geq 1$  dan  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  dikatakan  $\oplus$ - $S_b$ -metrik jika

1.  $d(x, x) = 0$  untuk setiap  $x \in M$ ;
2.  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  untuk setiap  $x, y \in M$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in M$ ;
4.  $d(x, z) \leq k \cdot d(x, y) \oplus d(y, z)$  untuk setiap  $x, y, z \in M$ .

Maka fungsi  $(M, d)$  dinamakan  $\oplus$ - $S_b$ -metrik (Šostak dkk., 2023)

##### Contoh 4.1

Misalkan  $M = \mathbb{R}$  yaitu himpunan bilangan real, dan fungsi  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$  didefinisikan dengan

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in M,$$

Selanjutnya, didefinisikan operasi  $\oplus: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sebagai berikut:

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \text{ untuk setiap } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

dengan mengambil  $k = 2$  dan  $\oplus = \max$ . Akan ditunjukkan bahwa fungsi  $d$  memenuhi semua syarat dalam definisi 4.1, sehingga merupakan  $\oplus$ - $S_b$ -metrik pada  $M$ .

### Penyelesaian

1.  $d(x, x) = 0$  untuk setiap  $x \in M$

Diketahui bahwa fungsi  $d$  didefinisikan

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

Untuk memverifikasi syarat pertama, substitusikan  $y = x$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, x) &= |x - x| \\ &= |0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena  $x \in \mathbb{R}$  dipilih secara sembarang, maka kesamaan tersebut berlaku untuk setiap  $x \in M$ . Dengan demikian,

$$\forall x \in M, \quad d(x, x) = 0,$$

yang berarti syarat pertama terbukti.

2.  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  untuk setiap  $x, y \in M$

Asumsikan bahwa

$$d(x, y) = 0.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ |x - y| &= 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat dasar dari nilai mutlak dalam bilangan real, yaitu:

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{R},$$

Maka

$$|x - y| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y.$$

Karena dari asumsi  $d(x, y) = 0$  dapat disimpulkan bahwa  $x = y$ . Maka fungsi  $d(x, y) = |x - y|$  terbukti.

3.  $d(x, y) = d(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in M$

Definisi dari  $d(x, y)$  dan  $d(y, x)$  adalah

$$d(x, y) = |x - y|,$$

$$d(y, x) = |y - x|$$

Berdasarkan sifat mutlak,  $|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{jika } x \geq y \\ y - x, & \text{jika } x < y \end{cases}$

Sehingga

$$|x - y| = |y - x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dengan menggunakan sifat ini, diperoleh

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

karena  $d(x, y) = d(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , maka fungsi  $d(x, y) = |x - y|$  terbukti.

4.  $d(x, z) \leq k \cdot d(x, y) \oplus d(y, z)$  untuk setiap  $x, y, z \in M$

Untuk memverifikasi syarat keempat, digunakan sifat ketaksamaan segitiga, yaitu:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Dengan menggunakan definisi fungsi  $d$ , sama saja dengan

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Selanjutnya, diketahui bahwa untuk setiap bilangan real tak negaif  $a$  dan  $b$  berlaku:

$$\max\{a, b\} \geq \frac{1}{2}(a + b).$$

Dengan menerapkan ini pada  $d(x, y)$  dan  $d(y, z)$ , diperoleh:

$$\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq \frac{1}{2}(d(x, y) + d(y, z)).$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan 2, diperoleh:

$$2 \cdot \max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, y) + d(y, z).$$

Dari ketaksamaan tersebut dan ketaksamaan segitiga, diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &\leq 2 \cdot \max\{d(x, y), d(y, z)\}. \end{aligned}$$

Karena dalam definisi digunakan operasi  $\oplus = \max$  dan  $k = 2$ , maka:

$$d(x, z) \leq k \cdot d(x, y) \oplus d(y, z),$$

untuk setiap  $x, y, z \in M$ .

Dengan demikian, syarat tersebut terbukti.

#### **Remark 4.1**

Diketahui pemetaan  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ , diketahui  $d$  merupakan  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

Dengan menerapkan aksioma (3) dan (4) diperoleh

$$d(x, z) = d(z, x) \leq k \cdot d(z, y) \oplus d(y, x) = d(x, y) \oplus k \cdot d(y, z),$$

dan karenanya, aksioma (4) setara dengan aksioma

$$4'. \quad d(x, z) \leq d(x, y) \oplus k \cdot d(y, z) \text{ untuk setiap } x, y, z \in M.$$

#### **Bukti**

Diketahui berdasarkan aksioma (4)

$$d(x, z) \leq k \cdot d(x, y) \oplus d(y, z)$$

dengan menggunakan aksioma (3) menjadi

$$d(x, z) = d(z, x) \leq k \cdot d(y, x) \oplus d(z, y)$$

dengan menggunakan sifat komutatif pada  $\oplus$  maka

$$d(z, x) \leq d(y, x) \oplus k \cdot d(z, y)$$

dengan menggunakan aksioma (3) keduanya diperoleh

$$d(x, z) \leq d(x, y) \oplus k \cdot d(y, z).$$

Sehingga terbukti bahwa aksioma (4) setara dengan aksioma (4').

#### **Definisi 4.2**

Diketahui  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan misalkan  $a \in M$  dan  $r > 0$ . Maka, himpunan

$$B(a, r) = \{x | x \in M, d(a, x) < r\}$$

dikatakan bola terbuka dengan pusat  $a \in M$  dan radius  $r$ .

Misalkan  $\mathcal{T}_d$  adalah topologi  $M$  yang diinduksi oleh koleksi  $\mathfrak{B} = \{B(x, r) | x \in M, r > 0\}$ , yaitu semua himpunan bola terbuka sebagai subbasis. Sebagaimana akan ditunjukkan pada subbagian ini,  $\mathfrak{B}$  ternyata merupakan basis dari  $\mathcal{T}_d$ .

