IMPLEMENTASI METODE *CO-PLOT MULTIDIMENSIONAL SCALING* DALAM PEMETAAN WILAYAH BERDASARKAN KESEJAHTERAAN SOSIAL EKONOMI
(Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)

SKRIPSI

OLEH:
HANIK MUAFIYAH
NIM. 210601110098

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

IMPLEMENTASI METODE *CO-PLOT MULTIDIMENSIONAL SCALING* DALAM PEMETAAN WILAYAH BERDASARKAN KESEJAHTERAAN SOSIAL EKONOMI
(Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh:
Hanik Muafiyah
NIM. 210601110098

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

IMPLEMENTASI METODE *CO-PLOT MULTIDIMENSIONAL SCALING* DALAM PEMETAAN WILAYAH BERDASARKAN KESEJAHTERAAN SOSIAL EKONOMI
(Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)

SKRIPSI

Oleh:
Hanik Muafiyah
NIM. 210601110098

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 28 Mei 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Fachrur Rozi, M.Si.	Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
NIP. 19800527 200801 1 012	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner

IMPLEMENTASI METODE *CO-PLOT MULTIDIMENSIONAL SCALING* DALAM PEMETAAN WILAYAH BERDASARKAN KESEJAHTERAAN SOSIAL EKONOMI
(Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)

SKRIPSI

Oleh:
Hanik Muafiyah
NIM. 210601110098

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Mengikuti Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 16 Juni 2025

Ketua Penguji	: Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si.	.....
Anggota Penguji 1	: Ria Dhea Layla N.K., M.Si.	.....
Anggota Penguji 2	: Dr. Fachrur Rozi, M.Si.	.....
Anggota Penguji 3	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Hanik Muafiyah
NIM	: 210601110098
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Implementasi Metode *Co-Plot Multidimensional Scaling* dalam Pemetaan Wilayah Berdasarkan Kesejahteraan Sosial Ekonomi (Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Juni 2025

Yang membuat pernyataan,

Hanik Muafiyah

NIM. 210601110098

Dipindai dengan CamScanner

MOTO

"And Allah is best of planners"

(Q.S. Al-Anfal:30)

"Kesuksesan bukan milik orang yang pintar, tapi milik mereka yang mau berusaha"

(B.J. Habibie)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:
Kedua orang tua tercinta, Alm. Bapak Lasidi dan Ibu Surati yang senantiasa melangitkan doa-doa baik, memberikan dukungan, nasihat, dan motivasi terbaik untuk kesusesan penulis. Kakak-kakak tersayang yang telah menjadi sosok pelindung, sumber inspirasi dan selalu memberikan doa dan semangat kepada penulis. Keponakan-keponakan tercinta yang selalu membawa keceriaan dalam kehidupan penulis. Serta sahabat-sahabat penulis yang selalu memberikan bantuan dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyusun proposal skripsi yang berjudul "Implementasi Metode *Co-Plot Multidimensional Scaling* dalam Pemetaan Wilayah Berdasarkan Kesejahteraan Sosial Ekonomi" dengan studi kasus Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Penyusunan skripsi ini dimaksudkan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama proses penyusunan skripsi ini penulis mendapat banyak bimbingan nasihat dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim dan sekaligus ketua penguji yang telah memberikan arahan, nasihat, dan saran yang membangun bagi penyusunan skripsi ini.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran dalam memberikan nasihat, arahan, bimbingan, serta motivasi sejak awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang turut serta memberikan banyak masukan, arahan dan motivasi dalam proses penyusunan hingga penyelesaian skripsi ini kepada penulis.
6. Ria Dhea Layla N.K., M.Si., selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi yang telah memberikan arahan, masukan, dan saran yang sangat berarti bagi penyempurnaan skripsis ini.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah

memberikan ilmu pengetahuan, pengalaman, dan inspirasi selama masa perkuliahan.

8. Bapak tercinta, Alm. Lasidi yang paling penulis rindukan. Terima kasih atas segala pengorbanan, kasih sayang, dan kehidupan yang layak yang telah diberikan semasa hidup. Meskipun Bapak telah tiada, doa dan semangat Bapak senantiasa menyertai setiap langkah penulis.
9. Ibu tercinta, Surati yang dengan ketulusan dan cinta tanpa batas senantiasa mendoakan, menyemangati, dan menjadi sumber kekuatan dalam setiap perjalanan hidup penulis. Terima kasih atas semua pengorbanan dan kasih sayang yang tak pernah berhenti.
10. Keempat kakak penulis saudara Tihar, Didik, Edi, dan Sodiq beserta ketiga kakak ipar penulis saudari Susi, Heris, dan Nita yang selalu memberikan dukungan baik secara moril maupun materil. Terima kasih atas perhatian, semangat, dan doa yang senantiasa kalian berikan.
11. Keponakan-keponakan tercinta Resyakilla, Raditya, dan Rafael. Terima kasih atas keceriaan dan tawa hangat yang kalian hadirkan di sela-sela kelelahan penulis. Kehadiran kalian menjadi penghibur yang tulus dan penyemangat tersendiri di tengah proses penulisan skripsi ini.
12. Sahabat dekat penulis yakni Alivia, Dewi, dan Ayudya yang luar bisa. Terima kasih telah menemani penulis dan menjadi tempat berbagi cerita dalam masa perkuliahan dan proses penyusunan skripsi ini hingga selesai.
13. Seluruh mahasiswa angkatan 2021 yang menjadi rekan dan membersamai selama proses perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak sepenuhnya sempurna dan tidak mungkin terlepaskan dari kesalahan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat dibutuhkan oleh penulis guna memperoleh hasil yang lebih baik.

Malang, 16 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTO ..... **vi**
PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
DAFTAR TABEL ..... **xii**
DAFTAR GAMBAR ..... **xiii**
DAFTAR SIMBOL ..... **xiv**
DAFTAR LAMPIRAN ..... **xv**
ABSTRAK ..... **xvi**
ABSTRACT ..... **xvii**
مستخلص البحث ..... **xviii**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 8
1.3 Tujuan Penelitian 9
1.4 Manfaat Penelitian 9
1.5 Batasan Masalah 10
BAB II KAJIAN TEORI **11**
2.1 Teori Pendukung 11
2.1.1 Matriks 11
2.1.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen 12
2.1.3 *Multidimensional Scaling* (MDS) 14
2.1.4 *Co-Plot Multidimensional Scaling* 21
2.1.5 Validitas Model *Multidimensional Scaling* 25
2.1.6 Stabilitas Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS 27
2.1.7 Kesejahteraan Sosial Ekonomi 28
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits 32
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung 36
BAB III METODE PENELITIAN **38**
3.1 Jenis Penelitian 38
3.2 Jenis dan Sumber Data 38
3.3 Lokasi Penelitian 38
3.4 Teknik Analisis Data 39
3.5 Diagram Alir Penelitian 41
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **42**
4.1 Statistika Deskriptif 42
4.2 Standardisasi Data 45
4.3 Melakukan Proses *Multidimensional Scaling* (MDS) 46
4.3.1 Matriks Jarak 46

4.3.2 Menghitung Matriks *Product Scalar B* 48
4.3.3 Menentukan Titik Koordinat Objek 49
4.3.4 Menentukan Matriks *Disparities* 51
4.4 Menentukan Titik Koordinat Variabel 52
4.5 Penggabungan Konfigurasi Objek dan Variabel..... 56
4.6 Penyesuaian Visualisasi Melalui Rotasi Konfigurasi *Co-Plot* MDS 57
4.7 Evaluasi Model *Co-Plot* MDS..... 62
4.8 Mengukur Stabilitas Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS 64
4.9 Interpretasi Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS..... 66
4.10 Penerapan Metode Pemetaan Objek dalam Pandangan Islam..... 69
BAB V PENUTUP..... 71
5.1 Kesimpulan..... 71
5.2 Saran..... 72
DAFTAR PUSTAKA 73
LAMPIRAN..... 76
RIWAYAT HIDUP 87

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kriteria Nilai *Stress* 26
Tabel 3.1 Variabel Penelitian..... 39
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Data 43
Tabel 4.2 Titik Koordinat Objek 50
Tabel 4.3 Titik Koordinat Variabel..... 55
Tabel 4.4 Titik Koordinat Objek Setelah Rotasi 59
Tabel 4.5 Titik Koordinat Variabel Setelah Rotasi..... 61

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Umum Metode *Co-Plot* MDS 22
Gambar 2.2 Ilustrasi Ruang Dimensi Metode *Co-Plot* MDS 24
Gambar 3.1 *Flowchart* Penelitian 41
Gambar 4.1 Peta Objek MDS 51
Gambar 4.2 Plot Vektor Variabel 56
Gambar 4.3 Visualisasi *Co-Plot* MDS 57
Gambar 4.4 Peta Objek MDS Setelah Rotasi 60
Gambar 4.5 Plot Vektor Variabel Setelah Rotasi 61
Gambar 4.6 Peta *Co-Plot* MDS Setelah Rotasi 62
Gambar 4.7 Visualisasi Stabilitas Objek dengan *Bootstrap* 65

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{A}$	: Matriks Simetris
$\boldsymbol{A^T}$	: Matriks Transpose
diag(**A**)	: Matriks Diagonal
$\boldsymbol{X}$	: Matriks data x_{ij}
$\boldsymbol{V}$	: Vektor Eigen
$\boldsymbol{\Lambda}$	: Nilai Eigen
n	: Banyaknya objek
m	: Banyaknya variabel
z_{ij}	: Nilai *z-score* dari data ke-i pada variabel ke-j
x_{ij}	: Nilai objek ke-i pada variabel ke-j
$\bar{x}_j$	: Nilai rata-rata pada variabel ke-j
s_j	: Standar deviasi pada variabel ke-j
d_{ip}	: Jarak *euclidean* antara objek ke-i dan objek ke-p
x_{ij}	: Data objek ke-i pada variabel ke-j
$\boldsymbol{D}$	: Matriks jarak *euclidean*
$\boldsymbol{B}$	: Matriks *product scalar*
$\boldsymbol{D^2}$	: Matriks jarak *euclidean* yang dikuadratkan
$\boldsymbol{J}$	: Matriks *centering*
$\boldsymbol{I}$	: Matriks identitas,
$\mathbf{1}$	: Vektor satu (vektor kolom $n \times 1$ dengan semua elemen bernilai 1)
$\mathbf{11^T}$	: Matriks yang seluruh elemennya bernilai 1
r_{jk}	: Hasil korelasi antara variabel ke-j dan dimensi ke-k
Y_{ik}	: Koordinat objek ke-i dalam dimensi ke-k dari proses MDS
Y_k	: Rata-rata dari koordinat Y_{ik} untuk dimensi ke-k,
z_{ij}	: Hasil standardisasi data objek ke-i untuk variabel ke-j,
$\bar{z}_j$	: Rata-rata nilai z_{ij} untuk variabel ke-j, dan
$\hat{d}_{ip}$	: Jarak *disparities* antara objek ke-i dan objek ke-p
$\bar{d}$	: Jarak rata-rata dari jarak *euclidean*
$\boldsymbol{Y}^*$	: Matriks Titik Koordinat Objek setelah Rotasi
r^*	: Matriks Titik Koordinat Variabel setelah Rotasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kesejahteraan Sosial Ekonomi Provinsi DIY Tahun 2024 76
Lampiran 2. Hasil Standardisasi Data 77
Lampiran 3. Jarak *Euclidean* antar Objek 78
Lampiran 4. Matriks *Disparities* antar Objek 79
Lampiran 5. *Script* Metode *Co-Plot* MDS 80

ABSTRAK

Muafiyah, Hanik 2025. **Implementasi Metode *Co-Plot Multidimensional Scaling* dalam Pemetaan Wilayah Berdasarkan Kesejahteraan Sosial Ekonomi (Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta).** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Kata Kunci: *Co-Plot*; *Multidimensional Scaling*; Pemetaan Wilayah; Kesejahteraan Sosial Ekonomi.

Kesejahteraan sosial ekonomi merupakan indikator penting dalam menilai kualitas hidup masyarakat dan mendukung perumusan kebijakan berbasis data. Penelitian ini bertujuan untuk memetakan wilayah berdasarkan indikator kesejahteraan sosial ekonomi menggunakan metode *Co-Plot Multidimensional Scaling* (MDS) dengan studi kasus Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. Metode *Co-Plot* MDS merupakan metode yang menggabungkan objek dan variabel dalam satu peta visual, sehingga memberikan gambaran menyeluruh terhadap hubungan antar wilayah dan faktor-faktor kesejahteraan sosial ekonomi yang memengaruhinya. Data yang digunakan merupakan data sekunder dari BPS tahun 2024, meliputi jumlah penduduk, angka harapan hidup, harapan lama sekolah, PDRB, pengeluaran per kapita, tingkat pengangguran terbuka, dan persentase penduduk miskin. Analisis mencakup standardisasi data, menentukan *similarity* berdasarkan matriks jarak menggunakan jarak *Euclidean*, pembentukan matriks *product scalar B*, dekomposisi nilai eigen, penghitungan koordinat objek, perhitungan koordinat variabel menggunakan koefisien korelasi *pearson*, serta menggabungkan konfigurasi objek dengan konfigurasi variabel dalam satu ruang visual. Model dievaluasi menggunakan nilai *stress* dan R^2 serta analisis stabilitas. Hasil pemetaan menunjukkan bahwa Kota Yogyakarta unggul dalam kesehatan dan ekonomi, Sleman unggul pada pendidikan dan konsumsi rumah tangga namun lemah di ketenagakerjaan, Bantul memiliki kepadatan tinggi, sedangkan Kulon Progo dan Gunungkidul menghadapi tantangan kemiskinan. Nilai *stress* sebesar 12,02%. (kategori cukup baik) dan nilai R^2 sebesar 98,55%. menegaskan validitas model yang digunakan. Dengan demikian, metode *Co-Plot* MDS terbukti efektif dalam mengidentifikasi pola dan disparitas kesejahteraan sosial ekonomi antar wilayah, serta mendukung kebijakan pembangunan daerah.

ABSTRACT

Muafiyah, Hanik. 2025. **Implementation of the Co-Plot Multidimensional Scaling Method in Regional Mapping Based on Socio-Economic Welfare (Case Study: Special Region of Yogyakarta Province).** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Fachrur Rozi, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Keywords: Co-Plot; Multidimensional Scaling; Regional Mapping; Socio-Economic Welfare.

Socioeconomic welfare is a key indicator for assessing quality of life and supporting data-driven policymaking. This study maps the Special Region of Yogyakarta using seven welfare indicators through the Co-Plot Multidimensional Scaling (MDS) method, which integrates objects and variables into a single visualization. The data, sourced from Statistics Indonesia (BPS) in 2024, includes population size, life expectancy, expected years of schooling, GRDP, per capita expenditure, open unemployment rate, and poverty rate. The analysis involves data standardization, Euclidean distance calculation, scalar product matrix, eigenvalue decomposition, and Co-Plot visualization. The results reveal varied regional characteristics: Yogyakarta City excels in health and economy, Sleman in education and consumption but is weak in employment, Bantul has high population density, and Kulon Progo and Gunungkidul face poverty challenges. A stress value of 12.02% and R^2 of 98.55% confirm the model's validity. This method is effective in identifying welfare patterns and disparities, supporting regional development planning and policy decisions.

