# SOLUSI NUMERIK DENGAN METODE RUNGE-KUTTA PADA MODEL VIBRASI STRING

**SKRIPSI**

**OLEH:**
**YAQUTATIN KHOLIFATURROSIDAH**
**NIM. 210601110041**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**
**2025**

# SOLUSI NUMERIK DENGAN METODE RUNGE-KUTTA PADA MODEL VIBRASI STRING

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh:**
**Yaqutatin Kholifaturrosidah**
**NIM. 210601110041**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2025**

# SOLUSI NUMERIK DENGAN METODE RUNGE KUTTA PADA MODEL VIBRASI STRING

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Yaqutatin Kholifaturrosidah**
**NIM. 210601110041**

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 16 Mei 2025

| Dosen Pembimbing I | Dosen Pembimbing II |
| --- | --- |
| Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. | Ach. Nashichuddin, M.A. |
| NIP. 19770521 200501 2 004 | NIP. 19730705 200003 1 002 |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

# SOLUSI NUMERIK DENGAN METODE RUNGE-KUTTA PADA MODEL VIBRASI STRING

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**Yaqutatin Kholifaturrosidah**
**NIM. 210601110041**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 13 Juni 2025

| | | |
|---|---|---|
| **Penguji Utama** | : Dr. Usman Pagalay, M.Si | ................................ |
| **Anggota Penguji 1** | : Juhari, M.Si | ................................ |
| **Anggota Penguji 2** | : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si | ................................ |
| **Anggota Penguji 3** | : Ach. Nashichuddin, M.A | ................................ |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
MALANG

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini

| | |
|---|---|
| Nama | : Yaqutatin Kholifaturrosidah |
| NIM | : 210601110041 |
| Program Studi | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |
| Judul Skripsi | : Solusi Numerik Dengan Metode Runge Kutta Pada Model Vibrasi String |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Juni 2025

Yaqutatin Kholifaturrosidah
NIM. 210601110041

**MOTTO**

" فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ "

" إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرً ﴿٦﴾ "

*"Maka, sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan."*

*"Sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan."*

~ Q.S Al-Insyirah [94] : 5-6

## PERSEMBAHAN

*Bismillahirrahmanirrahim*,

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, nikmat, pertolongan, serta kemudahan yang diberikan dalam setiap proses kehidupan ini. Dengan penuh rasa syukur dan cinta, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta, Bapak Syahal Permady dan Ibu Shohifah Naimi, atas doa, kasih sayang, kesabaran, dan dukungan yang menjadi sumber kekuatan dalam setiap langkah, kepada kakak, Alhaudh Fatihal Barri dan adek saya Ahmad Wildan Sya'roni, yang selalu setia menjadi tempat berbagi semangat, nasihat, dan dukungan dalam berbagai fase kehidupan, Nicky Lili Atikasuri, yang juga sudah menjadi tempat cerita di berbagai fase kehidupan dan partner apapun, kepada kerabat, sahabat dan teman-teman seperjuangan yang telah menghadirkan tawa, semangat, dan kebersamaan di sepanjang perjalanan ini, serta untuk diri sendiri, sebagai bentuk penghargaan atas keteguhan hati dalam bertahan, berjuang, dan tetap berharap hanya kepada Allah SWT dalam setiap ujian dan proses yang dijalani. Semoga segala usaha ini membawa kebaikan, keberkahan, dan menjadi awal dari perjalanan panjang yang diridhai Allah SWT.

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini yang berjudul *"Solusi Numerik Dengan Metode Runge-Kutta Pada Model Vibrasi String"* Penelitian ini disusun sebagai salah satu syarat akademik dalam menyelesaikan studi di bidang matematika terapan.

Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi selama proses penelitian ini, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing I, yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan masukan dalam penyusunan skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan masukan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku penguji utama dalam seminar proposal, yang telah memberikan saran, kritik, dan masukan yang membangun untuk penelitian ini.
7. Juhari, M.Si, selaku anggota penguji 1 dalam seminar proposal, yang telah memberikan saran, kritik, dan masukan yang membangun untuk penelitian ini.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
9. Abi saya tercinta, Syahal Permady, dan umi saya yang saya sayangi, Shohifah Naimi, atas segala doa, kasih sayang, serta dukungan moral dan

material yang tidak pernah henti diberikan. Kehadiran mereka adalah sumber kekuatan dan inspirasi terbesar bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan karya ini di masa mendatang. Semoga penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang matematika terapan, serta menjadi inspirasi bagi penelitian-penelitian berikutnya.

Malang, 13 Juni 2025

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

# DAFTAR SIMBOL

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\theta(t)$ | : | Sudut torsi terhadap batang pada posisi setimbangnya | $rad$ |
| $\delta$ | : | Koefisien redaman untuk osilasi | $kg/s$ |
| $m$ | : | Massa batang | $kg$ |
| $f(t)$ | : | Gaya eksternal yang diterapkan (biasanya berupa gaya periodik sinusoidal) | $N$ |
| $K$ | | Konstanta pegas dari kabel pendukung. | $N/m$ |

## DAFTAR LAMPIRAN

## ABSTRAK

Kholifaturrosidah, Yaqutatin 2025 **Solusi Numerik dengan Metode Runge-Kutta pada Model Vibrasi String**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

**Kata Kunci**: Model Vibrasi String, Persamaan Diferensial Orde Dua, Metode Runge-Kutta Orde Empat, Solusi Numerik.

Fenomena vibrasi string pada jembatan gantung dalam model McKenna (1999) menggambarkan osilasi akibat gaya eksternal dan redaman ringan, yang dapat mempengaruhi kestabilan dan keamanan struktur. Model matematika untuk masalah vibrasi ini dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde dua untuk sudut lendutan $\ddot{\theta}(t)$. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis perilaku model sudut lendutan dan menyelesaikannya secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat. Model diselesaikan pada interval waktu $t = [0, 20]$ dengan parameter $K = 1000$, $m = 2500$, $\delta = 0.01$, $\lambda = 0.06$, dan $\mu = 1.2$, serta langkah $h = 0.001$, dan kondisi awal $\theta(0) = 1.2$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Hasil iterasi kedua yakni pada waktu $t = 0.001$ menunjukkan nilai $\theta_1 = 1.199964002$ dan $\theta_2 = -0.01439857$. Perbandingan grafik solusi Runge Kutta Orde Empat terhadap solusi eksak menghasilkan galat $0.0115162666$. Berdasarkan hal ini, metode Runge-Kutta mampu memberikan pendekatan yang cukup baik terhadap solusi eksaknya. Dengan hasil tersebut, metode ini dapat dikatakan efektif dalam menyelesaikan model sudut lendutan $\ddot{\theta}$ McKenna(1999) dan berpotensi digunakan dalam analisis sistem dinamis teknik seperti struktur jembatan gantung yang dideskripsikan pada penelitian McKenna.

# ABSTRACT

Kholifaturrosidah, Yaqutatin. 2025. **Numerical Solution Using the Runge-Kutta Method on a String Vibration Model**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

**Keywords:** String Vibration Model, Second-Order Differential Equation, Fourth-Order Runge-Kutta Method, Numerical Solution.

The phenomenon of string vibration in suspension bridges, as described in McKenna's model (1999), illustrates oscillations caused by external forces and light damping, which may affect the stability and safety of the structure. The mathematical model for this vibration problem is expressed as a second-order ordinary differential equation for the angular displacement $\ddot{\theta}(t)$. This study aims to analyze the behavior of the angular displacement model and solve it numerically using the Fourth-Order Runge-Kutta (RK4) method. The model is solved over the time interval $t = [0, 20]$ with parameters $K = 1000$, $m = 2500$, $\delta = 0.01$, $\lambda = 0.06$, and $\mu = 1.2$, using a time step $h = 0.001$, and initial conditions $\theta(0) = 1.2$, $\dot{\theta}(0) = 0$. The second iteration result at $t = 0.001$ gives $\theta_1 = 1.199964002$ and $\theta_2 = -0.01439857$. A comparison between the RK4 solution graph and the exact solution shows a numerical error of $0.0115162666$. These results indicate that the Runge-Kutta method provides a good approximation to the exact solution. Therefore, this method is considered effective for solving McKenna's angular displacement model and has potential applications in dynamic system analysis, such as the suspension bridge structures described in McKenna's research.

# مستخلص البحث

خليفات الروسيدة، يقوتاتين. **٢٠٢٥.** **.الحل العددي باستخدام طريقة رونج–كوتا لنموذج اهتزاز الخيط .**
رسالة بكالوريوس. برنامج الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية
:مولانا مالك إبراهيم مالانغ. المشرفان: (١) آري كوسومستوتي، الماجستير فى التربية والعلوم،
(٢) أحمد نصيح الدين، الماجستيرفى التعلم اللغة العربية

**لكلمات المفتاحية:** نموذج اهتزاز الخيط، معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، طريقة رونج–كوتا من الرتبة الرابعة .الحل العددي

تصور ظاهرة اهتزاز الخيط في الجسور المعلقة في نموذج ماكينا (1999) تذبذبات ناتجة عن قوى خارجية وتخميد خفيف، مما قد يؤثر على استقرار وأمان البنية. يتم التعبير عن النموذج الرياضي لهذه الظاهرة في شكل معادلة يهدف هذا البحث إلى تحليل سلوك نموذج زاوية الانحراف .$\ddot{\theta}(t)$ تفاضلية عادية من الرتبة الثانية لزاوية الانحراف $t = [0, 20]$ وحلّه عددياً باستخدام طريقة رونج–كوتا من الرتبة الرابعة .تم حل النموذج خلال الفترة الزمنية المعطيات باستخدام: $K = 1000$، $m = 2500$، $\delta = 0.01$، $\lambda = 0.06$، $\mu = 1.2$، أظهرت نتائج التكرار الثاني .$\dot{\theta}(0) = 0$ ،$\theta(0) = 1.2$ مع الشروط الابتدائية ،$h = 0.001$ وخطوة أظهر الرسم البياني .$\theta_2 = -0.01439857$ ، $\theta_1 = 1.199964002$ أن $t = 0.001$ عند ،ومن خلال ذلك .0.0115162666 للمقارنة بين الحل العددي بطريقة رونج–كوتا والحل التحليلي خطأً قدره تبيّن أن طريقة رونج–كوتا توفر تقريبًا جيدًا للحل التحليلي، مما يجعلها فعالة في حل نموذج زاوية الانحراف لماكينا ولها إمكانية في تحليل الأنظمة الديناميكية الهندسية مثل هياكل الجسور المعلقة الموضحة في بحث ماكين ،(1999)

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Penelitian ini difokuskan pada analisis model vibrasi string (P. J. McKenna 1999). Model dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial biasa orde dua yang terdiri atas $\ddot{\theta}(t)$. Untuk mempermudah penyelesaian secara numerik, persamaan orde dua ini direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu yang terdiri atas variabel lendutan $\theta_1(t)$ dan kecepatan lendutan $\theta_2(t)$ . Dalam penelitian ini, digunakan metode Runge-Kutta Orde Empat yang memiliki tingkat akurasi tinggi dan error yang relatif kecil dibandingkan metode numerik lainnya (La Zakaria, U. M., 2023). Dengan pendekatan ini, solusi numerik dapat dianalisis secara rinci untuk memahami dinamika model vibrasi string.

Metode Runge-Kutta Orde Empat (RK4) yang digunakan dalam penelitian ini juga dapat diterapkan pada berbagai sistem mekanis lainnya yang mengalami osilasi, seperti gelombang pada membran elastis atau getaran pada balok fleksibel. Penelitian P. J. McKenna (1999) menyoroti bagaimana osilasi nonlinear dalam sistem mekanis, termasuk jembatan gantung, dapat menyebabkan ketidakstabilan yang kompleks. Oleh karena itu, metode numerik seperti Runge-Kutta Orde Empat (RK4) sangat penting dalam menganalisis perilaku sistem dinamis yang sulit diselesaikan secara analitik, serta dalam memperoleh solusi yang lebih akurat untuk memahami dinamika osilasi tersebut.

Penelitian ini tidak hanya menyelesaikan permasalahan teknis dalam memodelkan getaran pada model vibrasi string, tetapi juga mencerminkan pemikiran ilmiah yang menyeluruh, sesuai dengan nilai-nilai ketuhanan. Seperti yang tercermin dalam Al-Qur'an Surat Al-Alaq Ayat 1-5, yang mengajarkan kita untuk membaca dan memahami ciptaan Allah melalui ilmu pengetahuan yang terus berkembang, penelitian ini bertujuan untuk memberikan kontribusi kepada masyarakat melalui inovasi yang bertanggung jawab dan bermanfaat. Sebagaimana dijelaskan dalam Al-Qur’an Surat Al-Alaq ayat 1-5 yang berbunyi:

اِقْرَاْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِيْ خَلَقَۚ ﴿١﴾ خَلَقَ الْاِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍۚ ﴿٢﴾ اِقْرَاْ وَرَبُّكَ الْاَكْرَمُۙ ﴿٣﴾ الَّذِيْ عَلَّمَ
بِالْقَلَمِۙ ﴿٤﴾ عَلَّمَ الْاِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْۗ ﴿٥﴾

*Artinya: “Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan! Dia menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah! Tuhanmulah Yang Mahamulia, yang mengajar (manusia) dengan pena. Dia mengajarkan manusia apa yang tidak diketahuinya (Q.S Al-Alaq 1-5).*

Pada tafsir Tafsir Mishbah karya M. Quraish Shihab mengenai kata “*Iqra*” (baca) sebagai upaya menghimpun pengetahuan dari berbagai aspek kehidupan, menunjukkan bahwa setiap aktivitas belajar harus dilandasi kesadaran akan keberadaan dan kebesaran Allah. Ayat-ayat ini juga menegaskan bahwa manusia diciptakan dari ‘alaq (segumpal darah), yang menggambarkan sifat manusia yang lemah dan bergantung kepada Tuhan, namun diberi potensi besar untuk belajar dan berkembang. Perintah membaca dengan menyebut nama Tuhan yang Pemurah memberikan motivasi untuk belajar dengan penuh keyakinan, karena manusia dibekali kemampuan membaca dan meneliti untuk mencapai kemajuan ilmu pengetahuan dan budaya. Allah mengajarkan manusia melalui dua cara: secara langsung dan dengan menggunakan pena (alat tulis), yang menunjukkan pentingnya mendokumentasikan dan menyebarkan pengetahuan untuk generasi berikutnya (Dozan, W, 2020).