#### **Proposition 4.1**

Sebuah bola terbuka adalah himpunan terbuka dalam ruang topologi  $(M, d)$ . Dengan kata lain, apabila diberikan bola  $B(a, r)$  dan titik  $x_0 \in B(a, r)$ , maka terdapat bola  $B(x_0, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$ .

#### **Bukti**

Misalkan  $(M, d)$  merupakan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $\oplus$  adalah *extended t-conorm*. Misalkan  $B(a, r)$  adalah bola terbuka dengan pusat  $a \in M$  dan jari-jari  $r > 0$ . Misalkan pula  $x_0 \in B(a, r)$ , sehingga berdasarkan definisi bola terbuka diperoleh:

$$d(a, x_0) < r. \quad (1)$$

Karena  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu, maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  sedemikian sehingga

$$d(a, x_0) \oplus \varepsilon < r. \quad (2)$$

Selanjutnya, didefinisikan  $\delta := \frac{\varepsilon}{k}$ , dengan  $k \geq 1$  merupakan konstanta dari definisi  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

Ambil sebarang titik  $z \in B(x_0, \delta)$ . Maka berdasarkan definisi bola terbuka diperoleh

$$d(x_0, z) < \delta = \frac{\varepsilon}{k}. \quad (3)$$

Dari ketaksamaan segitiga  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan simetrinya, berlaku:

$$d(a, z) \leq d(a, x_0) \oplus k \cdot d(x_0, z). \quad (4)$$

Dengan substitusi (1) dan (3) ke dalam (4), diperoleh:

$$d(a, z) < d(a, x_0) \oplus \varepsilon. \quad (5)$$

Namun dari (2), diketahui bahwa  $d(a, x_0) \oplus \varepsilon < r$ , sehingga

$$d(a, z) < r \Rightarrow z \in B(a, r).$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$B(x_0, \delta) \subseteq B(a, r).$$

Karena setiap titik  $x_0 \in B(a, r)$  terdapat bola terbuka  $B(x_0, \delta)$  yang sepenuhnya termuat dalam  $B(a, r)$ , maka  $B(a, r)$  merupakan himpunan terbuka dalam topologi  $\mathcal{T}_d$  yang diinduksi oleh  $\oplus$ - $S_b$ -metrik  $d$ .

#### **Proposition 4.2**

Irisan dari koleksi berhingga dari bola terbuka merupakan himpunan terbuka dalam topologi  $\mathcal{T}_d$  yang diinduksi oleh  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

### Bukti

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, dan misalkan terdapat sejumlah hingga bola terbuka  $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2), \dots, B(a_n, r_n)$  dalam  $M$ , dengan  $a_i \in M$  dan  $r_i > 0$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ . Misalkan

$$U := \bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i)$$

adalah irisan hingga dari bola-bola terbuka tersebut.

Ambil sebarang titik  $x_0 \in U$ . Maka, untuk setiap  $1 \leq i \leq n$ , berlaku:

$$d(a_i, x_0) < r_i. \quad (1)$$

Karena  $d(a_i, x_0) < r_i$  dan  $\oplus$  adalah *extended t-conorm* yang kontinu, maka untuk setiap  $i$  tersebut terdapat  $\varepsilon_i > 0$  sedemikian sehingga

$$d(a_i, x_0) \oplus \varepsilon_i < r_i. \quad (2)$$

Dengan cara yang sama seperti pada pembuktian Proposition 4.1, dapat didefinisikan:

$$\delta_i := \frac{\varepsilon_i}{k}, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Selanjutnya, didefinisikan:

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}. \quad (4)$$

Dengan demikian,  $\delta > 0$ , karena merupakan minimum dari bilangan-bilangan positif.

Akan ditunjukkan bahwa

$$B(x_0, \delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i) = U. \quad (5)$$

Ambil sebarang  $x \in B(x_0, \delta)$ , maka

$$d(x_0, x) < \delta \leq \delta_i = \frac{\varepsilon_i}{k}, \forall i. \quad (6)$$

Dengan menggunakan bentuk simetris dari ketaksamaan segitiga  $\oplus S_b$ -metrik, diperoleh:

$$d(a_i, x) \leq d(a_i, x_0) \oplus k \cdot d(x_0, x). \quad (7)$$

Dari (1) dan (6), diperoleh bahwa

$$d(a_i, x) < d(a_i, x_0) \oplus \varepsilon_i < r_i. \quad (8)$$

Dengan demikian,  $x \in B(a_i, r_i)$  untuk setiap  $1 \leq i \leq n$  sehingga:

$$x \in \bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i) = U.$$

Karena  $x \in B(x_0, \delta)$  dipilih sembarang, maka diperoleh:

$$B(x_0, \delta) \subseteq U.$$

Artinya, untuk setiap  $x_0 \in U$ , terdapat bola terbuka  $B(x_0, \delta)$  yang sepenuhnya termuat dalam  $U$ , sehingga  $U$  merupakan himpunan terbuka dalam topologi  $\mathcal{T}_d$  yang diinduksi oleh  $\oplus S_b$ -metrik  $d$ .

## 4.2 Sifat-Sifat Metrik di Ruang $\oplus S_b$ -metrik

Pada subbab ini akan dipaparkan pembuktian teorema yang menyatakan bahwa sifat-sifat tersebut terbukti di ruang  $\oplus S_b$ -metrik.

### Definisi 4.3

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus S_b$ -metrik,  $\oplus$  adalah sebuah *extended t-conorm* yang kontinu, dan  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah suatu  $\oplus S_b$ -metrik,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  adalah suatu barisan dan  $x \in M$ .

