

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI MEWMA DAN  
MEWMV PADA PENGENDALIAN KUALITAS  
KARAKTERISTIK AIR DI PERUMDA AIR MINUM TUGU  
TIRTA KOTA MALANG**

**SKRIPSI**

**OLEH:  
KARINA RAHMAH DINI  
NIM. 210601110042**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2025**

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI MEWMA DAN  
MEWMV PADA PENGENDALIAN KUALITAS  
KARAKTERISTIK AIR DI PERUMDA AIR MINUM TUGU  
TIRTA KOTA MALANG**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH:  
KARINA RAHMAH DINI  
NIM. 210601110042**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2025**

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI MEWMA DAN  
MEWMV PADA PENGENDALIAN KUALITAS  
KARAKTERISTIK AIR DI PERUMDA AIR MINUM TUGU  
TIRTA KOTA MALANG**

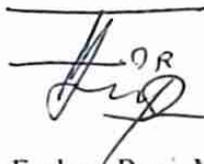
**SKRIPSI**

Oleh  
**Karina Rahmah Dini**  
NIM. 210601110042

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 5 Juni 2025

Dosen Pembimbing I



Dr. Fachruf Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

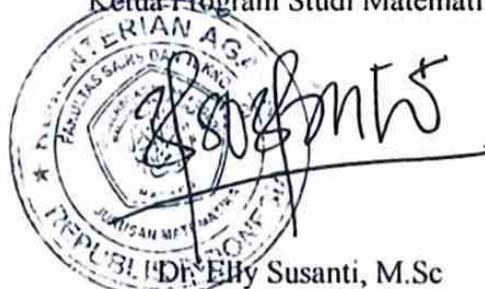
Dosen Pembimbing II



Evawati Alisah, M.Pd  
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



UNIVERSITAS SEBELAS MARET  
JURUSAN MATEMATIKA  
REPUBLIC OF INDONESIA

Elly Susanti, M.Sc  
NIP. 19741129 200012 2 005

**IMPLEMENTASI GRAFIK PENGENDALI MEWMA DAN  
MEWMV PADA PENGENDALIAN KUALITAS  
KARAKTERISTIK AIR DI PERUMDA AIR MINUM TUGU  
TIRTA KOTA MALANG**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Karina Rahmah Dini  
NIM. 210601110042**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 13 Juni 2025

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si.

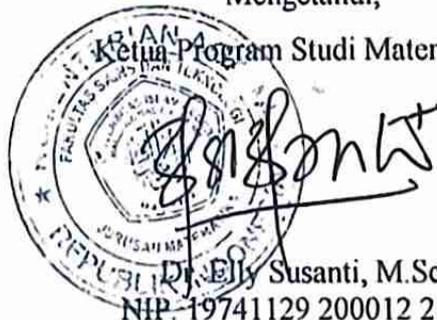
Anggota Penguji 2 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Evawati Alisah, M.Pd.



Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Karina Rahmah Dini  
NIM : 210601110042  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Implementasi Grafik Pengendali MEWMA dan  
MEWMV pada Pengendalian Kualitas Karakteristik  
Air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Juni 2025  
Yang membuat pernyataan,



Karina Rahmah Dini  
NIM. 210601110042

## **MOTTO**

*“Wa kafaah billaahi syahiidaa”*

“Dan cukuplah Allah sebagai saksi”

(Q. S. al-Fath : 28)

## **PERSEMBAHAN**

*Bismillaahirrahmaanirrahiim*, dengan mengucap rasa syukur kepada Allah swt. skripsi ini penulis persembahkan untuk ayah tercinta Dedy Surakhman, bunda tercinta Sri Handayani, adik tersayang Putri Hafizah Rahmadhani yang selalu memberikan doa, dukungan, dan nasihat untuk kesuksesan penulis. Sahabat – sahabat penulis yang telah memberikan bantuan dan semangat selama proses penyusunan skripsi ini hingga selesai.

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyusun proposal skripsi ini. Penyusunan proposal skripsi ini dimaksudkan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana matematika. Selama proses penyusunan proposal skripsi ini penulis mendapat banyak bimbingan nasihat dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen wali dan dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan pengetahuan, nasihat, motivasi, dan arahan dalam proses penyusunan hingga skripsi ini selesai kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan ilmu, motivasi, dan arahan dalam proses penyusunan hingga skripsi ini selesai kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan, nasihat, serta saran kepada penulis.
7. Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si, selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan, nasihat, serta saran kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Ibu Nunuk, selaku narahubung instansi Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.
10. Ibu Indra, Ibu Dwi, Ibu Vivi, Bapak Dimas, Bapak Faldi, selaku karyawan bidang produksi Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang yang membantu dalam kelancaran pengumpulan data.

11. Ayah Dedy, Bunda Hanik, Adik Hafizah dan seluruh keluarga penulis yang telah banyak memberikan perhatian, nasihat, doa, dan dukungan dengan ikhlas baik secara moril dan materiil sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
12. Teman-teman penulis, Reza dan Hana yang memberikan semangat dan bantuan kepada penulis.
13. Penghuni grup “Bawah Tanah” yang memberikan semangat, dukungan, dan waktu hingga skripsi ini selesai.
14. Seluruh tempat yang penulis kunjungi, gunung, pantai, air terjun serta orang-orang yang penulis temui di tempat itu yang telah membangkitkan kembali semangat dalam proses penyusunan skripsi ini.
15. Seluruh teman-teman TEOREMA angkatan 2021 yang menjadi rekan dan kebersamai selama proses perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa proposal skripsi ini tidak sepenuhnya sempurna dan tidak mungkin terlepas dari kesalahan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat dibutuhkan oleh penulis guna memperoleh hasil yang lebih baik.

Malang, 13 Juni 2025

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vi
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiv
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xv
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvii
<b>مستخلص البحث</b> .....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Manfaat Penelitian.....	7
1.5 Batasan Masalah.....	8
<b>BAB II KAJIAN TEORI</b> .....	9
2.1 Teori Pendukung .....	9
2.1.1 Standardisasi Data.....	9
2.1.2 Uji Asumsi Normalitas Multivariat.....	9
2.1.3 Uji Asumsi Korelasi .....	11
2.1.4 Pengendalian Kualitas Statistik.....	12
2.1.5 Grafik Pengendali MEWMA .....	13
2.1.6 Grafik Pengendali MEWMV .....	16
2.1.7 Proses Produksi Air pada Perusahaan Daerah Air Minum .....	20
2.1.8 Parameter Kualitas Air .....	22
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits .....	24
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	27
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	29
3.1 Jenis Penelitian .....	29
3.2 Data dan Sumber Data.....	29
3.3 Lokasi Penelitian .....	29
3.4 Teknik Pengumpulan Data .....	30
3.5 Instrumen Penelitian.....	30
3.6 Teknik Analisis Data.....	30
3.7 Diagram Alir Penelitian .....	33
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	35
4.1 Analisis Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Air .....	35
4.2 Standardisasi Data .....	37

4.3 Uji Asumsi Normalitas Multivariat.....	38
4.4 Uji Asumsi Korelasi .....	41
4.5 Pembentukan Grafik Pengendali MEWMA.....	44
4.6 Pembentukan Grafik Pengendali MEWMV.....	50
4.7 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits.....	60
<b>BAB V PENUTUP</b> .....	62
5.1 Kesimpulan.....	62
5.2 Saran.....	64
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	65
<b>LAMPIRAN</b> .....	67
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	79

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Parameter Kualitas Air Minum .....	22
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif.....	35
Tabel 4.2 Nilai Kriteria Pembobot Optimal MEWMA.....	49
Tabel 4.3 Nilai Kriteria Pembobot Optimal MEWMV .....	58

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 4.1</b> Boxplot Variabel Pengamatan .....	37
<b>Gambar 4.2</b> Grafik Pengendali MEWMA $\lambda = 0,1$ hingga $\lambda = 0,6$ .....	47
<b>Gambar 4.3</b> Grafik Pengendali MEWMA $\lambda = 0,7$ hingga $\lambda = 0,9$ .....	48
<b>Gambar 4.4</b> Grafik Pengendali MEWMV $\omega = 0,1$ hingga $\omega = 0,3$ .....	55
<b>Gambar 4.5</b> Grafik Pengendali MEWMV $\omega = 0,4$ hingga $\omega = 0,5$ .....	56
<b>Gambar 4.6</b> Grafik Pengendali MEWMV $\omega = 0,6$ hingga $\omega = 0,9$ .....	57
<b>Gambar 4.7</b> Grafik Pengendali MEWMV dengan Pembobot Optimal, $\lambda =$ $0,7$ ; $\omega = 0,5$ ; $L = 4,1367$ .....	58
<b>Gambar 4.8</b> Grafik Pengendali MEWMA dengan Pembobot Optimal, $\lambda = 0,7$	59

## DAFTAR SIMBOL

$\mathbf{X}_i$	:	Vektor karakteristik kualitas
$\mu$	:	Rata – rata data
$\sigma$	:	Standar deviasi
$p$	:	Jumlah karakteristik kualitas
$m$	:	Banyaknya pengamatan
$d_i^2$	:	Jarak kuadrat
$r_{ij}$	:	Elemen matriks korelasi $\mathbf{R}$
$\mathbf{Z}_i$	:	Vektor statistik MEWMA
$\mathbf{Z}_i^t$	:	Transpose dari $\mathbf{Z}_i$
$\Sigma_{z_i}$	:	Matriks kovarian dari $\mathbf{Z}_i$
$\lambda$	:	Pembobot grafik pengendali MEWMA
$T_i^2$	:	Statistik $T^2$ -Hotelling plot grafik pengendali MEWMA
$BKA$	:	Batas kendali atas grafik pengendali
$BKB$	:	Batas kendali bawah grafik pengendali
$\mathbf{V}_i$	:	Vektor statistik MEWMV
$\omega$	:	Pembobot grafik pengendali MEWMV
$\mathbf{I}_m$	:	Matriks identitas
$\mathbf{M}$	:	Matriks segitiga bawah dengan elemen pembobot $\lambda$
$\mathbf{C}$	:	Matriks diagonal dengan elemen pembobot $\omega$
$\mathbf{Q}$	:	Matriks persegi
$tr(\mathbf{V}_i)$	:	Statistik plot grafik pengendali MEWMV

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Karakteristik Kualitas Air .....	67
Lampiran 2. Data Hasil Standardisasi .....	68
Lampiran 3. Hasil Perhitungan Nilai $d_i^2$ .....	69
Lampiran 4. Nilai $T_i^2$ pada Grafik Pengendali MEWMA .....	70
Lampiran 5. Lanjutan Nilai $T_i^2$ pada Grafik Pengendali MEWMA .....	71
Lampiran 6. Nilai $tr(\mathbf{V}_i)$ pada Grafik Pengendali MEWMV .....	72
Lampiran 7. Lanjutan Nilai $tr(\mathbf{V}_i)$ pada Grafik Pengendali MEWMV .....	73
Lampiran 8. Syntax Matlab Grafik Pengendali MEWMA .....	74
Lampiran 9. Syntax Matlab Grafik Pengendali MEWMV .....	76

## ABSTRAK

Dini, Karina Rahmah. 2025. **Implementasi Grafik Pengendali MEWMA dan MEWMV pada Pengendalian Kualitas Karakteristik Air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

**Kata Kunci:** Pengendalian Kualitas, MEWMA, MEWMV, Air Minum, Pembobot Optimal, Statistik Multivariat

Pengendalian kualitas air merupakan salah satu usaha untuk memastikan air yang diproduksi memenuhi standar kelayakan konsumsi. Namun, proses produksi air yang dilakukan tidak selalu sesuai dengan standar yang ada dan juga seringkali terpengaruh oleh faktor eksternal lainnya. Hal ini berpengaruh terhadap kandungan air yang diproduksi. Penelitian ini bertujuan untuk melakukan pengendalian kualitas melalui pengendalian rata-rata dan variabilitas proses produksi air menggunakan grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dan *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV) pada pengendalian kualitas air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Data yang digunakan terdiri dari 43 pengamatan yang berlangsung pada bulan September 2023 hingga Juni 2024 dengan karakteristik kualitas air yang diteliti adalah kekeruhan, sisa *chlor*, dan pH. Data yang diperoleh sebelumnya harus distandardisasi dan kemudian dilakukan uji asumsi normalitas multivariat serta uji dependensi variabel. Selanjutnya, dilakukan pembentukan grafik pengendali MEWMA dengan menentukan pembobot  $\lambda$  dan akan dihitung dengan statistik  $T^2$ - Hotelling untuk membuat plot. Kemudian, dipilih pembobot  $\lambda$  optimal dan menentukan  $\omega$  serta  $L$  untuk membentuk grafik pengendali MEWMV. Statistik yang akan digunakan untuk membuat plot grafik pengendali MEWMV adalah  $tr(\mathbf{V}_i)$  serta perlu dihitung untuk batas kendali setiap pengamatan. Hasil menunjukkan bahwa pembobot  $\lambda$  optimal sebesar 0,7 pada grafik pengendali MEWMA dan pembobot  $\omega$  optimal sebesar 0,5 pada grafik pengendali MEWMV. Artinya, grafik pengendali dengan kedua pembobot tersebut merupakan grafik pengendali paling sensitif untuk mendeteksi pergeseran rata-rata dan variabilitas proses produksi air. Grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,7$  menunjukkan adanya satu sinyal *out of control* pada pengamatan ke-3. Sedangkan, grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,5$  menunjukkan bahwa semua pengamatan berada di dalam batas kendali.

## ABSTRACT

Dini, Karina Rahmah. 2025. **Implementation of MEWMA and MEWMV Control Charts on Quality Control of Water Characteristics at Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang**. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

**Keywords:** Quality Control, MEWMA, MEWMV, Drinking Water, Optimal Weighting, Multivariate Statistics

Water quality control is one of the ways to ensure that the produced water satisfies the consumption feasibility standards. However, the water production process does not always comply with existing standards and is also often affected by other external factors. This affects the content of the produced water. This research aims to conduct quality control through controlling the average and variability of the water production process using Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) and Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance (MEWMV) control charts on water quality control at *Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang*. The data used consists of 43 observations that took place from September 2023 to June 2024 with the characteristics of the water quality studied being turbidity residual chlorine, and pH. The data obtained previously must be standardized and then tested for multivariate normality assumptions and variable dependency tests. Next, the MEWMA controller chart is formed by determining the weight  $\lambda$  and will be calculated with the  $T^2$ - Hotteling statistic to create a plot. Then, the optimal  $\lambda$  weight is selected and  $\omega$  and  $L$  are determined to form the MEWMV control chart. The statistic to be used to plot the MEWMV control chart is  $tr(\mathbf{V}_i)$  and needs to be calculated for the control limits of each observation. The results show that the optimal  $\lambda$  weight is 0,7 on the MEWMA control chart and the optimal  $\omega$  weight is 0,5 on the MEWMV control chart. This means that the controller charts with these two weights are the most sensitive controller charts for detecting the variance in the MEWMA control chart.

## مستخلص البحث

ديني، كارينارحمة. ٢٠٢٥. تنفيذ مخططات MEWMA و MEWMV في مراقبة جودة خصائص المياه في مدينة بيرومدا إير مينوم توغو تيرتا مالانج. بحث جامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم وتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك ابراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) الدكتور فخر الرازي، الماجستير في العلوم، (٢) ايفاوتي اليسة، الماجستير في العلوم.

الكلمات الأساسية: مراقبة الجودة، MEWMA، MEWMV، مياه الشرب، الترجيح الأمثل، الإحصاء متعدد المتغيرات

مراقبة جودة المياه هي أحد الجهود المبذولة لضمان تلبية المياه المنتجة لمعايير جدوى الاستهلاك. ومع ذلك، فإن عملية إنتاج المياه لا تتوافق دائماً مع المعايير الحالية وغالباً ما تتأثر أيضاً بعوامل خارجية أخرى. وهذا يؤثر على محتوى المياه المنتجة. هدفت هذه الدراسة إلى تحديد متوسط التحكم والتباين في عملية الإنتاج باستخدام MEWMA و MEWMV على مراقبة جودة المياه في مدينة بيرومدا إير مينوم توغو تيرتا مالانج. كانت البيانات المستخدمة من ٤٣ ملاحظة تمت في الفترة من سبتمبر ٢٠٢٣ إلى يونيو ٢٠٢٤ وكانت خصائص جودة المياه التي تمت دراستها هي العكارة والكلور المتبقي والأس الهيدروجيني. يجب توحيد البيانات التي تم الحصول عليها مسبقاً ثم اختبارها من أجل افتراضات المعيارية متعددة المتغيرات واختبارات التبعية المتغيرة. بعد ذلك، يتم تشكيل مخطط تحكم MEWMA من خلال تحديد الوزن  $\lambda$  وسيتم حسابه باستخدام إحصائية Hotelling- $T^2$  لإنشاء مخطط. بعد ذلك، يتم تحديد الوزن  $\lambda$  المثالي ويتم تحديد  $L$  و  $\omega$  لتشكيل مخطط تحكم MEWMV. الإحصاء الذي سيستخدم لرسم مخطط تحكم MEWMV هو  $tr(V_i)$  ويجب حسابه لحدود التحكم لكل ملاحظة. تُظهر النتائج أن وزن  $\lambda$  الأمثل هو 0,7 على مخطط تحكم MEWMA ووزن  $\omega$  الأمثل هو 0,5 على مخطط تحكم MEWMV وهذا يعني أن مخططي التحكم بهذين الوزنين هما أكثر مخططات التحكم حساسية للكشف عن التباين. وهذا يعني أن مخطط وحدة التحكم مع هذين الوزنين هو مخطط وحدة التحكم الأكثر حساسية للكشف عن التحولات في المتوسط والتباين في عملية إنتاج المياه. يُظهر مخطط وحدة التحكم MEWMA بالوزن  $\lambda = 0,7$  أن هناك إشارة واحدة خارج نطاق التحكم في الملاحظة الثالثة. في حين أن الرسم البياني لوحدة التحكم MEWMV بوزن  $\omega = 0,5$  يُظهر أن جميع الملاحظات ضمن حدود التحكم.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pengendalian kualitas merupakan pengaplikasian teknik tertentu guna menjaga kualitas produk hingga sesuai dengan spesifikasi yang telah ditentukan. Salah satu metode yang digunakan pada pengendalian kualitas adalah grafik pengendali. Grafik pengendali dibedakan menjadi dua macam berdasarkan karakteristiknya, yakni grafik pengendali variabel serta grafik pengendali atribut. Apabila data bersifat kualitatif atau kategori, maka dapat menggunakan grafik pengendali jenis atribut untuk menyatakan kualitasnya. Sedangkan grafik pengendali untuk menyatakan kualitas yang dapat diukur, dapat dimanfaatkan grafik pengendali untuk variabel. Kemudian berdasarkan banyaknya karakteristik kualitas yang digunakan dibagi menjadi dua, yaitu grafik pengendali univariat dan grafik pengendali multivariat.

Grafik pengendali multivariat digunakan pada data yang memiliki dua atau lebih karakteristik kualitas. Hal ini dapat dilakukan melalui korelasi. Menurut Montgomery dalam Agustina beberapa perkembangan pada grafik pengendali multivariat ini diantaranya, yaitu *Multivariate Exponentially Weighting Moving Average* (MEWMA) dan *Multivariate Exponentially Weighting Moving Variance* (MEWMV). Grafik pengendali MEWMA sensitif mendeteksi pergeseran mean yang lebih kecil dan grafik pengendali MEWMV sensitif mendeteksi pergeseran variabilitas proses yang kecil (Maharani, dkk., 2018).

Keunggulan grafik pengendali MEWMA adalah kemampuan dalam mendeteksi vektor mean dan pergeseran rata-rata proses yang relatif kecil. Selain itu, grafik pengendali MEWMA juga robust atau tidak terpengaruh terhadap asumsi distribusi normal multivariat. Artinya, meskipun hasil dari uji asumsi normalitas tidak menyatakan bahwa data memenuhi asumsi normal. Data tersebut masih dapat digunakan dan dilanjutkan dalam proses pembuatan grafik pengendali MEWMA. Proses MEWMA nantinya akan memberikan nilai pembobot yang pergerakannya secara eksponensial. Adapun keunggulan grafik pengendali MEWMV adalah kemampuan pendeteksian pergeseran variabilitas proses kecil yang cukup sensitif, tanpa asumsi tidak terjadi perubahan rata-rata selama prosesnya. Sehingga, MEWMV sensitif terhadap perubahan variabilitas proses. Grafik pengendali MEWMV nantinya membuat kombinasi nilai pembobot.

Implementasi grafik pengendali MEWMA dapat mendeteksi variabel-variabel yang berhubungan. Data yang ada akan dilakukan perhitungan untuk menentukan matriks kovarian dan varian. Pada grafik pengendali MEWMV nantinya akan mendeteksi perubahan pada matriks kovarian. Sehingga, diperoleh titik-titik yang akan digunakan dalam pembuatan grafik pengendali MEWMV dan diperoleh nilai variansi terkecil dan terbesarnya. Adapun hasil analisis pada grafik pengendali MEWMA dan MEWMV juga tergantung pada hasil penentuan batas kendali, yaitu batas atas dan batas bawah yang juga menjadi acuan pada penentuan hasil pengendalian kualitas. Kemudian, dilakukan juga kapabilitas proses pada kedua grafik MEWMA dan MEWMV. Kapabilitas proses ini dilakukan untuk mengetahui hasil evaluasi terhadap proses secara keseluruhan. Sehingga, nantinya dapat diketahui kualitas air yang diperoleh sesuai dengan standar dan spesifikasinya.