مستخلص البحث

معافية، هنيك. ٢٠٢٥. تطبيق أسلوب التحليل المتعدد الأبعاد المشترك في رسم خرائط المناطق بناءً على مؤشرات الرفاه الاجتماعي والاقتصادي (دراسة حالة: إقليم يوغياكرتا الخاص).البحث ا العلمي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية بمالانغ. المشرف: (١) الدكتور فخر الرزي، الماجستيرة في العلوم، (٢) أري كوسوماستوتياالماجستيرة في التربية الماجستيرة في العلوم

الكلمات : الأساسية *Co-Plot*, القياس الاقتصادية متعدد الأبعاد, تخطيط المناطق، الاجتماعية و,الرفاهية

الرفاه الاجتماعي والاقتصادي مؤشر مهم في تقييم جودة حياة المجتمع ودعم صياغة السياسات القائمة على البيانات. هدف هذا البحث إلى رسم خريطة المنطقة الخاصة في مقاطعة يوجياكارتا كدراسة حالة لرسم الخرائط الإقليمية بناءً على مؤشرات الرفاه الاجتماعي والاقتصادي باستخدام طريقة المخطط المشترك متعدد الأبعاد (*MDS*) الذي يجمع بين العناصر والمتغيرات في خريطة مرئية واحدة، وبالتالي تقديم صورة شاملة للعلاقة بين المناطق وعوامل الرفاه الاجتماعي والاقتصادي التي تؤثر عليها. والبيانات المستخدمة هي بيانات ثانوية من مكتب الإحصاء الفلسطيني في عام 2024 والتي تشمل عدد السكان، ومتوسط العمر المتوقع، ومتوسط العمر المتوقع، ومتوسط العمر المتوقع في المدارس، والناتج المحلي الإجمالي، ونصيب الفرد من الإنفاق، ومعدل البطالة المفتوحة، ونسبة الفقراء. شملت مراحل التحليل توحيد البيانات، وحساب المسافة الإقليدية بين العناصر، وتكوين مصفوفة الضرب القياسي ب، وتحلل القيمة الأصلية، وحساب إحداثيات العناصر والمتغيرات، والتصور المشترك من خلال طريقة *MDS Co-Plot*. ثم تم تقييم النموذج باستخدام قيم الإجهاد و R^2 وتحليل الثبات. ظهرت نتائج رسم الخرائط خصائص رفاهية متنوعة: تتفوق مدينة يوجياكارتا في الصحة والاقتصاد، وسليمان في التعليم واستهلاك الأسر المعيشية ولكنها ضعيفة في التوظيف، وبانتول ذات كثافة عالية، بينما تواجه كولون بروغو وغونونغكيدول تحديات الفقر. قيمة الضغط 12.02%. (فئة جيدة بما فيه الكفاية) وقيمة .98.55% R^2 أكدت صحة النموذج المستخدم. وبالتالي، أثبتت طريقة *MDS Co-Plot* فعاليتها في تحديد الأنماط والتفاوتات في الرفاه الاجتماعي والاقتصادي بين المناطق، وهي مفيدة لتخطيط التنمية الإقليمية والسياسات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemetaan objek merupakan salah satu contoh penerapan ilmu matematika dalam kehidupan nyata yang digunakan untuk menyajikan informasi secara visual dalam bentuk peta atau grafik (Tumini & Minatania, 2023). Pemetaan objek bertujuan untuk memvisualisasikan pola, hubungan, dan distribusi dari fenomena tertentu dalam suatu wilayah atau ruang. Salah satu manfaat utama dari pemetaan objek adalah menyajikan informasi secara jelas dan mudah dipahami, sehingga dapat memberikan kemungkinan untuk pengambilan keputusan dan perencanaan yang lebih efektif. Pemetaan yang akurat dapat membantu perencana untuk membuat keputusan lebih tepat sasaran, berbasis pada informasi yang jelas dan mudah dipahami oleh berbagai kalangan pengguna. Pemetaan objek telah diterapkan dalam berbagai bidang, salah satunya dalam bidang sosial seperti kesejahteraan yang dapat membantu untuk menunjukkan wilayah yang mengalami ketertinggalan serta wilayah yang telah memiliki kesejahteraan yang baik.

Konsep pemetaan objek memiliki makna yang mendalam dalam berbagai aspek kehidupan, termasuk dalam ajaran agama Islam. Dalam agama Islam, manusia memiliki peta tingkatan yang berbeda berdasarkan tingkatan dalam ibadahnya. Pada hakikatnya, manusia diciptakan dengan tujuan untuk beribadah kepada Allah SWT., sebagaimana yang telah disebutkan dalam Al-Quran surah Az-Dzariat ayat 56.

وَمَا خَلَقْتُ الْجِنَّ وَالْاِنْسَ اِلَّا لِيَعْبُدُوْنِ ﴿٥٦﴾

"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka beribadah kepada-Ku."

Ayat tersebut menunjukkan bahwa penciptaan manusia bukanlah sekedar untuk menjalani kehidupan duniawi, melainkan memiliki tujuan utama untuk beribadah kepada Allah SWT. Ibadah tidak hanya terbatas pada praktik keagamaan, tetapi mencakup segala perbuatan yang dilakukan dengan niat yang tulus dan sesuai dengan ajaran-Nya. Setiap aktivitas yang sesuai dengan syariat dan dilakukan dengan niat ibadah dapat menjadi bentuk penghambaan kepada-Nya. Dalam Islam, manusia dapat dipetakan berdasarkan tingkat kualitas ibadahnya. Pemetaan ini dapat membantu seseorang memahami di mana posisinya dalam perjalanan spiritual dan bagaimana cara meningkatkannya.

Salah satu metode analisis yang dapat diterapkan dalam melakukan pemetaan objek ialah *Multidimensional Scaling* (MDS). Metode MDS menjadi salah satu teknik analisis *multivariate* yang berkaitan dalam pembuatan peta dua atau tiga dimensi, di mana peta tersebut dapat diterapkan untuk menunjukkan hubungan objek tertentu dengan objek lainnya berdasarkan dengan tingkat kemiripannya (Islami & Handayani, 2019). Menurut Kapusuzoglu & Ulusoy (2016) dalam Ramadhani dkk. (2022) menjelaskan bahwa dalam peta MDS, untuk melambangkan kemiripan kedua objek dengan menggunakan jarak antar titik jika semakin dekat posisi titik satu sama lain maka semakin mirip kedua objek tersebut dalam data asli, dan sebaliknya. Dalam konteks kesejahteraan, metode MDS dapat dimanfaatkan untuk memetakan wilayah berdasarkan indikator-indikator tertentu seperti tingkat pendapatan, pendidikan, atau kesehatan. Metode MDS mengalami

berbagai pengembangan, salah satu contoh pengembangan dari metode MDS ialah metode *Co-Plot* MDS.

Metode *Co-Plot* MDS menjadi sebuah metode pengembangan dari metode MDS yang memperluas kemampuannya dengan memasukkan informasi tentang variabel-variabel dalam analisis. Metode *Co-Plot* MDS ialah metode adaptasi dari MDS yang dirancang untuk mengatasi beberapa keterbatasan utama pada metode MDS. Metode MDS memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memvisualisasikan observasi dan variabel secara bersamaan (Poosapati dkk., 2024). Kayhan & Gunay (2013) menjelaskan bahwa metode *Co-Plot* MDS memiliki keunggulan daripada metode MDS yaitu, memungkinkan penelitian simultan terhadap hubungan antar objek (seperti wilayah) dan variabel dengan satu peta. Teknik ini memungkinkan pemetaan objek dan variabel secara bersamaan dalam satu ruang visual, memberikan gambaran yang lebih mendalam mengenai hubungan antara objek dan variabel dalam peta tersebut.

Beberapa penelitian telah dilakukan dan menunjukkan manfaat signifikan dari penggunakan metode *Co-Plot* MDS dalam melakukan pemetaan. Penelitian yang telah diteliti oleh Kayhan & Gunay (2013) tentang penerapan *Co-Plot* MDS yaitu pada data Survei Demografi dan Kesehatan Turki pada tahun 2008 dengan mengimplementasikan metode *Co-Plot* MDS yang menunjukkan beberapa hasil signifikan terkait distribusi dan hubungan variabel demografis di berbagai wilayah di Turki. Data menunjukkan bahwa wilayah-wilayah di Turki memiliki karakteristik demografis yang berbeda. Hubungan antar variabel demografis dianalisis dengan lebih rinci melalui peta *Co-Plot* MDS. Nilai *stress* yang diperoleh menunjukkan representasi data yang cukup baik.

Penelitian sebelumnya oleh Cangur dkk. (2015) memperkenalkan metode *Co-Plot* MDS sebagai alat analisis grafis multivariat yang jarang digunakan. Penelitian tersebut menganalisis data dari basis data organisasi kesehatan dunia yang mencakup indeks pembangunan manusia di wilayah Eropa, dengan mempertimbangkan variabel seperti prevalensi merokok di kalangan remaja dan orang dewasa, proporsi kematian akibat penyakit terkait merokok, serta peraturan domestik terkait produk tembakau. Penelitian ini menghasilkan adanya korelasi negatif yang signifikan antara prevalensi merokok dan pembatasan iklan produk tembakau. Selain itu, di negara-negara seperti Norwegia, Prancis, dan Finlandia, pembatasan hukum terhadap iklan tembakau berkontribusi pada penurunan prevalensi merokok. Penelitian tersebut telah membuktikan bahwa metode *Co-Plot* MDS sangat efektif dalam menginterpretasikan hubungan kompleks antara variabel kesehatan dan kebijakan di berbagai negara, memberikan wawasan yang lebih dalam tentang dampak kebijakan pengendalian tembakau di wilayah Eropa.

Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa metode *Co-Plot* MDS tidak hanya efektif dalam memvisualisasikan hubungan kompleks antara objek dan variabel, tetapi juga memberikan wawasan yang lebih dalam untuk mendukung pengambilan keputusan berbasis data. Namun demikian, hingga saat ini, penerapan metode *Co-Plot* MDS masih terbatas pada studi-studi yang dilakukan di luar negeri. Berdasarkan penelusuran literatur yang telah dilakukan oleh peneliti, belum ditemukan penelitian yang mengimplementasikan metode ini dalam wilayah Indonesia. Hal ini menunjukkan bahwa metode *Co-Plot* MDS masih relatif baru dan belum banyak dieksplorasi oleh peneliti di Indonesia, terutama dalam bidang pemetaan kesejahteraan sosial ekonomi. Dalam konteks kesejahteraan, metode ini

memiliki potensi besar untuk memetakan hubungan antara wilayah dan indikator kesejahteraan, seperti tingkat pendidikan, pendapatan, kesehatan, dan akses terhadap layanan dasar. Dengan memanfaatkan metode *Co-Plot* MDS, analisis yang dilakukan tidak hanya dapat mengidentifikasi disparitas antarwilayah, tetapi juga menunjukkan variabel utama yang memengaruhi kesejahteraan di wilayah-wilayah tertentu.

Kesejahteraan masyarakat pada hakikatnya merupakan salah satu tujuan utama negara Indonesia. Sebagaimana ditegaskan dalam pembukaan UUD 1945 alinea empat, yang menyatakan bahwa negara Indonesia bertujuan "melindungi segenap bangsa Indonesia dan seluruh tumpah darah Indonesia, memajukan kesejahteraan umum, mencerdaskan kehidupan bangsa, dan ikut melaksanakan ketertiban dunia". Pernyataan ini menegaskan pentingnya kesejahteraan sebagai cita-cita nasional yang harus diwujudkan melalui kebijakan dan tindakan nyata. Kesejahteraan masyarakat merupakan kondisi di mana masyarakat mampu memenuhi kebutuhan hidupnya secara material dan spiritual, sehingga tercipta kehidupan yang harmonis dan sejahtera. Dengan adanya pemetaan wilayah berdasarkan kesejahteraan, diharapkan dapat membantu memberikan gambaran yang jelas mengenai distribusi kesejahteraan antarwilayah, termasuk wilayah yang tertinggal serta wilayah yang telah mencapai kondisi kesejahteraan yang baik.

Kesejahteraan masyarakat menjadi aspek penting dalam menentukan kemajuan suatu wilayah, salah satunya di Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY). DIY yang memiliki status istimewa dan dikenal sebagai pusat kebudayaan dan pendidikan di Indonesia menjadi studi kasus dalam penelitian ini. DIY salah satu wilayah yang terkenal dengan kekayaan budaya dan pariwisatanya. Pada tahun

2023, tercatat sebaanyak 274 objek wisata tersebar di seluruh kabupaten/kota di DIY, yang meliputi wisata alam, budaya, buatan, dan desa/kampung wisata (Dinas Pariwisata Daerah Istimewa Yogyakarta, 2024). Meskipun dikenal dengan kekayaan budaya dan pariwisatanya, DIY masih menghadapi tantangan besar dalam pemerataan kesejahteraan sosial ekonomi antar wilayah. Menurut Badan Pusat Statistik (2024) DIY menjadi provinsi dengan persentase penduduk miskin tertinggi di pulau Jawa dengan angka yang mencapai 10,40% dari total penduduk di Indonesia. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun DIY memiliki potensi yang besar, masih terdapat kelompok masyarakat yang hidup dalam kondisi kurang sejahtera, terutama di daerah pedesaan yang sering kali menghadapi masalah infrastruktur dan akses terhadap layanan dasar.

Tantangan dalam mencapai kesejahteraan sosial ekonomi yang merata di Provinsi DIY memerlukan perhatian serius dari pemerintah dan pemangku kepentingan. Kesenjangan antara daerah perkotaan dan pedesaan dalam hal akses pendidikan, kesehatan, dan peluang kerja menjadi isu yang perlu diatasi. Dalam hal ini, penting untuk memahami karakteristik kesejahteraan di setiap wilayah DIY. Pendekatan yang akan diterapkan dalam penelitian ini adalah pemetaan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi menggunakan metode *Co-Plot* MDS.

Metode *Co-Plot MDS* memungkinkan analisis hubungan antara wilayah dan variabel-variabel yang memengaruhi kesejahteraan sosial ekonomi secara simultan dalam satu peta visual. Hal ini memberikan kemudahan untuk mengidentifikasi pola, disparitas antar wilayah, serta variabel utama yang memengaruhi kondisi kesejahteraan suatu wilayah. Dengan menggunakan metode ini, pola hubungan

antar wilayah di DIY dapat divisualisasikan secara informatif, sehingga mendukung proses pengambilan kebijakan berbasis data.

Penelitian mengenai kesejahteraan telah dilakukan, salah satunya oleh Muliyawati & Sasana (2019) di kabupaten/kota Provinsi DIY. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis faktor-faktor yang memengaruhi kesejahteraan masyarakat berdasarkan Indeks Pembangunan Manusia (IPM). Metode yang digunakan bersifat kuantitatif dengan analisis regresi data panel menggunakan model efek tetap (*Fixed Effect Model*/FEM) dan pendekatan *Generalized Least Square* (GLS). Hasil penelitian menunjukkan bahwa variabel Disparitas Pendapatan dan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT) tidak berpengaruh signifikan terhadap kesejahteraan masyarakat. Namun, variabel pengeluaran non-makanan serta pertumbuhan ekonomi memiliki dampak yang signifikan terhadap kesejahteraan masyarakat di kabupaten/kota DIY pada periode 2015-2020. Temuan ini mengindikasikan bahwa pengeluaran dan pertumbuhan ekonomi merupakan faktor krusial dalam meningkatkan kesejahteraan masyarakat.