Dalam konteks ini, konsep pembelajaran yang komprehensif dan menyeluruh juga diperlukan dalam penelitian ilmiah, seperti dalam analisis eksistensi dan ketunggalan solusi pada model vibrasi string, yang berupaya memastikan keakuratan dan keandalan model dalam menggambarkan fenomena fisik seperti getaran dan stabilitas. Oleh karena itu, penggunaan metode numerik menjadi penting untuk mendukung perhitungan analitik guna mengurangi kesalahan dan memperoleh hasil yang lebih maksimal, serupa dengan pentingnya kesadaran akan nilai-nilai ketuhanan dalam proses pembelajaran. Berdasarkan uraian di atas, penulis menyusun penelitian ini dengan judul "Solusi Numerik dengan Metode Runge Kutta Pada Model Vibrasi String".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini ialah:

1. Bagaimana penyelesaiaan solusi numerik runge kutta orde 4 pada model vibrasi string?
2. Bagaimana analisis galat runge kutta orde 4 dalam penyelesaiaan model vibrasi string serta perbandingan keduanya?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitiannya ialah:

1. Untuk memperoleh dan mengkaji penyelesaian numerik runge kutta orde 4 dari model matematis getaran tali (*string vibration*) yang dianalisis.

2. Untuk menganalisis galat metode Runge-Kutta orde 4 dalam penyelesaian model vibrasi string serta membandingkan hasil keduanya.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini ialah sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi terhadap pemahaman penyelesaian numerik pada model getaran tali melalui penerapan metode Runge-Kutta orde 4, sehingga hasilnya dapat menjadi referensi dalam pemodelan fenomena dinamik yang melibatkan sistem persamaan diferensial orde dua.
2. Menyediakan analisis perbandingan galat antara metode Runge-Kutta orde 4, yang dapat digunakan sebagai dasar pemilihan metode numerik yang lebih tepat dan efisien untuk menyelesaikan masalah getaran dalam konteks mekanika dan rekayasa teknik.

## 1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari adanya penyimpangan penelitian dari tujuan yang diinginkan, maka diperlukan batasan masalah sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan adalah model matematika yang dikonstruksi oleh (PJ McKenna 1999) sebagai berikut:

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \left(\frac{6K}{m}\right)\theta + f(t)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial linier orde dua non-homogen karena memiliki suku paksa $f(t)$ pada ruas kanan. Dalam penelitian ini, suku paksa yang digunakan adalah $f(t) = \sin(\mu t)$, yang merupakan fungsi deterministik karena nilainya dapat ditentukan secara pasti untuk setiap waktu $t$ tanpa melibatkan unsur keacakan.

2. Parameter model matematika merujuk pada (PJ McKenna 1999).

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1 Model Matematika Vibrasi String

Model matematika adalah representasi dari suatu sistem atau fenomena dunia nyata dalam bentuk struktur matematis, seperti persamaan, fungsi, atau himpunan variabel. Model ini digunakan untuk menggambarkan perilaku suatu sistem, baik untuk keperluan analisis, prediksi, maupun simulasi. Dalam model matematika, variabel penting dari fenomena atau sistem yang diteliti disederhanakan dan dijelaskan menggunakan hubungan secara matematis. Tujuan utamanya adalah untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam, membuat prediksi mengenai perkembangan sistem di masa depan, atau menguji berbagai hipotesis berdasarkan variabel-variabel yang ada. Contoh sederhana dari model matematika adalah persamaan gerak Newton dalam fisika yang menggambarkan bagaimana suatu objek bergerak di bawah pengaruh gaya. Di bidang biologi, model matematika seperti model Lotka-Volterra digunakan untuk menggambarkan interaksi predator dan mangsa. Dengan demikian, model matematika berperan penting dalam membantu untuk memahami, menganalisis, dan memprediksi fenomena dunia nyata secara lebih sistematis (Widowati, S ,2007).

Salah satu fenomena fisika yang dapat dimodelkan secara matematis adalah gelombang, yaitu perpindahan energi yang terjadi akibat getaran. Gelombang ini dapat merambat baik melalui medium (seperti udara, air, atau benda padat) maupun tanpa medium (seperti gelombang elektromagnetik). Gelombang yang terjadi pada dawai atau string merupakan contoh gelombang transversal, di mana getaran terjadi tegak lurus terhadap arah rambatan gelombang (Nadia Aisah Fitri, N. S., 2023). Fenomena ini dapat dijelaskan menggunakan persamaan diferensial parsial, yang merupakan salah satu bentuk model matematika untuk menggambarkan hubungan antara tegangan, massa per satuan panjang, dan percepatan suatu titik pada dawai. Dengan demikian, pemodelan matematika gelombang pada string menjadi kunci dalam berbagai aplikasi, seperti analisis osilasi jembatan gantung, akustik instrumen musik, dan sistem mekanis lainnya.

Dengan menggunakan persamaan diferensial parsial, gelombang transversal ini dapat dianalisis lebih lanjut melalui pendekatan persamaan gelombang satu dimensi. Persamaan ini menyatakan bagaimana suatu gangguan yang diberikan pada tali akan menghasilkan pola osilasi yang bergantung pada sifat fisik tali, seperti panjang, tegangan, dan massa per satuan panjangnya. Analisis terhadap gelombang ini penting dalam berbagai aplikasi teknik, seperti desain kabel jembatan gantung, instrumen musik, serta sistem transmisi energi dalam kawat dan serat optik.

Pemodelan matematis vibrasi string juga mempertimbangkan kondisi batas yang menentukan bagaimana ujung-ujung string berinteraksi dengan lingkungannya. Kondisi batas ini dapat berupa ujung tetap, ujung bebas, atau kombinasi keduanya, yang masing-masing mempengaruhi pola osilasi dan frekuensi alami dari sistem. Dengan menyusun model matematis yang tepat, solusi numerik seperti metode Runge-Kutta dapat diterapkan untuk memperoleh hasil yang akurat dalam menggambarkan dinamika sistem.

Metode Runge-Kutta yang digunakan dalam penelitian ini juga dapat diterapkan pada berbagai sistem mekanis lainnya yang mengalami osilasi, seperti gelombang pada membran elastis atau getaran pada balok fleksibel. Selain itu, metode ini dapat digunakan untuk memodelkan interaksi antara struktur elastis dan medan eksternal, seperti respons kabel jembatan terhadap angin atau perilaku tali gitar terhadap perubahan tegangan.

Model matematika vibrasi string yang merujuk pada jurnal (McKenna 1999) berupa sistem persamaan diferensial dua variabel dengan orde dua, yakni:

$$\ddot{\theta} = -\delta\,\dot{\theta} - \left(\frac{6K}{m}\right)\theta + f(t) \tag{2.1}$$

Dengan nilai parameter yang merujuk pada (McKenna 1999) sebagai berikut:

$\delta = 0.01\ kg/s$

$K = 1000\ N/m$, maka nilai dari $6K = 6 \times 1000 = 6000\ N/m$

$m = 2500\ kg$

$\theta = 0$

$\lambda = 0.06$

$\mu =$ diantara $1.2 - 1.6$

$f(t) = \lambda \sin \mu t$.

## 2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa ialah persamaan yang fungsinya tidak diketahui dan hanya bergantung pada satu variabel bebas (Wasilatul Murtafi'ah, D. A. 2018). Ini adalah salah satu contoh persamaan diferensial biasa orde satu yang bergantung pada $t$ dan variabel bebas $y$ sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 \tag{2.2}$$

Sebuah fungsi $f(x)$ disebut sebagai solusi dari persamaan diferensial orde-$n$ dalam bentuk:

$$F(x, y, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

jika memenuhi dua syarat sebagai berikut:

1. Fungsi $f(x)$ beserta semua turunannya hingga orde $n$, yaitu $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$, terdefinisi untuk semua $x \in I$, dengan $I$ adalah interval tertentu.
2. Subtitusikan $f(x)$ dan semua turunannya ke dalam persamaan $F$ dengan hasil persamaan identitas seperti dibawah ini:

$$F(x, y, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

untuk setiap $x \in I$ (Waluya, B., 2006).

## 2.3 Persamaan Diferensial Linear dan Non-Linear

Pada sistem persamaan diferensial dapat sebagai linier atau non-linier tergantung pada bentuk hubungan antara variabel yang muncul dalam persamaan dan turunan-turunan variabel tersebut. Berikut bentuk umum Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dalam bentuk sistem persamaan linier untuk dua variabel, misalnya $x(t)$ dan $y(t)$, dengan turunan-turunannya sebagai berikut:

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cx + dy = 0 \tag{2.5}$$

atau

$$p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + rx + sy = 0 \tag{2.6}$$

Pada bentuk umum tersebut, maka terdapat 3 bentuk metode penyelesaian untuk mendapatkan penyelesaian pada umumnya. Bentuk-bentuk metode penyelesaian persamaan diferensial dengan koefisien linear adalah sebagai berikut:

1. Jika diketahui konstanta $c = r = 0$

Jika persamaan diferensial biasa dengan koefisien linier memiliki bentuk:

$$(ax + by + 0)dx + (px + qy + 0)dy = 0,$$

Karena persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial homogen, maka untuk menyelesaikannya dapat dimisalkan dengan fungsi $v = \frac{y}{x}$, sehingga $y = vx$. Selanjutnya, subtitusikan $y = vx$ ke dalam persamaan yang telah diberikan.

2. Jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

   Jika koefisien memenuhi syarat bahwa $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan dengan memisalkan sebuah fungsi $z = x + y$.

3. Jika $a \neq p, b \neq q, c \neq 0, r \neq 0$

   Jika persamaan memenuhi kondisi $a \neq p, b \neq q$ dan konstanta $c \neq 0, r \neq 0$, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik substitusi dengan dua fungsi yakni,

$$u = ax + by + c \tag{2.7}$$

$$v = px + qy + r \tag{2.8}$$

(Aden, dkk, 2021).

Sistem persamaan diferensial juga ada yang dinyatakan dengan persamaan diferensial non-linear. Bentuk umum persamaan diferensial non-linear orde satu dapat ditulis sebagai:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.9}$$

di mana $f(x, y)$ adalah fungsi non-linear dari $x$ dan $y$. Perbedaan utama antara persamaan ini dengan persamaan linier adalah bahwa fungsi $f(x, y)$

mengandung suku-suku seperti pangkat $y$, perkalian $y$ dengan $\frac{dy}{dx}$, atau fungsi non-linear lainnya (misalnya, $y^2, e^y, \sin(y)$, dll) (Aden, d. (2021).

## 2.4 Metode Runge Kutta Orde Empat

Metode Runge Kutta Orde 4 adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) dengan tingkat akurasi tinggi (Triatmodjo, B., 2002). Bentuk umum dari metode ini ialah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x \tag{2.10}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{2.11}$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1) \tag{2.12}$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2) \tag{2.13}$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x k_3) \tag{2.14}$$

## 2.5 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Kajian teori merupakan tahapan penting dalam penelitian yang berfungsi sebagai dasar dalam menentukan langkah-langkah penelitian. Oleh karena itu, peneliti mencantumkan hasil-hasil penelitian sebelumnya sebagai berikut:

1. Hasil Penelitian (P. J. McKenna 1990)

   Penelitian ini menyoroti fenomena gelombang berjalan yang muncul pada jembatan gantung akibat pengaruh badai angin. Berbeda dari dua studi sebelumnya yang lebih menekankan pada osilasi gelombang berdiri, kajian ini lebih berfokus pada gelombang berjalan yang dinilai lebih dinamis dan relevan dalam kondisi cuaca ekstrem. Mengacu pada laporan teknis dari insinyur Jembatan Golden Gate pada tahun 1938, penelitian ini memanfaatkan pendekatan persamaan diferensial parsial untuk menggambarkan dinamika getaran balok jembatan. Selain itu, faktor nonlinier turut dimasukkan untuk menangkap karakteristik khas dari gelombang berjalan. Dalam model yang dikembangkan, diasumsikan bahwa balok jembatan memiliki panjang tak terbatas, dan solusi dari pergerakan gelombang harus menunjukkan perilaku yang meredam secara eksponensial di batas yang jauh. Penelitian juga menunjukkan bahwa gangguan awal dari posisi setimbang memainkan peran penting, karena gangguan yang terlalu besar dapat menyebabkan hasil yang tidak lagi relevan secara fisik. Kesimpulan dari studi ini menekankan bahwa gelombang berjalan dapat terjadi pada jembatan gantung dalam situasi ekstrem, sehingga pemahaman terhadap fenomena ini sangat penting untuk menunjang aspek desain dan keselamatan struktural jembatan di masa mendatang

2. Hasil Penelitian (P. J. McKenna 1999)

   Penelitian ini mengkaji peristiwa runtuhnya Jembatan Tacoma Narrows pada tahun 1940, yang menjadi contoh klasik dari respons dinamis struktur yang tidak dapat dijelaskan menggunakan pendekatan linier konvensional. Peristiwa tersebut memperlihatkan bahwa osilasi dengan amplitudo besar dapat muncul akibat gangguan kecil, seperti hembusan angin. Dalam kajian matematis, sistem dianalisis menggunakan prinsip Lagrange untuk memperoleh persamaan gerak yang menggambarkan osilasi vertikal dan torsi.