1. Barisan  $\{x_n\}$  dikatakan konvergen ke  $x$  jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ , Dalam kasus ini, dinotasikan  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .
2. Barisan  $\{x_n\}$  dikatakan barisan Cauchy jika  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$ .
3. Ruang  $(M, d)$  dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam  $M$  konvergen di dalam ruang tersebut.

**Teorema 4.1**

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu,  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  adalah barisan. Jika  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen, maka limit dari barisan tersebut adalah tunggal.

**Bukti:**

Diambil sebarang barisan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ . Andaikan barisan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  konvergen ke  $x$  dan  $y$  di  $M$ . Misalkan memiliki dua nilai limit,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

Berdasarkan definisi 2.12 dapat diartikan bahwa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_1(\varepsilon) \text{ sedemikian sehingga } \forall n \geq k_1(\varepsilon)$$

berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

dan

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_2(\varepsilon) \text{ sedemikian sehingga } \forall n \geq k_2(\varepsilon)$$

berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Perhatikan

$$d(x, y) = d(x, x_n + x_n, y) = d(x_n, y - (x_n, x))$$

$$\begin{aligned} &\leq d(x_n, y + x_n, x) \\ &\leq d(x_n, y) + d(x_n, x) \end{aligned}$$

Maka berdasarkan (1) dan (2)

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Jadi dipilih  $k(\varepsilon) = \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon)\}$

$$d(x, y) < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$d(x, y) = 0$$

$$x, y = 0$$

$$x = y$$

Sehingga terjadi kontradiksi dengan pengandaian bahwa nilai dari dua limit yang diasumsikan berbeda pada awal pembuktian ternyata identik. Kesimpulan ini menunjukkan bahwa suatu barisan dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik tidak mungkin konvergen ke dua titik yang berbeda. Dengan kata lain, limit dari barisan dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik bersifat tunggal. Dengan demikian, teorema yang menyatakan jika  $\{x_n\}$  adalah barisan konvergen dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, maka limit dari barisan tersebut adalah tunggal telah terbukti. ■

#### **Teorema 4.2**

Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu,  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  adalah barisan. Jika  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen, maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

#### **Bukti:**

Misalkan  $(M, d)$  merupakan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, di mana  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  adalah suatu pemetaan yang memenuhi definisi 4.1, dan operasi biner  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu, berlaku ketaksamaan segitiga dalam bentuk:

$$d(x, z) \leq d(x, y) \oplus k \cdot d(y, z), \quad \forall x, y, z \in M,$$

Untuk suatu konstanta  $k \geq 1$ .

Diberikan barisan  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  yang konvergen terhadap suatu titik  $x \in M$ .

Berdasarkan definisi 4.3 mengenai konvergen dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, yakni

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk semua  $n \geq N$  berlaku  $d(x_n, x) < \varepsilon$ .

Dengan kata lain,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy, yakni

$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}$  sehingga untuk semua  $n, m \geq N'$  berlaku  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Berdasarkan ketaksamaan segitiga dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, untuk setiap  $n, m \in \mathbb{N}$ , berlaku:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) \oplus k \cdot d(x, x_m).$$

Untuk mengetahui sifat dari  $d(x_n, x_m)$  ketika  $n, m \rightarrow \infty$ , maka diambil limit pada kedua ruas dari ketaksamaan, diperoleh:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} [d(x_n, x) \oplus k \cdot d(x, x_m)].$$

Karena  $\oplus$  adalah *extended t-conorm* yang kontinu dan komutatif, maka:

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} [d(x_n, x) \oplus k \cdot d(x, x_m)] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \oplus \lim_{m \rightarrow \infty} k \cdot d(x, x_m) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \oplus k \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, x_m) \end{aligned}$$

Karena  $x_n \rightarrow x$ , dan  $x_m \rightarrow x$  maka:

$$\leq 0 \oplus k \cdot 0$$

$$\leq 0 \oplus 0$$

karena  $\oplus$  memiliki identitas netral 0, maka:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq 0$$

Karena  $\oplus$  juga merupakan operasi yang kontinu dan limit dari kedua suku adalah nol, maka hasil operasi  $\oplus$  juga menuju nol. Oleh karena itu,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga  $\delta \oplus k \cdot \delta < \varepsilon$ . Kemudian berdasarkan definisi konvergen pada definisi 4.3 yakni  $\forall \delta > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga

$$n \geq N_1 \Rightarrow d(x_n, x) < \delta \text{ dan } m \geq N_2 \Rightarrow d(x, x_m) < \delta.$$

Ambil  $N' = \max\{N_1, N_2\}$ , maka untuk semua  $n, m \geq N'$  berlaku:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x) \oplus k \cdot d(x, x_m) \\ &< \delta \oplus k \cdot \delta \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk semua  $n, m \geq N'$  berlaku  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , yang menunjukkan bahwa barisan  $\{x_n\}$  adalah barisan Cauchy di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik  $(M, d)$ . ■

### **Teorema 4.3**

Misalkan  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu, dan  $(M, d)$  adalah ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik yang lengkap. Maka, irisan dari koleksi *countable* dari himpunan-himpunan terbuka yang *dense* dalam  $M$  juga *dense*.

#### **Bukti:**

Misalkan  $U_n$  adalah koleksi *countable* di himpunan terbuka dan *dense* di  $M$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  *dense* di  $M$  dengan  $U_n \subseteq M$  terbuka dan *dense* untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ .

Untuk membuktikan bahwa  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$  *dense* di  $M$ , akan ditunjukkan bahwa untuk setiap himpunan terbuka tak kosong  $W \subseteq M$ , berlaku:

$$W \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \neq \emptyset.$$

Misalkan  $U_1, U_2, \dots, U_n$  adalah himpunan-himpunan terbuka. Maka irisan hingga dari himpunan-himpunan tersebut:

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = \{x | x \in U_1, x \in U_2, \dots, x \in U_n\}$$

adalah himpunan terbuka juga. Sehingga dapat dinyatakan bahwa

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \Rightarrow x \in U_n \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

Karena tiap  $U_n$  terbuka, maka

$$\text{setiap } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \text{ adalah titik interior bagi masing – masing } U_n$$

Oleh karena itu, irisan dari seluruh  $U_n$  memotong setiap himpunan terbuka, sehingga *dense*.

Karena  $U_1 \subseteq M$  adalah himpunan *dense* dalam  $M$ , dan  $W \subseteq M$  adalah himpunan terbuka tak kosong, maka berdasarkan definisi *dense* berlaku:

$$W \cap U_1 \neq \emptyset.$$

Maka, terdapat  $x_1 \in W \cap U_1$ .

Karena  $W \cap U_1$  terbuka dalam  $M$ , maka terdapat bola terbuka  $B(x_1, r_1) \subseteq W \cap U_1$  di mana  $r_1 > 0$  sedemikian sehingga:

$$B(x_1, r_1) \subseteq W \cap U_1.$$

Untuk mempermudah dalam konstruksi berikutnya, diambil  $r_1 < 1$ .

Selanjutnya, karena  $U_2$  *dense* dan  $B(x_1, r_1) \subseteq M$  adalah himpunan terbuka tak kosong, maka:

$$B(x_1, r_1) \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Ambil suatu titik  $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap U_2$ .

Karena  $B(x_1, r_1) \cap U_2$  terbuka, maka terdapat  $r_2 > 0$  sedemikian sehingga:

$$B(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1) \cap U_2.$$

Untuk menjaga agar radius mengecil, dipilih  $r_2 < \frac{1}{2}$ .

Misalkan untuk suatu  $n \geq 2$ , diperoleh titik-titik  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in M$  dan bilangan positif  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$  sedemikian sehingga:

$$B(x_i, r_i) \subseteq B(x_{i-1}, r_{i-1}) \cap U_i,$$

dan  $r_i < \frac{1}{i}$  untuk semua  $i = 2, \dots, n-1$ .

Karena  $U_n$  dense dan  $B(x_{n-1}, r_{n-1})$  terbuka tak kosong, maka:

$$B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n \neq \emptyset.$$

Ambil suatu titik  $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$ .

Karena  $B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$  terbuka, maka terdapat  $r_n < \frac{1}{n}$  sedemikian sehingga:

$$B(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n.$$

Dengan demikian, diperoleh barisan  $\{x_n\}$  dalam  $M$  dan bola-bola  $B(x_n, r_n)$  yang bersarang:

$$B(x_n, r_n) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq B(x_1, r_1) \subseteq W.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa barisan  $\{x_n\} \subseteq M$  yang telah di konstruksi merupakan barisan Cauchy dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik  $(M, d)$ .

Misalkan  $m, n \geq N$ , dengan  $m > n$ . Karena dari konstruksi sebelumnya setiap titik  $x_i \in B(x_{i-1}, r_{i-1})$ , maka  $x_n, x_m \in B(x_N, r_N)$ . Artinya:

$$d(x_n, x_N) < r_N, \quad d(x_m, x_N) < r_N.$$

Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga dari  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, berlaku:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq k \cdot d(x_n, x_N) \oplus d(x_m, x_N) \\ &< k \cdot r_N \oplus r_N. \end{aligned}$$

Karena  $r_N \rightarrow 0$  saat  $N \rightarrow \infty$  dan  $\oplus$  kontinu, maka:

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Dengan demikian,  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy dalam  $(M, d)$ .

Karena ruang  $(M, d)$  diketahui adalah ruang  $\oplus S_b$ -metrik yang lengkap, sehingga berlaku setiap barisan Cauchy dalam  $M$  konvergen ke suatu limit di  $M$ . Oleh karena itu, berdasarkan definisi kelengkapan, maka barisan  $\{x_n\}$  pasti konvergen ke suatu titik  $x \in M$ , yakni  $\exists x \in M$  sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $x \in W \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ .

Pertama, akan ditunjukkan bahwa  $x \in W$ . Karena setiap bola  $B(x_n, r_n) \subseteq W$  untuk semua  $n$  dan  $x_n \rightarrow x$ , serta  $W$  adalah himpunan terbuka, maka  $x \in W$ .

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ . Berdasarkan konstruksi diketahui bahwa  $x_m \in B(x_n, r_n) \subseteq U_n$  untuk semua  $m \geq n$ . Karena  $x_m \rightarrow x$ , dan  $U_n$  adalah himpunan terbuka, maka  $x \in U_n$ .

Karena hal ini berlaku untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ , maka:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$x \in W \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right).$$

Karena  $W \subseteq M$  adalah himpunan terbuka sembarang, maka terbukti bahwa:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \text{ dense di } M. \blacksquare$$

#### Definisi 4.4

Misalkan  $M$  adalah ruang topologi,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu, dan  $(N, d)$  merupakan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik,  $f_n: M \rightarrow N$  dan  $f: M \rightarrow N$  adalah koleksi dari fungsi kontinu.

Dikatakan bahwa barisan  $\{f_n\}$  konvergen seragam terhadap  $f$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in M.$$

#### Teorema 4.4

Misalkan  $M$  adalah ruang topologi,  $\oplus$  merupakan *extended t-conorm* yang kontinu,  $(N, d)$  merupakan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan misalkan  $f_n: M \rightarrow N$  adalah fungsi kontinu. Jika barisan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergen seragam ke sebuah fungsi  $f: M \rightarrow N$ , maka fungsi  $f$  juga kontinu.