Penelitian lain mengenai kesejahteraan dengan menggunakan metode MDS telah dilakukan oleh Salsabila & Wachidah (2022). Penelitian tersebut memetakan Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Barat berdasarkan delapan indikator kesejahteraan rakyat, seperti jumlah penduduk miskin, pengeluaran per kapita untuk makanan, dan indikator pendidikan serta kesehatan. Hasil pemetaan menghasilkan empat kelompok wilayah dengan karakteristik kesejahteraan yang berbeda-beda. Validitas model yang tinggi ditunjukkan melalui nilai *stress* sebesar 6,49% (kategori sangat baik) dan R^2 sebesar 99,21%, yang menandakan bahwa metode MDS efektif dalam mengungkap pola kemiripan antar wilayah.

Meskipun penelitian ini hanya melibatkan lima wilayah di Provinsi DIY sebagai objek analisis, hal initidak menjadi kendala. Metode *Co-Plot* MDS yang digunakan dalam penelitian ini bersifat eksploratif dan bertujuan untuk memetakan serta memvisualisasikan pola hubungan antar wilayah berdasarkan variabel-variabel kesejahteraan. Penelitian serupa juga telah dilakukan oleh Walundungo dkk. (2014) yang menggunakan metode MDS pada lima rumah makan di Manado. Hasilnya mampu menunjukkan kemiripan dan perbedaan antara rumah makan tersebut dengan jelas melalui peta visual. Hal ini menunjukkan bahwa metode MDS, termasuk *Co-Plot* MDS, tetap bisa digunakan dengan jumlah objek yang sedikit selama datanya representatif dan tujuan analisisnya adalah untuk eksplorasi.

Berdasarkan penjabaran sebelumnya, maka penelitian ini akan mengimplementasikan metode *Co-Plot* MDS berdasarkan studi kasus kesejahteraan sosial ekonomi di Provinsi DIY. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode *Co-Plot* MDS dalam pemetaan wilayah berdasarkan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi di Provinsi DIY. Dengan melakukan pemetaan wilayah berdasarkan kesejahteraan sosial ekonomi diharapkan penelitian ini mampu memberikan informasi tentang karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi di setiap daerah di Provinsi DIY.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana hasil implementasi metode *Co-Plot* MDS dalam pemetaan wilayah di Provinsi DIY berdasarkan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi?

2. Bagaimana tingkat validitas implementasi metode *Co-Plot* MDS dalam pemetaan wilayah di Provinsi DIY berdasarkan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, tujuan penelitian ini adalah:

1. Menganalisis hasil implementasi metode *Co-Plot* MDS dalam pemetaan wilayah di Provinsi DIY berdasarkan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi.
2. Menganalisis tingkat validitas implementasi metode *Co-Plot* MDS dalam pemetaan wilayah di Provinsi DIY berdasarkan kesejahteraan sosial ekonomi.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Manfaat bagi Peneliti

   Penelitian ini memberikan kesempatan bagi penulis dalam mendalami dan memperluas pengetahuan dan wawasan tentang pemetaan wilayah berdasarkan kesejahteraan sosial ekonomi menggunakan metode statistik seperti metode *Co-Plot* MDS.
2. Manfaat bagi Pembaca

   Pembaca juga dapat memperoleh wawasan tentang metode pemetaan

karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi dan bagaimana menerapkannya dalam konteks nyata, yang dapat bermanfaat dalam penelitian atau pekerjaan mereka di bidang terkait.

3. Manfaat bagi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

   Hasil dari penelitian ini dapat meningkatkan reputasi kampus menjadi lembaga yang mendukung pengembangan pengetahuan dan solusi untuk masalah sosial di masyarakat.

4. Manfaat bagi Intansi

   Hasil dari penelitian ini dapat menjadi peran penting dalam meningkatkan efektivitas upaya peningkatan kesejahteraan sosial ekonomi di wilayah Provinsi DIY, yang dapat meningkatkan citra dan reputasi universitas dalam mendukung solusi untuk masalah sosial yang kompleks.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan penjabaran latar belakang, maka penelitian diberikan batasan agar bahasan dalam permasalahan dalam penelitian tidak semakin meluas. Penelitian ini terbatas pada:

1. Menggunakan pengukuran jarak *euclidean*.
2. Menggunakan jenis analisis MDS metrik. MDS metrik merupakan salah satu metode dalam MDS yang diterapkan apabila data dalam penelitian memiliki skala interval atau rasio.
3. Penelitian ini hanya fokus pada pada karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi di wilayah Provinsi DIY pada tahun 2024.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Matriks

Matriks merupakan himpunan beberapa bilangan yang tersusun dalam bentuk baris dan kolom yang membentuk jajaran persegi panjang atau bujur sangkar yang dinyatakan di antara dua tanda kurung, yaitu [] atau () (Mursyidah, 2017). Berikut adalah beberapa konsep matriks:

1. Matriks Simetrik

   Matriks simetrik ialah sebuah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. Sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ memiliki ukuran $n \times n$ dikatakan simetris apabila $\boldsymbol{A^T = A}$, dengan $\boldsymbol{A^T}$ adalah matriks transpose dari matriks $\boldsymbol{A}$. Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

   Karena $\boldsymbol{A^T = A}$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks simetris. Jelasnya, jika α_{ij} merupakan elemen ke (i, j) dari matriks $\boldsymbol{A}$, maka untuk matriks simetrik $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, untuk semua i dan j.

2. Matriks Diagonal

   Suatu matriks yang memiliki ukuran $n \times n$ disebutkan sebagai matriks diagonal jika elemen-elemen di luar diagonal utamanya memiliki nilai 0.

Matriks diagonal selalu bersifat simetrik. Dalam beberapa kasus tertentu, notasi diag(**A**) digunakan untuk menunjukkan sebuah matriks yang mempertahankan elemen-elemen pada diagonal utama dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan elemen-elemen di luar diagonal utamanya diubah menjadi 0. Sebagai ilustrasi:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maka, diag(**A**) adalah:

$$diag(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal memiliki bentuk khusus lainnya, yaitu matriks identitas. Matriks identitas merupakan bentuk khusus dari matriks diagonal, di mana seluruh elemen pada diagonal utamanya bernilai 1, sementara elemen lainnya tetap bernilai 0. Matriks ini sering disebut juga sebagai matriks satuan karena berfungsi seperti angka satu dalam operasi aljabar matriks. Pada umumnya, matriks identitas dinotasikan $\boldsymbol{I_n}$ disertai dengan ordonya. Matriks identitas untuk ukuran $n \times n$ dapat dituliskan menjadi:

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Sebuah matriks yang memiliki ukuran $n \times n$ terdapat nilai dan vektor yang dikenal sebagai nilai eigen (*eigenvalue*) dan vektor eigen (*eigenvalue*). Jika $\boldsymbol{B}$

merupakan matriks yang berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol v pada $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{B}$ jika memenuhi persamaan (Pratiwi dkk., 2017):

$$\boldsymbol{B}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

dengan λ adalah skalar yang disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari matriks $\boldsymbol{B}$, dan $\boldsymbol{v}$ disebut sebagai vektor eigen dari $\boldsymbol{B}$ yang sesuai dengan λ. Untuk mengetahui nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$ yang memiliki ukuran $n \times n$, dapat dituliskan $\boldsymbol{Bv} = \lambda$ ke dalam bentuk:

$$\boldsymbol{B}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{I}\boldsymbol{v}$$

dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas $n \times n$ atau secara ekivalen dapat ditulis sebagai berikut (Pratiwi dkk., 2017):

$$(\lambda\mathbf{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{v} = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) menetapkan bahwa setidaknya satu solusi tak nol harus ada agar λ dapat menjadi nilai eigen. Namun, Persamaan (2.1) menetapkan bahwa solusi tak nol jika dan hanya jika:

$$det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.2}$$

Nilai eigen dapat muncul lebih dari satu kali, yang dikenal dengan nilai eigen berulang. Vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen yang berbeda akan bersifat ortogonal setelah dinormalkan dalam kasus di mana $\boldsymbol{B}$ adalah simetris. Dengan demikian, jika telah memperoleh nilai eigen yang yang sudah dinormalkan dan ortogonal, misalkan $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, …, $\boldsymbol{v_n}$dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Bv_1} &= \lambda_1\boldsymbol{v_1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \boldsymbol{Bv_n} &= \lambda_n\boldsymbol{v_n} \end{aligned}$$

Ketika ditulis ke dalam bentuk matriks menjadi:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v_1}|\boldsymbol{v_2}|\dots|\boldsymbol{v_n}) = (\boldsymbol{v_1}|\boldsymbol{v_2}|\dots|\boldsymbol{v_n})\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Matriks hasil kali dalam $\boldsymbol{B}$ dapat dinyatakan menjadi:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$$

di mana $\boldsymbol{Y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ adalah matriks koordinat yang memiliki ukuran $(n \times p)$. *Rank* dari matriks $\boldsymbol{B}$, $rank(\boldsymbol{B})$ adalah:

$$rank(\boldsymbol{B}) = rank(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}) = rank(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{p}$$

Sekarang $\boldsymbol{B}$ adalah matriks yang simetrik, semi definit positif dan berpangkat (*rank*) p, sehingga memiliki p nilai eigen non-negatif dan $n - p$ nilai eigen sama dengan 0. Matriks $\boldsymbol{B}$ kemudian ditulis dalam bentuk dekomposisi spektral:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^T$$

dengan $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ yaitu matriks diagonal dari nilai eigen $\{\lambda_i\}$ matriks **B** dan dan $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{\gamma_1}, \dots, \boldsymbol{\gamma_n}]$ adalah matriks vektor eigen yang dinormalkan. Berdasarkan dekomposisi ini, koordinat matriks $\boldsymbol{Y}$ berisi titik konfigurasi dalam ruang R^p yang diberikan oleh:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

2.1.3 *Multidimensional Scaling* (MDS)

MDS adalah suatu metode analisis *multivarite* yang digunakan untuk memvisualisasikan hubungan antar objek dalam ruang dimensi rendah. Sebagaimana dijelaskan oleh Borg & Groenen (2005), metode ini membantu mereduksi dimensi data sehingga visualisasi hubungan antar objek menjadi lebih sederhana dan mudah diinterpretasikan. Proses ini dilakukan dengan mengatur objek-objek dalam ruang berdimensi rendah, seperti dua dimensi atau tiga

dimensi berdasarkan jarak atau ketidaksamaan antara objek-objek tersebut. Menurut Kapusuzoglu & Ulusoy (2016) dalam Ramadhani dkk. (2022) menjelaskan bahwa dalam peta MDS, untuk melambangkan kemiripan kedua objek dengan menggunakan jarak antar titik, jika semakin dekat posisi titik satu sama lain maka semakin mirip kedua objek tersebut dalam data asli, dan sebaliknya. Analisis MDS menjadi salah satu metode dalam analisis peubah ganda yang diterapkan untuk melakukan pemetaan atau merepresentasikan hubungan sekelompok objek dalam ruang visual yang mudah dipahami.

Dari definisi tersebut, MDS memiliki beberapa kegunaan. Pertama, untuk menyajikan objek-objek secara visual berdasarkan tingkat kemiripan yang dimiliki diantara mereka. Kedua, MDS juga dapat digunakan untuk pengelompokan objek-objek berdasarkan atribut-atribut dengan tingkat kemiripan objek-objek tersebut (Masuku dkk., 2014). Selain itu, MDS juga memiliki manfaat untuk menunjukkan dalam mengidentifikasi peubah yang tidak diketahui atau faktor-faktor yang mempengaruhi munculnya kemiripan atau ketidakmiripan antar objek. Menurut Masuku dkk. (2014) analisis data MDS digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai yang menggambarkan tingkat kemiripan atau ketidakmiripan antar objek yang sering disebut *proximity*.

Analisis data dengan menggunakan metode MDS melibatkan pengukuran antar objek dalam bentuk kemiripan atau ketidakmiripan yang disebut *proximity*. Skala pengukuran data yang digunakan dapat diklasifikasikan menjadi 4 jenis, yaitu skala nominal, ordinal, interval, dan rasio. Metode MDS dapat terbagi menjadi dua macam bergantung pada skala data yang digunakan, yaitu MDS metrik dan MDS non-metrik. MDS metrik diterapkan apabila data yang

digunakan berskala interval atau rasio, sedangkan MDS non-metrik digunakan apabila data yang digunakan memiliki skala nominal atau ordinal.

MDS metrik (*classical scaling)* menggunakan data jarak yang bersifat interval atau rasio untuk menemukan himpunan titik dalam ruang dimensi k, di mana masing-masing titik mewakili satu objek. MDS bertujuan untuk menemukan koordinat dari titik-titik dalam ruang multidimensi menggunakan ukuran jarak *euclidean* (Sutadji dkk., 2022). Sedangkan, MDS non-metrik adalah metode analisis data yang digunakan untuk memvisualisasikan hubungan atau kesamaan antar objek dalam ruang dimensi rendah yang memanfaatkan data nominal dan ordinal atau data yang hanya memiliki informasi tentang urutan (*rank*) kesamaan antar objek, tanpa memperhatikan ukuran jarak absolut.

Tahapan dalam melakukan MDS metrik dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasikan Data

   Tahapan awal adalah mengidentifikasikan data yang digunakan dalam analisis MDS yang disajikan dalam bentuk matriks, dengan n baris (objek) dan m kolom (variabel). Data tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

   dengan,

   $\boldsymbol{X}$: Matriks data x_{ij} $\big((i = 1, 2, 3, \dots, n), (j = 1, 2, 3, \dots, m)\big)$,

   n : Banyaknya objek, dan

   m : Banyaknya variabel.

2. Standardisasi Data

Melakukan standardisasi data dengan tujuan untuk menyetarakan satuan dari setiap variabel yang digunakan. Standardisasi data pada metode *Co-Plot* MDS merupakan langkah penting dalam analisis *multivariate* untuk menghindari bias yang disebabkan oleh perbedaan skala antar variabel. Pada dasarnya, *Co-Plot* MDS digunakan untuk memvisualisasikan hubungan antara objek dan variabel dalam dimensi yang lebih rendah, dengan mempertahankan struktur jarak antar objek. Standardisai memastikan bahwa perbedaan antar objek lebih tepat tercermin dalam visualisasi akhir *Co-plot* MDS. Sebelum melakukan analisis selanjutnya, data akan distandardisai agar setiap variabel memiliki kontribusi yang setara dalam perhitungan jarak. Hal ini dilakukan dengan mengubah data menjadi bentuk *z-score* sehingga setiap variabel memiliki rata-rata 0 dan standar deviasi 1. Proses standardisasi ini penting karena variabel dengan skala yang lebih besar dapat mendominasi hasil analisis jika tidak distandardisasi terlebih dahulu. Standardisasi data dilakukan terhadap variabel yang relevan ke dalam bentuk *z-score* (Cangur dkk., 2015).

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j} \tag{2.5}$$

dengan,

z_{ij} : Nilai *z-score* dari data ke-i pada variabel ke-j,

x_{ij} : Nilai objek ke-i pada variabel ke-j,

$\bar{x}_j$: Nilai rata-rata pada variabel ke-j, dan

s_j : Standar deviasi pada variabel ke-j.