Salah satu penggunaan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV, yaitu dapat diimplementasikan dalam pengendalian kualitas air. Variabel-variabel yang memiliki hubungan dapat dideteksi oleh grafik pengendali MEWMA dan MEWMV. Khususnya pada penelitian ini akan diteliti karakteristik kualitas air yang tentu saja salah satunya berkaitan dengan kandungan senyawa kimia dan parameter fisika. Air adalah salah satu sumber daya yang sangat dibutuhkan untuk mempertahankan kehidupan, khususnya manusia. Manusia membutuhkan air bersih untuk kebutuhan konsumsi pangan, sanitasi, pengairan, dll. Menurut Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor: 492/KEMENKES/PER/IV/2010, air yang bersih memiliki beberapa persyaratan seperti pH netral, jernih, tidak berwarna, tidak memiliki bau, tidak berasa, bebas dari racun, dan bebas dari kandungan mikroorganisme atau senyawa tertentu. Meskipun pada kenyataannya masih banyak masyarakat yang tidak terpenuhi kebutuhan air bersihnya yang sesuai dengan standar tersebut karena banyaknya faktor. Oleh karena itu, dibutuhkan proses pengendalian air bersih yang baik oleh pihak tertentu. Sehingga, dapat dilakukan pemeliharaan dan pendistribusian air dengan baik kepada masyarakat sesuai dengan standar Kementerian Kesehatan.

Penyediaan air bersih dan layak konsumsi merupakan tanggung jawab pemerintah yaitu sebagai salah satu upaya meningkatkan kesejahteraan kehidupan masyarakat. Pelaksana di lingkup kabupaten/kota yang bertanggung jawab untuk menyediakan air bersih adalah Perusahaan Umum Daerah (Perumda) Air Minum sebagai salah satu Badan Usaha Milik Daerah (BUMD). Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang adalah unit daerah sebagai penyedia air minum yang terletak di daerah Kota Malang. Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang tentu saja

bertanggung jawab untuk menyediakan keperluan air bersih masyarakat di Kota Malang dan Kabupaten Malang.

Grafik pengendali multivariat yang akan digunakan pada penelitian ini dapat digunakan jika terdapat hubungan antar variabelnya. Beberapa penelitian terdahulu yang menggunakan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV, baik digunakan salah satunya atau bersamaan menyatakan bahwa metode tersebut efektif untuk mengetahui apakah suatu produk terkendali secara statistik atau tidak. Penelitian serupa pada kualitas air di PDAM Tirta Moedal Kota Semarang yang menggunakan grafik pengendali MEWMA menyatakan bahwa metode MEWMA efektif untuk menunjukkan suatu proses terkendali secara statistik (Arinda & Abdul Mukid, 2016). Penelitian lainnya yang menggunakan grafik pengendali MEWMV untuk pengendalian kualitas air di PDAM Tirta Mahakam Kutai Kertanegara Tenggarong juga menyatakan bahwa metode tersebut efektif untuk menunjukkan apabila terdapat proses yang belum sesuai dengan spesifikasi (Baransano, dkk., 2018). Selain penelitian menggunakan kedua metode secara terpisah di atas, terdapat penelitian lainnya yang menggunakan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV untuk memperdalam hasil analisis. Penelitian tersebut dilakukan pada lulusan program studi statistika di Universitas Syiah Kuala. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa penggunaan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV dapat memberikan hasil analisis yang lebih baik sesuai dengan spesifikasi yang telah ditentukan serta dapat digunakan sebagai bahan evaluasi (Jannah, dkk., 2023)

Manusia merupakan makhluk ciptaan Allah swt. dengan segala kesempurnaannya yang dibekali dengan akal fikiran. Manusia diciptakan dengan berbagai sifat dan karakteristik yang berbeda. Pada dasarnya, manusia diciptakan

untuk beribadah, menyembah, dan selalu mengingat-Nya. Namun, tidak hanya dengan beribadah kepada Allah swt. (*hablum minallah*), namun perlu disertai baiknya hubungan dengan manusia (*hablum minannas*). Sehingga, terjalin dua hubungan yang baik antara seorang hamba dengan pencipta dan seorang hamba dengan hamba yang lainnya. Hal tersebut dilakukan semata-mata hanya demi beribadah kepada Allah dan berharap balasannya dan digolongkan kepada orang-orang yang baik. Sebagaimana firman Allah dalam Q. S. al-A'raf ayat 168 yang artinya:

*“Dan Kami bagi-bagi mereka di dunia ini menjadi beberapa golongan; di antaranya ada orang-orang yang shalih dan di antaranya ada yang tidak demikian. Dan kami coba mereka dengan (nikmat) yang baik-baik dan (bencana) yang buruk-buruk, agar mereka kembali (kepada kebenaran).”* (Kementerian Agama RI, 2022)

Allah menciptakan manusia di bumi dan menggolongkannya menjadi dua kelompok, yaitu sebagian orang-orang yang baik (*min humus shalihuuna*), dan orang-orang yang tidak baik (*wa min hum duuna dzaalika*) (Abdullah, 2004). Kemudian, Allah uji mereka dengan kebaikan yang terasa nikmat dan keburukan sebagai bencana. Menurut tafsir tersebut, surah al-A'raf ayat 168 ini menuntut manusia untuk berjalan di jalan yang benar dan menjadi orang-orang yang berada pada kebenaran. Namun, pada kenyataannya tidak demikian. Ada beberapa manusia justru memilih jalan yang tidak sesuai dan dikehendaki oleh Allah swt.. Hal ini juga sesuai dengan proses produksi. Produsen dituntut untuk memberikan produk yang baik kepada konsumen, namun kenyataannya pasti ada produk yang tidak memenuhi kriteria spesifik yang telah ditentukan. Adapun penyebab dari ketidaksesuaian kriteria tersebut juga sangat beragam, diantaranya yaitu kesalahan dalam proses produksi, *human error*, dll. Sama halnya dengan produk yang tidak

sesuai dengan kriteria standar dengan artian terdapat variabel *out of control*, penafsiran surat al-A'raf ayat 168 tersebut juga dapat diartikan bahwa terdapat juga manusia yang belum memenuhi kriteria dalam melaksanakan kewajibannya kepada Allah swt..

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini menganalisis pengendalian karakteristik air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Pemilihan variabel yang dilakukan didasarkan pada masyarakat yang tidak mau mengonsumsi air produksi Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang karena warnanya yang keruh. Penelitian ini menggunakan tiga variabel yang berpotensi memberikan pengaruh, yaitu kekeruhan, sisa *chlor*, dan derajat keasaman (pH). Variabel-variabel tersebut saling berhubungan dan memengaruhi satu sama lain (Jayanti & Wibawati, 2014). Ketika konsentrasi sisa *chlor* meningkat, maka akan sejalan dengan kenaikan pH. Kemudian, konsentrasi kekeruhan akan sejalan dengan kebutuhan kandungan *chlor* pada air (Jayanti & Wibawati, 2014). Selain itu, kandungan berlebih pada variabel tersebut dalam jangka panjang dapat menyebabkan gangguan kesehatan. Sehingga perlu dilakukan pengendalian kualitas terhadap air yang diproduksi.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang, dirumuskan permasalahan berikut:

1. Bagaimana hasil implementasi grafik pengendali MEWMA pada pengendalian rata-rata proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang?

2. Bagaimana hasil implementasi grafik pengendali MEWMV pada pengendalian variabilitas proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang?

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendeskripsikan dan menganalisis hasil implementasi grafik pengendali MEWMA pada pengendalian rata-rata proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.
2. Mendeskripsikan dan menganalisis hasil implementasi grafik pengendali MEWMV pada pengendalian variabilitas proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.

### **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Bagi Mahasiswa
  - a. Mahasiswa memperoleh pengalaman dan pengetahuan terkait penerapan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV.
  - b. Penelitian ini dapat meningkatkan daya saing mahasiswa di dunia kerja terutama pada bidang pengendalian kualitas atau sejenisnya.
2. Bagi Khalayak Umum

Khalayak umum dapat menambah wawasan dan pengetahuan terkait pentingnya pengendalian kualitas dan kegunaan grafik pengendali MEWMA

dan MEWMV serta khalayak umum juga dapat mengetahui kualitas air yang baik untuk dikonsumsi.

### 3. Bagi Program Studi Matematika

Penelitian ini diharapkan dapat menambah studi literatur matematika di bidang statistika khususnya pengendalian kualitas.

## 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang sesuai dengan rumusan masalah dan tujuan penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini, permasalahan dibatasi pada pemeriksaan kualitas karakteristik air di PERUMDA AIR MINUM Tugu Tirta Kota Malang dengan tiga parameter, yaitu kekeruhan, sisa *chlor*, dan pH.
2. Pengukuran penelitian ini hanya membahas tentang implementasi grafik pengendali MEWMA dan MEWMV.
3. Penelitian ini dilakukan pada pengendalian kualitas Fase I.

## **BAB II**

### **KAJIAN TEORI**

#### **2.1 Teori Pendukung**

##### **2.1.1 Standardisasi Data**

Standardisasi data merupakan proses mengubah nilai-nilai suatu data dengan tujuan menyamakan skala antar variabel agar data dapat diproses dengan baik. Proses standardisasi data dilakukan dengan mengubah data agar memiliki rata-rata 0 dan standar deviasi 1. Adapun nilai hasil standardisasi dapat diperoleh berdasarkan persamaan berikut.

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

Keterangan:

$Z_i$  : Data yang terstandardisasi

$X_i$  : Data yang akan distandardisasi

$\mu$  : Rata – rata data

$\sigma$  : Standar deviasi

##### **2.1.2 Uji Asumsi Normalitas Multivariat**

Distribusi normal adalah distribusi yang banyak digunakan sebagai asumsi dalam banyak metode statistika. Distribusi normal multivariat merupakan uji asumsi normalitas pada data multivariat dengan perluasan dari distribusi normal univariat. Uji asumsi normalitas multivariat ini berfungsi untuk memastikan data pengamatan mengikuti distribusi normal terhadap seluruh variabel (Arinda & Abdul Mukid, 2016).

Misalkan  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$  adalah vektor pengamatan dengan  $p$  variabel. Fungsi densitas pada distribusi normal multivariat untuk vektor  $X$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-1/2(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})} \quad (2.1)$$

Keterangan:

$\boldsymbol{\Sigma}$  : Matriks variansi dari distribusi normal p-variati

$\boldsymbol{\mu}$  : Vektor rata – rata dari distribusi normal p-variati

Hipotesis dari data multivariat untuk pengujian normalitas multivariat adalah:

$H_0$  : Vektor pengamatan berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : Vektor pengamatan tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik uji distribusi normal multivariat yang digunakan adalah statistik uji  $d_i^2$  dari jarak Mahalanobis. Jarak mahalobis dipilih karena tidak hanya mengatasi perbedaan skala dalam data, tetapi juga mempertimbangkan pengaruh korelasi antar variabel (Frangkamon, dkk., 2019). Jarak mahalobis mendefinisikan persamaan jarak kuadrat (*square distance*) yang diperumum sebagai berikut (Johnson & Wichern, 2007)

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \quad (2.2)$$

$\mathbf{X}_i$  adalah vektor nilai pengamatan ke- $i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m$  dengan  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})^t$ .  $\bar{\mathbf{X}}$  adalah vektor rata-rata dengan  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)$  dan  $(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^t$  adalah vektor transpose nilai pengamatan yang dikurangi rata-rata.  $\mathbf{S}^{-1}$  adalah invers matriks kovarian  $\mathbf{S}$  berukuran  $p \times p$  dengan setiap elemen dapat diperoleh dari persamaan berikut.

$$S_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k) \quad (2.3)$$

Keterangan:

$i$  : 1,2, ...,  $m$

$j$  : 1,2, ...,  $p$

$k$  : 1,2, ...,  $p$

$p$  : Jumlah karakteristik kualitas

$m$  : Banyaknya pengamatan

$H_0$  akan ditolak jika nilai  $d_i^2$  yang kurang dari  $\chi_{\alpha,df}^2$  sebesar 50%, dengan  $\alpha$  adalah tingkat signifikansi dan  $df$  adalah derajat kebebasan (Johnson dan Wichern, 2007).

### 2.1.3 Uji Asumsi Korelasi

Uji asumsi korelasi adalah tahap uji yang digunakan untuk mengetahui keterkaitan antar variabel. Pada grafik pengendali multivariat, asumsi dalam uji korelasi harus terpenuhi bahwa terdapat hubungan antar variabel. Sehingga pada penelitian ini akan digunakan uji Bartlett untuk mengetahui korelasi data dengan lebih dari dua variabel (Jannah, dkk., 2023).

Adapun hipotesis uji Bartlett sebagai berikut:

$H_0$  :  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  (Antarvariabel tidak memiliki korelasi)

$H_1$  :  $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$  (Antarvariabel memiliki korelasi)

Statistik uji Bartlett adalah (Bartlett, 1951):

$$\chi^2 = - \left( m - 1 - \frac{2p + 5}{6} \right) \ln |\mathbf{R}| \quad (2.4)$$

dengan  $m$  adalah banyaknya pengamatan,  $p$  adalah banyaknya variabel,  $|\mathbf{R}|$  adalah determinan matriks  $\mathbf{R}$ , dan  $\mathbf{R}$  adalah matriks korelasi antarvariabel dengan

$$r_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_{t,i} - \bar{Y}_i)(Y_{t,j} - \bar{Y}_j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (Y_{t,i} - \bar{Y}_i)^2 (Y_{t,j} - \bar{Y}_j)^2}} \quad (2.5)$$

dengan  $r_{ij}$  adalah nilai korelasi antarvariabel ke- $i$  dan ke- $j$ ,  $Y_{t,i}$  adalah data pengamatan ke- $t$  untuk variabel ke- $i$ ,  $Y_{t,j}$  adalah data pengamatan ke- $t$  untuk variabel ke- $j$ ,  $\bar{Y}_i$  adalah rata-rata variabel ke- $i$ , dan  $\bar{Y}_j$  adalah rata-rata variabel ke- $j$ .  $H_0$  ditolak jika  $\chi^2 \geq \chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}m(m-1))}$  atau  $p - value < \alpha = 0,05$ . Artinya, ada korelasi antarvariabel atau karakteristik kualitas.

#### 2.1.4 Pengendalian Kualitas Statistik

Pengendalian kualitas merupakan kegiatan yang bertujuan menjaga kualitas produk, baik mempertahankan ataupun mengembangkan kualitas suatu produk tertentu. Adapun tujuan lainnya yang lebih spesifik dari pengendalian kualitas adalah untuk efektivitas perlakuan ataupun penekanan biaya produksi. Pengendalian kualitas ini membandingkan antara apa yang terjadi dengan standar spesifikasi yang telah ditentukan. Kemudian, dapat diambil tindakan terhadap keadaan tersebut (Arinda & Abdul Mukid, 2016).

Adapun pengendalian kualitas statistik dilakukan dengan tujuan untuk meminimalisir adanya kesalahan dengan perhitungan-perhitungan secara statistik. Kemudian, suatu proses dikatakan terkendali secara statistik apabila tidak terdapat penyimpangan baik pada alat, *human error*, material, perhitungan, dan sebagainya. Adapun pengendalian kualitas memiliki alat yang sering digunakan dan disebut dengan tujuh alat utama (*seven tools*), diantaranya yaitu (Montgomery, 2013):

1. *Check sheet*
2. Histogram
3. *Fishbone diagram* (diagram sebab-akibat)
4. *Pareto chart*
5. *Defect concentration diagram* (diagram konsentrasi cacat)
6. *Scatterplot*
7. Grafik pengendali

Berdasarkan tujuh alat pengendalian kualitas di atas, salah satunya akan diterapkan pada penelitian ini. Alat yang digunakan tersebut adalah grafik pengendali.

Grafik pengendali merupakan salah satu alat pengendalian kualitas yang digunakan untuk mengetahui suatu proses yang diteliti berada dalam keadaan *in control* atau *out of control*. Penentuan proses tersebut diketahui dengan memperhatikan posisi proses pada grafik dengan mempertimbangkan batas kendali atas (BKA) dan batas kendali bawah (BKB) pada grafik. Adapun grafik pengendali terdiri dari batas kendali atas, batas kendali bawah, dan statistik dari grafik pengendali tersebut.

### **2.1.5 Grafik Pengendali MEWMA**

Grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighting Moving Average* (MEWMA) merupakan salah satu grafik pengendali yang digunakan dalam pengendalian proses data multivariat. Pada data dengan distribusi normal multivariat, pergeseran vektor rata-rata pada grafik pengendali MEWMA lebih sensitif dibandingkan dengan grafik pengendali  $T^2$ -Hotelling untuk data yang

berdistribusi normal multivariat (Jannah, dkk., 2023). Adapun statistik MEWMA adalah pengembangan dari statistik EWMA yang dirumuskan sebagai berikut (Montgomery, 2013).

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{i-1}, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

dengan  $m$  adalah banyaknya pengamatan,  $\lambda$  adalah pembobot yang memiliki nilai  $\lambda \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ ,  $\mathbf{X}_i$  adalah vektor karakteristik kualitas dalam bentuk berikut.

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})^t, i = 1, 2, \dots, m$$

Adapun nilai awal yang digunakan adalah  $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ .

Pada saat  $i = 1$ , diperoleh

$$\mathbf{Z}_1 = \lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{1-1} = \lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_0 = \lambda \mathbf{X}_1$$

Pada saat  $i = 2$ , diperoleh

$$\mathbf{Z}_2 = \lambda \mathbf{X}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{2-1} = \lambda \mathbf{X}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_1 = \lambda \mathbf{X}_2 + (1 - \lambda) \lambda \mathbf{X}_1 = \lambda (\mathbf{X}_2 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_1)$$

Langkah substitusi di atas dilakukan hingga  $i = m$ , dengan  $m$  adalah banyaknya pengamatan. Sehingga diperoleh persamaan umum vektor MEWMA berikut (Lowry, dkk., 1992).

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \mathbf{X}_{i-j} \quad (2.7)$$

Grafik pengendali MEWMA menunjukkan keadaan data dalam grafik pengendali untuk setiap pengamatan melalui persamaan berikut (Lowry, dkk., 1992).

$$T_i^2 = \mathbf{Z}_i^t \Sigma_{\mathbf{Z}_i}^{-1} \mathbf{Z}_i \quad (2.8)$$

$\mathbf{Z}_i$  adalah vektor berukuran  $p \times 1$  dan  $\mathbf{Z}_i^t$  adalah vektor transpose dari  $\mathbf{Z}_i$  dengan  $\Sigma_{z_i}$  adalah matriks kovarian  $\mathbf{Z}_i$ . Matriks kovarian  $\mathbf{Z}_i$  dapat dihitung dengan persamaan (2.9). Persamaan (2.9) merupakan persamaan serupa yang diperoleh dari persamaan variansi grafik pengendali EWMA (Lowry, dkk, 1992).

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{z_i} &= \frac{\lambda^2 [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{[2\lambda - \lambda^2] \sigma_{j,k}} \\
 &= \frac{\lambda^2 [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{[\lambda(2 - \lambda)] \sigma_{j,k}} \\
 &= \left[ \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda)^{2i})}{(2 - \lambda)} \right] \sigma_{j,k} \\
 &= \left[ \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda)^{2i})}{(2 - \lambda)} \right] \Sigma
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Adapun nilai  $T_i^2$  pada persamaan (2.8) akan merepresentasikan grafik MEWMA dan menunjukkan data *out of control* dengan cara membandingkannya terhadap batas kendali atas (BKA), yang dilambangkan dengan  $h_4$ . BKA ini dapat dihitung melalui pendekatan simulasi untuk memperoleh rata-rata yang terkendali. Di sisi lain, batas kendali bawah (BKB) pada grafik pengendali MEWMA dipengaruhi oleh nilai  $T_i^2$  yang selalu bernilai positif. Oleh karena itu, nilai BKB pada grafik pengendali MEWMA adalah 0, karena nilai minimum dari suatu angka positif pasti 0 (Montgomery, 2013). Simulasi pembuatan grafik pengendali MEWMA dilakukan pada pembobot  $\lambda \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ , . Besaran pembobot ini sesuai dengan batas kendali atas ( $h_4$ ) yang diberikan (Jannah, dkk., 2023). Setelah dilakukan simulasi terhadap masing-masing nilai pembobot, selanjutnya dilakukan pemilihan pembobot optimal yang didasarkan pada kriteria tertentu.

### 2.1.6 Grafik Pengendali MEWMV

Grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighting Moving Variance* (MEWMV) adalah grafik pengendali yang dapat mendeteksi pergeseran variabilitas proses, dimana tidak ada asumsi perubahan rata-rata proses. Statistik MEWMV dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$\mathbf{V}_i = \omega(\mathbf{X}_i - \mathbf{Z}_i)(\mathbf{X}_i - \mathbf{Z}_i)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_{i-1} \quad (2.10)$$

$\omega$  adalah pembobot *smoothing constant* dimana  $\omega \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ , dan didefinisikan  $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$  dan  $\mathbf{V}_0 = (\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t$ , dengan  $\mathbf{Z}_i$  merupakan statistik MEWMA yang telah didefinisikan pada persamaan (2.6).