#### Bukti:

Misalkan  $V \subseteq N$  adalah himpunan terbuka, ambil sembarang  $x_0 \in f^{-1}(V)$ , artinya  $f(x_0) \in V$ , dan  $y_0 = f(x_0)$ .

Karena  $V$  terbuka dan  $f(x_0) \in V$ , maka berdasarkan definisi 4.2 terdapat  $r > 0$  sedemikian sehingga bola terbuka  $B(y_0, r) \subseteq V$ .

$$B(f(x_0), r) = \{y \in N \mid d(y, f(x_0)) < r\}.$$

Artinya:

$$\text{jika } d(f(x), f(x_0)) < r, \text{ maka } f(x) \in V.$$

Akan ditunjukkan bahwa terdapat *neighborhood* terbuka  $U \subseteq M$  dari  $x_0$  sedemikian sehingga  $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$ . Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa  $f$  kontinu di  $x_0$ .

Karena  $\{f_n\}$  konvergen seragam ke  $f$ , maka berdasarkan definisi 4.4 yakni untuk setiap bilangan real positif  $\varepsilon > 0$ , terdapat bilangan asli  $n_0 \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga untuk semua  $n \geq n_0$  dan untuk semua  $x \in M$  berlaku ketaksamaan:

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Berdasarkan Corollary 2.1, yang menyatakan bahwa jika  $\oplus$  adalah *extended t-conorm* yang kontinu, maka untuk setiap  $r > 0$ , setiap  $k \geq 1$ , dan setiap  $n \in \mathbb{N}$  terdapat  $m \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga:

$$\bigoplus_{i=1}^n \frac{k}{m} < r.$$

Artinya, jika suatu bilangan  $\frac{k}{m}$  cukup kecil, maka hasil dari operasi  $\oplus$  yang diterapkan sebanyak  $n$  kali terhadap bilangan tersebut akan menghasilkan nilai yang lebih kecil dari  $r$ . Dengan kata lain, meskipun operasi  $\oplus$  dilakukan berulang-ulang, hasil akhirnya tetap dapat dikendalikan agar berada di bawah batas tertentu  $r$ , asalkan pemilihan  $m$  dilakukan dengan cukup besar. Pernyataan ini mempertegas sifat kekontinuan dari *extended t-conorm*, di mana akumulasi nilai kecil melalui operasi  $\oplus$  tidak akan melampaui batas yang telah ditentukan.

Dalam pembuktian ini, akan digunakan tiga nilai jarak yang dijumlahkan dengan operasi  $\oplus$ , yaitu:

1.  $d(f(x), f_{n_0}(x))$ ,
2.  $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0))$ ,
3.  $d(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$ .

Oleh karena itu, dipilih  $n = 3$ . Maka berdasarkan corollary 2.1, terdapat  $m \in \mathbb{N}$  sehingga:

$$\frac{k}{m} \oplus \frac{k}{m} \oplus \frac{k}{m} < r.$$

Artinya,

$$k \left( \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{m} \right) < r.$$

Ambil  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , maka dari konvergensi seragam, terdapat  $n_0 \in \mathbb{N}$  sehingga untuk semua  $x \in M$  berlaku:

$$d \left( f_{n_0}(x), f(x) \right) < \frac{1}{m}.$$

Karena  $f_{n_0}$  adalah fungsi kontinu di  $x_0$  dan  $x_0 \in M$ , maka untuk  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , terdapat *neighborhood* terbuka  $U \subseteq M$  dari  $x_0$ , sedemikian sehingga untuk semua  $x \in U$ , berlaku:

$$d \left( f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0) \right) < \frac{1}{m}.$$

Selain itu, dari asumsi konvergensi seragam  $f_n \rightarrow f$ , untuk  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , diketahui:

$$d \left( f(x_0), f_{n_0}(x_0) \right) < \frac{1}{m}.$$

Maka, untuk setiap  $x \in U$ , diperoleh tiga ketaksamaan:

1.  $d \left( f(x), f_{n_0}(x) \right) < \frac{1}{m},$
2.  $d \left( f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0) \right) < \frac{1}{m},$
3.  $d \left( f_{n_0}(x_0), f(x_0) \right) < \frac{1}{m}.$

Karena  $d$  adalah  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dan  $k$  adalah t-konorma kontinu, maka berdasarkan definisi 4.1, untuk setiap  $x \in U$  berlaku:

$$\begin{aligned}
& d(f(x), f_{n_0}(x)) \\
& \leq k \left( d(f(x), f_{n_0}(x)) \oplus d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) \right. \\
& \quad \left. \oplus d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \right)
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan ketaksamaan-ketaksamaan sebelumnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(x_0)) & \leq k \left( \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{m} \oplus \frac{1}{m} \right) \\
& \leq \frac{k}{m} \oplus \frac{k}{m} \oplus \frac{k}{m} \\
& < r.
\end{aligned}$$

Dari ketaksamaan di atas, diperoleh bahwa untuk semua  $x \in U$  berlaku:

$$d(f(x), f(x_0)) < r,$$

Sehingga,

$$f(x) \in B(f(x_0), r) \subseteq V.$$

Dengan demikian,

$$x \in U \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V).$$

Sehingga,

$$U \subseteq f^{-1}(V),$$

yang berarti  $f^{-1}(V)$  adalah terbuka, karena  $U$  terbuka.