3. Menghitung Jarak Antar Objek dengan Jarak *Euclidean*

Menghitung jarak antar objek untuk memperoleh nilai kemiripan yang digunakan dalam metode MDS metrik. Beberapa metode yang berkaitan dengan kemiripan (*similarity*), sering kali menggunakan jarak sebagai ukuran kemiripan. Ukuran kemiripan ditentukan berdasarkan jarak (*distance*) antar titik. Salah satu cara yang paling umum digunakan untuk menghitung jarak tersebut adalah *euclidean distance* atau jarak *euclidean*, yang diukur sebagai jarak antara dua titik dalam ruang *euclidean*. Konsep ruang *euclidean* diperkenalkan oleh Euclid, seorang matematikawan dari Yunani sekitar tahun 300 SM untuk mempelajari hubungan sudut dan jarak. Euclides ini berkaitan dengan teori phytagoras.

Untuk menghitung nilai kedekatan jarak antar objek pada peta persepsi, metode MDS menggunakan jarak *euclidean* karena mampu untuk mengukur jarak lurus atau garis terpendek antara dua titik dalam ruang berdimensi. Oleh karena itu, jarak *euclidean* menjadi dasar utama dalam perhitungan kedekatan antar objek dalam MDS. Persamaan jarak *euclidean* dapat dijelaskan dalam Persamaan (2.6) (Gudono, 2011).

$$d_{ip} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(x_{ij} - x_{pj}\right)^2} \tag{2.6}$$

dengan,

d_{ip} : Jarak *euclidean* antara objek ke-i dan objek ke-p,

x_{ij} : Data objek ke-i pada variabel ke-j,

x_{pj} : Data objek ke-p pada variabel ke-j, dan

m : Banyaknya variabel.

4. Disusun dalam Bentuk Matriks $\boldsymbol{D}$

   Dari hasil perhitungan jarak *euclidean* sebelumnya, hasil yang telah diperoleh kemudian disusun dalam bentuk matriks jarak $\boldsymbol{D}$ di ruang *euclidean* yang berukuran $n \times n$.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ip} & \cdots & d_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{np} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

   dengan,

   $\boldsymbol{D}$: Matriks jarak *euclidean* $(i, p = 1, 2, \ldots, n)$,

   d_{ip} : Jarak *euclidean* antara objek ke-i dan objek ke-p, dan

   n : Banyaknya objek.

5. Melakukan Proses *Double Centering* Matriks Jarak $\boldsymbol{D}$

   Melakukan proses *double centering* matriks jarak $\boldsymbol{D}$, di mana proses ini untuk mendekomposisikan matriks jarak $\boldsymbol{D}$ menjadi matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$. Matriks $\boldsymbol{B}$ menjadi dasar untuk menentukan koordinat objek dalam ruang dimensi rendah. Matriks $\boldsymbol{B}$ diperoleh dari mengalikan faktor $-\frac{1}{2}$ dengan matriks jarak yang dikuadratkan kemudian dikalikan dengan matriks *centering* $\boldsymbol{J}$. Faktor $-\frac{1}{2}$ digunakan untuk memastikan hasilnya kompatibel dengan representasi dalam ruang *euclidean*. Matriks jarak $\boldsymbol{D^2}$ dikalikan dengan matriks *centering* $\boldsymbol{J}$ di kedua sisinya untuk memusatkan data. Menurut Härdle & Simar (2003) matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (2.8).

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{J} \tag{2.8}$$

dengan,

$\boldsymbol{B}$: Matriks *product scalar,*

$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{2}}$: Matriks jarak *euclidean* yang dikuadratkan, dan

$\boldsymbol{J}$: Matriks *centering*.

Matriks $\boldsymbol{J}$ adalah matriks *centering* berukuran $n \times n$, di mana n adalah jumlah objek yang dianalisis. Matriks ini digunakan untuk memusatkan data sehingga nilai rata-rata dari setiap kolom menjadi 0. Ukuran matriks $\boldsymbol{J}$ mengikuti jumlah objek (n). Menurut Mattjik & Sumertajaya (2011) matriks *centering* dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (2.9).

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}} \tag{2.9}$$

dengan,

$\boldsymbol{I}$: Matriks identitas,

1 : Vektor satu (vektor kolom $n \times 1$ dengan semua elemen bernilai 1), dan

$\mathbf{1}\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}$: Matriks yang seluruh elemennya bernilai 1.

6. Melakukan Proyeksi dalam Ruang Dimensi Rendah

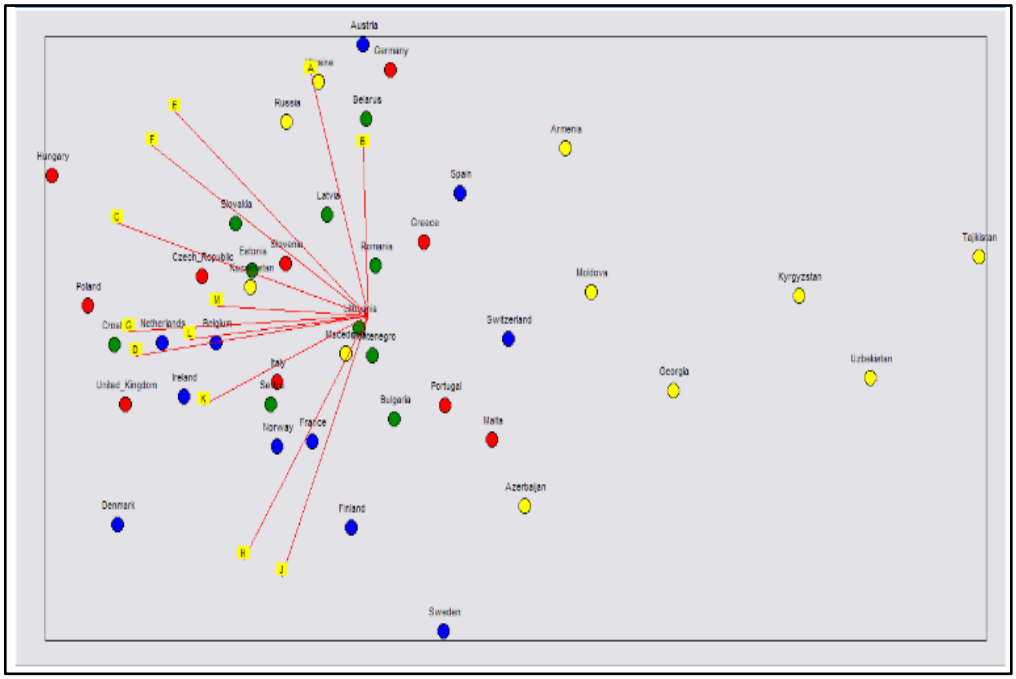
Proyeksi dalam ruang dimensi rendah dilakukan dengan dekomposisi nilai eigen. Matriks $\boldsymbol{B}$, yang berukuran $n \times n$, didekomposisi menjadi nilai eigen (λ) dan vektor eigen (γ) untuk menentukan koordinat objek dalam ruang dimensi rendah dengan menggunakan Persamaan (2.1) dan (2.2). Kemudian melakukan perhitungan koordinat objek dalam ruang dimensi rendah berdasarkan Persamaan (2.3).

2.1.4 *Co-Plot Multidimensional Scaling*

Metode *Co-Plot* MDS merupakan pengembangan dari metode MDS yang memperluas kemampuannya dengan memasukkan informasi tentang variabel-variabel dalam analisis. Salah satu kelemahan dari metode MDS adalah ketidakmampuannya untuk memvisualisasikan objek dan variabel secara bersamaan dalam satu ruang (Poosapati dkk., 2024). Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, dikembangkan metode *Co-Plot* MDS yang memperluas kemampuannya dari metode MDS.

Metode *Co-Plot* MDS menjadi metode pengembangan metode MDS yang memiliki keunggulan yang terletak pada kemampuannya dalam menggabungkan informasi tentang variabel-variabel dalam analisis. Kayhan & Gunay (2013) menjelaskan bahwa metode *Co-Plot* MDS memungkinkan penelitian simultan terhadap hubungan antar objek (seperti wilayah) dan variabel dengan satu peta. Teknik ini memungkinkan pemetaan objek dan variabel secara bersamaan dalam satu ruang visual, memberikan gambaran yang lebih mendalam mengenai hubungan antara objek dan variabel dalam peta tersebut. Gambar 2.1 merupakan contoh ilustrasi konfigurasi *Co-Plot* MDS.

Pada Gambar 2.1, setiap titik berwarna merepresentasikan satu negara (objek), sedangkan panah-panah yang ditandai dengan simbol A, B, C, dan seterusnya menunjukkan vektor dari masing-masing variabel. Titik-titik tersebut dipetakan berdasarkan kemiripan negara terhadap seluruh variabel yang dianalisis. Negara-negara yang saling berdekatan dalam grafik memiliki karakteristik serupa, sedangkan negara yang berjauhan menunjukkan adanya perbedaan dalam nilai atau pengaruh variabel yang dimiliki.



Gambar 2.1 Ilustrasi Umum Metode *Co-Plot* MDS
Sumber: Cangur dkk. (2015)

Panah-panah dari pusat grafik menuju ke arah tertentu menggambarkan arah dominasi suatu variabel, di mana panjang vektor menunjukkan tingkat kontribusi variabel tersebut dalam membentuk konfigurasi peta. Negara yang berada dalam arah dan dekat terhadap vektor suatu variabel menunjukkan bahwa negara tersebut memiliki nilai tinggi pada variabel tersebut, sementara negara yang berada jauh dari arah vektor dapat diinterpretasikan sebagai memiliki nilai yang lebih rendah atau kurang terpengaruh oleh variabel terkait.

Peta ini terdiri dari dua grafik yang digambar di atas satu sama lain. Grafik pertama yaitu grafik objek yang diperoleh dari metode MDS yang bertujuan untuk menunjukkan distribusi objek dalam ruang dua dimensi. Pada grafik kedua, hubungan antar variabel ditunjukkan oleh vektor, dan lokasi setiap vektor ditentukan oleh pengamatan yang dipetakan. Dengan fitur utama ini, *Co-Plot* memberikan kesempatan kepada penulis untuk membuat interpretasi data

multivariat yang lebih dalam dan kaya (Lipshitz & Raveh, 1994, dalam Atilgan, 2016).

Dalam proses pembentukan peta *Co-Plot* MDS, vektor-vektor variabel dalam ruang dua dimensi dihitung berdasarkan korelasi antara koordinat objek dan nilai variabel. Untuk menentukan arah dan panjang vektor tersebut, digunakan koefisien korelasi pearson**.** Penggunaan korelasi dalam Co-Plot MDS bertujuan untuk mengukur seberapa kuat dan searah hubungan linier antara suatu variabel dengan dimensi hasil pemetaan MDS. Langkah ini bertujuan untuk menemukan vektor-vektor yang mewakili variabel-variabel pada peta MDS. Menurut Lipshitz & Raveh (1994), dalam Atilgan (2016) menjelaskan bahwa untuk menentukan hubungan antara variabel dan dimensi ruang MDS dengan menggunakan koefisien korelasi *pearson* atau dalam istilah lain *pearson correlation coefficient* (PCC) yang dinyatakan dalam persamaan (2.10).

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{ik} - \bar{Y}_k).(z_{ij} - \bar{z}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_{ik} - \bar{Y}_k)^2 . \sum_{i=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z}_j)^2}} \tag{2.10}$$

dengan,

r_{jk} : Hasil korelasi antara variabel ke-j dan dimensi ke-k ($k = 1$ dan 2),

Y_{ik} : Koordinat objek ke-i dalam dimensi ke-k yang diperoleh dari MDS,

Y_k : Rata-rata dari koordinat Y_{ik} untuk dimensi ke-k,

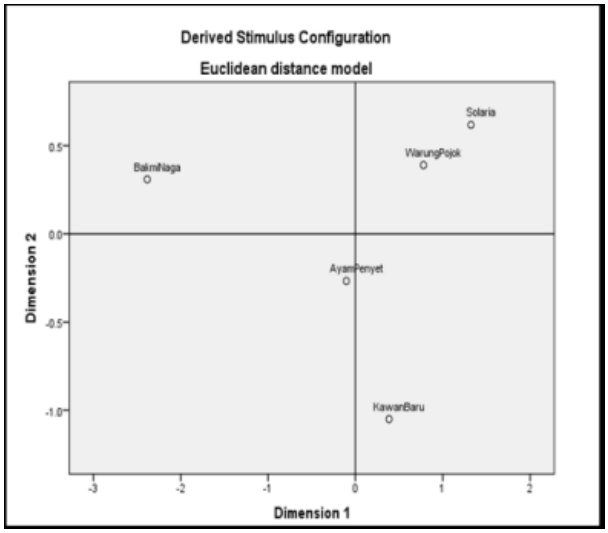
z_{ij} : Hasil standardisasi data objek ke-i untuk variabel ke-j,

$\bar{z}_j$: Rata-rata nilai z_{ij} untuk variabel ke-j, dan

n : Banyaknya objek.

Selanjutnya, koordinat untuk variabel *j* di ruang *Co-Plot* ditentukan oleh pasangan $(r_{j,1}, r_{j,2})$. Variabel direpresentasikan sebagai vektor yang dimulai dari titik asal (0,0) hingga $(r_{j,1}, r_{j,2})$ pada grafik *Co-Plot*. Dengan cara ini, hubungan antar variabel dapat dianalisis secara visual.

Ruang dimensi yang digunakan dalam metode *Co-Plot* MDS adalah ruang dua dimensi yaitu, dimensi 1 (sumbu horizontal) dan dimensi 2 (sumbu vertikal). Contoh ilustrasi ruang dua dimensi ditampilkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Ilustrasi Ruang Dimensi Metode *Co-Plot* MDS
Sumber: Walundungo dkk. (2014)

Gambar 2.2 merepresentasikan ruang dimensi yang digunakan dalam penelitian ini. Pada Gambar 2.2, metode MDS digunakan untuk merepresentasikan hubungan atau kemiripan antar lima objek, dalam ruang dua dimensi yang terbagi menjadi 4 kuadran. Kuadran I menjelaskan letak objek yang memiliki nilai positif pada kedua dimensi, dengan objek yang dinilai baik dalam kedua aspek. Kuadran II berada pada dimensi 1 negatif dan dimensi 2 positif, yang menunjukkan bahwa objek lemah pada aspek pertama namun unggul pada aspek kedua. Kuadran III memiliki nilai negatif pada kedua dimensi, yang

menunjukkan objek dinilai rendah dalam kedua aspek. Kuadran IV berada pada dimensi 1 positif dan dimensi 2 negatif, yang menunjukkan objek unggul pada aspek pertama namun lemah pada aspek kedua.

2.1.5 Validitas Model *Multidimensional Scaling*

Untuk mendapatkan model MDS yang sesuai, terdapat beberapa kriteria yang harus dipenuhi agar hasil yang diperoleh dapat digunakan. Berikut adalah dua kriteria utama untuk mengevaluasi validitas model MDS:

1. Nilai *Stress (Standardized Residual Sum of Square)*

   Stress merupakan sebuah ukuran untuk mengevaluasi ketidakcocokan (*a lack of fit measure*) atau ketidaktepatan suatu model MDS dengan data yang telah diberikan. *Stress* dapat dikatakan kebalikan dari R^2 yakni semakin tinggi nilai *stress* semakin tidak cocok atau tidak tepat antara model dengan data, sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa data tidak cocok digunakan dalam analisis MDS (Supranto, 2004). Rumus *stress* dapat digunakan untuk menentukan tingkat ketidakcocokan tersebut. Untuk menghitung nilai *Stress* pada metode MDS metrik dapat menggunakan rumus sebagai berikut (Sutadji dkk., 2022):

$$Stress = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(d_{ip} - \hat{d}_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(d_{ip} - \bar{d})^2}} \tag{2.11}$$

   dengan,

   d_{ip} : Jarak *euclidean* antara objek ke -i dan ke-p,

   $\hat{d}_{ip}$: Jarak *disparities* yang dihasilkan dari jarak *euclidean* antara objek ke -i dan ke-p, dan

$\bar{d}$: Jarak rata-rata dari jarak *euclidean* $\left(\frac{\sum_{i,p}^{n} d_{ip}}{n}\right)$.