Pada saat  $i = 1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \omega(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_{1-1} \\ &= \omega(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_0 \\ &= \omega(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t + (1 - \omega)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t \\ &= ((\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t)(\omega + (1 - \omega)) \\ &= \mathbf{V}_0(\omega + (1 - \omega)) \end{aligned}$$

Pada saat  $i = 2$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \omega(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_{2-1} \\ &= \omega(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_1 \\ &= \omega(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)^t + (1 - \omega)\mathbf{V}_0(\omega + (1 - \omega)) \end{aligned}$$

Langkah substitusi di atas dilakukan hingga  $i = m$ , dengan  $m$  adalah banyaknya pengamatan dan  $j = 0,1,2, \dots, m$ . Sehingga diperoleh persamaan umum berikut (Huwang, dkk., 2007):

$$\mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^i \omega(1 - \omega)^{i-j}(\mathbf{X}_i - \mathbf{Z}_i)(\mathbf{X}_i - \mathbf{Z}_i)^t + (1 - \omega)^i\mathbf{V}_0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \sum_{i=1}^m (1 - \lambda)^{(i-1)} \mathbf{X}_i$$

$$\mathbf{X}_i - \mathbf{Z}_i = (1 - \lambda)\mathbf{X}_i - \lambda(1 - \lambda)\mathbf{X}_{i-1} - \dots - \lambda(1 - \lambda)^{i-1}\mathbf{X}_1 \quad (2.13)$$

dimana  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Berdasarkan persamaan (2.13), dapat dilakukan perhitungan berikut.

$$\begin{aligned} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) &= \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}_1)^t \\ (\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}_2)^t \\ \vdots \\ (\mathbf{X}_m - \mathbf{Z}_m)^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda(1 - \lambda) & 1 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda(1 - \lambda)^{m-1} & \dots & -\lambda(1 - \lambda) & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^t \\ \mathbf{X}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m^t \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1 - \lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1 - \lambda)^{m-1} & \dots & \lambda(1 - \lambda) & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^t \\ \mathbf{X}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m^t \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{M})\mathbf{X} \end{aligned}$$

dengan  $\mathbf{I}_m$  adalah matriks identitas berukuran  $m \times m$  dan  $\mathbf{M}$  adalah matriks segitiga bawah berukuran  $m \times m$  serta  $\lambda$  sebagai pembobot optimal yang telah dipilih.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1 - \lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1 - \lambda)^{m-1} & \dots & \lambda(1 - \lambda) & \lambda \end{bmatrix}$$

Kemudian, didefinisikan  $\mathbf{C}$  sebagai matriks diagonal berukuran  $m \times m$  dengan elemen  $\omega$  sebagai pembobot yang ditetapkan.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1 - \omega)^{m-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(1 - \omega)^{m-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \omega(1 - \omega) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.12), dapat dituliskan kembali persamaan berikut (Huwang, dkk., 2007).

$$\mathbf{V}_i = (\mathbf{X} - \mathbf{Z})^t \mathbf{C} (\mathbf{X} - \mathbf{Z}) = \mathbf{X}^t (\mathbf{I}_m - \mathbf{M})^t \mathbf{C} (\mathbf{I}_m - \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X} \quad (2.14)$$

$\mathbf{Q}$  adalah matriks persegi yang dapat diperoleh dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{M})^t \mathbf{C} (\mathbf{I}_m - \mathbf{M}) \quad (2.15)$$

dengan  $1 \leq i, j \leq t$ .

Berdasarkan persamaan (2.14), dapat diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{V}_i) &= tr(\mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X}) = tr(\mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{X}^t) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj} \left( \sum_{k=1}^p x_{lk} x_{jk} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Berdasarkan persamaan (2.16), garis tengah pada grafik pengendali MEWMV akan memenuhi persamaan berikut.

$$\begin{aligned} E[tr(\mathbf{V}_i)] &= E \left[ \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj} \left( \sum_{k=1}^p x_{lk} x_{jk} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj} \left( \sum_{k=1}^p E[x_{lk} x_{jk}] \right) \\ &= \sum_{l=1}^m q_{ll} \sum_{k=1}^p E[x_{lk}^2] + \sum_{l=1, l \neq j}^m \sum_{j=1}^m q_{lj} \left( \sum_{k=1}^p E[x_{lk} x_{jk}] \right) \end{aligned}$$

dengan asumsi data yang telah distandardisasi memiliki  $E[x_{jk}] = 0$  dan  $var[x_{jk}] = 1$ , maka diperoleh persamaan berikut: .

$$\begin{aligned} E[tr(\mathbf{V}_i)] &= p \sum_{i=1}^m q_{ii} \\ &= p \times tr(\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Kemudian, batas kendali dari  $tr(\mathbf{V}_i)$  dapat diperoleh dengan melakukan perhitungan pada  $Var[tr(\mathbf{V}_i)]$  berikut.

$$\begin{aligned}
Var[tr(\mathbf{V}_i)] &= Var \left[ \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj} \left( \sum_{k=1}^p x_{lk} x_{jk} \right) \right] \\
&= Var \left[ \sum_{l=1}^m q_{ll} \sum_{k=1}^p x_{lk}^2 + 2 \sum_{l=1}^m \sum_{j<l}^m q_{lj} \sum_{k=1}^p x_{lk} x_{jk} \right] \\
&= \sum_{l=1}^m q_{ll}^2 Var \left[ \sum_{k=1}^p x_{lk}^2 \right] + 4 \sum_{l=1}^m \sum_{j<l}^m q_{lj}^2 Var \left[ \sum_{k=1}^p x_{lk} x_{jk} \right] \\
&= 2p \sum_{l=1}^m q_{ll}^2 + 4p \sum_{l=1}^m \sum_{j<l}^m q_{lj}^2 \\
&= 2p \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj}^2 \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Batas dari grafik pengendali MEWMV juga dapat diperoleh dengan persamaan berikut.

$$BKA = p \times tr(\mathbf{Q}) + L \sqrt{2p \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj}^2} \tag{2.19}$$

dan

$$BKB = p \times tr(\mathbf{Q}) - L \sqrt{2p \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m q_{lj}^2} \tag{2.20}$$

dengan konstanta  $L$  bergantung pada  $p$ ,  $\omega$ , dan  $\lambda$  dapat diperoleh dari simulasi Monte-Carlo (Jayanti dan Wibawati, 2014). Grafik pengendali MEWMA dibuat untuk setiap pembobot  $\omega \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ . Besaran nilai pembobot sesuai dengan pembobot  $\lambda$  optimal pada grafik pengendali MEWMA dan konstanta  $L$  yang diberikan (Huwang, dkk., 2007). Setelah dilakukan simulasi terhadap

masing-masing nilai pembobot dan dilakukan pemilihan pembobot optimal yang didasarkan pada kriteria tertentu.

### **2.1.7 Proses Produksi Air pada Perusahaan Daerah Air Minum**

Perusahaan Umum Daerah (Perumda) Air Minum adalah unit usaha yang dimiliki oleh pemerintah daerah dan bertugas di bidang pendistribusian air bersih serta air minum. Pendistribusian air bertujuan untuk memenuhi kebutuhan air yang dikonsumsi oleh masyarakat di daerah tersebut. Hal ini sesuai dengan tanggung jawab yang dituliskan pada Peraturan Daerah Kota Malang Nomor 11 tahun 1974.

Air yang didistribusikan pada masyarakat merupakan air baku yang telah disyaratkan mutunya. Terdapat dua jenis air baku yang diolah oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang, yaitu air baku dari sumber air dan air sumur bor. Air dari mata air langsung tersebut mempengaruhi proses pengolahan sebelum dilakukan pendistribusian. Air yang diolah tidak mendapatkan banyak perlakuan spesifik tertentu baik secara fisik dan kimiawi karena kemurniannya.

Pemrosesan air baku oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang menjadi air siap minum termasuk pada proses pengolahan air secara sederhana atau yang sering disebut dengan *partial treatment process*. Langkah-langkah pengolahan air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang adalah sebagai berikut:

1. Tahap pengambilan air

Tahap pengambilan air dilakukan dengan bangunan intake atau *broncaptering*. *Broncaptering* adalah bangunan penangkap air yang

berguna untuk menangkap air baku. Bangunan ini dapat menyaring air sehingga dapat mencegah masuknya sampah pada aliran air yang akan didistribusikan. Bangunan ini memiliki penggerak elektromotor dan pintu yang berfungsi untuk mengatur ketinggian air. Sehingga, air dapat diatur dengan baik dalam pemrosesannya.

## 2. Tahap disinfeksi

Tahap disinfeksi dilakukan dengan menambahkan gas *chlor* ( $Cl_2$ ) pada suatu zat. Gas *chlor* ini berfungsi untuk mencegah pertumbuhan bakteri patogen di dalam air.

## 3. Tahap penampungan air

Penampungan air ini dilakukan dengan *reservoir*, dimana yang digunakan pada umumnya adalah *reservoir* bangunan dan baja. Pada tahap penampungan air ini juga dilakukan ulang pemberian gas *chlor* agar kualitas air baku tetap terjaga hingga air didistribusikan.

## 4. Tahap distribusi

Distribusi adalah tahap pelayanan atau pengedaran air untuk dikonsumsi oleh masyarakat. Sistem pendistribusian air yang digunakan oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang memiliki tiga jenis, diantaranya adalah pelayanan tangki (pengiriman air pada rumah dengan tangki), sistem jaringan pipa (pembukaan aliran air), dan sistem kran umum (penyediaan air siap minum).

### 2.1.8 Parameter Kualitas Air

Air adalah komponen penting dalam kehidupan seluruh makhluk hidup, khususnya manusia. Manusia membutuhkan air bersih dalam keberlangsungan kehidupan sehari-hari. Menurut Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor: 492/KEMENKES/PER/IV/2010, air bersih memiliki beberapa kriteria seperti pH netral, jernih, tidak berwarna, tidak memiliki bau, tidak berasa, bebas dari racun, dan bebas dari kandungan mikroorganisme atau senyawa tertentu.

**Tabel 2.1 Parameter Kualitas Air Minum**

Jenis Parameter	Parameter	Satuan	Kadar Maksimum
Parameter yang berhubungan langsung dengan kesehatan			
Mikrobiologi	<i>E. Coli</i>	Jumlah per 100 ml sampel	0
	Bakteri koliform	Jumlah per 100 ml sampel	0
Kimia Anorganik	Arsen	mg/L	0,01
	Fluorida	mg/L	1,5
	Total Kromium	mg/L	0,05
	Kadmium	mg/L	0,003
	Nitrit	mg/L	3
	Nitrat	mg/L	50
	Sianida	mg/L	0,07
	Selenium	mg/L	0,01
Parameter yang tidak langsung berhubungan dengan kesehatan			
Fisik	Bau	-	Tidak berbau
	Warna	TCU	15
	TDS	mg/L	500
	Kekeruhan	NTU	5
	Rasa	-	Tidak berasa
	Suhu	C	Suhu udara 3
	Alumunium	mg/L	0,2
	Besi	mg/L	0,3
	Kesadahan	mg/L	500
	Khlorida	mg/L	250
	Mangan	mg/L	0,4
Non-Fisik	pH	-	6,5-8,5
	Seng	mg/L	3
	Sulfat	mg/L	250
	Tembaga	mg/L	2
	Amonia	mg/L	1,5

Parameter karakteristik air dibagi menjadi dua, yaitu parameter wajib dan parameter tambahan. Parameter wajib adalah parameter yang harus dipenuhi oleh seluruh perusahaan penyedia air minum. Sedangkan, parameter yang disesuaikan dengan badan usaha penyedia air minum masing-masing disebut dengan parameter tambahan. Adapun untuk air minum, KEMENKES mengatur parameter wajib yang harus dipenuhi serta parameter tambahan yang disesuaikan dengan kondisi geografis dan lingkungan daerah. Parameter kualitas air minum dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Adapun pada penelitian ini akan digunakan tiga parameter, yaitu kekeruhan, sisa *chlor*, dan derajat keasaman (pH).

1. Kekeruhan

Kekeruhan dari air dapat diukur dengan nephelometer. Suatu air dikatakan keruh saat terdapat banyak partikel dan endapan sehingga memberikan warna kotor pada air. Parameter ini dipilih karena air baku Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang diperoleh dari beberapa jenis dan dikumpulkan dalam bangunan intake. Sehingga, peneliti mengambil parameter ini dengan tujuan untuk mengetahui kinerja dari bangunan intake dalam menyaring partikel-partikel dalam air.

2. Sisa *chlor*

*Chlor* perlu ditambahkan dalam air dengan takaran dan periode waktu tertentu untuk membunuh patogen yang hidup di dalam penampungan air. Patogen tersebut dapat berupa bakteri, virus, dan protozoa yang menyebabkan penyakit. Namun, *chlor* juga memberikan endapan yang disebut sisa *chlor*, dimana sisa *chlor* juga akan berbahaya ketika ikut

dikonsumsi oleh manusia. Konsumsi air dengan endapan sisa *chlor* yang tinggi dapat menyebabkan gangguan pencernaan dan beresiko kanker dalam jangka panjang. Namun, air dengan kadar sisa *chlor* yang kurang dari standar juga berbahaya. Hal ini karena *chlor* yang berada di dalam air tidak cukup membantu untuk membunuh kuman di dalamnya. Sehingga, peneliti menggunakan parameter sisa *chlor* untuk mengetahui kualitas air yang akan didistribusikan.

### 3. Derajat keasaman (pH)

Derajat keasaman adalah derajat yang digunakan untuk menyatakan tingkat keasaman atau kebasaan suatu larutan. pH didefinisikan sebagai logaritma dari kepekatan ion-ion H (hidrogen) yang terlepas dalam suatu cairan. Kadar pH dalam air yang dikonsumsi harus sesuai agar tidak menimbulkan penyakit-penyakit tertentu. Adapun tinggi rendahnya pH suatu air dipengaruhi oleh beberapa faktor, seperti konsentrasi gas-gas dalam air, konsentrasi garam-garam karbonat dan bikarbonat, serta proses dekomposisi bahan organik di dalam larutan.

## 2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Allah swt. menciptakan seluruh alam semesta serta manusia sesuai dengan sebaik-baiknya bentuk dan ciptaan yang dilengkapi dengan akal pikiran. Oleh karena itu, manusia harus menggunakan akal mereka dan selalu melakukan hal-hal baik sebagai bentuk rasa syukur yang bernilai ibadah kepada Allah swt.. Hal ini sesuai dengan al-Qur'an surah al-Isra' ayat 70 yang artinya:

*“Sungguh, Kami telah memuliakan anak cucu Adam dan Kami angkut mereka di darat dan di laut. Kamu anugerahkan kepada mereka rezeki dari yang baik-baik dan dilebihkan mereka di atas makhluk lainnya dengan kelebihan yang sempurna.”* (Kementerian Agama RI, 2022)

Ayat di atas juga meminta agar anak cucu Adam (manusia) selalu mencari rezeki dengan cara yang baik karena memang telah diberikan kepada manusia rezeki yang baik pula. Tidak hanya dalam rangka menjalin hubungan dengan Allah (*hablum minallah*), tetapi juga dalam rangka menjaga keeratan silaturahmi bersama manusia lainnya (*hablum minannas*). Adapun hubungan antarmanusia juga sangat beragam dalam kehidupan. Salah satunya dalam hal pekerjaan, manusia dapat berhubungan dan berinteraksi sebagai seorang produsen dan konsumen.

Penerapan kehidupan yang baik dengan selalu menjaga hal-hal baik oleh manusia juga dapat diterapkan oleh seorang produsen sebagai penyedia barang untuk konsumen. Pengendalian kualitas dari suatu produk untuk memberikan kualitas yang baik atau sesuai takarannya kepada konsumen juga menjadi salah satu bukti menjaga *hablum minallah* dan *hablum minannas*. Sebagaimana perintah menjaga takaran disebutkan dalam al-Qur'an surah as-Syu'ara ayat 181-183 yang artinya:

*“Sempurnakanlah takaran dan kamu jangan termasuk ke dalam orang-orang yang merugikan. Dan timbanglah dengan timbangan yang lurus. Dan kamu jangan membuat rugi pada hak-hak manusia dan kamu jangan merajalela di muka bumi dengan membuat kerusakan.”* (Kementerian Agama RI, 2022)

Penafsiran dari ayat di atas adalah, ketika berjualan hendaknya tidak curang dan melakukan tipu daya kepada konsumen untuk membuat keuntungan pribadi. Produsen atau penjual harus jujur dengan memberikan hak konsumen secara penuh. Produsen hendaknya mengetahui dan memberikan takaran yang tepat sesuai dengan

takaran yang diketahui oleh konsumen pula. Sehingga, diperlukan perlakuan pengendalian kualitas produk agar nantinya setiap produk memenuhi spesifikasi yang telah ditetapkan.

Selain memberikan hak konsumen melalui produk yang sesuai dengan spesifikasi, produsen juga harus memperhatikan dampak dari adanya produksi tersebut. Suatu produksi tidak diperkenankan jika dapat merusak lingkungan sekitar karena juga dapat merugikan manusia serta makhluk hidup lainnya.

*"Janganlah Kamu berbuat kerusakan di bumi setelah diatur dengan baik. Berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut dan penuh harap. Sesungguhnya rahmat Allah sangat dekat dengan orang-orang yang berbuat baik."* (Kementerian Agama RI, 2022)

Surah al-A'raf ayat 56 di atas ditafsirkan agar manusia selalu merawat segala pemberian Allah swt. termasuk lingkungan. Manusia diperbolehkan memanfaatkan lingkungan dan seluruh sumber daya yang tersedia di bumi. Namun, manusia juga harus tetap menjaga dan melestarikannya. Sumber daya yang sangat dibutuhkan manusia dan harus tetap dijaga salah satunya adalah adanya air bersih.

Oleh karena itu, keberadaan air perlu selalu dijaga keberadaannya untuk menjaga kehidupan manusia pula. Menjadikan air yang berada di bumi dapat terus tercukupi untuk menjaga keberlangsungan makhluk hidup. Perlu dilakukan juga tindakan-tindakan untuk melestarikan air agar tetap dijaga kebersihan dan kelestariannya. Sehingga, peran manusia sangatlah penting untuk melestarikannya dan Allah swt. mengamanahkan kepada sebagian orang manusia untuk menjadi orang-orang yang bergerak dan bekerja menjaga kualitas di berbagai bidang, salah satunya air yang dikonsumsi oleh umat manusia.

### 2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pengendalian kualitas air yang dilakukan pada penelitian ini akan menggunakan grafik pengendali MEWMA dan MEWMV. Grafik pengendali MEWMA akan digunakan untuk mendeteksi pergeseran *mean*. Sedangkan grafik pengendali MEWMV diterapkan pada pendeteksian pergeseran variabilitas proses yang kecil.

Adapun langkah-langkah yang digunakan pada implementasi grafik pengendali MEWMA dan MEWMV berdasarkan teori pendukung yang ada, yaitu diawali dengan uji normalitas multivariat menggunakan uji statistik pada persamaan (2.2). Kemudian, data yang diuji normalitas diharapkan normal. Namun, pada MEWMA ini data yang tidak normal juga masih dapat dilakukan pengujian. Hal ini karena MEWMA *robust* pada uji normalitas.

Langkah selanjutnya adalah uji dependensi variabel. Adapun pengujian yang dipilih adalah uji Bartlett. Berdasarkan statistik uji di persamaan (2.4), maka akan diketahui hubungan antar variabel. Data yang diuji diasumsikan bekorelasi, sehingga  $H_0$  ditolak.

Ketika sudah dilakukan uji asumsi, dilakukan perhitungan pada setiap variabel untuk mengetahui statistik deskriptifnya. Kemudian, dilakukan pengontrolan dengan grafik pengendali MEWMA. Setiap grafik pengendali pasti memiliki batas kendali atas dan batas kendali bawah. Batas kendali atas pada grafik pengendali MEWMA dapat diperoleh dengan menghitung hasil simulasi rata-rata terkontrol. Adapun batas bawahnya adalah 0. Kemudian, akan dihitung matriks kovarian. Selain itu, juga akan dihitung vektor MEWMA dengan persamaan (2.6). Adapun grafik pengendali MEWMA akan digambarkan dengan menghitung titik

statistik  $T^2$ -hotteling pada persamaan (2.8). Proses akan dikatakan terkendali apabila semua nilai proses berada dalam batas kendali.

Selanjutnya, dilakukan analisis dengan grafik pengendali MEWMV. Pada grafik pengendali MEWMV, dibentuk matriks  $\mathbf{M}$  sebagai matriks segitiga bawah dengan elemen yang merupakan pembobot  $\lambda$  yang dipilih. Kemudian, dibentuk matriks persegi  $\mathbf{C}$  dengan diagonal utama pembobot  $\omega$  dan matriks identitas  $\mathbf{I}_i$ . Adapun matriks yang akan dihitung adalah matriks  $\mathbf{Q}$  yang dapat diperoleh dengan persamaan (2.15). kemudian, akan dihitung nilai  $tr(\mathbf{V}_i)$  dengan persamaan (2.16),  $E(tr(\mathbf{V}_i))$  dengan persamaan (2.17), dan  $Var(tr(\mathbf{V}_i))$  dengan persamaan (2.18). Kemudian, ditentukan batas grafik pengendali untuk setiap pengamatan dengan persamaan (2.19) dan (2.20) dalam bentuk plot dan dipilih nilai optimalnya. Langkah terakhir adalah menganalisis grafik pengendali MEWMA dan MEWMV yang telah ada. Grafik dianalisis sehingga dapat diperoleh data-data yang *out of control*. Lalu, ditarik kesimpulan.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Penelitian ini menerapkan pendekatan kuantitatif. Hal ini karena penelitian dilakukan pada data numerik yang kemudian diproses dan dianalisis dengan metode statistik tertentu dan disertai studi literatur. Adapun sumber yang digunakan sebagai studi literatur berupa buku, jurnal ilmiah, dan sebagainya.