Karena  $x_0 \in f^{-1}(V)$  dipilih sembarang, maka  $f$  kontinu di setiap titik  $x_0 \in M$ .

dengan kata lain fungsi  $f$  kontinu di  $M$ . Dengan demikian, teorema tersebut terbukti. ■

### 4.3 Kajian Al-Qur'an dan Hadits dalam Ruang $\oplus$ - $S_b$ -Metrik

Penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik yang hanya terbatas pada empat sifat. Pertama, limit barisan selalu tunggal. Kedua, setiap barisan yang konvergen pasti bersifat Cauchy. Ketiga, irisan dari banyak himpunan *dense* tetap *dense* jika ruangnya lengkap. Keempat, limit seragam dari fungsi kontinu tetap kontinu. Berdasarkan pembuktian pada bab sebelumnya, ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik terbukti memiliki sifat-sifat yang berbeda dari ruang metrik pada umumnya. Selain dalam ilmu matematika, konsep ini juga selaras pada penjelasan dalam Al-Qur'an dan hadits.

Pada teorema 4.1, ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik terbukti memiliki sifat bahwa limit dari suatu barisan di dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik bersifat unik. Artinya, apabila suatu barisan konvergen dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, maka hanya terdapat satu nilai limit yang mungkin dan tidak dimungkinkan adanya dua nilai yang berbeda sebagai limit dari barisan yang sama. Pemahaman ini dapat di sejajarkan dengan nilai-nilai spiritual dalam ajaran Islam. Dalam Q.S Al-'Alaq ayat 8, Allah SWT berfirman (Kemenag, 2024).

إِنَّ إِلَىٰ رَبِّكَ أَلْحَقُّ ۝ ٨

Artinya: “Sesungguhnya hanya kepada Tuhanmulah tempat kembali(-mu)”.

Pada ayat di atas mengandung makna bahwa seluruh makhluk pada akhirnya memiliki satu titik tujuan akhir yang pasti, yaitu kembali kepada Allah SWT. Tidak ada keraguan ataupun kemungkinan untuk kembali kepada selain-Nya. Jika dianalogikan lebih jauh, maka barisan dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dapat diibaratkan sebagai perjalanan hidup manusia. Setiap elemen dalam barisan merepresentasikan fase demi fase kehidupan yang dijalani, sementara limit dalam barisan tersebut

menggambarkan akhirat atau tujuan dari seluruh proses tersebut. Sebagaimana halnya dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, di mana limitnya hanya satu dari suatu barisan tidak dapat bercabang atau memiliki lebih dari satu tujuan, demikian pula manusia dalam pandangan Islam memiliki satu tujuan akhir yang pasti, yaitu kembali kepada Allah SWT.

Pada teorema ke 4.2 ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik terbukti memiliki sifat bahwa setiap barisan konvergen dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik pasti barisan Cauchy. Artinya, apabila suatu barisan memiliki limit di ruang tersebut, maka anggota-anggota barisan tersebut akan semakin berdekatan satu sama lain seiring bertambahnya indeks, tanpa menyimpang secara drastis dari kedekatan itu. Sifat ini menunjukkan bahwa konvergensi dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik tidak hanya menjamin tercapainya satu titik akhir yang jelas, melainkan menuntut adanya kedisiplinan dalam menuju titik tersebut melalui keteraturan dan konsistensi antar unsur barisan.

Secara filosofis, sifat tersebut mengandung makna bahwa proses mencapai suatu tujuan tidaklah bersifat instan, melainkan menuntut kedekatan yang berulang dan berkelanjutan antar tahapan, serta ketekunan dalam proses menuju penyempurnaan. Nilai-nilai tersebut sejalan dengan prinsip-prinsip spiritual yang diajarkan dalam Al-Qur'an, khususnya pada Q.S At-Taghabun ayat 16 (Kemenag, 2024).

فَاتَّقُوا اللَّهَ مَا اسْتَطَعْتُمْ وَأَسْمِعُوا وَأَطِيعُوا وَأَنْفِقُوا خَيْرًا لِّأَنْفُسِكُمْ وَمَنْ يُوقِ شُحَّ نَفْسِهِ فَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ ﴿١٦﴾

Artinya: “Bertakwalah kamu kepada Allah sekuat kemampuanmu! Dengarkanlah, taatlah, dan infakkanlah harta yang baik untuk dirimu! Siapa yang dijaga dirinya dari kekikiran, mereka itulah orang-orang yang beruntung”.

Ayat tersebut mengajarkan bahwa dalam kehidupan beragama, seorang hamba dituntut untuk senantiasa berikhtiar mendekat kepada Allah SWT sesuai dengan kapasitasnya dan kemampuannya. Tindakan bertakwa, mendengar, menaati perintah-Nya, serta berinfak adalah bentuk nyata dari proses mendekatkan diri yang dilakukan secara bertahap, berkelanjutan, dan konsisten (Shihab, 2002).

Hal ini selaras dengan sifat barisan Cauchy dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik di mana elemen-elemen dalam barisan senantiasa menjaga kedekatan yang semakin erat untuk memastikan tercapainya konvergensi. Sebagaimana dalam ruang matematis tersebut tidak dimungkinkan adanya ketidakaturan dalam jarak antar elemen. Demikian pula dalam proses ketakwaan dan amal saleh seorang mukmin dituntut untuk bersungguh-sungguh secara bertahap dengan terarah dalam mencapai kedekatan dengan Allah SWT.

Pada teorema 4.3 dibuktikan bahwa ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik memiliki sifat bahwa irisan dari jumlah-hitung himpunan-himpunan terbuka *dense* tetap merupakan himpunan yang *dense* juga. Secara matematis, sifat ini sangat penting karena memperlihatkan bahwa sifat kepadatan tidak hilang meskipun dilakukan proses irisan terhadap banyak himpunan. Kepadatan di sini berarti bahwa dalam setiap *neighborhood* (lingkungan) dari sembarang titik dalam ruang tersebut selalu terdapat elemen-elemen dari irisan himpunan, sehingga ruang tetap “terisi penuh” tanpa ada kekosongan.