Hasil analisis menunjukkan bahwa osilasi torsi dengan amplitudo besar dapat muncul dari kondisi awal tertentu, yang tidak dapat dijelaskan hanya melalui osilasi kecil. Dalam konteks ini, gerakan vertikal yang ekstrem dapat menyebabkan hilangnya tegangan pada kabel untuk sesaat, yang kemudian memicu peralihan cepat menuju osilasi torsi besar. Melalui simulasi numerik, diketahui bahwa hanya gaya torsi dengan besaran tertentu yang mampu menghasilkan osilasi torsi yang stabil dengan amplitudo besar, memperlihatkan pengaruh signifikan dari efek non-linier. Oleh karena itu, penelitian ini menekankan pentingnya penggunaan pendekatan non-linier dalam perancangan jembatan modern guna mencegah terjadinya kegagalan struktural serupa di masa mendatang.

## 2.6 Pentingnya Menuntut Ilmu dalam Perspektif Al-Qur'an

Menuntut ilmu sangatlah penting, karena ilmu adalah pondasi utama bagi perkembangan individu dan masyarakat. Dengan ilmu, seseorang dapat memahami dunia di sekitarnya, membuat keputusan yang bijak, dan berkontribusi positif dalam kehidupan sosial dan ekonomi. Selain itu, ilmu juga membuka wawasan, memperluas cara berpikir, dan membantu seseorang dalam menemukan solusi bagi berbagai tantangan hidup. Ilmu tidak hanya meningkatkan kualitas hidup, tetapi juga memperkuat keimanan, karena dengan memahami alam dan hukum-hukumnya, maka akan semakin menyadari kebesaran Sang Pencipta. Oleh karena itu, menuntut ilmu merupakan kewajiban yang harus diemban setiap individu untuk mencapai kesuksesan dunia dan akhirat. Seperti yang telah difirmankan Allah SWT dalam Q.S Al-Alaq ayat 1-5:

اِقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِيْ خَلَقَۚ ﴿١﴾ خَلَقَ الْاِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍۚ ﴿٢﴾ اِقْرَأْ وَرَبُّكَ الْاَكْرَمُۙ ﴿٣﴾ الَّذِيْ عَلَّمَ بِالْقَلَمِۙ ﴿٤﴾ عَلَّمَ الْاِنْسَانَ
مَا لَمْ يَعْلَمْۗ ﴿٥﴾

*Artinya: "Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan! Dia menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah! Tuhanmulah Yang Mahamulia, yang mengajar (manusia) dengan pena. Dia mengajarkan manusia apa yang tidak diketahuinya (Q.S Al-Alaq 1-5).*

Menurut tafsir Ibnu Katsir, surat Al-'Alaq ayat 1-5 menekankan pentingnya menuntut ilmu dan menjadi landasan awal perintah tersebut dalam Islam. Wahyu pertama ini dimulai dengan kata "*Iqra*" (bacalah), yang tidak hanya bermakna membaca secara harfiah, tetapi juga mencakup aktivitas menuntut ilmu dan menelaah segala sesuatu, baik yang tertulis (ayat-ayat Al-Quran) maupun yang terdapat di alam semesta (ayat-ayat kauniyah)

Ayat ini mengingatkan manusia akan asal-usul penciptaannya dari sesuatu yang lemah, seperti segumpal darah, dan Allah yang menciptakan manusia juga memberikan potensi bagi mereka untuk belajar. Selanjutnya, Allah SWT mengajarkan manusia dengan perantara "*Kalam*" (pena), menunjukkan pentingnya menulis dan mencatat ilmu agar pengetahuan tidak hilang dan dapat diwariskan ke generasi berikutnya. Ilmu adalah pemberian Allah yang memuliakan manusia dan membedakannya dari makhluk lain, seperti yang terjadi pada Nabi Adam AS ketika diajarkan nama-nama oleh Allah di hadapan para malaikat. Ibnu Katsir juga menekankan bahwa alat untuk mencatat ilmu tidak terbatas pada pena, tetapi mencakup segala media yang dapat digunakan untuk mengembangkan, menyimpan, dan menyebarkan ilmu. Selain itu, ilmu yang diperoleh tidak hanya untuk diketahui, tetapi harus diamalkan, karena orang yang mengamalkan ilmunya akan diberikan tambahan ilmu oleh Allah SWT. Wahyu pertama ini diterima Nabi Muhammad SAW di gua Hira dan menjadi tanda bahwa umat Islam harus menjadikan menuntut ilmu sebagai bagian dari kehidupan, sebab melalui ilmu pengetahuan manusia dapat memahami agamanya, dirinya, dan alam semesta, serta mencapai derajat yang tinggi di sisi Allah SWT (Mukmin, T., 2016).

Salah satu hadis yang menunjukkan pentingnya menuntut ilmu adalah hadis yang diriwayatkan oleh  al-Tirmizi dari Anas bin Malik ra:

عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ ، قَالَ : قَالَ رَسُولُ اللهِ صلى الله عليه وسلم مَنْ خَرَجَ فِي طَلَبِ الْعِلْمِ فَهُوَ فِي سَبِيلِ اللَّهِ حَتَّى يَرْجِعَ (رواه الترميذ)

*Artinya:" Dari Anas bin Malik, ia berkata Nabi saw. telah bersabda, "Siapa saja yang keluar untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah hingga dia kembali." (HR al-Tirmiziy).*

Hadis tersebut mendorong umat Islam untuk selalu mencari ilmu, baik di tempat dekat maupun jauh. Kewajiban menuntut ilmu tidak terbatas pada satu tempat saja, dan dapat dilakukan di dalam rumah, luar rumah, dalam negeri, atau luar negeri, sesuai dengan kebutuhan dan kondisi. Belajar keluar dari rumah atau daerah baru dilakukan jika tempat tersebut tidak memiliki fasilitas atau guru yang memadai (N, R., 2019).

Imam Al-Ghazali berpendapat bahwa ilmu yang dimaksud dalam hadis ini adalah ilmu syariat yang bermanfaat, baik fardu ain maupun fardu kifayah. Ilmu yang bermanfaat adalah ilmu yang dapat meningkatkan ketakwaan kepada Allah dan mengurangi kecintaan pada dunia. Jika suatu ilmu tidak mengarahkan seseorang dari dunia menuju akhirat, maka ilmu tersebut dianggap tidak bermanfaat dan lebih baik dihindari (N, R., 2019).

Menurut Buhari Umar, menuntut ilmu diibaratkan sebagai jihad di jalan Allah karena proses belajar memerlukan pengorbanan yang besar. Bukan hanya menghabiskan waktu, tetapi juga memerlukan biaya, tenaga, konsentrasi, dan lingkungan yang mendukung. Proses ini sering kali dihadapkan pada berbagai kesulitan dan hambatan, yang menyebabkan sebagian orang menyerah di tengah jalan. Oleh karena itu, untuk menghadapi tantangan-tantangan ini, diperlukan ketekunan dan kesabaran. Kesamaan antara menuntut ilmu dan jihad ini memberikan motivasi yang kuat bagi para penuntut ilmu serta menegaskan betapa tingginya keutamaan dari usaha mencari ilmu dalam pandangan Islam (N, R., 2019).

Menuntut ilmu dan mengamalkannya dianggap setara dengan jihad karena keduanya berperan dalam menghidupkan agama dan menuntut kesabaran, ketekunan, serta pengorbanan yang besar. Kesamaan ini memberikan motivasi dan menunjukkan betapa mulia dan tingginya kedudukan menuntut ilmu dalam Islam. Meski begitu, perlu diingat bahwa ilmu bukanlah tujuan akhir, melainkan sarana untuk beramal saleh dalam aspek aqidah, ibadah, akhlak, dan muamalah.

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Jenis Penelitian

Penelitian menggunakan pendekatan kuantitatif dalam menganalisis model matematika vibrasi string. Metode kuantitatif digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika gelombang transversal pada string menggunakan metode numerik (Sahir, S. H., 2021). Dalam penelitian ini, metode Runge Kutta orde 4 diterapkan untuk memperoleh solusi numerik yang akurat dan stabil serta mensimulasikan hasilnya untuk memahami pola osilasi string.

Pendekatan kuantitatif dalam penelitian ini berfokus pada analisis variabel yang memengaruhi perilaku vibrasi string, seperti tegangan, panjang, dan massa per satuan panjang. Model matematika yang digunakan mengacu pada penelitian Moore, P. J. (1999), yang menggambarkan sistem osilasi dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Dengan menggunakan metode numerik, solusi dari model ini dapat dianalisis secara lebih rinci, memungkinkan pemahaman yang lebih mendalam terhadap karakteristik gelombang dan resonansi yang terjadi pada string.

Penelitian ini berfokus pada solusi numerik metode Runge Kutta orde 4 serta mensimulasikan hasilnya. Salah satu pendekatan kuantitatif adalah mengidentifikasi suatu variabel (Sahir, S. H., 2021). Variabel pada penelitian ini adalah model matematika pada penelitian (Moore, P. J., 1999).

## 3.2 Tahap Penelitian

Tahapan penelitian pada solusi numerik metode Runge-Kutta orde 4 untuk model vibrasi string disusun berdasarkan karakteristik masing-masing metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) orde dua. Adapun tahapan penelitian untuk masing-masing metode adalah sebagai berikut:

### 3.2.1 Runge Kutta Orde Empat

Tahapan penelitian untuk metode Runge-Kutta Orde 4 adalah sebagai berikut:

1. Menyatakan model vibrasi string dalam bentuk PDB orde dua.
2. Mengubah sistem PDB orde dua menjadi sistem PDB orde satu dengan memperkenalkan variabel baru, misalnya $\theta_1 = \theta$ dan $\theta_2 = \dot{\theta}$, sehingga diperoleh sistem dua persamaan orde satu.
3. Menggunakan algoritma Runge-Kutta orde 4 untuk menyelesaikan sistem PDB orde satu yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya.
4. Menerapkan algoritma ke dalam perangkat lunak Mathlab untuk menyelesaikan sistem secara numerik.
5. Menyajikan hasil solusi numerik dalam bentuk grafik untuk mengamati perilaku getaran tali terhadap waktu.
6. Menghitung galat numerik terhadap solusi eksak untuk mengevaluasi akurasi metode.

### 3.2.2 Analisis Galat dan Perbandingan Metode Runge Kutta Orde 4

Tahapan penelitian untuk menganalisis galat metode Runge-Kutta orde 4 dalam penyelesaian model vibrasi string serta membandingkan performa keduanya dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan solusi eksak dari model vibrasi string
2. Menghitung galat dari masing-masing metode numerik terhadap solusi eksak
3. Membandingkan hasil solusi numerik dan galat dari metode Runge-Kutta orde 4.
4. Menyajikan grafik solusi numerik dari kedua metode, serta grafik galat untuk mempermudah analisis visual dan interpretasi.
5. Melakukan interpretasi terhadap hasil analisis galat dan perbandingan kedua metode untuk mengidentifikasi karakteristik akurasi dan efisiensi masing-masing metode dalam penyelesaian model vibrasi string.

# BAB IV

# HASIL DAN PEMBAHASAN

## 4.1 Model Matematika Vibrasi String

Model matematika vibrasi string dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$\ddot{\theta} = -\delta\,\dot{\theta} - \left(\frac{6K}{m}\right)\theta + f(t) \tag{4.1}$$

Dengan,

$$f(t) = \lambda \sin \mu t$$

Parameter-parameter yang digunakan mengacu pada McKenna (1999), dengan nilai sebagai berikut:

$\delta = 0.01\ kg/s$

$K = 1000\ N/m$

$m = 2500\ kg$

$\theta = 0$

$\lambda = 0.06$

$\mu = 1.2$

Kondisi awal yang digunakan dalam penyelesaian model ini adalah:

$$\dot{\theta}(0) = 0, \theta(0) = 1.2$$

Model diferensial ini merepresentasikan dinamika sudut defleksi string akibat gaya eksternal periodik $f(t)$, dengan adanya redaman linier melalui parameter $\delta$, dan pengaruh gaya pemulih elastis yang bergantung pada konstanta $K$.