#### **3.2 Data dan Sumber Data**

Penelitian ini menggunakan data sekunder tentang parameter kualitas air yang diproduksi Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Data bersumber pada dokumen pencatatan laboratorium hasil analisis. Adapun data yang digunakan merupakan hasil pengamatan pada bulan September 2023 sampai Juni 2024 sejumlah 43 pengamatan dengan variabel kekeruhan, sisa *chlor*, dan derajat keasaman (pH).

#### **3.3 Lokasi Penelitian**

Penelitian dilakukan pada *reservoir* dan Sistem Penyedia Air Minum (SPAM) yang terdapat di beberapa titik di Kota Malang. Pengambilan sampel dilakukan pada daerah Lowokwaru dan Klojen. Adapun hasil dari pengecekan karakteristik air dilakukan pada laboratorium Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang yang beralamat di Jl. Danau Sentani Raya No. 100, Madyopuro, Kec. Kedungkandang, Kota Malang, Jawa Timur 65139.

### 3.4 Teknik Pengumpulan Data

Data pada penelitian ini dikumpulkan dengan menggunakan teknik studi literatur dan dokumentasi. Penelitian ini mengolah data yang sudah dikumpulkan oleh instansi terkait dalam jangka waktu tertentu. Selain itu, proses pengolahan data juga didukung dengan adanya literatur terkait metode dan informasi data yang digunakan.

### 3.5 Instrumen Penelitian

Penelitian ini menggunakan instrumen berupa matriks dan tabel data sesuai dengan variabel-variabel yang telah ditentukan. Kemudian, data yang ada dianalisis dengan metode MEWMA dan MEWMV. Adapun proses analisis didukung dengan adanya *software* berupa Matlab dan R-Studio.

### 3.6 Teknik Analisis Data

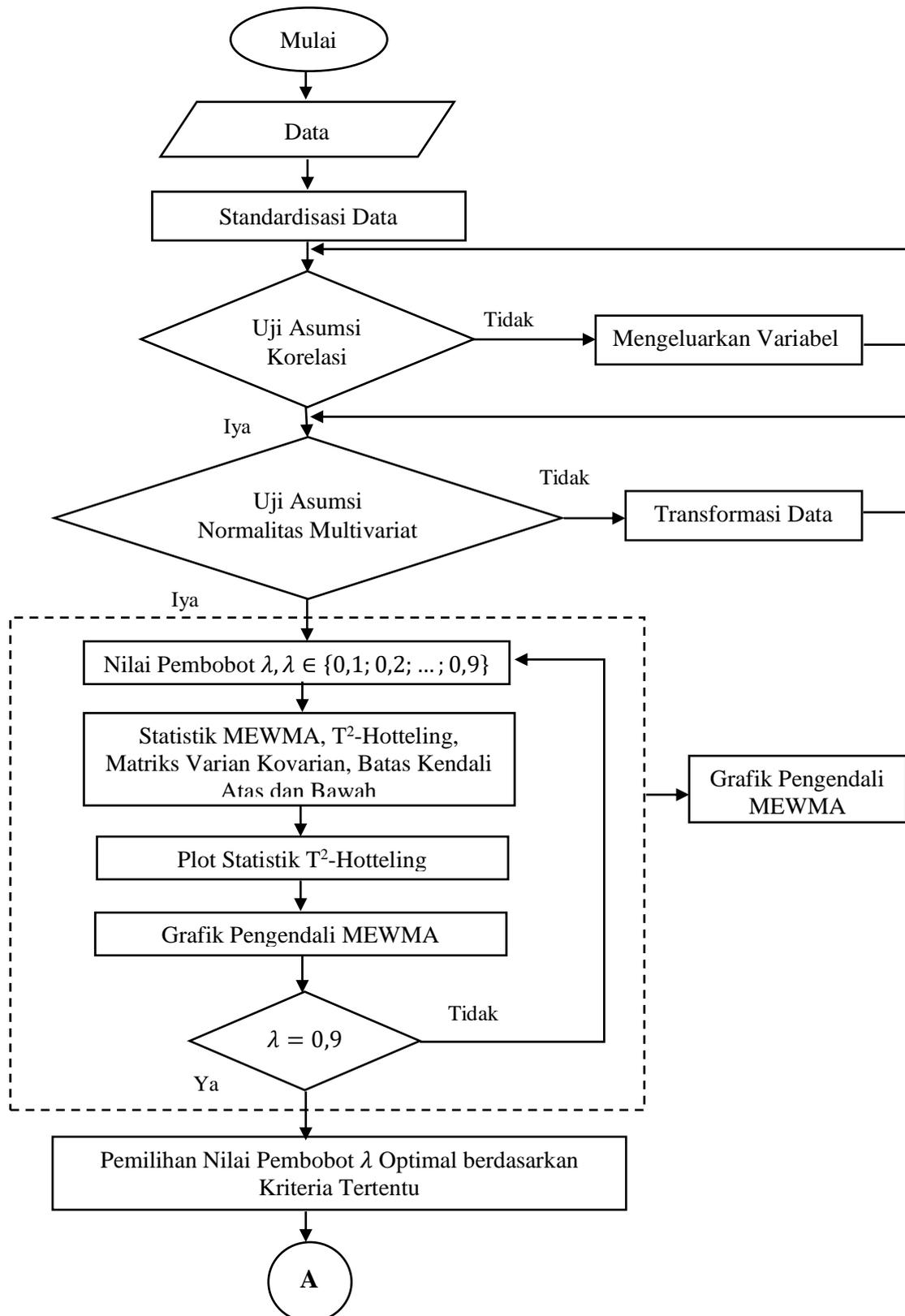
Langkah-langkah analisis yang digunakan untuk menjawab rumusan masalah pada penelitian ini, yaitu:

1. Menganalisis statistika deskriptif.
2. Melakukan standarisasi data pada data asli untuk menyesuaikan satuan.
3. Melakukan uji normalitas multivariat berdasarkan persamaan (2.2).
4. Melakukan uji dependensi variabel dengan uji Bartlett berdasarkan persamaan (2.4).
5. Membentuk grafik pengendali MEWMA untuk pengendalian rata-rata proses, melalui langkah berikut:
  - a. Menentukan nilai pembobot  $\lambda$  yang akan disimulasikan.

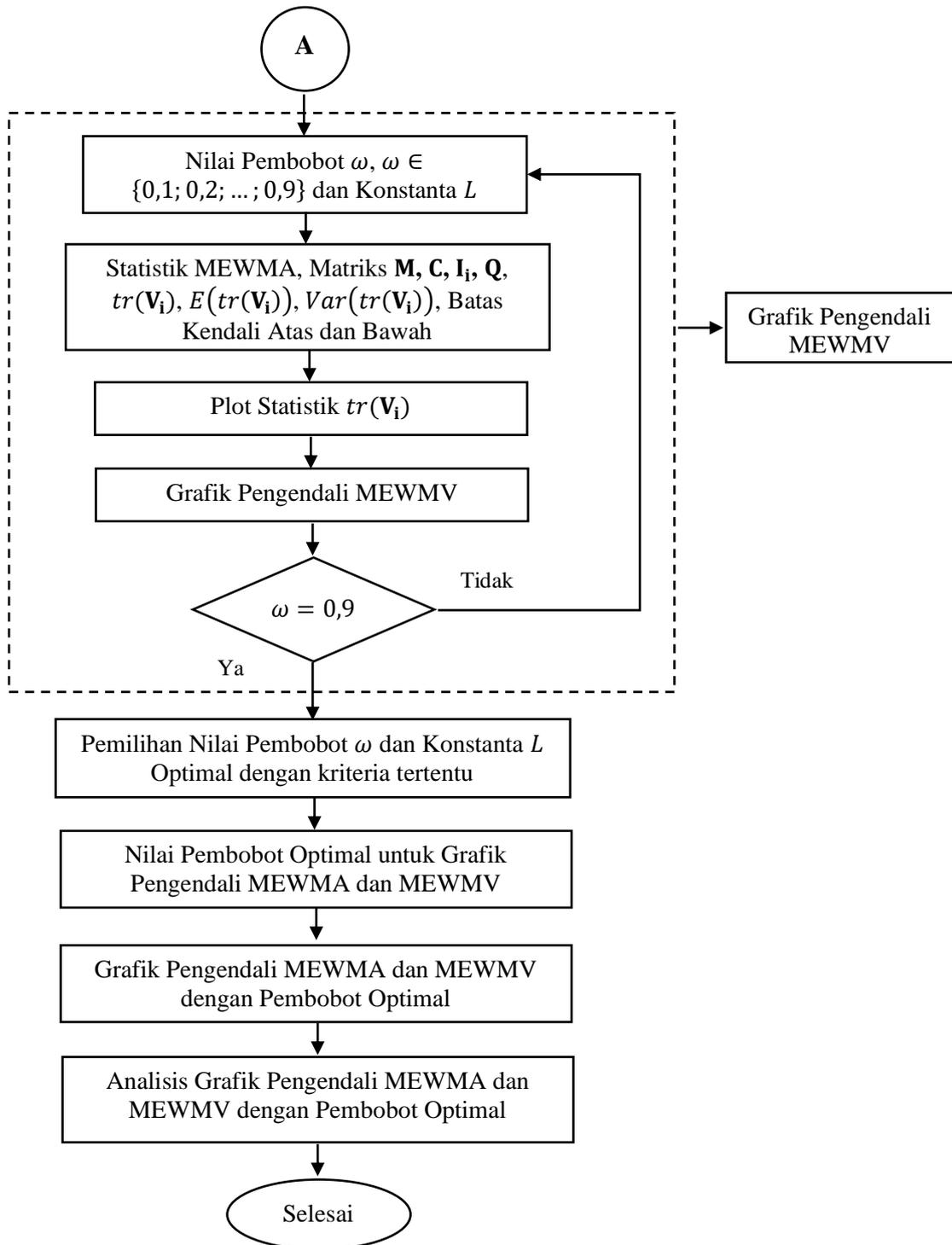
- b. Menghitung vektor MEWMA berdasarkan persamaan (2.6).
  - c. Menghitung titik statistik  $T^2$ -Hotteling dengan persamaan (2.8)
  - d. Menghitung matriks varian kovarian dengan persamaan (2.9).
  - e. Menentukan batas kendali atas dan batas kendali bawah.
  - f. Memplot statistik  $T^2$ -Hotteling pada grafik pengendali MEWMA.
  - g. Mengidentifikasi data yang berada di luar batas kendali.
6. Langkah 5 dilakukan secara berulang dengan nilai pembobot  $\lambda$  yang berbeda.
  7. Memilih nilai pembobot  $\lambda$  yang optimal dengan kriteria, berikut:
    - a. Selisih nilai mutlak antara  $T_i^2$  tertinggi dengan batas kendali atas yang paling kecil (Jayanti & Wibawati, 2014).
    - b. Nilai rata-rata paling kecil dari nilai mutlak  $T_i^2$  dengan batas kendali atas (Sari, dkk., 2016).
    - c. Jumlah pengamatan yang *out of control* pada setiap grafik pengendali.
  8. Membentuk grafik pengendali MEWMV untuk pengendalian variabilitas proses, melalui langkah berikut:
    - a. Menentukan nilai pembobot  $\omega$  dan konstanta  $L$  dengan  $\lambda$  optimal terpilih.
    - b. Membuat matriks  $\mathbf{M}$  yang merupakan matriks segitiga bawah dengan elemen  $\lambda$ .
    - c. Membuat matriks  $\mathbf{C}$  berukuran  $m \times m$ .
    - d. Membuat matriks  $\mathbf{I}_i$  berukuran  $i \times i$ .
    - e. Menghitung matriks  $\mathbf{Q}$  dengan persamaan (2.15).
    - f. Menghitung nilai  $tr(\mathbf{V}_i)$  berdasarkan persamaan (2.16).
    - g. Menghitung nilai  $E(tr(\mathbf{V}_i))$  berdasarkan persamaan (2.17).
    - h. Menghitung nilai  $Var(tr(\mathbf{V}_i))$  dengan persamaan (2.18).

- i. Menentukan batas grafik pengendali berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20).
  - j. Membuat grafik pengendali MEWMV.
9. Langkah 8 dilakukan secara berulang dengan nilai pembobot  $\omega$  dan konstanta  $L$  yang berbeda.
10. Memilih nilai pembobot  $\omega$  dan konstanta  $L$  yang optimal dengan kriteria, berikut:
  - a. Selisih nilai  $tr(\mathbf{V}_i)$  maksimum dan batas kendali atas maksimum yang paling kecil (Jannah, dkk., 2023).
  - b. Jumlah pengamatan yang *out of control* pada setiap grafik pengendali.
11. Interpretasi grafik pengendali dengan pembobot optimal terpilih.

### 3.7 Diagram Alir Penelitian



**Gambar 3.1** Diagram Alir Penelitian



**Gambar 3.2** Lanjutan Diagram Alir Penelitian

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 4.1 Analisis Statistika Deskriptif Karakteristik Kualitas Air

Analisis statistika deskriptif pada karakteristik kualitas air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang bertujuan untuk mengetahui gambaran umum karakteristik data yang akan diuji. Karakteristik kualitas variabel yang akan diamati adalah kekeruhan, sisa *chlor*, dan derajat keasaman (pH) dapat diketahui melalui statistika deskriptif berikut.

**Tabel 4.1** Statistika Deskriptif

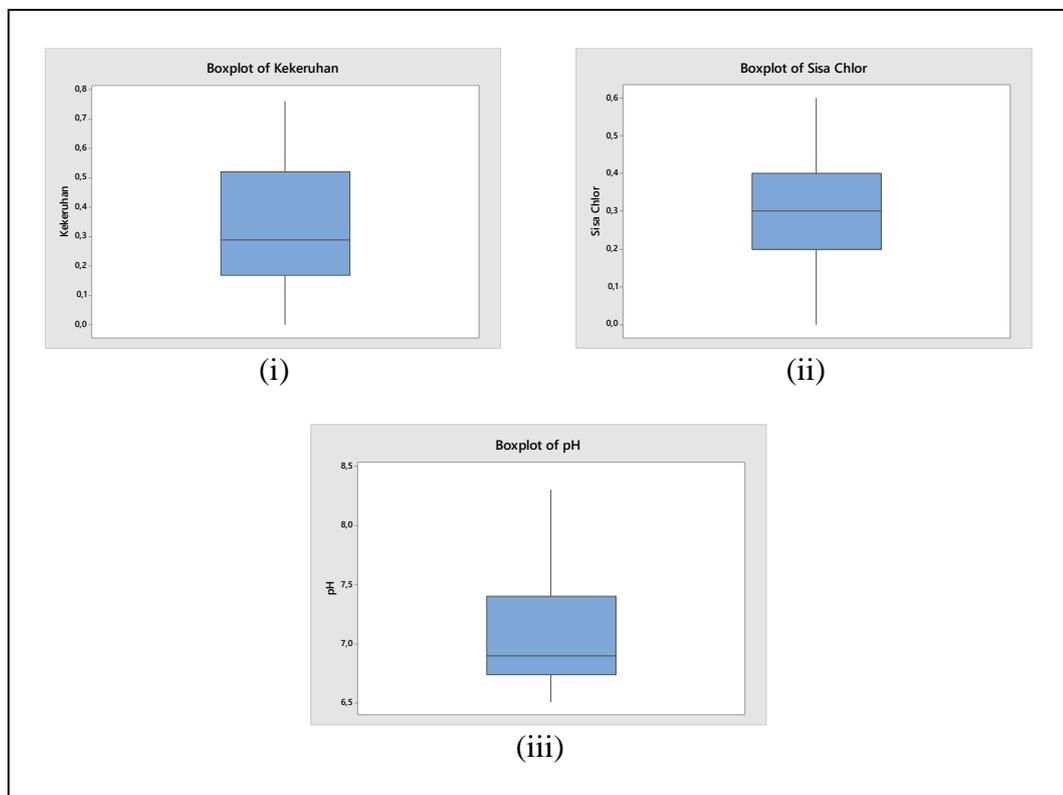
Variabel	Rata-Rata	Varians	Minimum	Maksimum	Standar Kemenkes
Kekeruhan	0,3314	0,0487	0	0,76	Maks. 5
Sisa <i>chlor</i>	0,3372	0,0171	0	0,6	0,2 – 0,6
pH	7,0579	0,1866	6,51	8,3	6,5 – 8,5

Pada tabel 4.1 terlihat bahwa pada bulan September 2023 – Juni 2024 memiliki rata-rata kekeruhan sebesar 0,3314. Varians variabel kekeruhan yang menyatakan tingkat penyebaran data kekeruhan menunjukkan nilai yang cukup kecil yaitu sebesar 0,0487. Artinya, penyebaran data terhadap rata-rata sampel juga kecil. Nilai minimum dan maksimum dari variabel kekeruhan masing-masing adalah 0 dan 0,76. Berdasarkan standar Kementerian Kesehatan yang telah ditetapkan, batas maksimum kekeruhan untuk air yang layak dikonsumsi sebesar 5 NTU (*Nephelometric Turbidity Unit*). Sehingga, air yang didistribusikan oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang masih berada di dalam standar layak konsumsi oleh masyarakat.

Pada Tabel 4.1 juga memberikan informasi terkait statistika deskriptif variabel sisa *chlor*. Variabel sisa *chlor* pada penelitian ini memiliki rata-rata sampel sebesar 0,3372 dengan varians sebesar 0,0171. Adapun nilai minimum pada variabel sisa *chlor* ini sebesar 0 mg/L dan nilai maksimumnya sebesar 0,6 mg/L. Kementerian Kesehatan menetapkan standar layak konsumsi air minum sebesar 0,2 – 0,6 mg/L. Artinya, terdapat pengamatan yang berada di bawah nilai minimum standar Kementerian Kesehatan sebesar 0 mg/L yang merupakan pengamatan ke – 3 (dilakukan pada tanggal 18 September 2023). Selain itu, juga terdapat nilai sisa *chlor* maksimum air layak konsumsi, yaitu sebesar 0,6 mg/L pada pengamatan ke – 9, 10, dan 16 (secara berurutan dilakukan pada tanggal 30 Oktober 2023, 6 November 2023, dan 18 Desember 2023). Pada air dengan kadar sisa *chlor* di bawah batas minimum, berpotensi adanya patogen yang tidak terbunuh oleh *chlor* yang diberikan sehingga cukup berbahaya untuk kesehatan. Sedangkan, air dengan sisa *chlor* yang melebihi batas maksimum dapat menyebabkan gangguan pencernaan karena endapan *chlor* yang berlebih.

Selain variabel kekeruhan dan sisa *chlor*, Tabel 4.1 juga menunjukkan informasi statistika deskriptif dari variabel derajat keasaman (pH). Variabel pH memiliki rata-rata sebesar 7,0579. Varians variabel pH menunjukkan nilai sebesar 0,1866. Adapun nilai minimum dan maksimum variabel pH secara berturut-turut adalah 6,51 dan 8,3. Nilai ini masih terdapat dalam standar yang ditetapkan oleh standar Kementerian Kesehatan, yaitu sebesar 6,5 – 8,5. Namun, nilai maksimum data pada variabel pH sebesar 8,3 yang merupakan nilai dari pengamatan ke – 3 termasuk ke dalam air layak konsumsi dengan pH yang tinggi.

Tabel 4.1 menunjukkan bahwa ketiga variabel memiliki varians atau penyebaran data yang kecil. Selain melalui statistika deskriptif yang ditunjukkan pada Tabel 4.1, penyebaran data juga dapat dilihat pada Gambar 4.1. Pada Gambar 4.1, terlihat bahwa penyebaran data ketiga variabel sempit. Selain itu, terlihat pula bahwa data yang paling simetris adalah variabel sisa *chlor*. Gambar 4.1 juga menunjukkan tidak ditemukannya *outlier* pada ketiga variabel, yaitu kekeruhan, sisa *chlor*, dan pH.