Sifat ini menggambarkan bahwa meskipun suatu ruang disusun dari banyak himpunan terbuka *dense* yang mungkin selalu berbeda satu sama lain, ketika semuanya digabungkan melalui irisan, ruang tersebut tetap mempertahankan sifat dasarnya yaitu kepadatan. Hal ini menandakan bahwa keterpaduan banyak unsur

yang tampaknya berbeda dapat membentuk kesatuan yang kokoh, asalkan setiap unsur memiliki sifat keterhubungan yang kuat terhadap keseluruhan. Konsep ini memiliki kesejajaran yang indah dengan ajaran Islam dalam Q.S Al-Imran ayat 103 (Kemenag, 2024).

وَأَعْتَصِمُوا بِحَبْلِ اللَّهِ جَمِيعًا وَلَا تَفَرَّقُوا وَاذْكُرُوا نِعْمَتَ اللَّهِ عَلَيْكُمْ إِذْ كُنْتُمْ أَعْدَاءً فَأَلَّفَ بَيْنَ قُلُوبِكُمْ فَأَصْبَحْتُمْ  
بِنِعْمَتِهِ إِخْوَانًا وَكُنْتُمْ عَلَى شَفَا حُفْرَةٍ مِنَ النَّارِ فَأَنْقَذَكُمْ مِنْهَا كَذَلِكَ يُبَيِّنُ اللَّهُ لَكُمْ آيَاتِهِ لَعَلَّكُمْ تَهْتَدُونَ

﴿ ١٠٣ ﴾

Artinya: “Berpegang teguhlah kamu semuanya pada tali (agama) Allah, janganlah bercerai berai, dan ingatlah nikmat Allah kepadamu ketika kamu dahulu bermusuhan, lalu Allah mempersatukan hatimu sehingga dengan karunia-Nya kamu menjadi bersaudara. (Ingatlah pula ketika itu) kamu berada di tepi jurang neraka, lalu Allah menyelamatkan kamu dari sana. Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu agar kamu mendapat petunjuk”.

Ayat ini mengajarkan prinsip tentang persatuan, sebagaimana dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik banyaknya himpunan *dense* yang berbeda, ketika digabungkan tetap mempertahankan kepadatannya. Sama halnya dengan manusia, meskipun berasal dari berbagai latar belakang, suku, bangsa dan perbedaan lainnya tetap diperintahkan untuk bersatu dalam satu ikatan yaitu agama Islam. Persatuan tersebut bukan hanya simbolis, melainkan membentuk kekuatan yang nyata dan berpengaruh, sebagaimana irisan himpunan *dense* menghasilkan struktur ruang yang tetap utuh dan penuh.

Pada teorema ke 4.4 ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik terbukti juga memiliki sifat bahwa limit seragam dari fungsi-fungsi kontinu dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik tetap menghasilkan fungsi yang kontinu. Artinya, keberlanjutan sifat kontinuitas tetap terjaga meskipun fungsi-fungsi tersebut mengalami proses limit secara seragam. Hal ini menunjukkan bahwa kestabilan dan kesungguhan sifat suatu fungsi tidak hilang bahkan dalam proses perubahan bertahap sekalipun. Sifat ini memiliki

keterkaitan dengan firman Allah SWT dalam Q.S Fussilat ayat 30 (Kemenag, 2024).

إِنَّ الَّذِينَ قَالُوا رَبُّنَا اللَّهُ ثُمَّ اسْتَقَمُوا تَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ الْمَلَائِكَةُ أَلَّا تَخَافُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَبْشِرُوا بِالْجَنَّةِ الَّتِي كُنتُمْ تُوعَدُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: “Sesungguhnya orang-orang yang berkata, “Tuhan kami adalah Allah”, kemudian tetap (dalam pendiriannya), akan turun malaikat-malaikat kepada mereka (seraya berkata), “Janganlah kamu takut dan bersedih hati serta bergembiralah dengan (memperoleh) surga yang telah dijanjikan kepadamu””.

Ayat ini menekankan pentingnya istiqamah, yaitu keteguhan dan konsistensi dalam keimanan dan amal. Sebagaimana fungsi-fungsi kontinu, meskipun mengalami perubahan melalui limit seragam tetap mempertahankan kontinuitasnya. Demikian pula seorang mukmin yang senantiasa menjaga keimanannya di tengah perubahan dan ujian kehidupan tetap akan berada dalam jalan kebenaran. Konsistensi yang dijaga dengan sungguh-sungguh pada akhirnya mengantarkan pada ketenangan, keselamatan, dan kebahagiaan abadi sebaaimana yang di janjikan Allah SWT.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian terhadap Teorema 4.1 hingga Teorema 4.4, dapat disimpulkan bahwa ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik yang merupakan generalisasi dari ruang  $S_b$ -metrik melalui penggunaan operasi penjumlahan dengan suatu *extended t-conorm*  $\oplus$ , tetap mempertahankan sejumlah sifat dari ruang metrik. Pada Teorema 4.1 membuktikan sifat keunikan limit, yaitu apabila suatu barisan dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik konvergen, maka limitnya bersifat tunggal. Teorema 4.2 menyatakan bahwa setiap barisan konvergen dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik merupakan barisan Cauchy. Teorema 4.3 membuktikan berlakunya Teorema Kategori Baire, yakni bahwa irisan tak hingga dari himpunan-himpunan terbuka yang *dense* tetap menghasilkan himpunan *dense*. Kemudian Teorema 4.4 menunjukkan bahwa konvergensi *uniform* dari suatu barisan fungsi kontinu menuju fungsi limit menjamin bahwa fungsi limit tersebut tetap kontinu, sehingga sifat kontinuitas oleh konvergensi uniform tetap berlaku di ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik. Keempat teorema tersebut terbukti dan mencerminkan sifat-sifat metrik yang melekat pada struktur ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik.