## 4.2 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi String

Untuk menganalisis perilaku dinamik dari sistem string yang bergetar, digunakan suatu model matematika berupa persamaan diferensial orde dua yang melibatkan efek redaman dan gaya pemaksa. Model ini dinyatakan dalam bentuk:

$$\ddot{\theta} = -\delta\,\dot{\theta} - \left(\frac{6K}{m}\right)\theta + f(t) \tag{4.2}$$

Dengan,

$$f(t) = \lambda \sin \mu t$$

Nilai parameter yang digunakan merujuk pada McKenna (1999), yaitu:

$\delta = 0.01\ kg/s$

$K = 1000\ N/m$

$m = 2500\ kg$

$\theta = 0$

$\lambda = 0.06$

$\mu = 1.2$

Substitusi parameter $6K = 6000\ N/m$ dan $\frac{6K}{m} = \frac{6000}{2500} = 2.4$, maka bentuk eksplisit dari persamaan diferensial menjadi:

$$\ddot{\theta}(t) + 0.01\dot{\theta}(t) + 2.4\theta(t) = 0.06\sin(1.2t)$$

Persamaan ini merupakan persamaan diferensial non-homogen linier dengan koefisien konstan, yang terdiri atas dua bagian solusi, yaitu solusi homogen dan solusi partikular.

Untuk memperoleh solusi homogen, ruas kanan dianggap nol:

$$\ddot{\theta}_h(t) + 0.01\dot{\theta}_h(t) + 2.4\theta_h(t) = 0$$

Diasumsikan bentuk solusi mejadi:

$$\theta_h(t) = e^{rt}$$

Substitusi ke persamaan $\ddot{\theta}_h(t)$, sehingga menghasilkan persamaan karakteristik:

$$r^2 + 0.01r + 2.4 = 0$$

Kemudian hitung diskriminannya:

$$D = (0.01)^2 - 4(1)(2.4) = 0.0001 - 9.6 = -9.5999$$

Karena diskriminan negatif, diperoleh akar kompleks konjugat:

$$r = \frac{-0.01}{2} \pm \frac{\sqrt{9.5999}}{2} i = -\frac{1}{200} \pm \frac{\sqrt{9.5999}}{2} i$$

Sehingga solusi homogen menjadi:

$$\theta_h(t) = e^{-\frac{t}{200}} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200} t\right)\right)$$

Karena ruas kanan berupa fungsi sinusoidal, diasumsikan solusi partikular berbentuk:

$$\theta_p(t) = A\cos(1.2t) + B\sin(1.2t)$$

Hitung turunannya:

$$\dot{\theta_p} = -1.2A\sin(1.2t) + 1.2B\cos(1.2t)$$

$$\ddot{\theta_p} = -1.44A\cos(1.2t) - 1.44B\sin(1.2t)$$

Substitusi ke dalam persamaan diferensial:

$$(-1.44A\cos(1.2t) - 1.44B\sin(1.2t))$$

$$- 0.01(-1.2A\sin(1.2t) + 1.2B\cos(1.2t))$$

$$+ 2.4(A\cos(1.2t) + B\sin(1.2t)) = 0.06\sin(1.2t)$$

Kelompokkan suku cos dan sin:

Koefisien $\cos(1.2t)$:

$$-1.44A + 0.012B + 2.4A = (0.96A + 0.012B)$$

Koefisien $\sin(1.2t)$:

$$-1.44B - 0.012A + 2.4B = (0.96B - 0.012A)$$

Diperoleh sistem:

$$0.96A + 0.012B = 0 \qquad (1)$$

$$0.96B - 0.012A = 0\,.06 \quad (2)$$

Dari persamaan (1), diperoleh:

$$A = -\frac{0.012}{0.96}B = -\frac{1}{80}B$$

Substitusi ke persamaan (2):

$$0.96B - 0.012\left(-\frac{1}{80}B\right) = 0.06 \Rightarrow B(0.96 + 0.00015) = 0.06 \Leftrightarrow B$$

$$= \frac{0.06}{0.96015} \approx \frac{400}{6401}$$

Maka:

$$A = -\frac{1}{80} \cdot \frac{400}{6401} = -\frac{5}{6401}$$

Sehingga solusi partikularnya adalah:

$$\theta_p(t) = -\frac{5}{6401}\cos(1.2t) + \frac{400}{6401}\sin(1.2t)$$

Kemudian untuk solusi umum totalnya adalah:

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$$

$$\theta(t) = e^{-\frac{t}{200}}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200}t\right)\right) - \frac{5}{6401}\cos(1.2t)$$

$$+ \frac{400}{6401}\sin(1.2t)$$

Untuk menentukan konstanta $C_1$ dan $C_2$, digunakan kondisi awal:

$$\theta(0) = 1.2 \text{ dan } \dot{\theta}(0) = 0$$

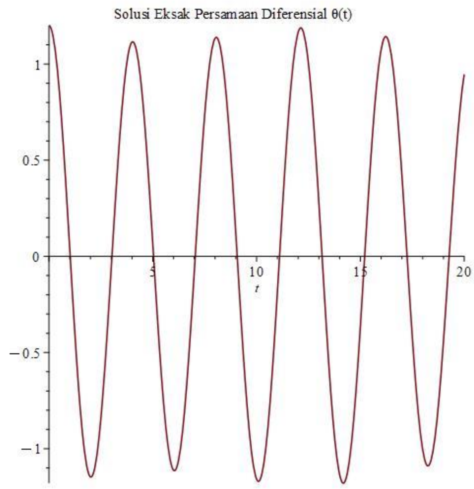
Setelah dilakukan perhitungan dan penyelesaian sistem persamaan linear, diperoleh nilai konstanta:

$$C_1 = \frac{3841}{32005}, \qquad C_2 = -\frac{441569\sqrt{9.5999}}{3072447995}$$

Sehingga solusi khususnya adalah:

$$\theta(t) = -\frac{441569}{3072447995} e^{-\frac{t}{200}} \sqrt{9.5999} \sin\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200} t\right)$$
$$+ \frac{3841}{32005} e^{-\frac{t}{200}} \cos\left(\frac{\sqrt{9.5999}}{200} t\right) - \frac{5}{6401} \cos\left(\frac{6}{5} t\right)$$
$$+ \frac{400}{6401} \sin\left(\frac{6}{5} t\right)$$

Grafik solusi numerik dari persamaan diferensial $\theta(t)$ ditunjukkan pada plot sebagai berikut:




**Gambar 4.1** Grafik Solusi Eksak $\theta(t)$ dengan parameter $\delta = 0.01$; $\lambda = 0.06$; $\mu = 1.2$.

Plot dari solusi $\theta(t)$ menunjukkan bahwa sistem mengalami osilasi yang bersifat stabil. Hal ini ditandai dengan tidak adanya pertumbuhan amplitudo yang tidak terbatas, serta osilasi yang tetap berada dalam batas tertentu. Efek redaman kecil ($\delta = 0.01$) menyebabkan sistem kehilangan energi secara perlahan, tetapi tetap mempertahankan pola osilasi dalam waktu yang cukup lama. Selain itu, adanya gaya pemaksa $f(t) = 0.06\sin(1.2t)$ berperan dalam mempertahankan osilasi sistem tanpa menyebabkan ketidakstabilan. Dengan demikian, sistem bersifat stabil secara dinamis dan solusi eksak $\theta(t)$ tetap berada dalam kondisi terkendali.

## 4.3 Penyelesaian Model Matematika Vibrasi String Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat

Persamaan berikut,

$$\ddot{\theta} = -\delta\,\dot{\theta} - \left(\frac{6K}{m}\right)\theta + f(t) \tag{4.3}$$

Dengan,

$$f(t) = \lambda\sin(\mu t).$$

Diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagaimana dijelaskan pada Persamaan (2.10). Parameter yang digunakan mengacu pada McKenna (1999), yaitu:

$\delta = 0.01\ kg/s$

$K = 1000\ N/m$

$m = 2500\ kg$

$\theta = 0$

$\lambda = 0.06$

$\mu = 1.2$

$h = 0.001$

Kondisi awal yang digunakan dalam penyelesaian model ini adalah:

$$\theta(0) = 1.2, \dot{\theta}(0) = 0$$

Untuk menerapkan metode Runge-Kutta orde empat, persamaan diferensial orde dua tersebut diubah terlebih dahulu menjadi sistem persamaan diferensial orde satu dengan melakukan substitusi variabel sebagai berikut:

$$\theta_1 = \theta, \theta_2 = \dot{\theta}$$

Sehingga sistem persamaannya menjadi,

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} = \theta_2 \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} = -\delta\theta_2 - \left(\dfrac{6k}{m}\right)\theta_1 + f(t) \end{cases}$$

Sistem ini akan diselesaikan menggunakan runge-kutta orde empat sebagai berikut:

$$k_1 = h \cdot \theta_2 \tag{4.4}$$

$$I_1 = h \cdot \left(-\delta\theta_2 - \frac{6K}{m}\theta_1 + f(t)\right) \tag{4.5}$$

$$k_2 = h \cdot \left(\theta_2 + \frac{I_1}{2}\right) \tag{4.6}$$

$$I_2 = h \cdot \left(-\delta\left(\theta_2 + \frac{I_1}{2}\right) - \frac{6K}{m}\left(\theta_1 + \frac{k_1}{2}\right) + f\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{4.7}$$

$$k_3 = h \cdot \left(\theta_2 + \frac{I_2}{2}\right) \tag{4.8}$$

$$I_3 = h \cdot \left( -\delta \left( \theta_2 + \frac{I_2}{2} \right) - \frac{6K}{m} \left( \theta_1 + \frac{I_1}{2} \right) + f\left( t + \frac{h}{2} \right) \right) \tag{4.9}$$

$$k_4 = h \cdot (\theta_2 + I_3) \tag{4.10}$$

$$I_4 = h \cdot \left( -\delta(\theta_2 + I_3) - \frac{6K}{m}(\theta_1 + k_3) + f(t + h) \right) \tag{4.11}$$

$$\theta_1^{(i+1)} = \theta_1^{(i)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4) \tag{4.12}$$

$$\theta_2^{(i+1)} = \theta_2^{(i)} + \frac{1}{6}(I_1 + 2I_2 + I_3 + I_4) \tag{4.13}$$

Maka, untuk sistem persamaan ini menghitung iterasi $k_1, k_2, k_3, k_4, I_1, I_2, I_3, I_4$ untuk masing-masing $\theta$ dengan $\theta(0) = 1.2$; $\dot{\theta}(0) = 0$ sebagai berikut:

1. Menghitung Iterasi Pertama

   a. Menghitung $k_1$ dan $I_1$

$$k_1 = h \cdot \theta_2 = 0{,}001 \cdot 0 = 0$$

$$I_1 = h \cdot \left( -\delta \cdot \theta_2 - \left( \frac{6K}{m} \right) \cdot \theta_1 + f(t) \right)$$

$$I_1 = 0{,}001 \cdot \left( -0{,}01 \cdot 0 - \left(6 \cdot \frac{1000}{2500}\right) \cdot 1{,}2 + 0 \right)$$

$$I_1 = 0{,}001 \cdot (-2{,}88) = -0{,}00288$$

b. Menghitung $k_2$ dan $I_2$

$$k_2 = h \cdot \left(\theta_2 + \frac{I_1}{2}\right) = 0{,}001 \cdot \left(0 + \frac{-0{,}00288}{2}\right)$$

$$k_2 = 0{,}001 \cdot (-0{,}00144) = -0{,}00000144$$

$$I_2 = h \cdot \left( -\delta \cdot \left(\theta_2 + \frac{I_1}{2}\right) - \left(\frac{6K}{m}\right) \cdot (\theta_1 + k_1/2) + f(t + h/2) \right)$$

$$I_2 = 0{,}001 \cdot ( -0{,}01 \cdot (-0{,}00144) - 2{,}4 \cdot 1{,}2 + 0{,}000036 )$$

$$I_2 = 0{,}001 \cdot (-2{,}8799496) = -0{,}00287995$$

c. Menghitung $k_3$ dan $I_3$

$$k_3 = h \cdot (\theta_2 + I_2 / 2) = 0{,}001 \cdot (0 + (-0{,}00287995) / 2)$$

$$k_3 = 0{,}001 \cdot (-0{,}001439975) = -0{,}000001439975$$

$$I_3 = h \cdot ( -\delta \cdot (\theta_2 + I_2/2) - (6K / m) \cdot (\theta_1 + k_2/2) + f(t + h/2) )$$

$$I_3 = 0{,}001 \cdot ( -0{,}01 \cdot (-0{,}001439975) - 2{,}4 \cdot 1{,}2 + 0{,}000036 )$$

$$I_3 = 0{,}001 \cdot (-2{,}87994788) = -0{,}00287995$$

d. Menghitung $k_4$ dan $I_4$

$$k_4 = h \cdot (\theta_2 + I_3) = 0{,}001 \cdot (0 + (-0{,}00287995))$$

$$= -0{,}00000287995$$

$$I_4 = h \cdot ( -\delta \cdot (\theta_2 + I_3) - (6K / m) \cdot (\theta_1 + k_3) + f(t + h) )$$

$$I_4 = 0{,}001 \cdot ( -0{,}01 \cdot (-0{,}00287995) - 2{,}4 \cdot 1{,}2 + 0{,}000072 )$$