**Gambar 4.1** Boxplot Variabel Pengamatan

## 4.2 Standardisasi Data

Standardisasi data dilakukan pada penelitian ini karena setiap variabel memiliki satuan yang berbeda. Standardisasi *z-score* akan memproses data ke dalam skala yang memiliki rata-rata 0 dan simpangan baku 1. Sehingga, data awal

pada penelitian ini (bisa dilihat pada Lampiran 1) akan ditransformasi sebelum dilakukan pengujian lebih lanjut. Nilai rata-rata setiap variabel secara berturut-turut dari variabel kekeruhan ( $\mu_1$ ), sisa *chlor* ( $\mu_2$ ), dan pH ( $\mu_3$ ) adalah 0,3314; 0,3372; dan 7,0579. Kemudian, nilai standar deviasi setiap variabel secara berturut-turut dari variabel kekeruhan ( $\sigma_1$ ), sisa *chlor* ( $\sigma_2$ ), dan pH ( $\sigma_3$ ) adalah 0,2180; 0,1294; dan 0,4269. Contoh perhitungan untuk standardisasi data dengan perolehan rata-rata dan standar deviasi setiap variabel dapat dilihat sebagai berikut:

$$Z_{11} = \frac{X_{11} - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{0 - 0,3314}{0,2180} = -1,5199$$

$$Z_{12} = \frac{X_{12} - \mu_2}{\sigma_2} = \frac{0,5 - 0,3372}{0,1294} = 1,2576$$

$$Z_{13} = \frac{X_{13} - \mu_3}{\sigma_3} = \frac{7,4 - 7,0579}{0,4269} = 0,8013$$

Data hasil standardisasi secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 2.

### 4.3 Uji Asumsi Normalitas Multivariat

Sebelum dilakukan pengendalian kualitas statistik, data akan melalui pengujian asumsi. Uji asumsi yang pertama adalah uji normalitas multivariat. Tahap uji ini bertujuan untuk mengetahui bahwa penyebaran data mengikuti distribusi normal. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

$H_0$  : Vektor pengamatan berdistribusi normal multivariat

$H_1$  : Vektor pengamatan tidak berdistribusi normal multivariat

Keputusan yang diambil adalah  $H_0$  tidak ditolak jika nilai  $d_i^2$  yang kurang dari  $\chi_{\alpha, df}^2$  sebesar 50%,

Nilai  $d_i^2$  dapat diperoleh dengan menghitung vektor rata-rata ( $\bar{X}$ ) pada setiap karakteristik kualitas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{43} X_{i,1}}{43} \\
&= \frac{X_{1,1} + X_{2,1} + \dots + X_{43,1}}{43} \\
&= \frac{(-1,5199) + 0,1312 + \dots + 1,8740}{43} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{X}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{43} X_{i,2}}{43} \\
&= \frac{X_{1,2} + X_{2,2} + \dots + X_{43,2}}{43} \\
&= \frac{1,2576 + (-0,2875) + \dots + (-1,06)}{43} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{X}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^{43} X_{i,3}}{43} \\
&= \frac{X_{1,3} + X_{2,3} + \dots + X_{43,3}}{43} \\
&= \frac{0,8013 + (-0,8383) + \dots + (-1,2833)}{43} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh vektor rata-rata berikut:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian, dihitung matriks varian kovarian dengan persamaan (2.3). Berikut adalah contoh perhitungan varian dari karakteristik kualitas kekeruhan.

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{\sum_{i=1}^{43} (X_{i,1} - \bar{X})^2}{43-1} \\
&= \frac{(X_{1,1} - \bar{X})^2 + (X_{2,1} - \bar{X})^2 + \dots + (X_{43,1} - \bar{X})^2}{42} \\
&= \frac{(-1,5199-0)^2 + (0,1312-0)^2 + \dots + (1,8740-0)^2}{42} \\
&= 1,0238
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{\sum_{i=1}^{43} (X_{i,1} - \bar{X}_1)(X_{i,1} - \bar{X}_2)}{43-1} \\
&= \frac{(X_{1,1} - \bar{X}_1)(X_{1,2} - \bar{X}_2) + (X_{2,1} - \bar{X}_1)(X_{2,2} - \bar{X}_2) + \dots + (X_{43,1} - \bar{X}_1)(X_{43,2} - \bar{X}_2)}{42} \\
&= \frac{(-1,5199-0)(1,2576-0) + (0,1312-0)(-0,2875-0) + \dots + (1,8740-0)(-1,0600-0)}{42} \\
&= -0,3165 \\
S_{13} &= \frac{\sum_{i=1}^{43} (X_{i,1} - \bar{X}_1)(X_{i,3} - \bar{X}_3)}{43-1} \\
&= \frac{(X_{1,1} - \bar{X}_1)(X_{1,3} - \bar{X}_3) + (X_{2,1} - \bar{X}_1)(X_{2,3} - \bar{X}_3) + \dots + (X_{43,1} - \bar{X}_1)(X_{43,3} - \bar{X}_3)}{42} \\
&= \frac{(-1,5199-0)(0,8013-0) + (0,1312-0)(-0,8383-0) + \dots + (1,8740-0)(-1,2833-0)}{42} \\
&= -0,459
\end{aligned}$$

Langkah yang sama seperti pada contoh dilakukan pada karakteristik kualitas yang lainnya, sehingga diperoleh matriks varian kovarian berikut.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1,0238 & -0,3165 & -0,459 \\ -0,3165 & 1,0238 & -0,0162 \\ -0,459 & -0,0162 & 1,0238 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Kemudian, dilakukan invers terhadap matriks varian kovarian pada persamaan (4.1) menjadi:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,3974 & 0,4421 & 0,6335 \\ 0,4421 & 1,1169 & 0,2159 \\ 0,6335 & 0,2159 & 1,2641 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai  $d_i^2$  berdasarkan persamaan (2.2) dengan nilai invers matriks varian kovarian pada persamaan (4.2). Berikut adalah contoh perhitungan nilai  $d_i^2$ .

$$d_1^2 = (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})$$

$$\begin{aligned}
&= [(-1,5199 \quad 1,2576 \quad 0,8013) - (0 \quad 0 \quad 0)] \times \\
&\quad \begin{bmatrix} 1,3974 & 0,4421 & 0,6335 \\ 0,4421 & 1,1169 & 0,2159 \\ 0,6335 & 0,2159 & 1,2641 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1,5199 - 0 \\ 1,2576 - 0 \\ 0,8013 - 0 \end{bmatrix} \\
&= [-1,5199 \quad 1,2576 \quad 0,8013] \times \begin{bmatrix} 1,3974 & 0,4421 & 0,6335 \\ 0,4421 & 1,1169 & 0,2159 \\ 0,6335 & 0,2159 & 1,2641 \end{bmatrix} \times \\
&\quad \begin{bmatrix} -1,5199 \\ 1,2576 \\ 0,8013 \end{bmatrix} \\
&= 3,0003
\end{aligned}$$

Langkah yang sama dilakukan untuk menghitung  $d_1^2, d_2^2, d_3^2, \dots, d_{43}^2$ . Hasil dari nilai  $d_i^2$  akan disajikan pada Lampiran 3.

Setelah diperoleh nilai  $d_1^2, d_2^2, d_3^2, \dots, d_{43}^2$ . Selanjutnya akan ditentukan nilai *Chi-square* yang digunakan untuk pengujian dengan tingkat signifikansi  $\alpha$  sebesar 0,05 dan derajat kebebasan ( $df = 3$ ). Berdasarkan tabel *Chi-square*, nilai  $\chi_{0,05;3}^2$  sebesar 7,815. Kemudian, dihitung jumlah nilai  $d_i^2$  yang kurang dari dan lebih dari 7,815. Berdasarkan perhitungan, nilai  $d_i^2$  yang kurang dari 7,815 sebanyak 41 data, sedangkan nilai  $d_i^2$  yang lebih dari 7,815 sebanyak 2 data (informasi data dapat dilihat pada Lampiran 3). Hal ini menunjukkan bahwa terdapat lebih dari 50% nilai  $d_i^2$  yang kurang dari nilai  $\chi_{0,05;3}^2$ . Sehingga, dapat diambil keputusan tidak tolak  $H_0$ , artinya data berdistribusi normal multivariat.

#### 4.4 Uji Asumsi Korelasi

Setelah dilakukan uji asumsi normalitas multivariat pada subbab 4.2, selanjutnya akan dilakukan uji asumsi korelasi. Tahap uji ini bertujuan untuk

mengetahui hubungan antar variabel. Pada kasus pengamatan yang menggunakan tiga variabel, maka digunakan uji Bartlett dengan hipotesis berikut:

$$H_0 : \mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ (Antarvariabel tidak memiliki korelasi)}$$

$$H_1 : \mathbf{R} \neq \mathbf{I} \text{ (Antarvariabel memiliki korelasi)}$$

Keputusan yang diambil adalah  $H_0$  ditolak jika  $\chi^2 \geq \chi^2_{(\alpha, \frac{1}{2}m(m-1))}$  atau  $p$ -value  $< \alpha = 0,05$ .

Tahapan dalam melakukan uji asumsi korelasi adalah menghitung matriks korelasi ( $\mathbf{R}$ ). Berikut adalah contoh perhitungan korelasi pada karakteristik kualiatas kekeruhan dengan persamaan (2.5).

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)(Y_{t,2} - \bar{Y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)^2 \sum_{t=1}^{43} (Y_{t,2} - \bar{Y}_2)^2}} \\ &= \frac{(-1,5199-0)(1,2576-0) + (0,1312-0)(-0,2875-0) + \dots + (1,874-0)(-1,06-0)}{\sqrt{((-1,5199-0)^2 + (0,1312-0)^2 + \dots + (1,874-0)^2)((1,2576-0)^2 + (-0,2875-0)^2 + \dots + (-1,06-0)^2)}} \\ &= \frac{-1,9114 + (-0,0377) + \dots + (-1,9864)}{\sqrt{(2,31 + 0,0172 + \dots + 3,5117)(1,5816 + 0,0826 + \dots + 0,1236)}} \\ &= -\frac{13,295}{43} \\ &= -0,3092 \\ r_{13} &= \frac{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)(Y_{t,3} - \bar{Y}_3)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)^2 \sum_{t=1}^{43} (Y_{t,3} - \bar{Y}_3)^2}} \\ &= \\ &= \frac{(-1,5199-0)(0,8013-0) + (0,1312-0)(-0,8383-0) + \dots + (1,874-0)(-1,2833-0)}{\sqrt{((-1,5199-0)^2 + (0,1312-0)^2 + \dots + (1,874-0)^2)((0,8013-0)^2 + (-0,8383-0)^2 + \dots + (-1,2833-0)^2)}} \\ &= \frac{-1,2178 + (-0,1099) + \dots + (2,4049)}{\sqrt{(2,31 + 0,0172 + \dots + 3,5117)(0,6420 + 0,7027 + \dots + 1,6469)}} \\ &= -\frac{19,2766}{43} \\ &= -0,4483 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{23} &= \frac{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,2} - \bar{Y}_2)(Y_{t,3} - \bar{Y}_3)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)^2 \sum_{t=1}^{43} (Y_{t,1} - \bar{Y}_1)^2}} \\
&= \\
&= \frac{(1,2576-0)(0,8013-0)+(-0,2875-0)(-0,8383-0)+\dots+(-1,0600-0)(-1,2833-0)}{\sqrt{((1,2576-0)^2+(-0,2875-0)^2+\dots+(-1,0600-0)^2)(0,8013^2+(-0,8383-0)^2+\dots+(-1,2833-0)^2)}} \\
&= \frac{1,0077+0,241+\dots+1,3604}{\sqrt{(1,5817+0,0826+\dots+1,1236)(0,6420+0,7027+\dots+1,6469)}} \\
&= \frac{-0,6813}{43} \\
&= -0,0158
\end{aligned}$$

Begitu pula dilakukan hal yang sama pada variabel lainnya, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,3092 & -0,4483 \\ -0,3092 & 1 & -0,0158 \\ -0,4483 & -0,0158 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Kemudian, dihitung nilai determinan matriks korelasi ( $|\mathbf{R}|$ ) berdasarkan nilai matriks korelasi ( $\mathbf{R}$ ) pada persamaan (4.3) dan diperoleh sebesar 0,6988. Selanjutnya, akan dihitung nilai  $\chi^2$  sebagai statistik uji Bartlett berdasarkan persamaan (2.4) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= -\left(n - 1 - \frac{2m + 5}{6}\right) \ln|\mathbf{R}| \\
&= -\left(43 - 1 - \frac{2(3) + 5}{6}\right) \ln(0,6988) \\
&= -\left(42 - \frac{11}{6}\right) (-0,3584) \\
&= 14,3957
\end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai  $\chi^2$ , selanjutnya akan ditentukan nilai *Chi-Square* yang akan digunakan untuk pengujian signifikansi dengan  $\alpha = 0,05$  dan derajat kebebasan  $\frac{1}{2}(3)(3 - 1) = 3$ . Adapun nilai  $\chi_{0,05;3}^2$  sebesar 7,815. Berdasarkan nilai *Chi-Square* tersebut, diperoleh bahwa nilai  $\chi^2$  lebih besar dari  $\chi_{0,05;3}^2$ . Sehingga

dapat diambil keputusan tolak  $H_0$ , artinya antarvariabel karakteristik kualitas air berkorelasi.

#### 4.5 Pembentukan Grafik Pengendali MEWMA

Setelah terpenuhinya uji asumsi normalitas multivariat dan korelasi, langkah selanjutnya adalah membuat grafik pengendali MEWMA. Pada pengendalian kualitas fase I, pembuatan grafik pengendali MEWMA akan menghasilkan pembobot  $\lambda$  yang optimal. Pada penelitian ini, tidak diberikan pembobot yang berbeda pada masing-masing karakteristik kualitas, artinya  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . Nilai pembobot  $\lambda$  yang optimal dapat diperoleh dengan melakukan simulasi dan pembentukan grafik pengendali MEWMA terlebih dahulu. Pada penelitian ini, akan dilakukan simulasi pembobot  $\lambda \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ . Kemudian, akan dipilih pembobot  $\lambda$  optimal dengan kriteria tertentu.

Langkah awal pembuatan grafik pengendali MEWMA adalah dengan menghitung statistik MEWMA. Berikut adalah contoh perhitungan statistik MEWMA berdasarkan persamaan (2.6) dengan  $\lambda = 0,1$ . Nilai  $\mathbf{X}_i$  merupakan nilai setiap pengamatan yang dikurangi dengan rata-rata setiap variabel. Adapun data yang digunakan merupakan data hasil standardisasi. Maka, rata-rata setiap variabel adalah 0.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= (0,1)\mathbf{X}_1 + (1 - 0,1)\mathbf{Z}_{1-1} \\ &= 0,1[-1,5199 \quad 1,2576 \quad 0,8013] + 0,9[0 \quad 0 \quad 0] \\ &= [-0,1520 \quad 0,1258 \quad 0,0801] + [0 \quad 0 \quad 0] \\ &= [-0,1520 \quad 0,1258 \quad 0,0801] \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_2 = (0,1)\mathbf{X}_2 + (1 - 0,1)\mathbf{Z}_{2-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,1[0,1312 \quad -0,2875 \quad -0,8383] + 0,9[-0,1520 \quad 0,1258 \quad 0,0801] \\
&= [0,0131 \quad -0,0288 \quad -0,0838] + [-0,1368 \quad 0,1132 \quad 0,0721] \\
&= [-0,1237 \quad 0,0844 \quad -0,0117]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_3 &= (0,1)\mathbf{X}_3 + (1 - 0,1)\mathbf{Z}_{3-1} \\
&= 0,1[0,3605 \quad -2,6051 \quad 2,9093] + 0,9[-0,1237 \quad 0,08443 \quad -0,0117] \\
&= [0,0360 \quad -0,2605 \quad 0,2909] + [-0,1113 \quad 0,0760 \quad -0,0106] \\
&= [-0,0753 \quad -0,1845 \quad 0,2804]
\end{aligned}$$

Begitu pula dilakukan perhitungan statistik MEWMA yang sama hingga  $\mathbf{Z}_{43}$ .

Kemudian, akan dihitung matriks kovarian  $\mathbf{Z}_i$  ( $\boldsymbol{\Sigma}_{z_i}$ ). Matriks kovarian ini akan digunakan untuk menghitung  $T_i^2$  yang selanjutnya akan diplot sebagai hasil dari grafik pengendali MEWMA. Berikut adalah perhitungan  $\boldsymbol{\Sigma}_{z_1}$  dengan persamaan (2.9).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{z_1} &= \left[ \frac{0,1(1-(1-0,1)^{2(i)})}{(2-0,1)} \right] \begin{bmatrix} 1,0238 & -0,3165 & -0,459 \\ -0,3165 & 1,0238 & -0,0162 \\ -0,459 & -0,0162 & 1,0238 \end{bmatrix} \\
&= 0,01 \begin{bmatrix} 1,0238 & -0,3165 & -0,459 \\ -0,3165 & 1,0238 & -0,0162 \\ -0,459 & -0,0162 & 1,0238 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,0102 & -0,0032 & -0,0046 \\ -0,0032 & 0,0102 & -0,0002 \\ -0,0046 & -0,0002 & 0,0102 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kemudian, dilakukan invers terhadap matriks kovarian  $\mathbf{Z}_1$  ( $\boldsymbol{\Sigma}_1$ ), sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{z_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 139,7408 & 44,2096 & 63,3454 \\ 44,2096 & 111,6855 & 21,5885 \\ 63,3454 & 21,5885 & 126,4139 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung  $T_i^2$  yang kemudian akan merepresentasikan grafik pengendali MEWMA. Berikut adalah contoh perhitungan  $T_1^2$  dengan persamaan (2.8) dan  $\Sigma_{z_1}^{-1}$  pada persamaan (4.4).

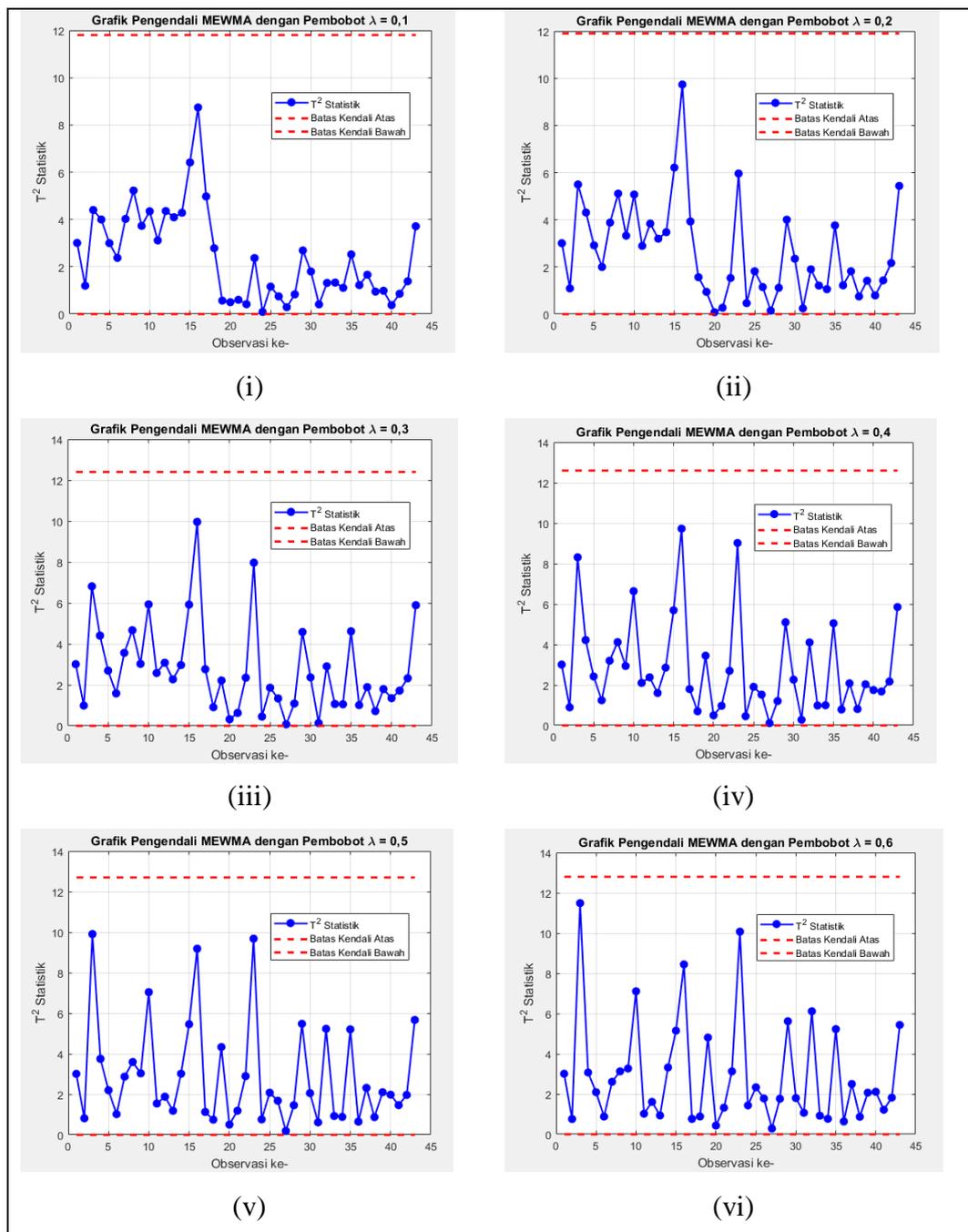
$$\begin{aligned}
 T_1^2 &= \mathbf{Z}_1^t \Sigma_{z_1}^{-1} \mathbf{Z}_1 \\
 &= [-0,1520 \quad 0,1258 \quad 0,0801] \begin{bmatrix} 139,7408 & 44,2096 & 63,3454 \\ 44,2096 & 111,6855 & 21,5885 \\ 63,3454 & 21,5885 & 126,4139 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} -0,1520 \\ 0,1258 \\ 0,0801 \end{bmatrix} \\
 &= 3,0083
 \end{aligned}$$

Langkah yang sama dilakukan hingga memperoleh  $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{43}^2$ . Hasil perhitungan  $T_i^2$  pada MEWMA dapat dilihat pada Lampiran 4 dan Lampiran 5. Selanjutnya, ditentukan batas kendali bawah dan batas kendali atas dari grafik pengendali MEWMA. Adapun nilai batas kendali bawah adalah 0 dan nilai batas kendali atas ( $h_4$ ) adalah 10,8. Kemudian, dibentuk grafik pengendali MEWMA dengan batas kendali dan nilai  $T_1^2, T_2^2, \dots, T_{43}^2$  yang sudah diketahui.