Untuk menilai model yang baik berdasarkan nilai *stress*, pedoman untuk mengidentifikasi model tersebut telah disediakan oleh *kruskal stress formula* dengan menggunakan standar kriteria. Menurut Sutadji dkk., (2022) kriteria nilai *stress* dapat diinterpretasikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Kriteria Nilai *Stress*

Nilai *Stress* (%)	Kriteria Model MDS
Stress > 20%	Buruk
10% < *Stress* ≤ 20%	Cukup
5% < *Stress* ≤ 10%	Baik
2,5% < *Stress* ≤ 5%	Sangat Baik
Stress ≤ 2,5%	Sempurna

Sumber: Sutadji dkk., (2022)

2. Nilai R^2

Nilai R^2 (*R-square*) ialah kuadrat dari koefisien korelasi yang menyatakan proporsi varian dari skala optimal data, yang dijelaskan oleh prosedur MDS. Nilai R^2 digunakan sebagai ukuran kecocokan atau ketepatan model (Supranto, 2004). Harapan yang diinginkan adalah memiliki nilai R^2 yang tinggi ($R^2 = 1$ atau 100%) artinya bahwa model tersebut dengan sempurna mewakili data, akan tetapi, $R^2 \geq 0.60$ (60% atau lebih) sudah dianggap dapat diterima dan menunjukkan bahwa model cukup baik dalam mewakili data input. R^2 dapat dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut (Supranto, 2004):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(d_{ip} - \hat{d}_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(d_{ip} - \bar{d})^2} \qquad (2.12)$$

Dengan demikian, untuk memastikan validitas model MDS, penulis harus memastikan bahwa nilai *stress* berada dalam kategori yang dapat diterima (< 20%) dan nilai R^2 berada di atas 0,60. Jika memenuhi kedua kriteria ini, maka model MDS dapat dianggap valid dan dapat digunakan untuk analisis lebih lanju

2.1.6 Stabilitas Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS

Bootstrap adalah salah satu teknik statistik yang digunakan untuk mengukur kestabilan hasil estimasi dengan cara melakukan resampling terhadap data asli. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Efron (1979) dan dikenal sebagai metode non-parametrik karena tidak memerlukan asumsi distribusi khusus. Penggunaan *bootstrap* menjadi sangat penting ketika jumlah data yang tersedia relatif sedikit atau terbatas.

Dalam konteks *Co-Plot* MDS, *bootstrap* dapat digunakan untuk mengevaluasi kestabilan posisi objek dalam ruang dua dimensi yang terbentuk. Proses ini dilakukan dengan melakukan resampling terhadap data *dissimilarity*, menghitung kembali pemetaan MDS, dan kemudian mengevaluasi seberapa besar perubahan atau variabilitas posisi objek.

Hasil *bootstrap* biasanya divisualisasikan dalam bentuk rata-rata posisi objek disertai *error bar* atau *confidence region*, yang mencerminkan ketidakpastian posisi objek. Jika *error bar* sempit dan posisi rata-rata objek tidak jauh dari posisi awal, maka hasil pemetaan dapat dianggap stabil dan dapat diinterpretasikan dengan tingkat kepercayaan yang lebih tinggi.

Secara matematis, jika terdapat data awal $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka proses

bootstrap menghasilkan S sampel:

$$X^{*s} = (x_1^{*s}, x_2^{*s}, \dots, x_n^{*s}),\ s = 1,2, \dots, S$$

dengan,

S : Jumlah resampling atau jumlah sampel *bootstrap*,

X^{*s} : Sampel *bootstrap* ke-s, dan

x_1^{*s} : Elemen ke-1 pada sampel *bootstrap* ke-s,

Dari masing-masing sampel, dihitung nilai statistik tertentu $\theta^{*s} = s(X^{*s})$, misalnya posisi objek dalam koordinat MDS.

Rata-rata dari statistik hasil *bootstrap*:

$$\bar{\theta}^{*} = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \theta^{*s}$$

dengan,

θ^{*s} : Nilai statistik hasil dari sampel bootsrap ke-s,

$\bar{\theta}^{*}$: Rata-rata dari seluruh nilai θ^{*s}.

Simpangan baku dari hasil *bootstrap* dihitung menggunakan:

$$SE_{boot}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{S-1}\sum_{s=1}^{S}(\theta^{*s} - \bar{\theta}^{*})^2} \tag{2.13}$$

dengan,

SE_{boot} : Simpangan baku dari distribusi nilai *bootstrap*.

2.1.7 Kesejahteraan Sosial Ekonomi

Kesejahteraan sosial ekonomi adalah suatu kondisi yang mencerminkan kualitas hidup masyarakat yang serba kecukupan segala kebutuhannya, baik material maupun spriritual (Bahtiyar dkk., 2023). Hal tersebut meliputi aspek

sosial, ekonomi, dan kesehatan. Kesejahteraan sosial ekonomi tidak hanya mencakup pemenuhan kebutuhan dasar seperti pangan, sandang, dan papan, tetapi juga aspek-aspek yang lebih kompleks seperti tingkat pendapatan, pendidikan, kesehatan, dan stabilitas pekerjaan. Kesejahteraan sosial ekonomi yang baik berkontribusi pada stabilitas sosial, pertumbuhan ekonomi yang berkelanjutan, dan peningkatan kualitas hidup masyarakat secara keseluruhan. Dalam konteks ini, terdapat beberapa variabel yang berperan penting dalam menentukan tingkat kesejahteraan sosial ekonomi, yaitu jumlah penduduk, angka harapan hidup, harapan lama sekolah, produk domestik regional bruto, pengeluaran per kapita, persentase tingkat pengangguran terbuka, dan persentase kemiskinan.

1. Jumlah Penduduk

   Jumlah penduduk adalah total orang yang tinggal di suatu wilayah pada waktu tertentu. Menurut Said (2001) dalam Sembiring dkk. (2023), jumlah penduduk merupakan hasil dari proses demografi, yaitu fertilitas (kelahiran), mortalitas (kematian), dan migrasi. Pertumbuhan jumlah penduduk yang pesat sering kali menghadirkan tantangan besar dalam berbagai aspek, seperti penyediaan lapangan kerja, akses pendidikan, dan layanan kesehatan yang memadai. Jumlah penduduk dapat dikatakan sebagai tantangan besar dalam pembangunan karena dampak yang diberikan berupa penuruan produktivitas yang diakibatkan tingginya tingkat pengangguran pada suatu wilayah, sehingga menciptakan ketimpangan distribusi pendapatan masyarakat semakin tinggi (Duarsa & Wijaya, 2023).

2. Angka Harapan Hidup (AHH)

   Angka harapan hidup merupakan salah satu indikator yang digunakan untuk

menilai derajat kesehatan penduduk. Dalam pengertian lain angka harapan hidup didefiniskan sebagai rata-rata perkiraan jumlah tahun yang dapat dijalani oleh seseorang sejak lahir (Duarsa & Wijaya, 2023). Angka harapan hidup yang tinggi mencerminkan kondisi kesehatan yang baik dan akses yang memadai terhadap layanan kesehatan, serta kualitas hidup yang lebih baik secara keseluruhan.

3. Harapan Lama Sekolah

   Badan Pusat Statistik (2021) menjelaskan bahwa angka Harapan Lama Sekolah (HLS) merupakan perkiraan jumlah tahun pendidikan formal yang diharapkan akan dijalani oleh seorang anak pada usia tertentu di masa depan. Indikator ini mencerminkan aspirasi terhadap tingkat pendidikan yang dapat dicapai oleh individu, serta memberikan gambaran tentang kualitas dan aksesibilitas sistem pendidikan di suatu wilayah. Dengan meningkatkan angka HLS, diharapkan anak-anak mendapatkan peluang pendidikan yang lebih baik, sehingga mampu meningkatkan kualitas sumber daya manusia di masa mendatang.

4. Produk Domestik Regional Bruto (PDRB)

   Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) merupakan salah satu indikator utama yang berperan penting dalam menganalisis dan memahami kondisi ekonomi suatu daerah dalam periode tertentu (Dama dkk., 2016). PDRB mencerminkan total nilai tambah dari seluruh aktivitas ekonomi yang dilakukan oleh berbagai sektor usaha di wilayah tersebut, sehingga memberikan gambaran menyeluruh tentang kinerja ekonomi, kontribusi sektor-sektor unggulan, serta daya saing regional. Sebagai indikator

makroekonomi, PDRB sering digunakan oleh pemerintah dan pelaku usaha untuk mengevaluasi pertumbuhan ekonomi, merumuskan kebijakan pembangunan, serta memproyeksikan potensi ekonomi daerah ke depan.

5. Pengeluaran Per Kapita

   Pengeluaran per kapita adalah rata-rata biaya yang dikeluarkan untuk konsumsi seluruh anggota rumah tangga dalam satu bulan, yang dihitung dengan membagi total pengeluaran rumah tangga dengan jumlah anggota rumah tangga (Duarsa & Wijaya, 2023). Pengeluaran per kapita dapat menggambarkan tingkat kesejahteraan penduduk. Semakin rendah daya beli suatu masyarakat, maka semakin rendah kemampuannya untuk membeli barang atau jasa.

6. Tingkat Pengangguran Terbuka

   Tingkat pengangguran terbuka adalah proporsi angkatan kerja yang tidak memiliki pekerjaan tetapi aktif mencari pekerjaan. Menurut Arsyad (2010) dalam Sembiring dkk. (2023) menjelaskan bahwa pengangguran terbuka dapat disebabkan oleh berbagai faktor, termasuk ketidaksesuaian antara keterampilan yang dimiliki individu dan kebutuhan pasar kerja. Tingkat pengangguran yang tinggi dapat mengindikasikan adannya masalah dalam penciptaan lapangan kerja dan berdampak negatif pada stabilitas ekonomi.

7. Kemiskinan

   Kemiskinan adalah suatu kondisi kehidupan di mana seorang individu atau sebuah rumah tangga mengalami kekurangan sehingga tidak mampu memenuhi kebutuhan dasar atau minimal yang layak bagi kehidupannya (Sembiring dkk., 2023). Kebutuhan tersebut mencakup aspek-aspek penting

seperti makanan, pakaian, tempat tinggal, pendidikan, kesehatan, dan akses terhadap layanan dasar lainnya. Ketidakmampuan ini sering kali disebabkan oleh keterbatasan ekonomi, seperti pendapatan yang rendah, tidak stabil, atau tidak mencukupi untuk memenuhi kebutuhan sehari-hari. Selain itu, kemiskinan juga dapat dipengaruhi oleh faktor lain, seperti kurangnya akses terhadap lapangan kerja, ketimpangan sosial, dan keterbatasan infrastruktur.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Ibadah merupakan tujuan hidup manusia. Manusia diciptakan oleh Allah SWT untuk beribadah kepada-Nya sebagaimana yang telah dijelaskan pada sub bab 1.1. Ibadah adalah bentuk penghambaan dan pengabdian manusia kepada Sang Pencipta yang dilakukan dengan dasar keikhlasan dan kepatuhan. Namun, tingkat kesempurnaan ibadah seseorang dapat berbeda-beda, tergantung pada niat, kesadaran, dan motivasi yang melandasinya. Para ulama mengklasifikasikan tingkatan ibadah manusia menjadi tiga kategori utama: ibadah karena takut kepada Allah (*al-khauf*), ibadah karena mengharap pahala dan surga (*ar-raja'*), serta ibadah karena cinta dan syukur (*al-mahabbah dan asy-syukr*).

1. Ibadah Karena Takut (*Al-Khauf*)

   Tingkatan ibadah pertama adalah ibadah yang didasarkan pada rasa takut kepada Allah SWT. Pada tingkat ini, seorang hamba melaksanakan ibadah karena khawatir akan siksa neraka dan murka Allah SWT. Rasa takut ini menjadi pendorong utama untuk menghindari perbuatan dosa dan menjauhi larangan-Nya dan selalu berusaha untuk mendekatkan diri kepada-Nya. Sebagaimana dalam firman Allah SWT surah Ar-Rahman ayat 46.

وَلِمَنْ خَافَ مَقَامَ رَبِّهٖ جَنَّتٰنِۚ ﴿٤٦﴾

"Dan bagi orang yang takut akan saat menghadap Tuhannya ada dua surga."

Ibnu Abi Hatim dan Abu Syaikh, dalam kitab *Al-'Azhamah*, meriwayatkan dari Atha bahwa suatu hari Abu Bakar Ash-Shiddiq memikirkan tentang Hari Kiamat, mizan (timbangan amal), surga, dan neraka. Karena ketakutannya yang mendalam kepada Allah dan tidak lama setelah itu, turunlah ayat ini, yaitu surah Ar-Rahman ayat 46, yang berisi kabar gembira bagi orang-orang yang takut kepada Allah dan akan mendapatkan dua surga sebagai balasan atas ketakwaan dan ketakutan mereka kepada-Nya. Ayat ini menjadi penghibur sekaligus motivasi bagi para hamba yang takut kepada Allah untuk tetap teguh dalam ketaatan.

Ayat ini menunjukkan bahwa rasa takut kepada Allah adalah motivasi yang dapat mengantarkan seseorang kepada kebaikan dan ganjaran surga. Dalam tafsir Tahlili, ayat ini menjelaskan bahwa Allah telah menyiapkan dua surga bagi mereka yang senantiasa takut kepada-Nya dan meyakini bahwa setiap perbuatan akan mendapatkan balasan. Ketika seseorang merasa terdorong untuk melakukan maksiat, ia segera mengingat bahwa Allah Maha Mengetahui segala hal, baik yang tampak maupun yang tersembunyi. Kesadaran ini membuatnya menjauhi perbuatan tersebut karena takut akan azab dan hukuman yang mungkin menimpanya (LPMQ Kemenag, 2022c).

2. Ibadah Karena Mengharap Pahala (*Ar-Raja'*)

Tingkatan kedua adalah ibadah yang dilakukan dengan motivasi untuk mendapatkan pahala, ridha, dan balasan surga dari Allah SWT. Harapan ini

mendorong seseorang untuk meningkatkan amal ibadah dan memperbanyak amal saleh. Allah SWT. berfirman dalam surah Al-Anbiya ayat 90.

فَاسْتَجَبْنَا لَهُ وَوَهَبْنَا لَهُ يَحْيٰى وَأَصْلَحْنَا لَهُ زَوْجَهُ ۚ إِنَّهُمْ كَانُوا يُسَارِعُونَ فِي الْخَيْرَاتِ وَيَدْعُونَنَا رَغَبًا وَرَهَبًا ۖ وَكَانُوا لَنَا خَاشِعِينَ

"Maka, Kami mengabulkan (doa)-nya, menganugerahkan Yahya kepadanya, dan menjadikan istrinya (dapat mengandung). Sesungguhnya mereka selalu bersegera dalam (mengerjakan) kebaikan dan berdoa kepada Kami dengan penuh harap dan cemas. Mereka adalah orang-orang yang khusyuk kepada Kami."