$$I_4 = 0{,}001 \cdot (-2{,}8798957) = -0{,}00287990$$

e. Menghitung nilai $\theta_1$ dan $\theta_2$

$$\theta_1 = \theta_1 + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\theta_1 = 1{,}2 + 1/6\,(0 + 2(-0{,}00000144) + 2(-0{,}000001439975) + (-0{,}00000287995))$$

$$\theta_1 = 1{,}2 - 0{,}00000144 = 1{,}19999856$$

$$\theta_2 = \theta_2 + 1/6\,(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$\theta_2 = 0 + 1/6\,(-0{,}00288 + 2(-0{,}00287995) + 2(-0{,}00287995) + (-0{,}00287990))$$

$$\theta_2 = 1/6\,(-0{,}01727965) = -0{,}00288$$

2. Menghitung iterasi kedua

   a. Menghitung $k_1$ dan $I_1$

$$k_1 = h \times \theta_2 = 0.001 \times (-0.00288) = -0.00000288$$

$$I_1 = h \times (-\delta \times \theta_2 - (6K/m) \times \theta_1 + f(t))$$

$$= 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00288) - (6 \times 1000/2500) \times 1.19999856 + 0.000072)$$

$$= 0.001 \times (0.0000288 - 2.879996544 + 0.000072)$$

$$= 0.001 \times (-2.879895744) = -0.00287990$$

   b. Menghitung $k_2$ dan $I_2$

$$k_2 = h \times (\theta_2 + I_1/2)$$
$$= 0.001 \times (-0.00288 + (-0.00287990/2))$$
$$= 0.001 \times (-0.00288 - 0.00143995) = -0.00000431995$$
$$I_2 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_1/2) - (6K/m) \times (\theta_1 + k_1/2) + f(t + h/2))$$
$$= 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00431995) - 2.4 \times 1.19999712 + 0.000108)$$
$$= 0.001 \times (0.0000432 - 2.879993088 + 0.000108)$$

$$= -0.00287984$$

c. Menghitung $k_3$ dan $I_3$

$$k_3 = h \times (\theta_2 + I_2 / 2)$$

$$= 0.001 \times (-0.00288 + (-0.00287984 / 2))$$

$$= 0.001 \times (-0.00288 - 0.00143992) = -0.00000431992$$

$$I_3 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_2 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_2 / 2)$$
$$+ f(t + h/2))$$

$$= 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00431992) - 2.4 \times 1.1999964$$
$$+ 0.000108)$$

$$= 0.001 \times (0.0000432 - 2.87999136 + 0.000108)$$

$$= -0.00287984$$

d. Menghitung $k_4$ dan $I_4$

$$k_4 = h \times (\theta_2 + I_3) = 0.001 \times (-0.00288 - 0.00287984)$$
$$= -0.00000575984$$

$$I_4 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_3) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_3) + f(t$$
$$+ h))$$

$$= 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00575984) - 2.4 \times 1.19999424$$
$$+ 0.000144)$$

$$= 0.001 \times (0.0000576 - 2.879986176 + 0.000144)$$

$$= -0.00287978$$

e. Menghitung nilai $\theta_1$ dan $\theta_2$

$$\theta_1 = \theta_1 + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1.19999856 + (1/6)(-0.00000288 + 2 \times (-0.00000431995)$$
$$+ 2 \times (-0.00000431992) + (-0.00000575984))$$

$$= 1.19999856 + (1/6)(-0.00002503948) \approx 1.19999496$$

$$\theta_2 = \theta_2 + (1/6)(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$= -0.00288 + (1/6)(-0.00287990 + 2 \times (-0.00287984)$$

$$+ 2 \times (-0.00287984) + (-0.00287978))$$

$$= -0.00288 + (1/6)(-0.01727906) = -0.00575984$$

3. Menghitung iterasi ketiga

   a. Menghitung $k_1$ dan $I_1$

$$k_1 = h \times \theta_2 = 0.001 \times (-0.00575984) = -0.00000575984$$

$$I_1 = h \times (-\delta \times \theta_2 - (6K / m) \times \theta_1 + f(t))$$

$$I_1 = 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00575984) - 2.4 \times 1.19999264$$

$$+ 0.000144)$$

$$I_1 = 0.001 \times (-2.879780738) = -0.002879780738$$

   b. Menghitung $k_2$ dan $I_2$

$$k_2 = h \times (\theta_2 + I_1 / 2)$$

$$= 0.001 \times (-0.00575984 + (-0.002879780738 / 2))$$

$$k_2 = 0.001 \times (-0.00719973) = -0.00000719973$$

$$I_2 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_1 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_1 / 2) + f(t$$

$$+ h/2))$$

$$I_2 = 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00719973) - 2.4 \times 1.19998976$$

$$+ 0.000156)$$

$$I_2 = 0.001 \times (-2.8797474267) = -0.0028797474267$$

   c. Menghitung $k_3$ dan $I_3$

$$k_3 = h \times (\theta_2 + I_2 / 2)$$

$$= 0.001 \times (-0.00575984 + (-0.0028797474267 / 2))$$

$$k_3 = -0.00000719971$$

$$I_3 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_2 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_2 / 2) + f(t + h/2))$$

$$I_3 = 0.001 \times (0.0000719971 - 2.879971296 + 0.000156)$$

$$= -0.0028797432989$$

d. Menghitung $k_4$ dan $I_4$

$$k_4 = h \times (\theta_2 + I_3)$$

$$= 0.001 \times (-0.00575984 - 0.0028797432989)$$

$$= -0.00000863958$$

$$I_4 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_3) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_3) + f(t + h))$$

$$I_4 = 0.001 \times (0.0000863958 - 2.879965056 + 0.000216)$$

$$= -0.00287966226$$

e. Menghitung nilai $\theta_1$ dan $\theta_2$

$$\theta_1 = \theta_1 + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\theta_1 = 1.19999264 + (1/6)(-0.00000575984 + 2 \times (-0.00000719973) + 2 \times (-0.00000719971) + (-0.00000863958))$$

$$\theta_1 \approx 1.19998544$$

$$\theta_2 = \theta_2 + (1/6)(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$\theta_2 = -0.00575984 + (1/6)(-0.002879780738 + 2 \times (-0.0028797474267) + 2 \times (-0.0028797432989) + (-0.00287966226))$$

$$\theta_2 \approx -0.00863952$$

4. Menghitung iterasi keempat

a. Menghitung $k_1$ dan $I_1$

$$k_1 = h \times \theta_2 = 0.001 \times (-0.00863952) = -0.00000863952$$

$$I_1 = h \times (-\delta \times \theta_2 - (6K / m) \times \theta_1 + f(t))$$

$$I_1 = 0.001 \times (-0.01 \times (-0.00863952) - 2.4 \times 1.1999808 + 0.000216)$$

$$I_1 = 0.001 \times (-2.8796515248) = -0.00287965152$$

b. Menghitung $k_2$ dan $I_2$

$$k_2 = h \times (\theta_2 + I_1 / 2)$$

$$= 0.001 \times (-0.00863952 + (-0.00287965152 / 2))$$

$$k_2 = 0.001 \times (-0.01007935) = -0.00001007935$$

$$I_2 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_1 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_1 / 2) + f(t + h/2))$$

$$I_2 = 0.001 \times (-0.01 \times (-0.01007935) - 2.4 \times 1.19997698 + 0.000252)$$

$$I_2 = 0.001 \times (-2.8795919565) = -0.00287959196$$

c. Menghitung $k_3$ dan $I_3$

$$k_3 = h \times (\theta_2 + I_2 / 2)$$

$$= 0.001 \times (-0.00863952 + (-0.00287959196 / 2))$$

$$k_3 = 0.001 \times (-0.01007932) = -0.00001007932$$

$$I_3 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_2 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_2 / 2) + f(t + h/2))$$

$$I_3 = 0.001 \times (0.0001007932 - 2.87994182 + 0.000252)$$

$$= -0.002879589$$

d. Menghitung $k_4$ dan $I_4$

$$k_4 = h \times (\theta_2 + I_3) = 0.001 \times (-0.00863952 - 0.002879589)$$

$$= -0.00001151911$$

$$I_4 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_3) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_3) + f(t + h))$$

$$I_4 = 0.001 \times (0.0001151911 - 2.87992973 + 0.000288)$$

$$= -0.00287952654$$

e. Menghitung nilai $\theta_1$ dan $\theta_2$

$$\theta_1 = \theta_1 + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\theta_1 = 1.1999808 + (1/6)(-0.00000863952$$
$$+ 2 \times (-0.00001007935) + 2 \times (-0.00001007932)$$
$$+ (-0.00001151911))$$

$$\theta_1 \approx 1.19997072$$

$$\theta_2 = \theta_2 + (1/6)(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$$

$$\theta_2 = -0.00863952 + (1/6)(-0.00287965152$$
$$+ 2 \times (-0.00287959196) + 2 \times (-0.002879589)$$
$$+ (-0.00287952654))$$

$$\theta_2 \approx -0.01151911$$

5. Menghitung iterasi kelima

a. Menghitung $k_1$ dan $I_1$

$$k_1 = h \times \theta_2$$

$$= 0.001 \times (-0.01151911)$$

$$= -0.00001151911$$

$$I_1 = h \times (-\delta \times \theta_2 - (6K / m) \times \theta_1 + f(t))$$

$$= 0.001 \times (0.0001151911 - 2.879929728 + 0.000288)$$

$$= 0.001 \times (-2.879526537)$$

$= -0.002879527$

b. Menghitung $k_2$ dan $I_2$

$k_2 = h \times (\theta_2 + I_1 / 2)$

$= 0.001 \times (-0.01151911 + (-0.002879527 / 2))$

$= 0.001 \times (-0.0129588735)$

$= -0.00001295887$

$I_2 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_1 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_1 / 2) + f(t + h/2))$

$= 0.001 \times (0.0001295887 - 2.879915905 + 0.000324)$

$= 0.001 \times (-2.879462316)$

$= -0.002879462$

c. Menghitung $k_3$ dan $I_3$

$k_3 = h \times (\theta_2 + I_2 / 2)$

$= 0.001 \times (-0.01151911 + (-0.002879462 / 2))$

$= 0.001 \times (-0.012958841)$

$= -0.00001295884$

$I_3 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_2 / 2) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_2 / 2) + f(t + h/2))$

$= 0.001 \times (0.000129588 - 2.879914178 + 0.000324)$

$= 0.001 \times (-2.87946059)$

$= -0.002879461$

d. Menghitung $k_4$ dan $I_4$

$k_4 = h \times (\theta_2 + I_3)$

$= 0.001 \times (-0.01151911 - 0.002879461)$

$= 0.001 \times (-0.014398571)$

$= -0.00001439857$

$I_4 = h \times (-\delta \times (\theta_2 + I_3) - (6K / m) \times (\theta_1 + k_3) + f(t + h))$

$= 0.001 \times (0.000143986 - 2.879898624 + 0.00036)$

$= 0.001 \times (-2.879394638)$

$= -0.002879395$

e. Menghitung nilai $\theta_1$ dan $\theta_2$

$\theta_1 = \theta_1 + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$= 1.19997072 + (1/6)(-0.00001151911$

$+ 2 \times (-0.00001295887) + 2 \times (-0.00001295884)$

$+ (-0.00001439857))$

$= 1.19997072 - 0.000012959$

$= 1.19995776$

$\theta_2 = \theta_2 + (1/6)(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + I_4)$

$= -0.01151911 + (1/6)(-0.002879527 + 2 \times (-0.002879462)$

$+ 2 \times (-0.002879461) + (-0.002879395))$

$= -0.01151911 - 0.00287946$

$= -0.01439857$

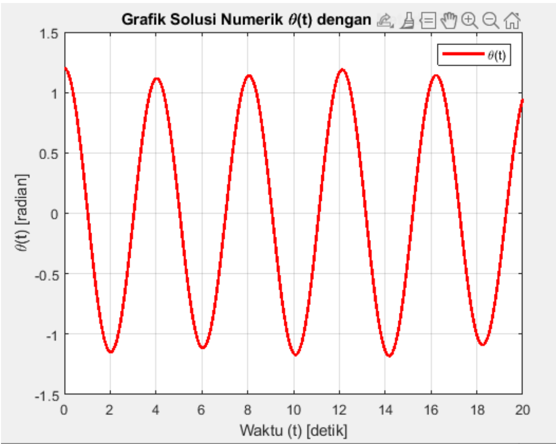
Berdasarkan hasil perhitungan iterasi numerik menggunakan metode Runge Kutta Orde Empat solusi $\theta(t)$ yang diperoleh melalui Matlab dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

**Tabel 4.1** Solusi Numerik Metode Runge-Kutta Orde Empat untuk $\theta(t)$ dengan parameter $\delta = 0.01;\ K = 1000;\ m = 2500;\ \lambda = 0.06;\ \mu = 1.2;\ h = 0.001$ pada $t \in [0,20]$.

| Iterasi | Waktu$(t)$ | Solusi $\theta(t)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.2000000000 |
| 2 | 0.001 | 1.1998560196 |
| 3 | 0.002 | 1.1994241804 |
| 4 | 0.003 | 1.1987046867 |
| 5 | 0.004 | 1.1976978119 |
| 6 | 0.005 | 1.1964038982 |
| 7 | 0.006 | 1.1948233569 |
| 8 | 0.007 | 1.1929566677 |
| 9 | 0.008 | 1.1908043790 |
| 10 | 0.009 | 1.1883671074 |

Hasil lengkapnya dapat diakses melalui tautan berikut: https://bit.ly/hasilperhitunganrk4.