Hasil grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,1$  hingga  $\lambda = 0,6$  disajikan dalam Gambar 4.2. Pada gambar tersebut memberikan informasi pergerakan rata-rata proses produksi air minum di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Secara berurutan dari (i) – (vi), disajikan grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda$  sebesar 0,1 hingga 0,6. Grafik yang dihasilkan dari enam besaran pembobot yang berbeda memiliki pola yang hampir yang sama.

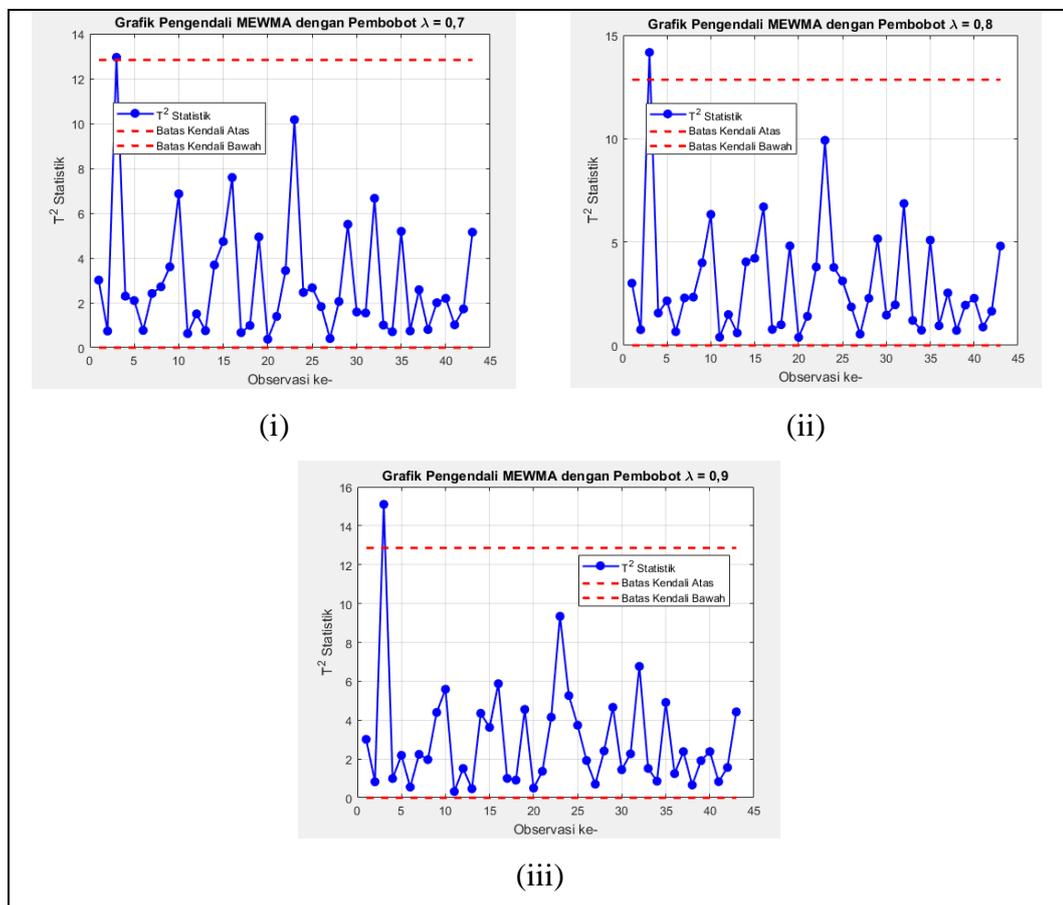
Gambar 4.2 menunjukkan bahwa grafik (i) – (iv) memiliki batas kendali atas yang berbeda-beda. Hal ini bergantung pada besaran pembobot yang sedang diuji. Pada grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,1$  memiliki batas

kendali atas ( $h_4$ ) sebesar 10,8. Kemudian, secara berurutan dari grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,2$  hingga  $\lambda = 0,6$  memiliki batas kendali atas ( $h_4$ ) sebesar 11,9; 12,4; 12,6; 12,7; 12,8; 12,83; 12,85; 12,86.



**Gambar 4.2** Grafik Pengendali MEWMA  $\lambda = 0,1$  hingga  $\lambda = 0,6$

Grafik (i) – (vi) pada Gambar 4.2 juga memberikan informasi bahwa grafik pengendali MEWMA yang dihasilkan memiliki pergerakan rata-rata proses yang fluktuatif. Rata-rata proses pada setiap pengamatan terlihat naik turun hampir pada setiap pengamatannya. Hal ini dapat dipicu oleh faktor lingkungan, seperti cuaca yang memungkinkan untuk mengubah kandungan parameter di dalam air yang akan didistribusikan. Meski demikian, seluruh pengamatan masih berada di dalam batas kendali. Sehingga, seluruh pengamatan masih terkendali secara statistik.



**Gambar 4.3** Grafik Pengendali MEWMA  $\lambda = 0,7$  hingga  $\lambda = 0,9$

Batas kendali atas secara berurutan pada grafik (i) hingga (iii) pada Gambar 4.3 adalah 12,83; 2,85; 12,86. Pergerakan yang sangat fluktuatif juga terlihat pada

grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,7$  hingga  $\lambda = 0,9$  ini. Selain itu, terlihat pula terdapat satu pengamatan yang keluar dari batas kendali atas. Terjadi perubahan rata-rata proses yang cukup drastis pada pengamatan ke – 2 menuju pengamatan ke – 3. Sehingga, pengamatan ke – 3 keluar dari batas kendali atas. Artinya, grafik pengendali menunjukkan adanya potensi pengendalian kualitas proses yang tidak terkendali secara statistik.

Setelah dilakukan pembuatan grafik pengendali MEWMA untuk pembobot  $\lambda \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ , . Kemudian, akan dipilih pembobot optimal. Pemilihan pembobot  $\lambda$  optimal didasarkan pada beberapa kriteria berikut:

- 1) Selisih nilai mutlak antara  $T_i^2$  tertinggi dengan batas kendali atas yang paling kecil  $\min \left( \left( \left| \max(T_i^2 - BKA) \right| \right) \right)$ .
- 2) Nilai rata-rata paling kecil dari nilai mutlak  $T_i^2$  dengan batas kendali atas  $\min \left( \left( \overline{\left| T_i^2 - BKA \right|} \right) \right)$ .
- 3) Banyak pengamatan yang *out of control* pada setiap grafik pengendali.

Berdasarkan grafik pengendali MEWMA yang telah dianalisis, dapat diperoleh informasi hasil kriteria pembobot optimal pada Tabel 4.2.

**Tabel 4.2** Nilai Kriteria Pembobot Optimal MEWMA

$\lambda$	BKA	$\max(T_i^2)$	$\left  \max(T_i^2 - BKA) \right $	$\overline{\left  T_i^2 - BKA \right }$	Banyak Pengamatan Out of Control
0,1	10,8	8,738	2,062	<b>8,3819</b>	0
0,2	11,9	9,7346	2,1654	9,2462	0
0,3	12,4	9,9612	2,4388	9,2365	0
0,4	12,6	9,7264	2,8736	9,1714	0
0,5	12,7	9,9067	2,7933	9,1256	0
0,6	12,8	11,4889	1,3111	9,0912	0
0,7	12,83	12,9429	<b>0,1129</b>	9,111	<b>1</b>
0,8	12,85	14,17	1,32	9,1559	<b>1</b>
0,9	12,86	15,0994	2,2394	9,1997	<b>1</b>

Berdasarkan Tabel 4.2, diperoleh informasi bahwa nilai selisih nilai  $T_i^2$  tertinggi dengan batas kendali atas yang paling kecil adalah 0,1129 pada nilai pembobot 0,7. Kemudian, nilai rata-rata paling kecil dari hasil mutlak selisih  $T_i^2$  dan batas kendali atas adalah 8,3819 pada nilai pembobot 0,1. Sedangkan jumlah pengamatan yang *out of control* sebesar 1 pada pembobot 0,7; 0,8; dan 0,9. Sehingga, pembobot yang memenuhi kriteria paling banyak pada grafik pengendali MEWMA adalah pembobot  $\lambda = 0,7$  yang merupakan grafik pengendali MEWMA paling sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses.

Grafik pengendali MEWMA dengan pembobot optimal  $\lambda$  terpilih sebesar 0,7 memiliki batas kendali atas optimal sebesar 12,83. Pengamatan yang keluar dari batas kendali atas seperti pada Gambar 4.3 bagian (i) merupakan pengamatan ke – 3 yang dilakukan pada tanggal 18 September 2023. Pengamatan ini berlokasi di Perumahan Akhtara Residence, Tasikmadu, Kecamatan Lowokwaru, Kota Malang. Adanya sinyal *out of control* ini kemungkinan dipengaruhi oleh pembangunan Sistem Penyediaan Air Minum (SPAM) yang dilakukan oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang di wilayah Tasikmadu, Lowokwaru. Sehingga, pembangunan ini mempengaruhi ketersediaan air baku dan proses distribusi yang berdampak pada karakteristik kualitas air.

#### **4.6 Pembentukan Grafik Pengendali MEWMV**

Setelah diperoleh pembobot  $\lambda$  pada grafik pengendali MEWMA dan telah diketahui bahwa rata-rata proses produksi air di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang terkendali. Kemudian, akan dilakukan analisis dengan menggunakan grafik pengendali MEWMV. Pembobot  $\lambda$  yang akan digunakan pada grafik

pengendali MEWMV ini sebesar 0,7 sebagai hasil dari pembobot optimal pada grafik pengendali MEWMA. Adapun nilai pembobot  $\omega$  optimal dapat diperoleh dengan melakukan simulasi dan pembentukan grafik pengendali MEWMV terlebih dahulu. Pada penelitian ini, akan dilakukan simulasi pembobot  $\omega \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ .

Langkah awal dalam pembuatan grafik pengendali MEWMV adalah menghitung matriks  $\mathbf{M}$  yang merupakan matriks segitiga bawah dengan ukuran  $m \times m$  dan elemen pembobot optimal  $\lambda = 0,7$ . Berikut adalah contoh perhitungan matriks  $\mathbf{M}$  untuk pengamatan ke  $-1$ . Sehingga diperoleh matriks  $\mathbf{M}$  berukuran  $1 \times 1$  berikut.

$$\mathbf{M} = [\lambda] = [0,7] \quad (4.5)$$

Kemudian, akan dihitung matriks  $\mathbf{C}$  yang merupakan matriks diagonal berukuran  $m \times m$  dengan elemen  $\omega$  yang ditetapkan. Berikut adalah contoh perhitungan matriks  $\mathbf{C}$  dengan pembobot  $\omega = 0,1$  pada pengamatan ke  $-1$ . Sehingga diperoleh matriks  $\mathbf{C}$  berukuran  $1 \times 1$  berikut.

$$\mathbf{C} = [(1 - \omega)^{m-1}] = [(1 - 0,1)^{1-1}] = [(0,9)^0] = [1] \quad (4.6)$$

Selanjutnya, akan dibutuhkan matriks  $\mathbf{I}_m$  yang merupakan matriks identitas berukuran  $m \times m$ . Berikut adalah matriks  $\mathbf{I}_1$  berukuran  $1 \times 1$ .

$$\mathbf{I}_1 = [1] \quad (4.7)$$

Setelah diperoleh matriks  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , dan  $\mathbf{I}_m$ . Maka, akan dihitung matriks  $\mathbf{Q}$  berdasarkan persamaan (2.15) dan matriks yang ada berdasarkan persamaan (4.5), (4.6), dan (4.7). Berikut adalah contoh perhitungan matriks  $\mathbf{Q}$  dengan pembobot  $\omega = 0,1$  pada pengamatan pertama.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{M})^t \mathbf{C} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{M})$$

$$\begin{aligned}
&= ([1] - [0,7])^t [1] ([1] - [0,7]) \\
&= [0,3]^t [1] [0,3] \\
&= [0,09]
\end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dibentuk matriks  $\mathbf{V}_i$  dengan persamaan (2.14). Berikut adalah contoh perhitungan matriks  $\mathbf{V}_i$  pada pengamatan ke – 1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= \mathbf{QXX}^t \\
&= [0,09] [-1,5199 \quad 1,2576 \quad 0,8013] [-1,5199 \quad 1,2576 \quad 0,8013]^t \\
&= [0,4080]
\end{aligned}$$

Kemudian, akan dihitung  $tr(\mathbf{V}_i)$  sebagai statistik grafik pengendali MEWMV. Berikut adalah contoh perhitungan dengan menggunakan persamaan (2.16).

$$tr(\mathbf{V}_1) = 0,4080$$

Setelah diperoleh nilai  $tr(\mathbf{V}_1)$  sebagai statistik MEWMV pada pengamatan ke – 1. Selanjutnya akan dihitung batas kendali atas dan batas kendali bawah grafik pengendali MEWMV pada pengamatan ke – 1 berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
BKA &= 3 \times 0,09 + 2,8066 \sqrt{2(3)(0,0081)} \\
&= 0,27 + 2,8066 \sqrt{0,0486} \\
&= 0,8887
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BKB &= 3 \times 0,09 - 2,8066 \sqrt{2(3)(0,0081)} \\
&= 0,27 - 2,8066 \sqrt{0,0486} \\
&= -0,348
\end{aligned}$$

Berikut diberikan contoh perhitungan lainnya untuk pengamatan ke – 2 dengan nilai statistik  $\mathbf{V}_2$  melalui langkah yang sama.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda(1-\lambda) & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,7(1-0,7) & 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,21 & 0,7 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} (1-\omega)^{m-1} & 0 \\ 0 & \omega(1-\omega)^{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-0,1)^{2-1} & 0 \\ 0 & 0,1(1-0,1)^{2-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{I}_2 - \mathbf{M})^t \mathbf{C} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{M}) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,21 & 0,7 \end{bmatrix} \right)^t \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,21 & 0,7 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ -0,21 & 0,3 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ -0,21 & 0,3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,0854 & -0,0063 \\ -0,0063 & 0,009 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Berdasarkan matriks pada persamaan (4.11), akan digunakan untuk menghitung  $\mathbf{V}_2$  yang kemudian akan dihitung  $\text{tr}(\mathbf{V}_2)$  sebagai statistik MEWMV pada pengamatan ke – 2 serta batas kendali atas dan batas kendali bawah

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{QXX}^t \\ &= \begin{bmatrix} 0,0854 & -0,0063 \\ -0,0063 & 0,009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5199 & 1,2576 & 0,8013 \\ 0,1312 & -0,2875 & -0,8383 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} -1,5199 & 1,2576 & 0,8013 \\ 0,1312 & -0,2875 & -0,8383 \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} 0,3949 & -0,1103 \\ -0,0397 & 0,015 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

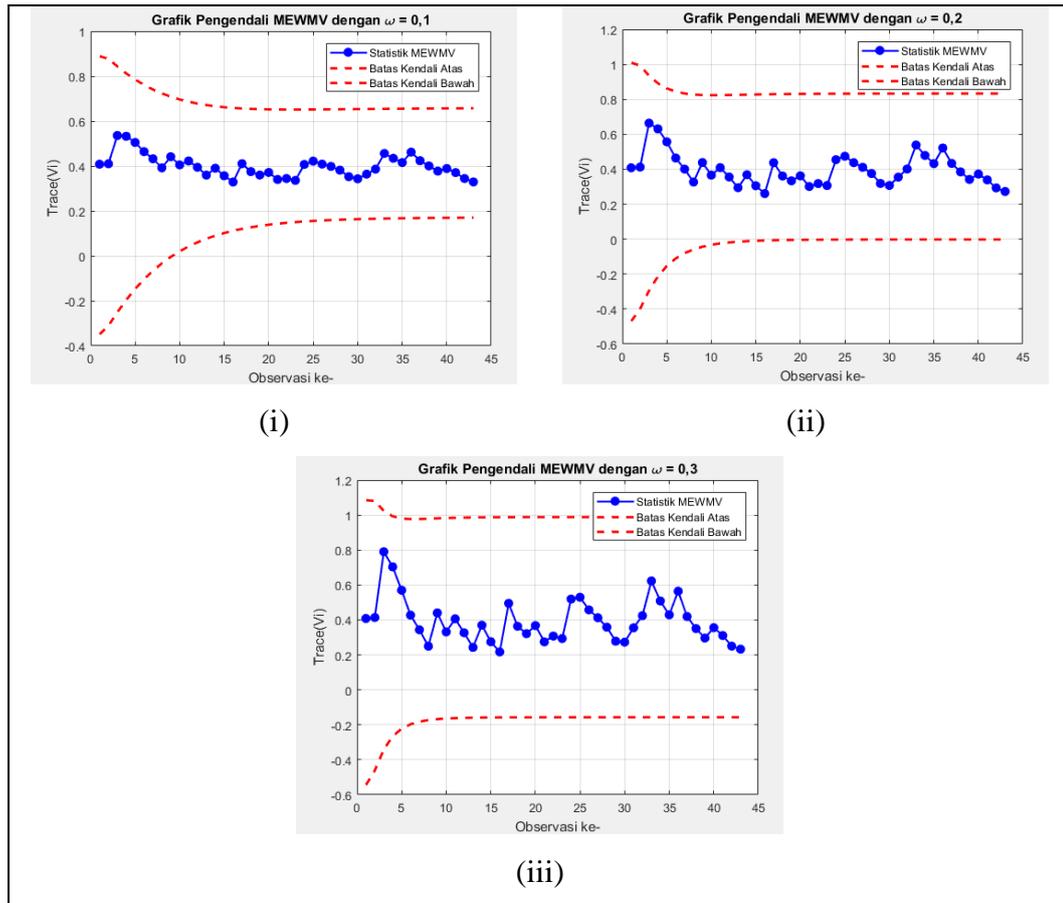
$$\text{tr}(\mathbf{V}_2) = 0,3949 + 0,015 = 0,4099 \quad (4.13)$$

$$BKA = 3 \times 0,0944 + 2,8066 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2(3)((0,0854)^2 + (-0,0063)^2 + (-0,0063)^2 + (0,009)^2)} \\
&= 0,2832 + 2,8066\sqrt{0,0448} \\
&= 0,8768 \\
BKB &= 3 \times 0,0944 - 2,8066 \\
& \sqrt{2(3)((0,0854)^2 + (-0,0063)^2 + (-0,0063)^2 + (0,009)^2)} \\
&= 0,283 - 2,8066\sqrt{0,0448} \\
&= -0,3104 \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Langkah yang sama seperti pada persamaan (4.8) hingga (4.15) dilakukan hingga diperoleh  $tr(\mathbf{V}_1)$ ,  $tr(\mathbf{V}_2)$ , ...,  $tr(\mathbf{V}_{43})$  yang kemudian akan diplot pada grafik pengendali MEWMV. Nilai  $tr(\mathbf{V}_i)$  untuk setiap besaran pembobot  $\omega$  dapat dilihat pada Lampiran 6 dan Lampiran 7. Selain itu juga akan diperoleh batas kendali untuk setiap pengamatan. Sehingga, diperoleh grafik pengendali MEWMV pada gambar 4.4. Pada Gambar 4.4 menunjukkan grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega$  sebesar 0,1 hingga 0,3 pada grafik (i) hingga (iii) secara berurutan.

Grafik yang disajikan pada Gambar 4.4 menunjukkan pola pergerakan variabilitas proses yang hampir sama pada ketiga grafik di Gambar 4.4. Grafik pengendali MEWMV memiliki batas kendali atas dan batas kendali bawah yang berbeda untuk setiap pengamatannya. Gambar 4.4 menunjukkan nilai batas kendali atas yang cenderung menurun dan kemudian stabil pada pengamatan tertentu hingga pengamatan terakhir. Sedangkan nilai batas kendali bawah cenderung naik dan mulai stabil pada pengamatan tertentu.