Ayat ini menggambarkan ciri khas orang-orang saleh, yaitu mereka selalu bersegera dalam melakukan kebaikan dengan penuh keikhlasan. Sebagaimana dalam tafsir tahlili, dijelaskan bahwa Nabi Zakaria dan keluarganya senantiasa bersegera dalam berbuat kebajikan, terutama dalam menjaga keturunan dengan sebaik-baiknya. Selain itu, mereka selalu berdoa kepada Allah dengan penuh harap akan rahmat dan kasih sayang-Nya, namun tetap diliputi rasa takut akan azab-Nya. Harapan ini tidak hanya sekadar keinginan akan surga secara material, tetapi lebih kepada kerinduan akan rahmat Allah SWT. dan kedekatan dengan-Nya di akhirat kelak (LPMQ Kemenag, 2022a). Sifat khusyuk dan tawadu' yang dimiliki oleh orang-orang saleh, sebagaimana dijelaskan dalam tafsir tahlili, menjadikan mereka senantiasa menjaga kualitas ibadah serta kebaikan dalam kehidupan sehari-hari. Mereka tidak pernah sombong atau mengingkari nikmat Allah, melainkan selalu berserah diri dengan penuh kepasrahan dan ketundukan kepada-Nya. Dengan demikian, sifat-sifat inilah yang menjadi sebab dikabulkannya doa dan diperolehnya karunia dari Allah SWT.

3. Ibadah Karena Cinta dan Syukur (*Al-Mahabbah dan Asy-Syukr*)

Tingkatan tertinggi dalam beribadah adalah ketika seorang hamba melaksanakan ibadah karena cinta dan syukur kepada Allah SWT. Cinta ini lahir dari pengakuan terhadap kebesaran dan keindahan Allah, serta rasa syukur atas segala nikmat yang telah diberikan-Nya. Sebagaimana Allah SWT. berfirman dalam surah Al-Baqarah ayat 165.

وَمِنَ النَّاسِ مَن يَتَّخِذُ مِن دُونِ اللَّهِ أَندَادًا يُحِبُّونَهُمْ كَحُبِّ اللَّهِ ۖ وَالَّذِينَ آمَنُوا أَشَدُّ حُبًّا لِّلَّهِ ۗ وَلَوْ يَرَى الَّذِينَ ظَلَمُوا إِذْ يَرَوْنَ الْعَذَابَ أَنَّ الْقُوَّةَ لِلَّهِ جَمِيعًا وَأَنَّ اللَّهَ شَدِيدُ الْعَذَابِ

"Di antara manusia ada yang menjadikan (sesuatu) selain Allah sebagai tandingan-tandingan (bagi-Nya) yang mereka cintai seperti mencintai Allah. Adapun orang-orang yang beriman sangat kuat cinta mereka kepada Allah. Sekiranya orang-orang yang berbuat zalim itu melihat, ketika mereka melihat azab (pada hari Kiamat), bahwa kekuatan itu semuanya milik Allah dan bahwa Allah sangat keras azab-Nya, (niscaya mereka menyesal)."

Ayat ini turun berkenaan dengan orang-orang musyrik yang menjadikan berhala atau tandingan selain Allah sebagai objek kecintaan dan penyembahan mereka. Hal ini dikontraskan dengan orang-orang beriman yang memiliki kecintaan mendalam kepada Allah di atas segalanya. Ayat ini menjadi teguran bagi kaum musyrikin serta pembelajaran bagi orang-orang beriman agar memurnikan cinta mereka hanya kepada Allah SWT.

Dalam tafsir tahlili, dijelaskan bahwa sepanjang sejarah, baik di masa lalu maupun saat ini, ada sebagian manusia yang meyakini keberadaan sesembahan lain di samping Allah yang mereka agungkan dan cintai setara dengan kecintaan mereka kepada-Nya. Mereka bersyukur kepada sesembahan tersebut ketika mendapat nikmat, namun saat ditimpa kesulitan, mereka berdoa kepada Allah dengan harapan memperoleh pertolongan.

Perilaku seperti ini adalah karakter orang musyrik, bukan seorang mukmin sejati yang hanya menggantungkan doa, harapan, dan cintanya kepada Allah semata (LPMQ Kemenag, 2022b).

Ayat ini juga menegaskan bahwa cinta kepada Allah adalah dasar utama dari ibadah yang sempurna. Ibadah pada tingkatan ini bukan hanya dilakukan karena takut siksa atau mengharap pahala, tetapi menjadi bentuk kebutuhan dan kerinduan kepada Allah SWT. Orang yang mencapai tingkatan ini akan merasakan kenikmatan spiritual dalam setiap amal ibadahnya, sebab ia menyadari bahwa hanya Allah yang berhak dicintai dengan cinta tertinggi. Ayat ini mengajarkan bahwa cinta kepada Allah harus lebih tinggi dari segala bentuk kecintaan kepada makhluk. Orang-orang beriman mencintai Allah dengan penuh ketundukan dan ketaatan, menyadari bahwa hanya Dia yang memiliki kekuasaan mutlak atas segala sesuatu. Dengan cinta ini, mereka tidak hanya merasa dekat dengan Allah, tetapi juga menemukan kebahagiaan sejati dalam menjalankan ibadah.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Penelitian dengan menggunakan metode *Co-Plot* MDS ini memiliki beberapa tahapan. Tahapan yang pertama ialah dengan melakukan pengumpulan data kesejahteraan sosial ekonomi di Provinsi DIY. Tahapan kedua dengan melakukan identifikasi data yang akan digunakan dengan menggunakan Persamaan (2.4). Tahapan yang ketiga melibatkan analisis deskriptif yang berfungsi untuk melihat gambaran umum data, hal tersebut meliputi *mean* (rata-rata), standar deviasi, nilai maksimum, dan nilai minimum. Analisis ini memberikan pemahaman

awal terhadap distribusi data. Tahapan yang keempat ialah dengan melakukan standardisasi data dengan menggunakan *Z-score* dengan menggunakan Persamaan (2.5) untuk memastikan bahwa semua variabel memiliki skala yang sama dan data yang akan digunakan lebih mudah untuk diproses. Setelah diperoleh hasil standardisasi data tahapan yang kelima yaitu dengan mencari nilai kemiripan antar objek dengan menggunakan rumus jarak *euclidean* pada Persamaan (2.6) yang menghasilkan matriks jarak $\boldsymbol{D}$ yang disusun berdasarkan Persamaan (2.7). Tahapan berikutnya dengan menetapkan bahwa $\boldsymbol{B}$ sebagai elemen matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ yang bisa dihitung dengan menggunakan proses *double centering* pada Persamaan (2.8). Selanjutnya menentukan titik koordinat dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen objek matriks $\boldsymbol{B}$ yang telah diperoleh dengan Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2). Tahapan selanjutnya menghitung disparitis $\widehat{\boldsymbol{D}}$ yang merupakan jarak *euclidean* dari koordinat yang terbentuk dengan menggunakan Persamaan (2.6).

Setelah memperoleh koordinat objek dengan menggunakan MDS, langkah selanjutnya melakukan perhitungan untuk mendapatkan koordinat variabel dengan menggunakan Persamaan (2.10). Setelah itu, konfigurasi MDS objek dan konfigurasi variabel digabungkan dalam satu konfigurasi (*space*) untuk mengamati bagaimana objek dan variabel saling berhubungan dalam satu ruang visual. Tahapan selanjutnya yaitu dengan menguji validitas stimulus koordinat dengan menghitung nilai *stress* dan R^2 dengan menggunakan rumus pada Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12). Langkah terakhir dengan melakukan evaluasi model dan menginterpretasikan karakteristik tiap kelompok yang terbentuk dari pemetaan *Co-Plot* MDS.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif, yang berfokus pada analisis data numerik untuk memahami karakteristik suatu populasi atau sampel. Pendekatan ini mengandalkan metode statistik dalam pengolahan data, sehingga memungkinkan penyajian gambaran yang lebih jelas mengenai objek penelitian serta mengidentifikasi hubungan signifikan antarvariabel yang dikaji.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder. Data sekunder merupakan data yang diperoleh secara tidak langsung atau melalui perantara dari sumber yang sudah tersedia. Data yang digunakan dalam penelitian ini mencakup berbagai variabel terkait kesejahteraan sosial ekonomi di Provinsi DIY yang diambil dari *website* BPS Provinsi DIY pada tahun 2024.

Pada penelitian ini menggunakan tujuh variabel yang merupakan beberapa aspek dalam kesejahteraan sosial ekonomi yang mengacu pada penelitian yang dilakukan oleh Bahtiyar dkk. (2023). Variabel penelitian yang diambil dalam penelitian disajikan dalam bentuk Tabel 3.1.

3.3 Lokasi Penelitian

Lokasi penelitian ini meliputi wilayah Provinsi DIY yang terdiri dari 5 kabupaten/kota. Pemilihan lokasi ini didasarkan pada keanekaragaman

karakteristik sosial, ekonomi, dan geografis yang ada di wilayah tersebut. Dengan cakupan wilayah yang luas dan beragam, penelitian ini diharapkan dapat memberikan hasil yang representatif dan relevan untuk memahami dinamika karakteristik wilayah Provinsi DIY.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Skala	Satuan
x_1	Jumlah Penduduk	Rasio	Jiwa
x_2	Angka Harapan Hidup	Rasio	Tahun
x_3	Harapan Lama Sekolah	Rasio	Tahun
x_4	PDRB	Rasio	Rupiah
x_5	Pengeluaran Per Kapita	Rasio	Rupiah
x_6	Persentase Tingkat Pengangguran Terbuka	Rasio	Persen
x_7	Persentase Penduduk Miskin	Rasio	Persen

3.4 Teknik Analisis Data

Untuk mengimplementasikan metode *Co-Plot* MDS dalam memetakan wilayah berdasarkan kesejahteraan sosial ekonomi, berikut tahapan yang akan dilakukan dalam penelitian ini:

1. Menyusun data berdasarkan indikator dalam data kesejahteraan sosial ekonomi dengan menggunakan Persamaan (2.4) dan melakukan analisis deskriptif pada data yang diperoleh. Analisis deskriptif dapat berupa nilai *mean* (rata-rata), nilai minimum, nilai maksimum, dan standar deviasi. Hal itu dilakukan untuk mengetahui karakteristik data yang akan digunakan
2. Melakukan standardisasi data dengan *Z-score*. Standardisasi data dengan menggunakan *Z-score* pada Persamaan (2.5) untuk memastikan bahwa semua variabel memiliki skala yang sama.
3. Melakukan proses MDS
    a. Menentukan nilai kemiripan (*similarity*) antar objek ke dalam bentuk matriks jarak $\boldsymbol{D}$ menggunakan rumus jarak *euclidean* pada Persamaan

(2.6) yang menghasilkan matriks jarak $\boldsymbol{D}$ yang disusun berdasarkan Persamaan (2.7).

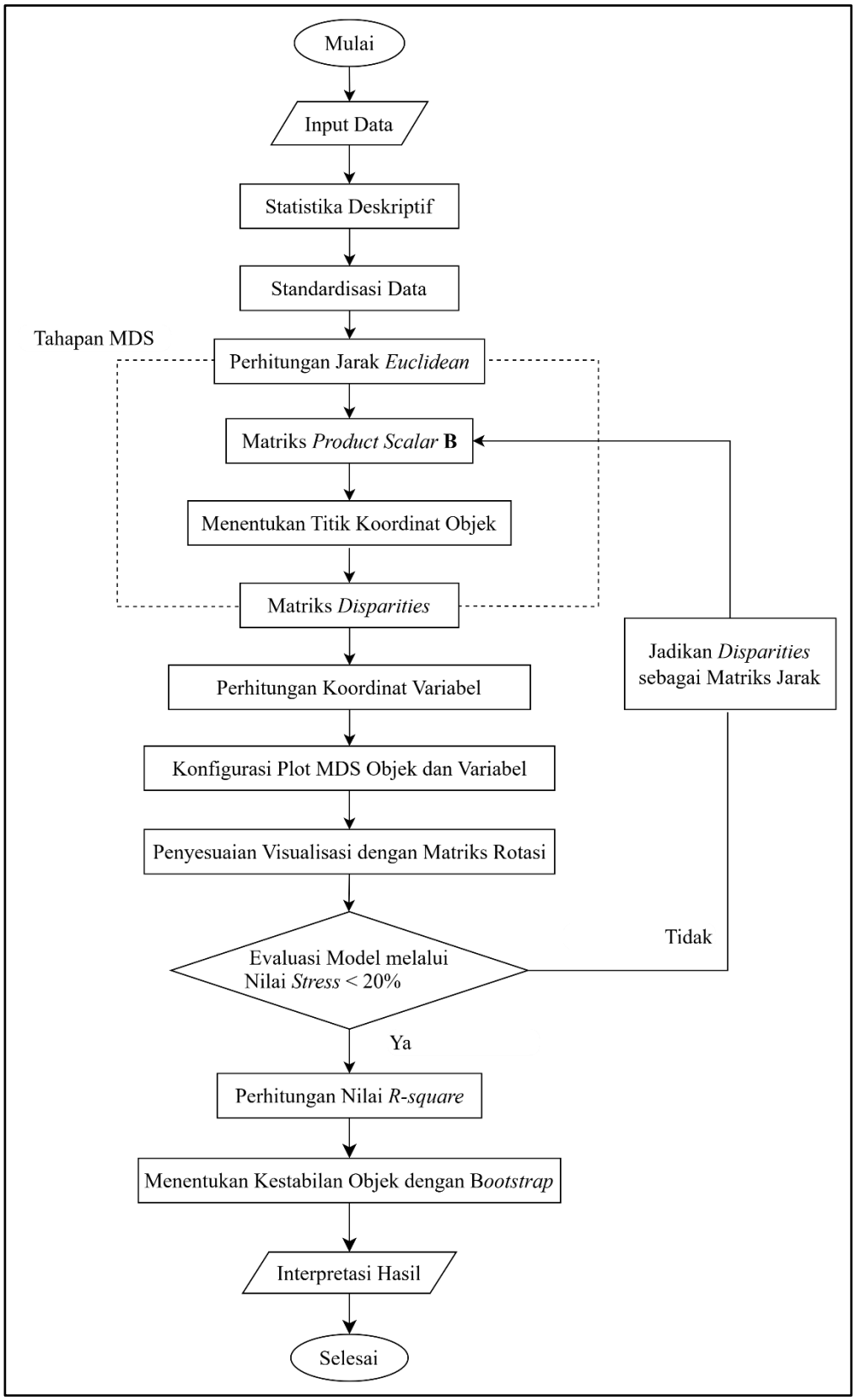
b. Menentukan matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ menggunakan Persamaan (2.8).

c. Menghitung titik koordinat pada Persamaan (2.3) dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ objek menggunakan Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2).

d. Menghitung *disparities* $\widehat{\boldsymbol{D}}$ yang merupakan jarak *euclidean* dari koordinat yang terbentuk menggunakan Persamaan (2.6).