Berdasarkan hasil perhitungan numerik dengan metode RK4 yang ditampilkan pada Tabel 4.1, diperoleh plot solusi seperti terlihat pada Gambar berikut:




**Gambar 4.2** Grafik Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde Empat untuk $\theta(t)$ dengan parameter $\delta = 0.01;\ K = 1000;\ m = 2500;\ \lambda = 0.06;\ \mu = 1.2;\ h = 0.001$ pada $t \in [0,20]$.

Plot pada Gambar di atas menunjukkan solusi numerik dari sudut simpangan $\theta(t)$ terhadap waktu yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (RK4). Terlihat bahwa sudut simpangan berosilasi secara periodik terhadap waktu dengan amplitudo yang relatif konstan, menunjukkan adanya perilaku ayunan harmonik. Grafik ini memperlihatkan bahwa sistem mengalami gerakan bolak-balik yang teratur, di mana simpangan maksimum mendekati 1.2 satuan sudut dan minimum mendekati −1.2 satuan sudut, sesuai dengan kondisi awal $\theta(0) = 1.2$ dan $\dot{\theta}(0) = 0$. Pola osilasi ini juga menunjukkan bahwa gaya pemulih dan gaya luar dalam sistem berada dalam keseimbangan dinamis yang menyebabkan gerakan osilasi berkelanjutan tanpa peredaman yang signifikan selama interval waktu $t \in [0,20]$.

## 4.4 Analisis Galat Dan Perbandingan Solusi Analitik Dengan Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde Empat

### 4.4.1. Perbandingan Solusi Runge Kutta Orde Empat Dengan Solusi Analitik

Berdasarkan hasil perhitungan pada persamaan (4.1), diperoleh solusi analitik dan solusi numerik yang masing-masing disajikan pada Subbab 4.2 dan 4.4. Selanjutnya, perbandingan antara kedua solusi tersebut disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

**Tabel 4.2** Perbandingan Solusi Analitik Dengan Solusi Numerik Metode Runge-Kutta Orde Empat untuk $\theta(t)$ dengan parameter $\delta = 0.01;\ K = 1000;\ m = 2500;\ \lambda = 0.06;\ \mu = 1.2;\ h = 0.001$ pada $t \in [0,20]$.

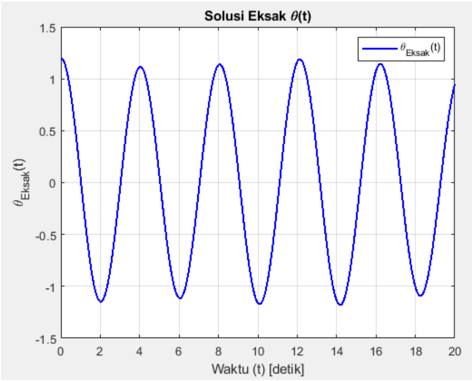
| Iterasi | Waktu $(t)$ | Solusi RK4 | Solusi Eksak | Selisih Mutlak $\lvert Solusi\ Eksak - Solusi\ RK4 \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1.2000000000 | 1.2000000000 | 0.0000000000 |
| 2 | 0.001 | 1.1998560196 | 1.1999985600 | 0.0001425404 |
| 3 | 0.002 | 1.1994241804 | 1.1999942400 | 0.0005700596 |
| 4 | 0.003 | 1.1987046867 | 1.1999870400 | 0.0012823533 |
| 5 | 0.004 | 1.1976978119 | 1.1999769620 | 0.0022791501 |
| 6 | 0.005 | 1.1964038982 | 1.1999640020 | 0.0035601038 |
| 7 | 0.006 | 1.1948233569 | 1.1999481640 | 0.0051248071 |
| 8 | 0.007 | 1.1929566677 | 1.1999294460 | 0.0069727783 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 0.008 | 1.1908043790 | 1.1999078500 | 0.0091034710 |
| 10 | 0.009 | 1.1883671074 | 1.1998833740 | 0.0115162666 |

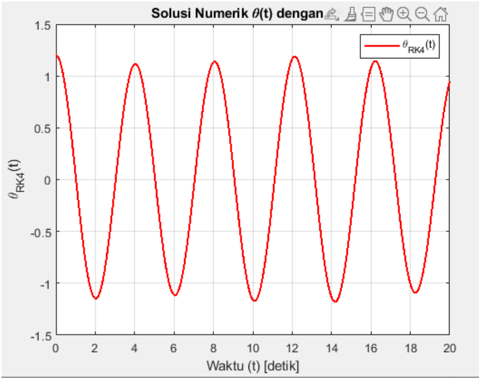
Perhitungan lengkap dapat diakses melalui tautan berikut:

https://bit.ly/45Wf2zm.

Berdasarkan hasil simulasi Matlab dalam Tabel 4.4, diperoleh plot sebagaimana ditunjukkan pada gambar berikut:




**Gambar 4.3** Solusi Eksak dengan parameter $\delta = 0.01$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\lambda = 0.06$; $\mu = 1.2$; $h = 0.001$ pada $t \in [0,20]$.




**Gambar 4.4** Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde Empat dengan parameter $\delta = 0.01$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\lambda = 0.06$; $\mu = 1.2$; $h = 0.001$ pada $t \in [0,20]$.

Gambar 4.4 menampilkan solusi numerik $\theta(t)$ yang diperoleh menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat (RK4) pada model getaran sudut dengan parameter $\delta = 0.01, K = 1000, m = 2500, \lambda\,\lambda = 0.06, \mu = 1.2$, dan ukuran langkah $h = 0.001$ dalam interval waktu $t \in [0,20]$. Pola gelombang yang terbentuk menunjukkan osilasi yang periodik dan stabil, dengan sedikit penurunan amplitudo dari waktu ke waktu yang mengindikasikan adanya redaman ringan. Solusi ini mencerminkan perilaku dinamis dari sistem mekanik yang mengalami gaya luar periodik, dengan redaman yang tidak cukup besar untuk meredam seluruh gerakan osilatori.

Sementara itu, Gambar 4.3 memperlihatkan solusi eksak dari model yang sama pada parameter yang identik. Kurva yang dihasilkan sangat mirip dengan solusi numerik pada Gambar 4.3, baik dari segi bentuk gelombang, frekuensi, maupun amplitudo. Kesamaan ini menunjukkan bahwa metode RK4 mampu memberikan hasil yang sangat mendekati solusi eksak, dengan kesalahan numerik yang sangat kecil. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa RK4 merupakan metode numerik yang akurat dan efektif untuk menyelesaikan sistem diferensial orde dua dalam konteks getaran mekanik seperti model ini.

## 4.5 Penyelesaian Pemodelan Vibrasi String dalam Perspektif Islam

Ilmu pengetahuan dan teknologi terus berkembang seiring dengan kebutuhan manusia dalam memahami fenomena alam, termasuk dalam bidang mekanika dan vibrasi string. Model vibrasi string merupakan sistem fisika yang menggambarkan osilasi suatu string atau kabel akibat gaya eksternal tertentu. Penyelesaian matematis dari model ini sering kali melibatkan metode numerik, salah satunya adalah metode Runge-Kutta orde empat (RK4), yang digunakan untuk menghitung solusi pendekatan dari sistem persamaan diferensial yang menggambarkan vibrasi string.

Dalam perspektif Islam, upaya memahami fenomena alam melalui ilmu pengetahuan merupakan bagian dari perintah Allah SWT kepada manusia untuk membaca dan menelaah ciptaan-Nya. Dalam Al-Qur'an, Surat Al-Alaq ayat 1-5 menekankan pentingnya membaca dan menuntut ilmu sebagai bentuk ibadah serta sebagai jalan untuk mengenali kebesaran Allah. Penelitian mengenai solusi numerik pada model vibrasi string mencerminkan prinsip ini, di mana ilmu matematika dan fisika digunakan untuk memahami hukum-hukum alam yang telah ditetapkan oleh-Nya.

Metode Runge-Kutta orde empat yang digunakan dalam penelitian ini merupakan salah satu bentuk ijtihad ilmiah dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang kompleks. Dalam konteks Islam, pemanfaatan teknologi dan metode numerik seperti RK4 mencerminkan pemahaman bahwa manusia diberikan akal untuk menggali ilmu dan menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Hadis Rasulullah SAW juga menyatakan bahwa "Menuntut ilmu adalah kewajiban bagi setiap Muslim," yang menunjukkan bahwa ilmu yang bermanfaat, termasuk dalam bidang sains dan teknik, memiliki nilai ibadah apabila digunakan untuk kesejahteraan umat.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa solusi numerik yang diperoleh melalui metode RK4 memiliki kesesuaian yang baik dengan solusi eksak. Grafik perbandingan antara solusi eksak dan RK4 membuktikan bahwa metode ini dapat memberikan hasil yang akurat dan stabil dalam pemodelan vibrasi string. Pemanfaatan metode numerik ini tidak hanya memberikan pemahaman mendalam mengenai sistem mekanis, tetapi juga menunjukkan bagaimana ilmu pengetahuan dapat digunakan untuk kemaslahatan manusia, seperti dalam bidang rekayasa jembatan gantung, akustik instrumen musik, dan teknologi lainnya yang berbasis vibrasi string.

Dengan demikian, penelitian mengenai solusi numerik dengan Runge-Kutta orde empat pada model vibrasi string tidak hanya memiliki nilai akademik, tetapi juga memiliki makna spiritual dalam Islam. Ilmu pengetahuan yang diperoleh dari penelitian ini dapat menjadi bentuk pengabdian kepada Allah SWT, sebagaimana firman-Nya dalam Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa manusia diperintahkan untuk memahami dan mengelola alam dengan bijaksana. Oleh karena itu, pengembangan metode numerik dalam pemodelan fisika tidak hanya bertujuan untuk kepentingan akademik dan teknologi, tetapi juga sebagai refleksi dari nilai-nilai Islam dalam mencari dan menerapkan ilmu yang bermanfaat bagi manusia.

# BAB V

# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian pada BAB IV, diperoleh bahwa analisis dan simulasi numerik model vibrasi string menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

1. Hasil perhitungan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat menunjukkan bahwa solusi numerik yang diperoleh memiliki akurasi tinggi dan stabilitas yang sangat baik. Hasil iterasi menunjukkan bahwa posisi sudut $\theta(t)$ mengalami osilasi periodik dengan amplitudo yang relatif konstan. Perilaku ini disebabkan oleh pengaruh gaya redaman ringan dengan nilai $\delta = 0.01$, serta gaya pemaksa sinusoidal $f(t) = \lambda sin\ (\mu t)$. Grafik solusi numerik memperlihatkan bahwa sistem tidak mengalami divergensi maupun peredaman berlebih, sehingga sistem dapat dikatakan stabil secara dinamis dalam rentang waktu $t \in [0,20]$.
2. Berdasarkan perbandingan antara solusi numerik metode RK4 dan solusi analitik dari model diferensial orde dua yang dikaji, diperoleh hasil yang sangat konsisten. Grafik perbandingan menunjukkan bahwa kurva hasil numerik hampir tumpang tindih dengan kurva solusi eksak. Galat absolut antara keduanya berada pada orde $10^{-3}$, yang menunjukkan bahwa metode RK4 mampu memberikan aproksimasi yang sangat dekat terhadap solusi eksak. Dengan demikian, metode Runge-Kutta orde empat dapat diandalkan

untuk menyelesaikan permasalahan matematis pada sistem osilasi fisik, khususnya model vibrasi string linier dengan gaya pemaksa periodik.

3. Visualisasi grafik posisi dan kecepatan sudut hasil simulasi menunjukkan pola sinusoidal yang stabil dan teratur. Hal ini menunjukkan bahwa sistem tidak hanya terdefinisi secara matematis, tetapi juga relevan secara fisik. Perilaku sistem ini memperkuat asumsi bahwa gaya eksternal yang bersifat periodik mampu mempertahankan osilasi walaupun terdapat redaman, selama sistem berada dalam kondisi resonansi parsial yang terkendali.

## 5.2 Saran

Penelitian ini berfokus pada penyelesaian numerik model vibrasi string menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Adapun saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Diperlukan analisis lebih lanjut terhadap kestabilan numerik dari metode RK4, khususnya jika model diperluas ke sistem nonlinier atau kondisi redaman yang lebih kompleks.
2. Penelitian lanjutan dapat mengeksplorasi pengaruh variasi parameter seperti massa, konstanta pegas, dan redaman terhadap respons sistem, guna memperoleh pemahaman lebih mendalam mengenai sensitivitas dinamika sistem terhadap perubahan kondisi fisik.
3. Selain pendekatan RK4, penggunaan metode numerik lain seperti Newmark-beta, metode Adams-Bashforth-Moulton, atau metode numerik semi-implisit dapat dijadikan pembanding untuk mengetahui kelebihan dan keterbatasan masing-masing metode dalam konteks pemodelan getaran string.

# DAFTAR PUSTAKA


Aden, d. (2021). *Persamaan Diferensial Biasa.* Tangerang Selatan: Unpam Press.

Al-Albani, M.S. (2006). Shahih Sunan Tirmidzi (Seleksi Hadits Shahih Dari Kitab Sunan Tirmidzi Buku: 2). Jakarta: Pustaka Azzam.