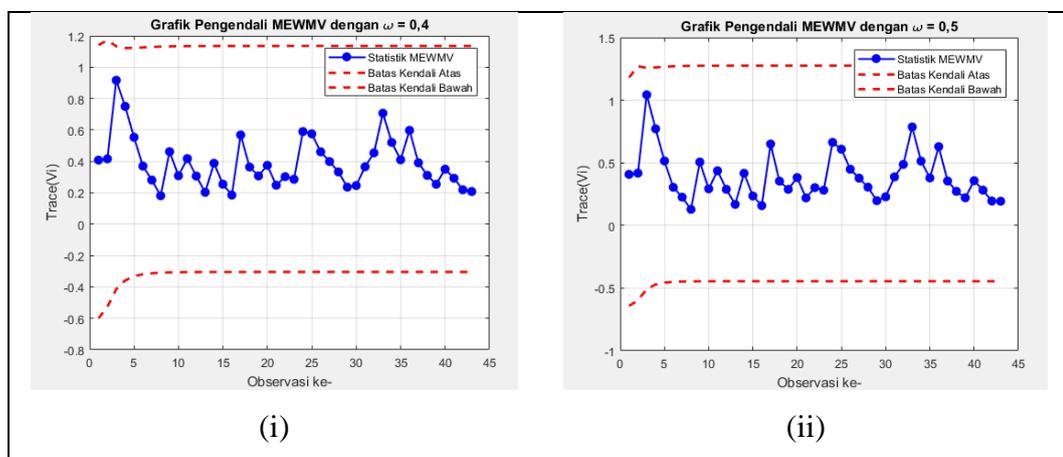


**Gambar 4.4** Grafik Pengendali MEWMV  $\omega = 0,1$  hingga  $\omega = 0,3$

Informasi terkait pergerakan variabilitas proses juga dapat diperoleh pada Gambar 4.4. Pergerakan fluktuatif terlihat pada grafik pengendali MEWMV yang dihasilkan. Grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,1$  terlihat memiliki pergerakan variabilitas yang lebih kecil dibandingkan dengan grafik pengendali MEWMV (ii) dan (iii) pada Gambar 4.4. Statistik MEWMV setiap pengamatan yang dihasilkan pada Gambar 4.4 juga berada di dalam batas kendali. Sehingga, grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,1$  hingga  $\omega = 0,3$  terkendali secara statistik.

Gambar 4.5 memberikan informasi terkait grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,4$  dan  $\omega = 0,5$ . Kedua grafik pengendali pada Gambar 4.5 ini

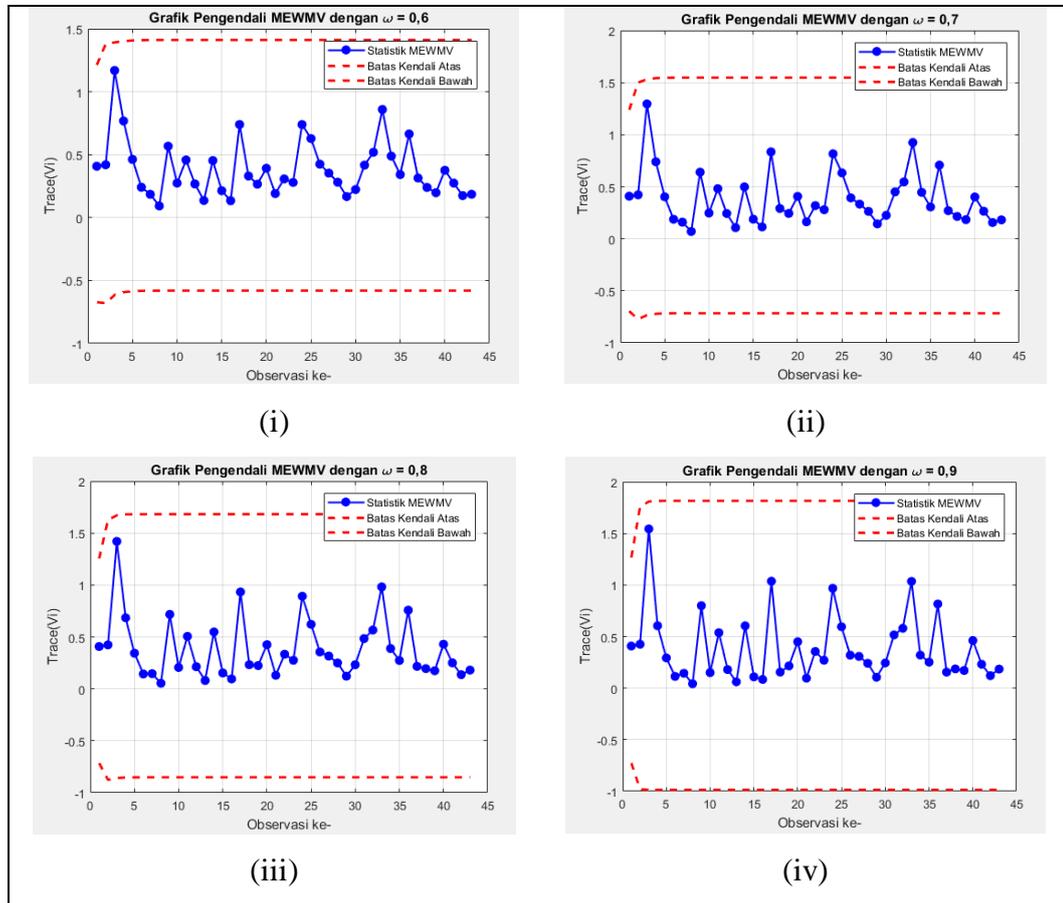
menunjukkan sedikit pergerakan naik dan turun pada nilai batas kendali atas awal pengamatan. Selain itu juga terjadi kenaikan batas kendali bawah di awal pengamatan hingga stabil pada pengamatan tertentu sampai akhir. Nilai variabilitas proses grafik pengendali MEWMV pada Gambar 4.5 juga masih berada dalam batas kendali. Artinya, grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,4$  dan  $\omega = 0,5$  terkendali secara statistik.



**Gambar 4.5** Grafik Pengendali MEWMV  $\omega = 0,4$  hingga  $\omega = 0,5$

Gambar 4.6 memberikan informasi terkait grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,6$  hingga  $\omega = 0,9$ . Grafik pengendali pada Gambar 4.6 ini menunjukkan nilai batas kendali atas dan batas kendali bawah dengan pola yang sama. Batas kendali atas dengan pola yang meningkat dan kemudian stabil pada pengamatan tertentu. Sedangkan, batas kendali bawah menurun pada pengamatan ke – 2 dan pengamatan ke – 3 naik hingga bergerak stabil pada grafik (i) dan (ii). Batas kendali bawah grafik pengendali (iii) dan (iv) menurun dan stabil pada pengamatan tertentu. Gambar 4.6 menunjukkan informasi bahwa nilai variabilitas proses tertinggi terjadi pada pengamatan ke – 3. Selain itu, nilai-nilai variabilitas

proses pengamatannya lainnya bergerak fluktuatif . Meski demikian, seluruh nilai variabilitas proses berada di dalam batas kendali dan terkendali secara statistik.



**Gambar 4.6** Grafik Pengendali MEWMV  $\omega = 0,6$  hingga  $\omega = 0,9$

Setelah dilakukan pembuatan grafik pengendali MEWMV untuk pembobot  $\omega \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ . Kemudian, akan dipilih pembobot optimal. Pemilihan pembobot  $\omega$  optimal didasarkan pada beberapa kriteria berikut:

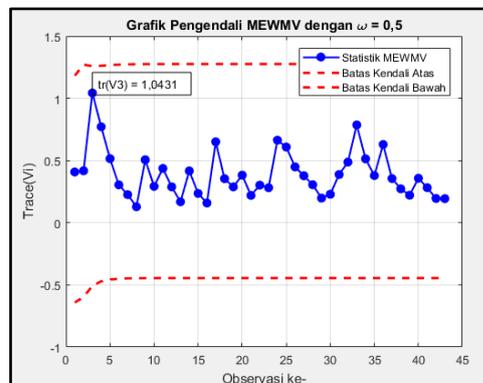
- 1) Selisih nilai  $tr(\mathbf{V}_i)$  maksimum dan batas kendali atas maksimum yang paling kecil ( $\min(\max(tr(\mathbf{V}_i)) - \max(BKA))$ ).
- 2) Banyak pengamatan yang *out of control* pada setiap grafik pengendali.

Berdasarkan grafik pengendali MEWMV yang telah dianalisis, dapat diperoleh informasi hasil kriteria pembobot optimal pada Tabel 4.3.

**Tabel 4.3** Nilai Kriteria Pembobot Optimal MEWMV

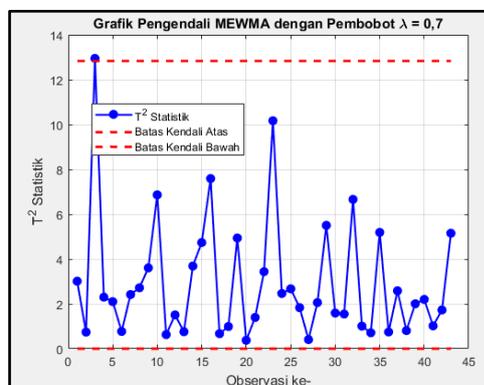
$\omega$	$L$	$\max(\text{tr}(V_i))$	$\max(BKA)$	$\max(\text{tr}(V_i)) - \max(BKA)$	Banyak Pengamatan Out of Control
0,1	2,8066	0,5358	0,8887	0,3529	0
0,2	3,3535	0,6632	1,0093	0,3461	0
0,3	3,6943	0,7902	1,0844	0,2942	0
0,4	3,9492	0,9169	1,1717	0,2548	0
0,5	4,1367	1,0431	1,2758	<b>0,2327</b>	0
0,6	4,2734	1,169	1,4113	0,2423	0
0,7	4,3836	1,2944	1,5468	0,2524	0
0,8	4,4629	1,4195	1,6817	0,2622	0
0,9	4,5098	1,5442	1,8159	0,2717	0

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa nilai selisih  $\text{tr}(V_i)$  maksimum dengan batas kendali atas maksimum yang paling kecil adalah 0,2327. Nilai ini dihasilkan oleh grafik pengendali MEWMV dengan pembobot  $\omega = 0,5$ . Artinya, grafik pengendali dengan pembobot  $\lambda = 0,7$ ,  $\omega = 0,5$ ,  $L = 4,1367$  merupakan grafik pengendali paling sensitif untuk mendeteksi pergeseran variabilitas proses produksi air minum di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang.



**Gambar 4.7** Grafik Pengendali MEWMV dengan Pembobot Optimal,  $\lambda = 0,7$ ;  $\omega = 0,5$ ;  $L = 4,1367$

Berdasarkan perolehan nilai pembobot optimum  $\omega$  sebesar 0,5 dengan  $\lambda = 0,7$  dan  $L = 4,1367$ , diketahui bahwa pengamatan pada grafik pengendali tersebut tidak memberikan sinyal *out of control*. Artinya, seluruh pengamatan terkendali secara statistik. Namun, grafik pengendali dengan pembobot optimal menunjukkan bahwa nilai maksimum statistik MEWMV pada pengamatan ke – 3 merupakan nilai tertinggi sebesar 1,0431 (informasi dapat dilihat pada Lampiran 6). Nilai ini memiliki perbedaan yang cukup besar dengan pengamatan-pengamatan lainnya dan memberikan indikasi adanya suatu masalah atau perlakuan tertentu pada pengamatan tersebut. Grafik pengendali MEWMA dan MEWMV menunjukkan nilai yang mendekati batas kendali atas. Adanya perbedaan yang cukup tinggi pada pengamatan ke – 3 juga terjadi di grafik pengendali MEWMA dengan pembobot optimal seperti pada Gambar 4.8.



**Gambar 4.8** Grafik Pengendali MEWMA dengan Pembobot Optimal,  $\lambda = 0,7$

Grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda = 0,7$  juga menunjukkan adanya sinyal *out of control* pada pengamatan ke – 3 yang dilakukan pada tanggal 18 September 2023. Pengamatan ini berlokasi di Perumahan Akhtara Residence, Tasikmadu, Kecamatan Lowokwaru, Kota Malang. Adanya sinyal *out of control*

kemungkinan disebabkan karena adanya pembangunan SPAM, sehingga memberikan pengaruh terhadap kualitas karakteristik air baku yang akan didistribusikan kepada masyarakat.

#### **4.7 Manfaat Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits**

Pada BAB I subbab 1.1 telah diberikan ayat yang menjelaskan bahwa terdapat hal-hal baik dan hal-hal buruk yang didasarkan pada aturan tertentu. Konsep ini tersampaikan pada surah al-A'raf ayat 168 yang memberikan gambaran terkendali atau tidaknya sesuatu pada pengendalian kualitas. Kemudian, diberikan penjelasan tambahan pada BAB II subbab 2.2 yang mencantumkan surah as-Syu'ara ayat 181 – 183 tentang penyempurnaan takaran dan timbangan. Berdasarkan ayat al-Quran tersebut, dapat diambil poin-poin manfaat integrasi berikut:

##### **1. Ketakwaan**

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), takwa berarti terpeliharanya diri untuk taat melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi yang dilarang oleh-Nya; rasa insaf pada diri yang diikuti rasa patuh dan taat dalam melaksanakan perintah dan menjauhi larangan-Nya. Sedangkan menurut istilah, takwa merupakan rasa dalam pemeliharaan ini agar terhindar dari siksaan Allah swt., yaitu dengan menjalankan segala perintah dan menjauhi segala larangan-Nya. Takwa kepada Allah swt. akan selalu beriringan dengan hal-hal baik. Sehingga, manusia yang menjalankan segala perintah dan menjauhi segala larangan Allah swt. merupakan manusia yang baik. Manusia dengan iman dan takwa yang kuat akan selalu menjaga hubungannya, baik dengan sesama manusia dan Tuhan-Nya. Selain itu, manusia dengan takwa

akan menghargai seluruh ciptaan Allah swt., termasuk hewan, tumbuhan, dan alam semesta. Rasa kepemilikan dan saling menjaga dalam hal kebaikan.

## 2. Penyempurnaan takaran dan timbangan

Penyempurnaan takaran dan timbangan akan selalu berhubungan dengan transaksi jual beli. Takaran dan timbangan menjadi bagian yang seringkali dicurangi dalam prosesnya. Praktik ini pasti akan merugikan salah satu pihak dan menjadikan sebuah ketidakrelaan. Sedangkan, konsep jual beli dalam Islam adalah rasa saling rela diantara pihak yang melakukan jual beli. Transaksi dengan kecurangan ini dapat dihindari dengan adanya transparansi antara penjual dan pembeli. Selain itu, perlu adanya rasa kesadaran dan tanggung jawab diantara kedua belah pihak yang bertransaksi. Rasa takut pada Allah terhadap larangan-Nya dalam melakukan juga menjadi bagian yang paling penting dalam menghindari kecurangan dalam proses transaksi.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada BAB IV, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil penerapan grafik pengendali MEWMA pada proses produksi air minum di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang menunjukkan bahwa proses produksi terkendali secara statistik dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses. Grafik pengendali MEWMA dengan pembobot  $\lambda \in \{0,7; 0,8; 0,9\}$  mendeteksi adanya sinyal *out of control* pada pengamatan ke – 3. Artinya, terdapat suatu hal yang menyebabkan nilai statistik pada pengamatan ke – 3 tersebut melebihi dari batas kendali yang telah ditetapkan. Berdasarkan kriteria statistik yang telah ditentukan, dipilih satu pembobot  $\lambda$  sebagai pembobot optimal sebesar 0,7. Pembobot ini merupakan pembobot dengan hasil paling sensitif terhadap hasil grafik pengendali MEWMA. Adanya nilai yang keluar dari batas kendali ini berarti terdapat nilai statistik yang keluar dari batas kendali. Pada dasarnya, nilai statistik yang keluar dari batas kendali belum tentu keluar dari batas spesifikasi. Namun, pada penelitian ini terdapat kandungan air yang berada di luar batas spesifikasi Kementerian Kesehatan. Adanya nilai yang keluar dari batas kendali ini tidak terjadi terus-menerus. Terlihat dengan adanya penurunan signifikan nilai statistik yang kembali normal di dalam batas kendali pada pengamatan ke – 4 dan nilai yang terus berada di dalam batas kendali pada pengamatan-pengamatan selanjutnya. Hal

ini berarti terjadi penyesuaian kandungan zat dengan perlakuan tertentu pada proses produksi oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang. Perubahan kadar suatu zat pada air bisa saja terjadi karena beberapa faktor, salah satunya adalah faktor eksternal pembangunan Saluran Penyediaan Air Minum (SPAM) seperti faktor yang terjadi pada pengamatan ke – 3.

2. Hasil penerapan grafik pengendali MEWMV pada proses produksi air minum di Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota Malang menunjukkan bahwa proses produksi terkendali secara statistik untuk semua pembobot  $\omega$  dalam mendeteksi pergeseran variabilitas proses. Berdasarkan kriteria statistik yang telah ditentukan dipilih satu pembobot  $\omega$  sebagai pembobot optimal sebesar 0,5. Pembobot ini merupakan pembobot dengan hasil paling sensitif terhadap hasil grafik pengendali MEWMV. Hasil grafik pengendali dengan pembobot  $\omega$  sebesar 0,5 menunjukkan tidak ada data *out of control*, artinya semua pengamatan memiliki nilai statistik berada di dalam batas kendali atau kadar zat dalam air berada di dalam batas yang telah ditentukan oleh Kementerian Kesehatan. Meski demikian, sama halnya pada grafik pengendali MEWMA, pengamatan ke – 3 menunjukkan nilai statistik MEWMV paling tinggi dibandingkan dengan nilai pada pengamatan yang lainnya. Artinya, terdapat suatu kandungan zat paling tinggi pada pengamatan ke – 3 dibandingkan dengan pengamatan lainnya. Pada penelitian ini, diduga variabel sisa *chlor* yang menjadi penyebab tingginya nilai statistik dengan kandungan sisa *chlor* yang berada di bawah batas spesifikasi. Sehingga kemudian dilakukan penyesuaian kandungan air oleh Perumda Air Minum Tugu Tirta Kota

Malang dan memberikan hasil yang relatif stabil di pengamatan-pengamatan berikutnya.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada penelitian ini, peneliti memberikan saran agar dapat lebih baik sebagai berikut.

1. Mencoba menggunakan jenis jarak lain untuk uji normalitas multivariat dengan tujuan membandingkan hasil uji asumsi.
2. Menggunakan lebih banyak variabel karakteristik kualitas air minum dan mengidentifikasi dengan tepat variabel yang memberikan pengaruh signifikan terhadap kualitas air.
3. Mengidentifikasi secara spesifik penyebab adanya *out of control* pada pengamatan.
4. Melakukan analisis kapabilitas proses pada pengendalian kualitas.
5. Instansi dapat menggunakan hasil penelitian untuk evaluasi terhadap hasil produksi.
6. Melakukan analisis pengendalian kualitas secara berkala terhadap data terkini di lapangan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6 (Terjemahan)* (Ghoffar dan al-Atsari (Penerjemah); 1<sup>st</sup> ed.). Pustaka Imam Asy-Syafi'i
- Arinda, A., Mustafid, Mukid, A. (2016). Penerapan Grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) pada Pengendalian Karakteristik Kualitas Air (Studi Kasus: Instalasi Pengolahan Air III PDAM Tirta Moedal Kota Semarang).. Universitas Diponegoro. Jurnal Gaussian. Vol.5 No. 1
- Baransano, A., Wahyuningsih, S., Nasution, Y. (2018). Penerapan Grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Variance* (MEWMV). Universitas Mulawarman. Jurnal Gaussian. Vol.9 No. 2
- Bartlett, M. S. 1951. *The Effect of Standarization on a  $X^2$  Aproximation in Factor Analysis*. *Biometrika*. 337-344
- Debby, Anneke, Suliadi. (2018). Grafik pengendali Exponentially Weighted Moving Average Sign. Universitas Islam Bandung. Vol. 4 No. 1
- Frangkamon, B., Nasution Y., Purnamasari, I. (2019). Penggunaan *Weighted Probabilistic Neural Network* (WPNN) dalam Klasifikasi Data Berat Bayi Lahir berdasarkan Usia Ibu, Jarak Paritas, dan Masa Gestasi. Universitas Mulawarman
- Huwang, L., Yeh, A. B., Wu C.. (2007). *Monitoring Multivariate Process Variability for Individual Observations*. Journal of Quality Technology. Vol. 39 No. 3
- Jannah, M., Ramadhani E., Siregar, L. R.. (2023). Penerapan Bagan Kendali MEWMA-MEWMV pada Pengendalian Kualitas Lulusan Prodi Statistika FMIPA Universitas Syiah Kuala. *Inferensi*. Vol. 6(1)
- Jayanti, J. D., Wibawati. (2014). Penerapan Diagram Kontrol Mewma dan Mewmv pada Pengendalian Kualitas Air Produksi di Ipam Ngagel I. Institut Teknologi Sepuluh November. Jurnal Sains dan Seni Pomits. Vol. 3 No. 2
- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis Sixth Edition*. Pearson Edition, Inc.
- Kementerian Agama RI. (2022). *Quran Kemenag*.
- Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W., Rigdon, S. E. (1992). A Multivariate Exponentially Weighted Movig Average Control Chart. *Technometrics*, 34(1), 46. <https://doi.org/10.2307/1269551>
- Maharani, A. A., Mustafid, Sudarno. (2018). Penerapan Diagram Kontrol MEWMA dan MEWMV pada Pengendalian Karakteristik Air (Studi Kasus: Kualitas Pengolahan Air II PDAM Tirta Moedal Kota Semarang). Universitas Diponegoro. Jurnal Gaussian. Vol. 7 No. 1

Montgommery, D. C. 2013. *Introduction to Statistical QualityControl Seventh Edition*. John Willey&Sons, Inc. United State of America

Kementerian Kesehatan. 2010. Peraturan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor 492 Tahun 2010 tentang Persyaratan Kualitas Air Minum. Jakarta