4. Menentukan koordinat variabel pada ruang visual dengan melakukan perhitungan koefisien korelasi pearson menggunakan Persamaan (2.10).
5. Melakukan konfigurasi MDS objek dengan konfigurasi variabel dalam satu konfigurasi (*space*). Hal ini bertujuan untuk mengamati bagaimana objek dan variabel saling berhubungan dalam satu ruang visual.
6. Penyesuaian visualisasi melalui rotasi konfigurasi *Co-Plot* MDS untuk menyelaraskan posisi visual dengan kondisi substantif di lapangan.
7. Melakukan evaluasi model *Co-Plot* MDS dengan menghitung nilai *stress* menggunakan Persamaan (2.11) dan nilai R^2 menggunakan Persamaan (2.12).
8. Menentukan kestabilan posisi objek menggunakan metode *bootstrap* untuk mengevaluasi konsistensi konfigurasi objek dalam ruang MDS. Pengukuran ini bertujuan untuk mengetahui seberapa stabil posisi relatif antar objek ketika dilakukan pengambilan sampel ulang dari data.
9. Menginterpretasikan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi berdasarkan hasil pemetaan yang terbentuk dari analisis *Co-Plot* MDS.

3.5 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1 *Flowchart* Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Statistika Deskriptif

Langkah awal dalam proses analisis *Co-Plot Multidiemsional Scaling* (MDS) adalah melakukan statistika deskriptif terhadap data yang digunakan. Data yang dianalisis terdiri atas lima objek wilayah, yaitu Kabupaten Kulon Progo (objek 1), Bantul (objek 2), Gunungkidul (objek 3), Sleman (objek 4), dan Kota Yogyakarta (objek 5). Kelima wilayah tersebut dianalisis berdasarkan tujuh indikator kesejahteraan sosial ekonomi yang dijadikan sebagai variabel:

1. Jumlah penduduk (x_1)
2. Angka harapan hidup (x_2)
3. Rata-rata lama sekolah (x_3)
4. Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) (x_4)
5. Rata-rata pengeluaran per kapita (x_5)
6. Tingkat pengangguran terbuka (x_6)
7. Persentase penduduk miskin (x_7)

Data tersebut disusun dalam bentuk matriks $\boldsymbol{X}$ berukuran 5×7 sesuai dengan Persamaan (2.4) dengan baris yang merepresentasikan objek (wilayah) dan kolom yang merepresentasikan variabel (indikator kesejahteraan sosial ekonomi). Matriks tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 459.078 & 75{,}49 & 9{,}20 & 37.976.680 & 1.152.288 & 2{,}01 & 15{,}62 \\ 1.092.647 & 74{,}80 & 9{,}81 & 35.842.510 & 1.730.515 & 3{,}62 & 11{,}66 \\ 795.408 & 74{,}91 & 7{,}35 & 35.503.530 & 1.163.499 & 2{,}16 & 15{,}18 \\ 1.318.086 & 75{,}48 & 11{,}31 & 54.501.310 & 2.181.883 & 4{,}13 & 7{,}46 \\ 461.225 & 75{,}73 & 12{,}12 & 131.433.330 & 2.248.145 & 5{,}80 & 6{,}26 \end{bmatrix}$$

Setelah data disusun dalam bentuk matriks $\boldsymbol{X}$, langkah selanjutnya melakukan perhitungan statistika deskriptif. Statistika deskriptif pada penelitian ini dilakukan pada ketujuh variabel kesejahteraan sosial ekonomi di Provinsi DIY. Tujuannya untuk mengetahui gambaran umum karakteristik dari masing-masing variabel yang digunakan.

Hasil statistika deskriptif dari ketujuh variabel tersebut telah dicantumkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Data

Variabel	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
x_1	825.288,80	381.404	459.078	1.318.086
x_2	75,28	0,40	74,80	75,73
x_3	9,96	1,86	7,35	12,12
x_4	59.051.472	41.222.401,95	35.503.530	131.433.330
x_5	1.695.266	529.460,82	1.152.288	2.248.145
x_6	3,54	1,56	2,01	5,80
x_7	11,24	4,30	6,26	15,62

Berdasarkan hasil statistika deskriptif terhadap tujuh variabel kesejahteraan sosial ekonomi di lima wilayah Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY), ditemukan adanya perbedaan yang cukup mencolok pada beberapa aspek utama. Variabel jumlah penduduk (x_1) memiliki nilai rata-rata sekitar 825.289 jiwa dengan standar deviasi sekitar 381.404 jiwa. Jumlah penduduk terendah tercatat sebanyak 459.078 jiwa, sedangkan jumlah tertinggi mencapai 1.318.086 jiwa. Hal ini menunjukkan adanya ketidakseimbangan jumlah penduduk antar wilayah, di mana beberapa wilayah memiliki kepadatan penduduk yang jauh lebih tinggi dibandingkan dengan wilayah lainnya.

Angka harapan hidup (x_2) menunjukkan rata-rata sebesar 75,282 tahun dengan standar deviasi yang rendah yaitu 0,4043 tahun. Rentang nilai yang sempit, dengan nilai minimum sebesar 74,8 tahun dan maksimum 75,73 tahun,

menunjukkan tingkat keseragaman yang tinggi dalam kualitas kesehatan di seluruh wilayah. Ini menandakan bahwa kualitas kesehatan masyarakat relatif merata di Provinsi DIY.

Pada variabel harapan lama sekolah (x_3), rata-rata tercatat 9,958 tahun dengan standar deviasi 1,8642 tahun. Nilai terendah sebesar 7,35 tahun dan tertinggi 12,12 tahun. Hal ini menunjukkan adanya perbedaan tingkat pendidikan antar wilayah, di mana beberapa daerah memiliki kesempatan pendidikan yang lebih baik daripada yang lain.

Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) (x_4) memperlihatkan rata-rata sebesar Rp 59.051.472 dengan standar deviasi Rp 41.222.401. Nilai minimum sebesar Rp 35.503.530 dan maksimum mencapai Rp 131.433.330 menunjukkan adannya kesenjangan ekonomi yang tinggi antar wilayah, di mana wilayah dengan nilai PDRB tertinggi memiliki output ekonomi hampir empat kali lipat dibandingkan wilayah dengan nilai terendah.

Pengeluaran per kapita (x_5) memiliki rata-rata Rp 1.695.266 dengan standar deviasi Rp 529.461. Nilai minimum sebesar Rp 1.152.288 dan maksimum Rp 2.248.145. Nilai tersebut menggambarkan perbedaan daya beli masyarakat di setiap wilayah, yang turut mencerminkan tingkat kesejahteraan ekonomi.

Sementara itu, tingkat pengangguran terbuka (x_6) memiliki rata-rata sebesar 3,54% dengan standar deviasi 1,56%. Nilai minimum sebesar 2,01% dan maksimum 5,8%. Hal ini menunjukkan adanya ketidakmerataan kondisi ketenagakerjaan, di mana beberapa wilayah menghadapi tingkat pengangguran yang jauh lebih tinggi dibandingkan wilayah lainnya.

Terakhir, persentase penduduk miskin (x_7) memiliki rata-rata sebesar 11,24% dengan standar deviasi 4,30%. Nilai minimum sebesar 6,26% dan maksimum 15,62%. Hal ini menunjukkan bahwa tekanan kemiskinan bervariasi cukup besar antar wilayah, sehingga beberapa daerah memerlukan perhatian lebih dalam upaya pengentasan kemiskinan.

Secara umum, indikator sosial ekonomi di Provinsi DIY menunjukkan ketimpangan yang cukup besar pada beberapa aspek. Data ini mengindikasikan perlunya penyesuaian kebijakan yang dapat mengurangi kesenjangan dan mendorong pemerataan kesejahteraan.

4.2 Standardisasi Data

Dalam penelitian ini, proses standardisasi data dilakukan untuk menyetarakan skala pengukuran dari masing-masing variabel kesejahteraan sosial ekonomi. Hal ini penting karena setiap variabel memiliki satuan dan ukuran yang berbeda. Berikut contoh perhitungan yang dilakukan untuk variabel jumlah penduduk (x_1) objek ke-1 (Kulon Progo) dan objek ke-2 (Bantul) yaitu x_{11} dan x_{21} dengan $\overline{x_1} = 825.288{,}8$ dan $s_1 = 381.403{,}7$. Proses perhitungan standardisasi data yang dimaksud dengan melakukan transformasi pada data asli menggunakan *z-score* berdasarkan Persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$z_{11} = \frac{x_{11} - \overline{x_1}}{s_1} = \frac{459.078 - 825.288{,}8}{381.403{,}7} = \frac{-366.210{,}8}{381.403{,}7} \approx -0{,}9602$$

$$z_{21} = \frac{x_{21} - \overline{x_2}}{s_1} = \frac{1.092.647 - 825.288{,}8}{381.403{,}7} = \frac{267.358{,}2}{381.403{,}7} \approx 0{,}7010$$

Pada data z_{11} menunjukkan nilai yang telah terstandardisasi data menjadi $-0{,}9602$ dan z_{21} menjadi 0,7010. Perhitungan serupa dilakukan untuk seluruh data pada

setiap variabel, sehingga hasil akhirnya berupa data standar yang siap dianalisis. Secara rinci hasil standardisasi data dapat dilihat pada Lampiran 2.

4.3 Melakukan Proses *Multidimensional Scaling* (MDS)

4.3.1 Matriks Jarak

Setelah data distandardisasi, langkah selanjutnya adalah menghitung nilai kemiripan antar objek berdasarkan tujuh variabel kesejahteraan sosial ekonomi yang telah disetarakan. Jarak yang digunakan dalam penelitian ini adalah jarak *euclidean*, yang merupakan ukuran paling umum untuk mengetahui tingkat kemiripan atau perbedaan antara dua objek dalam ruang multidimensi. Langkah ini digunakan untuk menentukan nilai kemiripan (*similarity*) antar objek dengan menggunakan rumus pada Persamaan (2.6). Contoh perhitungan jarak *euclidean* antara Kulon Progo (objek 1) dengan Bantul (objek 2) adalah sebagai berikut:

$$d_{12} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(x_{1j} - x_{2j}\right)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + \cdots + (x_{17} - x_{27})^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(-0{,}9602 - 0{,}7010)^2 + (0{,}5145 + 1{,}1921)^2 + \cdots + (1{,}0194 - 0{,}0986)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(-1{,}6612)^2 + (1{,}7066)^2 + \cdots + (0{,}9208)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{2{,}7594 + 2{,}9125 + \cdots + 0{,}8480}$$

$$d_{12} = \sqrt{8{,}8904}$$

$$d_{12} \approx 2{,}9817$$

Selanjutnya perhitungan jarak *euclidean* antara Kulon Progo (objek 1) dan Gunungkidul (objek 3) yang diperoleh:

$$d_{13} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(x_{1j} - x_{3j}\right)^2}$$

$$d_{13} = \sqrt{(-0{,}9602 + 0{,}0783)^2 + (0{,}5145 + 0{,}9201))^2 + \cdots + (1{,}0194 - 0{,}9171)^2}$$

$$d_{13} = \sqrt{(-0{,}8818)^2 + (1{,}4345)^2 + \cdots + (0{,}1023)^2}$$

$$d_{13} = \sqrt{0{,}7776 + 2{,}0579 + \cdots + 0{,}0105}$$

$$d_{13} = \sqrt{3{,}8441}$$

$$d_{13} \approx 1{,}9606$$

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa jarak *euclidean* antara Kulon Progo (objek 1) dan Bantul (objek 2) lebih besar dibandingkan dengan jarak *euclidean* antara Kulon Progo (objek 1) dan Gunungkidul (objek 3). Hal ini menandakan bahwa karakteristik sosial ekonomi Kulon Progo (objek 1) lebih mirip dengan Gunungkidul (objek 3) dibandingkan Bantul (objek 2). Perhitungan serupa dilakukan untuk seluruh pasangan wilayah.

Dari hasil perhitungan jarak *euclidean* masing-masing objek, diperoleh matriks jarak $\boldsymbol{D}$ di ruang *euclidean* yang berukuran 5×5 seperti pada Persamaan (2.7). Berikut matriks jarak $\boldsymbol{D}$ dari hasil perhitungan jarak *euclidean*:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2{,}9817 & 1{,}9606 & 3{,}9685 & 4{,}7839 \\ 2{,}9817 & 0 & 2{,}2623 & 2{,}4121 & 4{,}4086 \\ 1{,}9606 & 2{,}2623 & 0 & 4{,}1367 & 5{,}5500 \\ 3{,}9685 & 2{,}4121 & 4{,}1367 & 0 & 3{,}2162 \\ 4{,}7839 & 4{,}4086 & 5{,}5500 & 3{,}2162 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks jarak $\boldsymbol{D}$, dapat diketahui bahwa Kabupaten Kulon Progo (objek 1) dan Kabupaten Gunungkidul (objek 3) memiliki karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi yang paling mirip, ditunjukkan oleh jarak terkecil yaitu 1,9606. Sebaliknya, Kota Yogyakarta (objek 5) menunjukkan perbedaan

paling mencolok dengan wilayah lain, terutama dengan Kabupaten Gunungkidul yang memiliki jarak terbesar sebesar 5,55. Hal ini mencerminkan bahwa Kota Yogyakarta, sebagai pusat kota memiliki kondisi kesejahteraan sosial ekonomi yang berbeda dibandingkan dengan wilayah kabupaten.

4.3.2 Menghitung Matriks *Product Scalar B*

Setelah proses matriks jarak *euclidean* antar objek dalam bentuk matriks jarak $\boldsymbol{D}$ diperoleh, selanjutnya menentukan matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ yang dilakukan dengan proses *double centering.* Langkah ini menggunakan rumus dari Persamaan (2.8). Langkah pertama dalam melakukan proses *double centering* adalah mengkuadratkan seluruh elemen dalam matriks $\boldsymbol{D}$, sehingga diperoleh matriks $\boldsymbol{D^2}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{D^2} = \begin{bmatrix} 0 & 8{,}8904 & 3{,}8441 & 15{,}7490 & 22{,}8860 \\ 8{,}8904 & 0 & 5{,}1181 & 5{,}8182 & 19{,}4354 \\ 3{,}8441 & 5{,}1181 & 0 & 17{,}1120 & 30{,}8028 \\ 15{,}7490 & 5{,}8182 & 17{,}1120 & 0 & 10{,}3440 \\ 22{,}8860 & 19{,}4354 & 30{,}8028 & 10{,}3440 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Kemudian menghitung matriks *centering* berdasarkan Persamaan (2.9), dengan $n = 5$, maka:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{5}\,\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Setelah memperoleh hasil matriks tersebut, dapat dilakukan perhitungan untuk matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.1) dan Persamaan (4.2) ke dalam Persamaan (2.8) maka diperoleh matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4{,}6739 & -0{,}9820 & 3{,}3026 & -3{,}4352 & -3{,}5592 \\ -0{,}9820 & 2{,}2524 & 1{,}4548 & 0{,}3194 & -3{,}0447 \\ 3{,}3026 & 1{,}4548 & 5{,}7754 & -3{,}5660 & -6{,}9669 \\ -3{,}4352 & 0{,}3194 & -3{,}5660 & 4{,}2047 & 2{,}4771 \\ -3{,}5592 & -3{,}0447 & -6{,}9669 & 2{,}4771 & 11{,}0936 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Menentukan Titik Koordinat Objek

Setelah diperoleh matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ melalui proses *double centering*, langkah selanjutnya dalam analisis adalah menentukan koordinat masing-masing objek dalam ruang dua dimensi. Proses ini dilakukan dengan dekomposisi eigen, yaitu menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$. Berdasarkan Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2), nilai eigen objek dari matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 19{,}7206, \lambda_2 = 6{,}3016, \lambda_3 = 1{,}6562, \lambda_4 = 0{,}3216, \ \lambda_5 = 0{,}0000.$$

Dan vektor eigennya adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0{,}3420 & 0{,}5459 & -0{,}5086 & -0{,}3507 & 0{,}4472 \\ 0{,}1414 & -0{,}4834 & 0{,}3967 & -0{,}6237 & 0{,}4472 \\ 0{,}5250 & 0{,}0366 & 0{,}3491 & 0{,}6334 & 0{,}4472 \\ -0{,}3057 & -0{,}5299 & -0{,}5844 & 0{,}2904 & 0{,}4472 \\ 0{,}7028 & 0{,}4277 & 0{,}3472 & 0{,}0507 & 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

Dalam penentuan jumlah dimensi pada analisis MDS, berdasarkan pada nilai eigen. Dengan nilai eigen positif terbesar secara berurutan ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \lambda_n$) yang dapat diambil untuk menentukan jumlah dimensi. Pada umumnya jumlah dimensi dalam analisis MDS ialah dua dimensi. Oleh karena itu,

digunakan dua nilai eigen positif yang terbesar dari matriks *product scalar* $\boldsymbol{B}$ yaitu $\lambda_1 = 19{,}7206$ dan $\lambda_2 = 6{,}3016$. Nilai tersebut menunjukkan untuk membentuk dua dimensi dalam visualisasi MDS.