Dozan, W. (2020). Nilai-Nilai Pendidikan Islam Dalam Surat Al-Alaq Ayat 1-5 (Studi Tafsir Al-Misbah Karya M. Quraish Shihab). *Ta'limuna*, 164-167.

Kementrian Agama. (2022). *Qur'an Kemenag.*

Kendall Atkinson, W. H. (2009). *Numerical Solution Of Ordinary Differential Equations.* Lowa: A John Wiley & Sons, Inc., Publication.

Kumar, P. L. (2021). Demonstration Study on Runge-Kutta Fourth Order Method by Using MATLAB Programming. *Journal of Mathematics*, 2.

La Zakaria, U. M. (2023). *Pengantar Metode Numerik.* Bandar Lampung: Aura.

McKenna, P. J. (1999). Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited: Fixing an Old Approximation. *Mathematical Association of America*, 1-16.

Mukmin, T. (2016). Urgensi Belajar Dalam Perspektif Al-Qur'an Surat Al-Alaq Ayat 1-5 Menurut Tafsir Ibnu Katsir. *el-ghiroh*, 14-19.

N, R. (2019). *Hadis Kewajiban Menuntut Ilmu Dan Menyampaikannya Dalam Buku Siswa Al-Qur'an Hadis Madrasah Aliyah Di Kota Ambon.* Ambon: LP2M IAIN Ambon.

Nadia Aisah Fitri, N. S. (2023). Analisis Gelombang Bunyi Melalui Alat Peraga Sederhana dan Relevansinya dalam pembelajaran di SD. *Seminar Nasional Inovasi Pendidikan Ke-6 (SNIP 2022)*, 618.

Sahir, S. H. (2021). *Metodologi Penlitian.* Yogyakarta: Penerbit Kbm Indonesia.

Shen, X. Y. (2015). Runge-Kutta Method for Solving Uncertain Differential Equations. *n Journal of Uncertainty Analysis and*, 5-6.

T. E. Simos, E. D. (1994). A Runge-Kutta-Nystrom method for the numerical integration of special second-order periodic initial-value problems . *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 317-326.

Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer.* Yogyakarta: Beta Offset.

Walters, P. J. (1990). Travelling Waves In A Suspension Bridge. *Siam J. Appl. Math.*, 703-715.

Waluya, B. (2006). *Buku Ajar Persamaan Diferensial.* Semarang: Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro.

Wasilatul Murtafi'ah, D. A. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa Dan Aplikasinya.* Madiun: UNIPMA Press .

Widowati, S. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika.* Semarang: Jurusaan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Diponegoro.

# LAMPIRAN

## Lampiran 1 Program Maple Untuk Solusi Eksak Pada Vibrasi String $\boldsymbol{\theta(t)}$

Akar-akar Real Berbeda

```
> restart :
> pers := (D@@2)(theta)(t) + 0.01 * D(theta)(t) + 2.4 * theta(t) = 0.06 * sin(1.2 * t);
```

$$pers := D^{(2)}(\theta)(t) + 0.01\, D(\theta)(t) + 2.4\,\theta(t) = 0.06 \sin(1.2\, t) \quad \textbf{(1)}$$

```
> solu := dsolve(pers);
```

$$solu := \theta(t) = e^{-\frac{t}{200}} \sin\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right) \_C2 + e^{-\frac{t}{200}} \cos\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right) \_C1 - \frac{5\cos\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401} + \frac{400 \sin\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401} \quad \textbf{(2)}$$

```
> solp := dsolve({pers, theta(0) = 1.2, D(theta)(0) = 0});
```

$$solp := \theta(t) = -\frac{441569\, e^{-\frac{t}{200}} \sqrt{95999} \sin\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right)}{3072447995} + \frac{38431\, e^{-\frac{t}{200}} \cos\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right)}{32005} - \frac{5\cos\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401} + \frac{400 \sin\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401} \quad \textbf{(3)}$$

Menggambar Solusi

$$> plot\left(-\frac{441569\, e^{-\frac{t}{200}} \sqrt{95999} \sin\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right)}{3072447995} + \frac{38431\, e^{-\frac{t}{200}} \cos\left(\frac{\sqrt{95999}\, t}{200}\right)}{32005} - \frac{5\cos\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401} + \frac{400 \sin\left(\frac{6\,t}{5}\right)}{6401},\ t = 0\,..\,10,\ title = \text{"Solusi Eksak Persamaan Diferensial θ(t)"}\right);$$

**Lampiran 2 Program Mathlab Untuk Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde Empat**

```
clc;
clear;

% Parameter (McKenna, 1999)
delta = 0.01;
K = 1000;
m = 2500;
lambda = 0.06;
mu = 1.2;
h = 0.001;
t_end = 20;

% Kondisi awal
theta1 = 1.2;
theta2 = 0;

% Waktu
t = 0:h:t_end;
n = length(t);

% Inisialisasi array solusi
theta = zeros(1, n);
theta_dot = zeros(1, n);

theta(1) = theta1;
theta_dot(1) = theta2;

% Fungsi gaya luar f(t)
f = @(t) lambda * sin(mu * t);

% Runge-Kutta Orde 4 (RK4)
for i = 1:n-1
    % k1
    k1_1 = h * theta_dot(i);
    k1_2 = h * (-delta * theta_dot(i) - (6*K/m) * theta(i) + f(t(i)));

    % k2
    k2_1 = h * (theta_dot(i) + 0.5 * k1_2);
    k2_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + 0.5 * k1_2) ...
             - (6*K/m) * (theta(i) + 0.5 * k1_1) ...
             + f(t(i) + 0.5 * h));

    % k3
    k3_1 = h * (theta_dot(i) + 0.5 * k2_2);
```

```
 % k3
 k3_1 = h * (theta_dot(i) + 0.5 * k2_2);
 k3_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + 0.5 * k2_2) ...
           - (6*K/m) * (theta(i) + 0.5 * k2_1) ...
           + f(t(i) + 0.5 * h));

 % k4
 k4_1 = h * (theta_dot(i) + k3_2);
 k4_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + k3_2) ...
```

```
            - (6*K/m) * (theta(i) + k3_1) ...
            + f(t(i) + h));

    % Update solusi
    theta(i+1) = theta(i) + (1/6) * (k1_1 + 2*k2_1 + 2*k3_1 + k4_1);
    theta_dot(i+1) = theta_dot(i) + (1/6) * (k1_2 + 2*k2_2 + 2*k3_2 + k4_2);
end

% === Menampilkan hasil θ(t) setiap 0.001 detik mulai dari t = 0 ===
fprintf('\n%-10s %-20s\n', 't', 'θ(t)');
fprintf('-------------------------------\n');
for i = 1:n
    fprintf('%.3f      %.8f\n', t(i), theta(i));
end

% === Plot θ(t) ===
figure;
plot(t, theta, 'r', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('Waktu (t) [detik]');
ylabel('\theta(t) [radian]');
title('Grafik Solusi Numerik \theta(t) dengan Metode RK4');
legend('\theta(t)');

% === Menyimpan hasil θ(t) ke file Excel setiap 0.001 detik ===
t_out = t';
theta_out = theta';

TabelHasil = table(t_out, theta_out, 'VariableNames', {'t', 'theta'});
writetable(TabelHasil, 'hasil_theta_0001_interval.xlsx');

fprintf('\nHasil θ(t) berhasil disimpan ke file "hasil_theta_0001_interval.xlsx"\n');
```

**Lampiran 3 Program Mathlab Untuk Perbandingan Solusi Eksak Dengan Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde Empat**

```
clc;
clear;
format long;

% === Parameter Model ===
delta = 0.01;
K = 1000;
m = 2500;
lambda = 0.06;
mu = 1.2;
h = 0.001;
t_end = 20;

% === Kondisi Awal ===
theta1 = 1.2;
theta2 = 0;

% === Domain Waktu ===
t = 0:h:t_end;
n = length(t);

% === Inisialisasi RK4 ===
theta = zeros(1, n);
theta_dot = zeros(1, n);
theta(1) = theta1;
theta_dot(1) = theta2;

% === Fungsi Gaya Eksternal ===
f = @(t) lambda * sin(mu * t);

% === Solusi RK4 ===
for i = 1:n-1
    k1_1 = h * theta_dot(i);
    k1_2 = h * (-delta * theta_dot(i) - (6*K/m) * theta(i) + f(t(i)));

    k2_1 = h * (theta_dot(i) + 0.5 * k1_2);
    k2_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + 0.5 * k1_2) ...
              - (6*K/m) * (theta(i) + 0.5 * k1_1) + f(t(i) + 0.5*h));

    k3_1 = h * (theta_dot(i) + 0.5 * k2_2);
    k3_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + 0.5 * k2_2) ...
              - (6*K/m) * (theta(i) + 0.5 * k2_1) + f(t(i) + 0.5*h));

    k4_1 = h * (theta_dot(i) + k3_2);
    k4_2 = h * (-delta * (theta_dot(i) + k3_2) ...
              - (6*K/m) * (theta(i) + k3_1) + f(t(i) + h));

    theta(i+1) = theta(i) + (1/6)*(k1_1 + 2*k2_1 + 2*k3_1 + k4_1);
    theta_dot(i+1) = theta_dot(i) + (1/6)*(k1_2 + 2*k2_2 + 2*k3_2 + k4_2);
end
```

```
% === Solusi Eksak ===
theta_exact = -(441569 * exp(-t/200) .* sqrt(95999) .* sin(sqrt(95999) * t / 200)) /↙
3072447995 ...
              + (38431 * exp(-t/200) .* cos(sqrt(95999) * t / 200)) / 32005 ...
              - (5 * cos((6*t)/5)) / 6401 ...
              + (400 * sin((6*t)/5)) / 6401;

% === Error Tanpa Pembulatan ===
error_tanpa_bulat = abs(theta_exact - theta);
max_error = max(error_tanpa_bulat);
fprintf('\n>> Selisih maksimum (tanpa pembulatan) = %.16e\n', max_error);

% === Bulatkan ke 14 digit untuk perbandingan numerik ===
theta_rk4_14 = round(theta, 14);
theta_exact_14 = round(theta_exact, 14);
selisih_mutlak = abs(theta_exact_14 - theta_rk4_14);

% === Plot RK4 Saja ===
figure;
plot(t, theta_rk4_14, 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Waktu (t) [detik]');
ylabel('\theta_{RK4}(t)');
title('Solusi Numerik \theta(t) dengan RK4');
legend('\theta_{RK4}(t)');
grid on;

% === Plot Solusi Eksak Saja ===
figure;
plot(t, theta_exact_14, 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Waktu (t) [detik]');
ylabel('\theta_{Eksak}(t)');
title('Solusi Eksak \theta(t)');
legend('\theta_{Eksak}(t)');
grid on;

% === Plot Error Mutlak (tanpa pembulatan) ===
figure;
plot(t, error_tanpa_bulat, 'k', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Waktu (t) [detik]');
ylabel('Error Mutlak |\theta_{Eksak} - \theta_{RK4}|');
title('Error Mutlak antara Solusi RK4 dan Solusi Eksak');
grid on;

% === Simpan ke Excel ===
idx_output = 1:10:n;  % Ambil setiap 0.01 detik
t_out = t(idx_output)';
rk4_out = theta_rk4_14(idx_output)';
eksak_out = theta_exact_14(idx_output)';
selisih_out = selisih_mutlak(idx_output)';
error_out = error_tanpa_bulat(idx_output)';
```

```
TabelHasil = table(t_out, eksak_out, rk4_out, selisih_out, error_out, ...
    'VariableNames', {'t', 'Solusi_Eksak', 'Solusi_RK4', 'Selisih_Bulat',↙
'Error_Tanpa_Bulat'});

try
    writetable(TabelHasil, 'Perbandingan_Eksak_vs_RK4.xlsx');
    fprintf('\n>> File "Perbandingan_Eksak_vs_RK4.xlsx" berhasil disimpan.\n');
catch
    warning('Gagal menyimpan file Excel. Pastikan file tidak sedang dibuka atau Anda↙
punya izin menulis.');
end

% === Tampilkan Hasil ke Layar Setiap 0.001 detik dari t = 0 hingga t = 20 ===
fprintf('\n%10s %20s %20s %20s\n', 't', 'Solusi Eksak', 'Solusi RK4', 'Selisih (RK4-↙
Eksak)');
fprintf('%s\n', repmat('-',1,80));
for i = 1:n
    fprintf('%10.3f %20.14f %20.14f %20.14f\n', ...
        t(i), theta_exact(i), theta(i), theta(i) - theta_exact(i));

    if t(i) >= 20  % stop sampai t = 20.000
        break;
    end
end
```