#### 5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, disarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengkaji sifat-sifat lain yang belum di bahas dalam ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik, seperti sifat kompak, keterhubungan, dan kelengkapan. Selain itu, dapat

dilakukan eksplor lebih lanjut terhadap kemungkinan penerapan ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik dalam teori pemetaan titik tetap. Pada penelitian lanjutan, diharapkan dapat memperluas pemahaman mengenai struktur karakteristik ruang  $\oplus$ - $S_b$ -metrik serta memperkaya pengembangan teori ruang metrik yang digeneralisasikan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdillah, S. A. (2021). *Terjemah Kitab Fathul Qarib (Fath Al-Qarib)* (p. 380). Pondok Pesantren Al-Koirot Malang. [www.alkhoirot.com](http://www.alkhoirot.com)
- Hajar, A.-H. I. A.-A. (2008). *Terjemahan Bulughul Maram*.
- Kemenag. (2024). *Qur'an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/5?from=6&to=6>
- Kir, M., & Kiziltunc, H. (2013). On Some Well Known Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 1(1), 13–16. <https://doi.org/10.12691/tjant-1-1-4>
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. United States of America.
- Öner, T., & Šostak, A. (2020). *On Metric-Type Spaces Based on Extended T-Conorms*.
- Sedghi, S., Shobe, N., & Aliouche, A. (2012). *A Generalization of Fixed Point Theorems in S-Metric Spaces*. 64(3), 258–266.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah* (p. 257). Lentera Hati.
- Šostak, A., Öner, T., & Duman, İ. C. (2023). On Topological and Metric Properties of  $\oplus$ -sb-Metric Spaces. *Mathematics*, 11(19), 1–12. <https://doi.org/10.3390/math11194090>
- Taş, N., & Özgür, N. (2021). New Generalized Fixed Point Results on Sb-Metric Spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 24–32.

## RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Risma Millatul Ashfa, yang akrab dipanggil Risma, Ashfa, atau Mila. Lahir di Bojonegoro pada tanggal 25 Juli 2004 sebagai anak pertama hidup dari pasangan Bapak Moh hasyim dan Ibu Ida Farida. Penulis memulai pendidikan formalnya di MI Falakhiyah dan lulus pada tahun 2015. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan di MTs Islamiyah Malo dan lulus pada tahun 2018. Selama masa MTs, penulis juga menimba ilmu agama di Pondok Pesantren Al-Husna Malo. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di MA Unggulan Darul Ulum STEP-2 Kemenag RI – IDB, lulus pada tahun 2021. Pada masa MA, penulis kembali menimba ilmu agama di Pondok Pesantren Darul Ulum Jombang tepatnya di Asrama XIII Sulaiman-Bilqis. Pada tahun 2021, penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Selama masa perkuliahan, penulis aktif dalam berbagai kegiatan organisasi. Salah satunya sebagai anggota divisi Penalaran dan Keagamaan (PK) Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika (HMPS) “Integral” Matematika di tahun 2022. Kemudian pada periode selanjutnya diamanahkan sebagai ketua di divisi Penalaran dan Keagamaan (PK). Selain itu, penulis juga sempat menimba ilmu agama di Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang (LTPLM) pada tahun 2022. Apabila terdapat pertanyaan, saran, ataupun kritik dalam penelitian ini, penulis dapat dihubungi melalui email ([rismamillatulashhfa@gmail.com](mailto:rismamillatulashhfa@gmail.com)).



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Risma Millatul Ashfa  
NIM : 210601110085  
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Sifat Metrik pada Ruang  $\oplus$ - $S_b$ -Metrik  
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti M.Sc  
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

| No  | Tanggal          | Hal                                  | Tanda Tangan |
|-----|------------------|--------------------------------------|--------------|
| 1.  | 2 September 2024 | Konsultasi Topik dan Data            | 1.           |
| 2.  | 31 Oktober 2024  | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 2.           |
| 3.  | 19 November 2024 | Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II | 3.           |
| 4.  | 21 November 2024 | Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II | 4.           |
| 5.  | 9 Januari 2025   | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 5.           |
| 6.  | 16 Januari 2025  | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 6.           |
| 7.  | 20 Januari 2025  | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 7.           |
| 8.  | 24 Januari 2025  | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 8.           |
| 9.  | 6 Februari 2025  | Konsultasi Bab I, II, dan III        | 9.           |
| 10. | 11 Februari 2025 | ACC Bab I, II, dan III               | 10.          |
| 11. | 11 Februari 2025 | ACC Kajian Agama Bab I dan II        | 11.          |
| 12. | 11 Februari 2025 | ACC Seminar Proposal                 | 12.          |
| 13. | 5 Mei 2025       | Konsultasi Kajian Agama Bab IV       | 13.          |
| 14. | 9 Mei 2025       | Konsultasi Revisi Seminar Proposal   | 14.          |
| 15. | 9 Mei 2025       | ACC Kajian Agama Bab IV              | 15.          |
| 16. | 15 Mei 2025      | Konsultasi Bab IV dan V              | 16.          |



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

|     |              |                                 |     |
|-----|--------------|---------------------------------|-----|
| 17. | 22 Mei 2025  | ACC Bab IV dan V                | 17. |
| 18. | 22 Mei 2025  | ACC Seminar Hasil               | 18. |
| 19. | 3 Juni 2025  | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 19. |
| 20. | 10 Juni 2025 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 20. |
| 21. | 10 Juni 2025 | ACC Kajian Agama Bab IV         | 21. |
| 22. | 12 Juni 2025 | ACC Sidang Skripsi              | 22. |
| 23. | 20 Juni 2025 | ACC Keseluruhan                 | 23. |

Malang, 20 Juni 2025

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005