Sulaeman. (2014). Analisa Pengendalian Kualitas untuk Mengurangi produk Cacat *Speedometer* Mobil dengan Menggunakan Metode QCC di PT. INS. Jurnal PASTI, Vol. 8, No. 1

## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Data Karakteristik Kualitas Air

<b>Pengamatan ke -</b>	<b>Kekeruhan</b>	<b>Sisa Chlor</b>	<b>pH</b>
1	0	0,5	7,4
2	0,36	0,3	6,7
3	0,41	0	8,3
4	0,19	0,3	7,19
5	0,22	0,3	6,7
6	0,2	0,4	7,1
7	0,2	0,2	7,1
8	0,29	0,2	7
9	0,05	0,6	7
10	0,09	0,6	6,9
11	0,42	0,3	6,83
12	0,12	0,3	7,1
13	0,32	0,3	6,9
14	0,05	0,5	7,8
15	0	0,5	7,4
16	0,09	0,6	7,5
17	0,56	0,3	6,68
18	0,52	0,3	6,85
19	0,76	0,2	6,9
20	0,2	0,3	7,1
21	0,29	0,3	6,72
22	0,72	0,4	6,8
23	0,69	0,4	7,5
24	0,04	0,2	6,8
25	0,33	0,5	7,61
26	0,22	0,2	7,41
27	0,29	0,4	6,76
28	0,61	0,4	6,79
29	0,58	0,5	6,67
30	0,32	0,3	6,64
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
39	0,48	0,2	6,68
40	0,17	0,5	6,78
41	0,51	0,3	6,74
42	0,48	0,2	6,82
43	0,74	0,2	6,51

**Lampiran 2. Data Hasil Standardisasi**

<b>Pengamatan ke -</b>	<b>Kekeruhan</b>	<b>Sisa Chlor</b>	<b>pH</b>
1	-1,5199	1,2576	0,8013
2	0,1312	-0,2875	-0,8383
3	0,3605	-2,6051	2,9093
4	-0,6485	-0,2875	0,3094
5	-0,5109	-0,2875	-0,8383
6	-0,6026	0,4851	0,0986
7	-0,6026	-1,0600	0,0986
8	-0,1899	-1,0600	-0,1356
9	-1,2906	2,0302	-0,1356
10	-1,1071	2,0302	-0,3699
11	0,4064	-0,2875	-0,5338
12	-0,9695	-0,2875	0,0986
13	-0,0523	-0,2875	-0,3699
14	-1,2906	1,2576	1,7382
15	-1,5199	1,2576	0,8013
16	-1,1071	2,0302	1,0355
17	1,0484	-0,2875	-0,8852
18	0,8650	-0,2875	-0,4870
19	1,9657	-1,0600	-0,3699
20	-0,6026	-0,2875	0,0986
21	-0,1899	-0,2875	-0,7915
22	1,7822	0,4851	-0,6041
23	1,6447	0,4851	1,0355
24	-1,3364	-1,0600	-0,6041
25	-0,0064	1,2576	1,2931
26	-0,5109	-1,0600	0,8247
27	-0,1899	0,4851	-0,6978
28	1,2778	0,4851	-0,6275
29	1,1402	1,2576	-0,9086
30	-0,0523	-0,2875	-0,9788
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
39	0,6815	-1,0600	-0,8852
40	-0,7402	1,2576	-0,6509
41	0,8191	-0,2875	-0,7446
42	0,6815	-1,0600	-0,5572
43	1,8740	-1,0600	-1,2833

**Lampiran 3.** Hasil Perhitungan Nilai  $d_i^2$ 

Pengamatan ke -	Nilai $d_i^2$	$d_i^2 \leq \chi_{\alpha,df}^2$
1	3,0083	0
2	0,9361	0
3	15,687	1
4	0,6732	0
5	2,1219	0
6	0,4695	0
7	2,2189	0
8	1,6012	0
9	4,7404	0
10	4,6964	0
11	0,3714	0
12	1,5311	0
13	0,3528	0
14	4,58	0
15	3,0083	0
16	5,1397	0
17	1,2864	0
18	0,7446	0
19	4,2332	0
20	0,6777	0
21	1,2716	0
22	4,4366	0
23	8,4784	1
24	6,7636	0
25	4,5648	0
26	2,047	0
27	0,869	0
28	2,4431	0
29	4,0888	0
30	1,5069	0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
39	1,8966	0
40	2,5015	0
41	0,8423	0
42	1,4316	0
43	4,0284	0

**Lampiran 4.** Nilai  $T_i^2$  pada Grafik Pengendali MEWMA

$i$	$\lambda$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	3,0083	3,0083	3,0083	3,0083	3,0083
2	1,1980	1,0920	0,9889	0,8942	0,8153
3	4,4007	5,4955	6,8137	8,3117	9,9067
4	3,9973	4,3079	4,4055	4,2204	3,7513
5	2,9999	2,9160	2,6937	2,4202	2,1990
6	2,3761	2,0001	1,5832	1,2441	1,0206
7	4,0233	3,8814	3,5636	3,2011	2,8727
8	5,2232	5,1096	4,6686	4,1197	3,5929
9	3,7282	3,3248	3,0251	2,9375	3,0339
10	4,3475	5,0698	5,9305	6,6396	7,0422
11	3,1140	2,8937	2,5781	2,1022	1,5437
12	4,3573	3,8375	3,0818	2,3795	1,8826
13	4,0924	3,1978	2,2727	1,6019	1,1884
14	4,2836	3,4763	2,9670	2,8565	3,0177
15	6,4127	6,2123	5,9207	5,6930	5,4598
16	8,7380	9,7346	9,9612	9,7264	9,1858
17	4,9733	3,9283	2,7657	1,7972	1,1273
18	2,7856	1,5648	0,9086	0,6988	0,7480
19	0,5684	0,9448	2,2128	3,4468	4,3324
20	0,5031	0,0825	0,3207	0,4972	0,5063
21	0,6028	0,2705	0,6284	0,9713	1,1902
22	0,4173	1,5328	2,3491	2,6998	2,8973
23	2,3677	5,9626	7,9681	9,0204	9,6793
24	0,0921	0,4658	0,4514	0,4557	0,7616
25	1,1597	1,8169	1,8593	1,9081	2,0777
26	0,7468	1,1488	1,3367	1,5220	1,6805
27	0,2890	0,1488	0,0725	0,1121	0,1911
28	0,8348	1,1179	1,0856	1,2049	1,4594
29	2,6911	4,0052	4,5816	5,0997	5,4785
30	1,7986	2,3514	2,3637	2,2631	2,0554
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
39	0,9852	1,4186	1,7933	2,0321	2,1023
40	0,3780	0,7948	1,3486	1,7505	1,9813
41	0,8592	1,4302	1,7199	1,6795	1,4637
42	1,3855	2,1690	2,3230	2,1704	1,9692
43	3,7125	5,4365	5,8907	5,8536	5,6702

**Lampiran 5.** Lanjutan Nilai  $T_i^2$  pada Grafik Pengendali MEWMA

$i$	$\lambda$			
	0,6	0,7	0,8	0,9
1	3,0083	3,0083	3,0083	3,0083
2	0,7605	0,7389	0,7585	0,8241
3	11,4889	12,9429	14,1700	15,0994
4	3,0699	2,2962	1,5638	0,9929
5	2,0918	2,0954	2,1537	2,1866
6	0,8796	0,7697	0,6608	0,5541
7	2,6078	2,4157	2,2953	2,2360
8	3,1272	2,7153	2,3348	1,9664
9	3,2679	3,6015	3,9937	4,3931
10	7,1080	6,8587	6,3339	5,5886
11	1,0227	0,6266	0,3944	0,3221
12	1,6096	1,5042	1,4915	1,5116
13	0,9353	0,7547	0,6015	0,4653
14	3,3231	3,6842	4,0401	4,3477
15	5,1506	4,7336	4,2140	3,6239
16	8,4418	7,5852	6,7031	5,8705
17	0,7649	0,6688	0,7719	0,9997
18	0,8844	0,9878	0,9985	0,9086
19	4,8085	4,9326	4,8102	4,5491
20	0,4318	0,3733	0,3896	0,4954
21	1,3202	1,3906	1,4067	1,3659
22	3,1262	3,4340	3,7940	4,1497
23	10,0715	10,1645	9,9193	9,3403
24	1,4356	2,4609	3,7722	5,2573
25	2,3326	2,6682	3,1179	3,7335
26	1,7791	1,8284	1,8610	1,9182
27	0,2868	0,4041	0,5453	0,7044
28	1,7668	2,0557	2,2778	2,4094
29	5,6182	5,4976	5,1558	4,6614
30	1,8019	1,5864	1,4645	1,4467
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
39	2,0682	2,0017	1,9454	1,9122
40	2,1100	2,1974	2,2799	2,3775
41	1,2180	1,0174	0,8869	0,8294
42	1,8209	1,7258	1,6505	1,5606
43	5,4343	5,1471	4,8052	4,4230

**Lampiran 6.** Nilai  $tr(V_i)$  pada Grafik Pengendali MEWMV

$i$	$\omega$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,4080	0,4080	0,4080	0,4080	0,4080
2	0,4100	0,4119	0,4139	0,4158	0,4178
3	0,5358	0,6632	0,7902	0,9169	1,0431
4	0,5323	0,6307	0,7033	0,7503	0,7718
5	0,5049	0,5562	0,5698	0,5535	0,5151
6	0,4638	0,4637	0,4270	0,3697	0,3045
7	0,4322	0,4005	0,3432	0,2808	0,2260
8	0,3920	0,3266	0,2495	0,1809	0,1285
9	0,4412	0,4380	0,4398	0,4620	0,5061
10	0,4049	0,3661	0,3314	0,3086	0,2923
11	0,4225	0,4090	0,4061	0,4174	0,4364
12	0,3943	0,3553	0,3264	0,3066	0,2884
13	0,3596	0,2938	0,2428	0,2031	0,1681
14	0,3902	0,3680	0,3695	0,3878	0,4165
15	0,3566	0,3053	0,2750	0,2545	0,2355
16	0,3291	0,2605	0,2168	0,1852	0,1583
17	0,4104	0,4369	0,4945	0,5681	0,6504
18	0,3751	0,3610	0,3635	0,3639	0,3540
19	0,3599	0,3333	0,3212	0,3074	0,2883
20	0,3715	0,3619	0,3677	0,3749	0,3822
21	0,3401	0,3009	0,2745	0,2478	0,2196
22	0,3445	0,3176	0,3075	0,3024	0,3020
23	0,3361	0,3063	0,2935	0,2859	0,2815
24	0,4071	0,4542	0,5192	0,5899	0,6637
25	0,4218	0,4742	0,5296	0,5755	0,6088
26	0,4085	0,4371	0,4574	0,4609	0,4489
27	0,3983	0,4109	0,4121	0,3990	0,3776
28	0,3817	0,3753	0,3583	0,3326	0,3052
29	0,3526	0,3184	0,2781	0,2358	0,1980
30	0,3434	0,3068	0,2727	0,2456	0,2291
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
39	0,3773	0,3416	0,2962	0,2542	0,2210
40	0,3890	0,3720	0,3555	0,3501	0,3575
41	0,3707	0,3388	0,3106	0,2924	0,2817
42	0,3444	0,2927	0,2499	0,2188	0,1950
43	0,3292	0,2726	0,2326	0,2081	0,1935

**Lampiran 7.** Lanjutan Nilai  $tr(V_i)$  pada Grafik Pengendali MEWMV

$i$	$\omega$			
	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,4080	0,4080	0,4080	0,4080
2	0,4197	0,4216	0,4236	0,4255
3	1,1690	1,2944	1,4195	1,5442
4	0,7678	0,7386	0,6842	0,6048
5	0,4622	0,4024	0,3435	0,2930
6	0,2412	0,1865	0,1438	0,1138
7	0,1850	0,1592	0,1467	0,1441
8	0,0926	0,0694	0,0541	0,0423
9	0,5673	0,6394	0,7178	0,7996
10	0,2740	0,2468	0,2064	0,1506
11	0,4579	0,4804	0,5057	0,5375
12	0,2674	0,2424	0,2135	0,1802
13	0,1356	0,1062	0,0809	0,0610
14	0,4532	0,4973	0,5481	0,6045
15	0,2139	0,1873	0,1532	0,1095
16	0,1343	0,1130	0,0956	0,0840
17	0,7393	0,8337	0,9332	1,0367
18	0,3303	0,2904	0,2327	0,1555
19	0,2657	0,2429	0,2246	0,2159
20	0,3919	0,4061	0,4258	0,4501
21	0,1910	0,1618	0,1308	0,0964
22	0,3071	0,3177	0,3337	0,3556
23	0,2794	0,2780	0,2755	0,2704
24	0,7393	0,8155	0,8918	0,9684
25	0,6280	0,6323	0,6214	0,5953
26	0,4246	0,3920	0,3554	0,3196
27	0,3536	0,3320	0,3161	0,3076
28	0,2812	0,2626	0,2496	0,2404
29	0,1669	0,1423	0,1225	0,1057
30	0,2228	0,2248	0,2326	0,2447
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
39	0,1976	0,1827	0,1746	0,1711
40	0,3754	0,4006	0,4301	0,4616
41	0,2737	0,2643	0,2508	0,2315
42	0,1745	0,1551	0,1368	0,1206
43	0,1850	0,1809	0,1810	0,1849

### Lampiran 8. Syntax Matlab Grafik Pengendali MEWMA

```

clc; clear; close all;

% Import data dari file Excel
filename = 'Data_Skripsi_Uji.xlsx';
data = xlsread(filename); % Gunakan xlsread untuk kompatibilitas
dengan MATLAB 2017
disp(data);

% Parameter
lambda = 0.9; % Parameter smoothing
h4 = 12.86; % Batas kontrol
[t, w] = size(data); % t = jumlah observasi, w = jumlah variabel
rata = mean(data); % Rata-rata setiap kolom
disp(rata);

% Mengurangi rata-rata dari setiap kolom
X = data - rata;
disp(X);

% Perhitungan matriks kovariansi antar data
S = cov(data);

% Inisialisasi Z dan perhitungan Statistik MEWMA
Z = zeros(t, w);
for p = 1:w
    Z(1, p) = lambda * X(1, p);
end
for i = 2:t
    for p = 1:w
        Z(i, p) = lambda * X(i, p) + (1 - lambda) * Z(i-1, p);
    end
end
disp(Z);

% Perhitungan T2 Statistik
T2 = zeros(t, 1);
for i = 1:t
    sigma = (lambda * (1 - (1 - lambda)^(2 * i)) / (2 - lambda)) *
S; % Kovariansi
    invsigma = inv(sigma); % Matriks invers
    Z1 = Z(i, :);
    T2(i) = Z1 * invsigma * Z1';
end

disp(sigma);
disp(T2);

% Mengecek observasi di luar batas kontrol
keluar = 0;
d = 0;
yangkeluar = [];
for i = 1:t
    if T2(i) > h4
        keluar = keluar + 1;
        d = d + 1;
    end
end

```

```

        yangkeluar(d) = i;
    end
end

% Batas Kendali dan Indeks Observasi
batas_atas = h4 * ones(t, 1); % Garis batas kontrol tetap
batas_bawah = zeros(t, 1);    % Garis batas kontrol bawah (nol)
mean_line = mean_T2 * ones(t, 1); % Garis rata-rata T2
x = 1:t; % Indeks observasi

% Plot Grafik Pengendali MEWMA
figure;
plot(x, T2, 'bo-', 'MarkerFaceColor', 'b', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot(x, batas_atas, 'r--', 'LineWidth', 2);
plot(x, batas_bawah, 'r--', 'LineWidth', 2);
hold off;

% Tambahkan Label, Judul, dan Legenda
xlabel('Observasi ke-');
ylabel('T2 Statistik');
title('Grafik Pengendali MEWMA dengan Pembobot \lambda = 0,5');
legend('T2 Statistik', 'Batas Kendali Atas', 'Batas Kendali Bawah', 'Location', 'best');
grid on;

% Menampilkan hasil
jumlah_keluar = keluar;
disp(['Jumlah observasi di luar batas kontrol: ',
num2str(jumlah_keluar)]);
if keluar > 0
    disp(['Observasi yang keluar: ', num2str(yangkeluar)]);
else
    disp('Semua observasi berada dalam batas kontrol. ');
end
end

```

### Lampiran 9. Syntax Matlab Grafik Pengendali MEWMV

```

clc; clear; close all;

% Import Data dari Excel
filename = 'Data_Skripsi_Uji.xlsx';
X = xlsread(filename);
[t, w] = size(X);
m = t; % Jumlah observasi

% Parameter Awal
lambda = 0.7; % Pembobot smoothing
omega = 0.9; % Pembobot omega
p = 3; % Jumlah variabel
L = 4.5098; % Konstanta batas kendali

% Matriks Awal
I = eye(m); % Matriks identitas ukuran m x m
A = X * X'; % Perhitungan matriks kovarians
M = zeros(m, m); % Matriks bawah M
elemen = zeros(1, m); % Array elemen lambda

% Perhitungan Elemen Lambda
for i = 1:m
    elemen(i) = lambda * (1 - lambda)^(1 - i);
end

% Matriks Segitiga Bawah M
for j = 1:m
    for j2 = 1:m
        if j < j2
            M(j, j2) = 0;
        else
            M(j, j2) = lambda * (1 - lambda)^(j - j2);
        end
    end
end

% Perhitungan Statistik MEWMV
trv = zeros(1, m);
estt = zeros(1, m);
varr = zeros(1, m);
ba = zeros(1, m);
bb = zeros(1, m);

for u = 1:m
    A_partial_u = A(1:u, 1:u);
    I_partial_u = I(1:u, 1:u);
    M_partial_u = M(1:u, 1:u);

    % Perhitungan Elemen C
    elemenC = zeros(1, u);
    for i = 1:u
        if i > 1
            elemenC(i) = omega * (1 - omega)^(u - i);
        else
            elemenC(i) = (1 - omega)^(u - i);
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    C = diag(elemenC); % Matriks diagonal C

    % Perhitungan Q
    Q = (I_partial_u - M_partial_u)' * C * (I_partial_u -
M_partial_u);

    % Statistik MEWMV
    trv(u) = trace(Q * A_partial_u);
    estt(u) = p * trace(Q);
    Q2 = Q.^2;
    sumQ2 = sum(sum(Q2));
    varr(u) = 2 * p * sumQ2;

    % Batas Kendali Atas dan Bawah
    ba(u) = estt(u) + (L * sqrt(varr(u)));
    bb(u) = estt(u) - (L * sqrt(varr(u)));
end

% Identifikasi Observasi di Luar Batas Kendali
keluar1 = 0;
d1 = 0;
ygkeluar1 = [];

for i = 1:m-1
    if trv(i) > ba(i)
        keluar1 = keluar1 + 1;
        d1 = d1 + 1;
        ygkeluar1(d1) = i;
    end
end

keluar2 = 0;
d2 = 0;
ygkeluar2 = [];

for i = 1:m-1
    if trv(i) < bb(i)
        keluar2 = keluar2 + 1;
        d2 = d2 + 1;
        ygkeluar2(d2) = i;
    end
end

% Hitung Jumlah Observasi Keluar Kendali
jumlah_keluar = keluar1 + keluar2;
D = max(trv); % Nilai maksimum statistik MEWMV

% Plot Grafik Pengendali MEWMV
x = 1:m;
figure;
plot(x, trv, 'bo-', 'MarkerFaceColor', 'b', 'LineWidth', 1.5); %
Plot statistik MEWMV
hold on;
plot(x, ba, 'r--', 'LineWidth', 2); % Batas kendali atas
plot(x, bb, 'r--', 'LineWidth', 2); % Batas kendali bawah

```

```
hold off;

title('Grafik Pengendali MEWMV dengan \omega = 0,9');
xlabel('Observasi ke-');
ylabel('Trace (Vi)');
legend('Statistik MEWMV', 'Batas Kendali Atas', 'Batas Kendali Bawah');
grid on;
```

## RIWAYAT HIDUP



Karina Rahmah Dini, lahir di Pasuruan pada tanggal 25 September 20004. Penulis merupakan putri pertama dari Ayah Dedy Surakhman dan Bunda Sri Handayani serta kakak dari Putri Hafizah Rahmadhani. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari RA Nurul Huda yang lulus pada tahun 2010 dan dilanjutkan dengan pendidikan sekolah dasar di SDN Wonosari I serta lulus pada tahun 2016. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Tutar dan lulus pada tahun 2019. Setelah itu, melanjutkan pendidikan di SMAN 1 Purwosari serta lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti beberapa organisasi dan kegiatan. Penulis bergabung dalam organisasi HMPS “Integral” Matematika pada tahun 2022 sebagai anggota Divisi Kematematikaan dan ketua Divisi Pengembangan Minat dan Bakat pada tahun 2023 di organisasi yang sama. Penulis juga bergabung dalam organisasi Halaqah Ilmiah sebagai anggota Divisi *Research and Development* pada tahun 2023/2024 dan anggota *Media Organizing* pada tahun 2024/2025. Serta penulis juga menjadi *musyrifah* di Pusat Ma’had Al-Jami’ah UIN Maulana Malik Ibrahim Malang pada masa pengabdian 2022/2023 hingga 2024/2025 di Divisi Kesehatan, Kebersihan, Kerumahtanggan, dan Olahraga (K3O).