**Lampiran 4 Program Maple Untuk $\theta(t) = t[0, 0.009]$**

```
> restart :
> solp := theta(0) =
   -(441569 * exp(-0/200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0)/200))/3072447995
   + (38431 * exp(-0/200) * cos((sqrt(95999) * 0)/200))/32005
   - (5 * cos((6 * 0)/5))/6401
   + (400 * sin((6 * 0)/5))/6401;
```

$$solp := \theta(0) = \frac{6}{5} \quad \textbf{(1)}$$

```
> nilai_theta := rhs(solp);
```

$$nilai\_theta := \frac{6}{5} \quad \textbf{(2)}$$

```
> nilai_numerik := evalf(nilai_theta);
```

$$nilai\_numerik := 1.200000000 \quad \textbf{(3)}$$

```
> printf("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", nilai_numerik);
Nilai theta(0.001) = 1.2000000000
> restart :
> solp := theta(0.001) =
   -(441569 * exp(-0.001/200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.001)/200))
    /3072447995
   + (38431 * exp(-0.001/200) * cos((sqrt(95999) * 0.001)/200))/32005
   - (5 * cos((6 * 0.001)/5))/6401
   + (400 * sin((6 * 0.001)/5))/6401;
```

$$solp := \theta(0.001) = -0.0001437182315\sqrt{95999}\,\sin\left(5.000000000 \times 10^{-6}\sqrt{95999}\right) + 1.200775124\cos\left(5.000000000 \times 10^{-6}\sqrt{95999}\right) - 0.0007061391212 \quad \textbf{(4)}$$

```
> nilai_theta := rhs(solp);
```

$$nilai\_theta := -0.0001437182315\sqrt{95999}\,\sin\left(5.000000000 \times 10^{-6}\sqrt{95999}\right) + 1.200775124\cos\left(5.000000000 \times 10^{-6}\sqrt{95999}\right) - 0.0007061391212 \quad \textbf{(5)}$$

```
> nilai_numerik := evalf(nilai_theta);
```

$$nilai\_numerik := 1.199998560 \quad \textbf{(6)}$$

```
> printf("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", nilai_numerik);
Nilai theta(0.001) = 1.1999985600
> restart :
> solp := theta(0.002) =
   -(441569 * exp(-0.002/200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.002)/200))
    /3072447995
   + (38431 * exp(-0.002/200) * cos((sqrt(95999) * 0.002)/200))/32005
   - (5 * cos((6 * 0.002)/5))/6401
   + (400 * sin((6 * 0.002)/5))/6401;
```

**(7)**

$solp := \theta(0.002) = -0.0001437175129\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00001000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200769120\cos\left(0.00001000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0006311492769$ **(7)**

> *nilai_theta* := *rhs*(*solp*);

$nilai\_theta := -0.0001437175129\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00001000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200769120\cos\left(0.00001000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0006311492769$ **(8)**

> *nilai_numerik* := *evalf*(*nilai_theta*);

$nilai\_numerik := 1.199994240$ **(9)**

> *printf*("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", *nilai_numerik*);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999942400
```

> *restart* :

> *solp* := theta(0.003) =
− (441569 * exp(−0.003 / 200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.003) / 200))
/ 3072447995
+ (38431 * exp(−0.003 / 200) * cos((sqrt(95999) * 0.003) / 200)) / 32005
− (5 * cos((6 * 0.003) / 5)) / 6401
+ (400 * sin((6 * 0.003) / 5)) / 6401;

$solp := \theta(0.003) = -0.0001437167943\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00001500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200763116\cos\left(0.00001500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0005561585238$ **(10)**

> *nilai_theta* := *rhs*(*solp*);

$nilai\_theta := -0.0001437167943\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00001500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200763116\cos\left(0.00001500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0005561585238$ **(11)**

> *nilai_numerik* := *evalf*(*nilai_theta*);

$nilai\_numerik := 1.199987040$ **(12)**

> *printf*("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", *nilai_numerik*);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999870400
```

> *restart* :

> *solp* := theta(0.004) =
− (441569 * exp(−0.004 / 200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.004) / 200))
/ 3072447995
+ (38431 * exp(−0.004 / 200) * cos((sqrt(95999) * 0.004) / 200)) / 32005
− (5 * cos((6 * 0.004) / 5)) / 6401
+ (400 * sin((6 * 0.004) / 5)) / 6401;

$solp := \theta(0.004) = -0.0001437160757\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00002000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200757113\cos\left(0.00002000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0004811669697$ **(13)**

> *nilai_theta* := *rhs*(*solp*);

$nilai\_theta := -0.0001437160757\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00002000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200757113\cos\left(0.00002000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0004811669697$ **(14)**

> *nilai_numerik* := *evalf*(*nilai_theta*);

$$nilai\_numerik := 1.199976962 \quad \textbf{(15)}$$

> *printf*("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", *nilai_numerik*);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999769620
```

> *restart* :

> *solp* := theta(0.005) = − (441569 * exp(−0.005 / 200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.005) / 200)) / 3072447995 + (38431 * exp(−0.005 / 200) * cos((sqrt(95999) * 0.005) / 200)) / 32005 − (5 * cos((6 * 0.005) / 5)) / 6401 + (400 * sin((6 * 0.005) / 5)) / 6401;

$$solp := \theta(0.005) = -0.0001437153571\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00002500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200751109\cos\left(0.00002500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0004061747227 \quad \textbf{(16)}$$

> *nilai_theta* := *rhs*(*solp*);

$$nilai\_theta := -0.0001437153571\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00002500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200751109\cos\left(0.00002500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0004061747227 \quad \textbf{(17)}$$

> *nilai_numerik* := *evalf*(*nilai_theta*);

$$nilai\_numerik := 1.199964002 \quad \textbf{(18)}$$

> *printf*("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", *nilai_numerik*);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999640020
```

> *restart* :

> *solp* := theta(0.006) = − (441569 * exp(−0.006 / 200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.006) / 200)) / 3072447995 + (38431 * exp(−0.006 / 200) * cos((sqrt(95999) * 0.006) / 200)) / 32005 − (5 * cos((6 * 0.006) / 5)) / 6401 + (400 * sin((6 * 0.006) / 5)) / 6401;

$$solp := \theta(0.006) = -0.0001437146386\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00003000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200745105\cos\left(0.00003000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0003311818909 \quad \textbf{(19)}$$

> *nilai_theta* := *rhs*(*solp*);

$$nilai\_theta := -0.0001437146386\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00003000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200745105\cos\left(0.00003000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0003311818909 \quad \textbf{(20)}$$

> *nilai_numerik* := *evalf*(*nilai_theta*);

$$nilai\_numerik := 1.199948164 \quad \textbf{(21)}$$

> *printf*("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", *nilai_numerik*);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999481640
```

> *restart* :

> *solp* := theta(0.007) = − (441569 * exp(−0.007 / 200) * sqrt(95999) * sin((sqrt(95999) * 0.007) / 200)) / 3072447995

$+ (38431 * \exp(-0.007/200) * \cos((\mathrm{sqrt}(95999) * 0.007)/200))/32005$
$- (5 * \cos((6 * 0.007)/5))/6401$
$+ (400 * \sin((6 * 0.007)/5))/6401;$

$$solp := \theta(0.007) = -0.0001437139200\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00003500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200739101\cos\left(0.00003500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0002561885822 \quad (22)$$

> $nilai\_theta := rhs(solp);$

$$nilai\_theta := -0.0001437139200\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00003500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200739101\cos\left(0.00003500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0002561885822 \quad (23)$$

> $nilai\_numerik := evalf(nilai\_theta);$

$$nilai\_numerik := 1.199929446 \quad (24)$$

> printf("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", nilai_numerik);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999294460
```

> restart :

> $solp := \mathrm{theta}(0.008) =$
$-(441569 * \exp(-0.008/200) * \mathrm{sqrt}(95999) * \sin((\mathrm{sqrt}(95999) * 0.008)/200))$
$/3072447995$
$+ (38431 * \exp(-0.008/200) * \cos((\mathrm{sqrt}(95999) * 0.008)/200))/32005$
$- (5 * \cos((6 * 0.008)/5))/6401$
$+ (400 * \sin((6 * 0.008)/5))/6401;$

$$solp := \theta(0.008) = -0.0001437132014\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00004000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200733098\cos\left(0.00004000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0001811949045 \quad (25)$$

> $nilai\_theta := rhs(solp);$

$$nilai\_theta := -0.0001437132014\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00004000000000\sqrt{95999}\right) + 1.200733098\cos\left(0.00004000000000\sqrt{95999}\right) - 0.0001811949045 \quad (26)$$

> $nilai\_numerik := evalf(nilai\_theta);$

$$nilai\_numerik := 1.199907850 \quad (27)$$

> printf("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", nilai_numerik);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1999078500
```

> restart :

> $solp := \mathrm{theta}(0.009) =$
$-(441569 * \exp(-0.009/200) * \mathrm{sqrt}(95999) * \sin((\mathrm{sqrt}(95999) * 0.009)/200))$
$/3072447995$
$+ (38431 * \exp(-0.009/200) * \cos((\mathrm{sqrt}(95999) * 0.009)/200))/32005$
$- (5 * \cos((6 * 0.009)/5))/6401$
$+ (400 * \sin((6 * 0.009)/5))/6401;$

$$solp := \theta(0.009) = -0.0001437124829\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00004500000000\sqrt{95999}\right) + 1.200727094\cos\left(0.00004500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0001062009659 \quad (28)$$

> $nilai\_theta := rhs(solp);$

$$nilai\_theta := -0.0001437124829\sqrt{95999}\,\sin\left(0.00004500000000\sqrt{95999}\right) \quad (29)$$

$$+ 1.200727094\cos\left(0.00004500000000\sqrt{95999}\right) - 0.0001062009659$$

> $nilai\_numerik := evalf(nilai\_theta);$

$$nilai\_numerik := 1.199883374 \quad (30)$$

> printf("Nilai theta(0.001) = %.10f\n", nilai_numerik);

```
Nilai theta(0.001) = 1.1998833740
```

>

## RIWAYAT HIDUP

Yaqutatin Kholifaturrosidah, yang dikenal dengan nama Yaqut, lahir di Jombang, 16 Juli 2001. Penulis merupakan anak kedua dari pasangan Bapak Syahal Permady dan Ibu Shohifah Naimi. Saat ini, penulis bertempat tinggal di Desa Pojokrejo, Kecamatan Kesamben, Kabupaten Jombang.

Penulis menempuh pendidikan di RA Perwanida (2005-2007), melanjutkan ke MI Al Hidayah Pojokrejo (2007-2013), kemudian melanjutkan pendidikan di MTs Banaran Magetan (2013–2016), dan meneruskan ke jenjang SMA di SMA Muhammadiyah 1 Jombang (2017–2020). Pada tahun 2021, penulis diterima melalui jalur SBMPTN di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti berbagai organisasi dan kegiatan. Pada tahun 2021, penulis menjadi panitia Kompetisi Matematika (KOMET) anggota divisi *Fundraising*. Selain itu, penulis juga bergabung dengan organisasi IKAHIMATIKA Wilayah V sebagai anggota divisi Keilmuaan dan Keprofesian pada tahun 2022-2024. Di tahun 2022 penulis juga bergabung dengan organisasi SAN Chapter Jombang sebagai anggota divisi Acara. Selain itu, penulis juga aktif mengikuti berbagai kepanitiaan di jurusan Matematika yakni pada tahun 2022 penulis menjadi anggota divisi Acara pada acara ORMABA 2022 serta menjadi anggota divisi *Partnership* KOMET 2022. Pada tahun 2023 penulis menjadi anggota divisi Pendamping ORMABA 2023 dan menjadi anggota divisi *Partnership* KOMET 2023.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

| | |
|---|---|
| Nama | : Yaqutatin Kholifaturrosidah |
| NIM | : 210601110041 |
| Fakultas / Jurusan | : Sains dan Teknologi / Matematika |
| Judul Skripsi | : Solusi Numerik Dengan Metode Runge Kutta Pada Model Vibrasi String |
| Pembimbing I | : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si |
| Pembimbing II | : Ach. Nashichuddin, M.A |

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 17 September 2024 | Konsultasi Topik dan Data | 1. |
| 2. | 7 Oktober 2024 | Konsultasi Bab I, II, dan III | 2. |
| 3. | 11 Oktober 2024 | Konsultasi Bab I, II, dan III | 3. |
| 4. | 15 Oktober 2024 | Konsultasi Bab I, II, dan III | 4. |
| 5. | 28 Oktober 2024 | Konsultasi Bab I, II, dan III | 5. |
| 6. | 30 Oktober 2024 | ACC Bab I, II, dan III | 6. |
| 7. | 2 November 2024 | Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II | 7. |
| 8. | 10 November 2024 | ACC Kajian Agama Bab I dan II | 8. |
| 9. | 15 November 2024 | ACC Seminar Proposal | 9. |
| 10. | 2 Desember 2024 | Konsultasi Revisi Seminar Proposal | 10. |
| 11. | 9 Februari 2025 | Konsultasi Bab IV dan V | 11. |
| 12. | 15 Februari 2025 | Konsultasi Bab IV dan V | 12. |
| 13. | 17 Februari 2025 | Konsultasi Bab IV dan V | 13. |
| 14. | 20 Februari 2025 | Konsultasi Bab IV dan V | 14. |
| 15. | 10 Maret 2025 | ACC Bab IV dan V | 15. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16. | 11 Maret 2025 | Konsultasi Kajian Agama Bab IV | 16. |
| 17. | 15 Maret 2025 | ACC Kajian Agama Bab IV | 17. |
| 18. | 18 Maret 2025 | ACC Seminar Hasil | 18. |
| 19. | 24 Maret 2025 | ACC Seminar Hasil lanjutan | 19. |
| 20. | 21 Mei 2025 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 20. |
| 21. | 3 Juni 2025 | ACC Sidang Skripsi | 21. |
| 22. | 13 Juni 2025 | ACC Keseluruhan | 22. |

Malang, 13 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005