Untuk menentukan titik koordinat dapat dilakukan dengan mengambil vektor eigen yang berkorespondensi dengan dua nilai eigen positif terbesar yang diambil. Koordinat dari setiap objek dalam ruang dua dimensi dapat dihitung berdasarkan Persamaan (2.3). Contoh perhitungan koordinat titik dari lima objek adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}3420 & 0{,}5489 \\ 0{,}1414 & -0{,}4833 \\ 0{,}5250 & 0{,}0366 \\ -0{,}3057 & -0{,}5299 \\ -0{,}7028 & 0{,}4277 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19{,}7206 & 0 \\ 0 & 6{,}3016 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}3420 & 0{,}5489 \\ 0{,}1414 & -0{,}4833 \\ 0{,}5250 & 0{,}0366 \\ -0{,}3057 & -0{,}5299 \\ -0{,}7028 & 0{,}4277 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}4419 & 0 \\ 0 & 2{,}5103 \end{bmatrix}$$

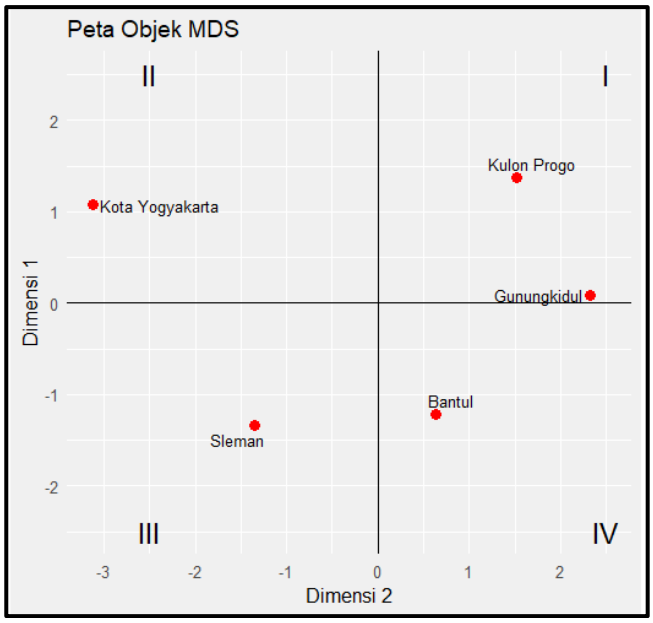
$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1{,}5189 & 1{,}3379 \\ 0{,}6279 & -1{,}2134 \\ 2{,}3315 & 0{,}0919 \\ -1{,}3575 & -1{,}3301 \\ -3{,}1209 & 1{,}0737 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Dari perhitungan tersebut, maka diperoleh koordinat objek yang dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.2 Titik Koordinat Objek

No.	Nama Objek	Dimensi	
		1	2
1.	Kulon Progo	1,5189	1,3379
2.	Bantul	0,6279	−1,2134
3.	Gunungkidul	2,3315	0,0919
4.	Sleman	−1,3575	−1,3301
5.	Kota Yogyakarta	−3,1209	1,0737

Berdasarkan hasil dari Tabel 4.2 yang menunjukkan titik koordinat masing-masing objek pada dua dimensi utama, dapat divisualisasikan hubungan antar objek tersebut dalam bentuk pemetaan dua dimensi sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Peta Objek MDS

Gambar 4.1 memperlihatkan posisi relatif kelima kabupaten/kota di Provinsi DIY dalam ruang dua dimensi berdasarkan tingkat kemiripan karakteristik sosial ekonominya. Objek yang berada lebih dekat satu sama lain menunjukkan kemiripan yang lebih tinggi, sedangkan objek yang berada jauh terpisah mengindikasikan adannya perbedaan karakteristik.

4.3.4 Menentukan Matriks *Disparities*

Setelah koordinat masing-masing objek (wilayah) diperoleh dalam ruang dua dimensi, langkah selanjutnya adalah menghitung jarak antar objek berdasarkan koordinat tersebut. Jarak ini disebut sebagai *disparity*, yaitu jarak visual antar objek dalam ruang konfigurasi MDS. *Disparities* digunakan untuk

menilai seberapa baik hasil pemetaan mendekati jarak *euclidean* asli dari data yang telah distandardisasi. Contoh perhitungan jarak antara objek 1 dan objek 2 dengan menggunakan titik koordinat yang terbentuk adalah:

$$\hat{d}_{12} = \sqrt{(1{,}5189 - 0{,}6279)^2 + \left(1{,}3379 - (-1{,}2134)\right)^2}$$

$$\hat{d}_{12} = \sqrt{(0{,}8910)^2 + (2{,}5914)^2}$$

$$\hat{d}_{12} = \sqrt{0{,}7939 + 6{,}7152}$$

$$\hat{d}_{12} = \sqrt{7{,}5091}$$

$$\hat{d}_{12} \approx 2{,}7403$$

Demikian pula untuk jarak antar objek lainnya dapat dilihat pada Lampiran 4. Kemudian data yang diperoleh diubah ke dalam bentuk matriks *disparities* berukuran 5×5. Berikut adalah contoh matriks *disparities*:

$$\widehat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 2{,}7403 & 1{,}5213 & 3{,}9506 & 4{,}6498 \\ 2{,}7403 & 0 & 2{,}1462 & 1{,}9888 & 4{,}3914 \\ 1{,}5212 & 2{,}1462 & 0 & 3{,}9536 & 5{,}5402 \\ 3{,}9506 & 1{,}9888 & 3{,}9536 & 0 & 2{,}9813 \\ 4{,}6498 & 4{,}3915 & 5{,}5402 & 2{,}9813 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks *disparities* yang diperoleh dari hasil analisis MDS, terlihat adannya tingkat kemiripan karakteristik sosial ekonomi antar wilayah di Provinsi DIY. Dari hasil perhitungan menunjukkan bahwa wilayah dengan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi paling mirip adalah Kulon Progo dan Gunungkidul, ditunjukkan oleh jarak *disparities* terkecil yaitu $1{,}5212$. Sebaliknya, perbedaan terlihat antara Gunungkidul dan Kota Yogyakarta dengan jarak terjauh yaitu $5{,}5402$.

4.4 Menentukan Titik Koordinat Variabel

Selanjutnya, untuk memahami hubungan antara variabel dengan objek,

dilakukan perhitungan koefisien korelasi pearson antara masing-masing variabel dengan koordinat dua dimensi yang telah diperoleh. Koefisien ini menunjukkan arah dan kekuatan hubungan antara variabel kesejahteraan sosial ekonomi dan konfigurasi objek dalam ruang visual. Perhitungan koordinat variabel dapat dilakukan dengan menggunakan rumus pada Persamaan (2.10).

Contoh perhitungan korelasi pearson antara variabel X_1 (jumlah penduduk) dengan dimensi 1:

$$r_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{i1} - \bar{Y}_1).(z_{i1} - \bar{z}_1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2.\sum_{i=1}^{n}(z_{i1} - \bar{z}_1)^2}} \quad (4.3)$$

dengan, Y_{i1} adalah titik koordinat objek ke-i dalam dimensi ke-1 yang diperoleh dari proses MDS.

Sebelumnya, dilakukan perhitungan rata-rata untuk koordinat objek pada dimensi 1 seperti berikut:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1{,}5189 + 0{,}6279 + 2{,}3315 + 2{,}3315 + -3{,}1209}{5}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{0}{5}$$

$$\bar{Y}_1 = 0$$

Selanjutnya, perhitungan rata-rata untuk nilai *z-score* pada variabel x_1 (jumlah penduduk) seperti berikut:

$$\bar{z}_1 = \frac{-0{,}9602 + 0{,}7010 + (-0{,}0783) + 1{,}2921 + (-0{,}9545)}{5}$$

$$\bar{z}_1 = \frac{0}{5}$$

$$\bar{z}_1 = 0$$

Nilai tersebut kemudian disubtitusikan ke dalam perhitungan koordinat variabel x_1

(jumlah penduduk) pada dimensi 1. Pada perhitungan sebelumnya telah diperoleh bahwa nilai $\bar{Y}_1 = 0$ dan $\bar{z}_1 = 0$, maka Persamaan (4.3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$r_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i1}).(z_{i1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i1})^2.\sum_{i=1}^{5}(z_{i1})^2}}$$

$$r_{1,1} = \frac{(1{,}5189).(-0{,}9602) + (0{,}6279).(0{,}7010) + \cdots + [(-3{,}1209).(-0{,}9545)]}{\sqrt{[(1{,}5189)^2 + (0{,}6279)^2 + \cdots + (-3{,}1209)^2].[(-0{,}9602)^2 + \cdots + (-0{,}9545)^2]}}$$

$$r_{1,1} = \frac{(-1{,}4584) + (0{,}4401) + \cdots + (2{,}9791)}{\sqrt{(2{,}3072 + 0{,}3943 + \cdots + 9{,}7403).(0{,}9219 + 0{,}4914 + \cdots + 0{,}9111)}}$$

$$r_{1,1} = \frac{0{,}0242}{\sqrt{(19{,}7206).(4{,}00)}}$$

$$r_{1,1} = \frac{0{,}0242}{\sqrt{78{,}8824}}$$

$$r_{1,1} \approx 0{,}0027$$

Selanjutnya yaitu contoh perhitungan korelasi pearson antara variabel x_1 (jumlah penduduk) pada dimensi 2.

$$r_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i2} - \bar{Y}_2).(z_{i1} - \bar{z}_1)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2.\sum_{i=1}^{5}(z_{i1} - \bar{z}_1)^2}} \quad (4.4)$$

Pertama-tama, dilakukan perhitungan rata-rata untuk koordinat objek pada dimensi 2 seperti berikut:

$$\bar{Y}_2 = \frac{1{,}3779 + (-1{,}2134) + (0{,}0919) + (-1{,}3301) + 1{,}0737}{5}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{0}{5}$$

$$\bar{Y}_2 = 0$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan koefisien korelasi Pearson antara variabel x_1 (jumlah penduduk) pada dimensi 2. Sebelumnya dilakukan perhitungan

yang menunjukkan bahwa nilai $\bar{Y}_2 = 0$ dan $\bar{z}_1 = 0$, maka Persamaan (4.4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$r_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i2}).(z_{i1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(Y_{i2})^2.\sum_{i=1}^{5}(z_{i1})^2}}$$

$$r_{1,2} = \frac{(1{,}3779).(-0{,}9602) + (-1{,}2134).(0{,}7010) + \cdots + (1{,}0737).(-0{,}9545)}{\sqrt{[(1{,}3779)^2 + (-1{,}2134)^2 + \cdots + (1{,}0737)^2].[(-0{,}9602)^2 + \cdots + (-0{,}9545)^2}}$$

$$r_{1,2} = \frac{(-1{,}3231) + (-0{,}8506) + \cdots + (-1{,}0249)}{\sqrt{(1{,}8987 + 1{,}4724 \ldots + 1{,}1528).(0{,}9219 + 0{,}4914 + \cdots + 0{,}9111)}}$$

$$r_{1,2} = \frac{-4{,}9243}{\sqrt{(6{,}3016).(4{,}0000)}}$$

$$r_{1,2} = \frac{-4{,}9243}{\sqrt{25{,}2064}}$$

$$r_{1,2} \approx -0{,}9808$$

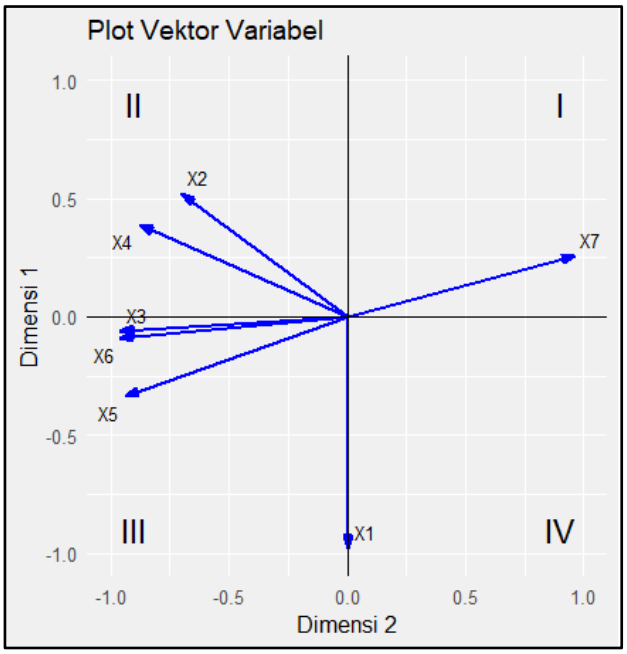
Dari perhitungan tersebut diperoleh koordinat variabel x_1 (jumlah penduduk) pada dimensi 1 sebesar $0{,}0027$ dan dimensi 2 sebesar $-0{,}9808$, maka hasil koordinat untuk variabel x_1 (jumlah penduduk) ialah $(0{,}0027\ ;\ -0{,}9808)$. Perhitungan serupa dilakukan untuk variabel lainnya yang disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Titik Koordinat Variabel

Variabel	Keterangan	Dimensi	
		1	2
x_1	Jumlah Penduduk	0,0027	−0,9808
x_2	Angka Harapan Hidup	−0,7021	0,5197
x_3	Harapan Lama Sekolah	−0,9608	−0,0621
x_4	PDRB	−0,8773	0,3901
x_5	Pengeluaran Per Kapita	−0,9417	−0,3361
x_6	Persentase Tingkat Pengangguran Terbuka	−0,9646	−0,0883
x_7	Persentase Penduduk Miskin	0,9629	0,2579

Berdasarkan hasil dari Tabel 4.3 yang menunjukkan titik koordinat masing-masing variabel pada dua dimensi utama, dapat divisualisasikan hubungan antar

variabel tersebut dalam bentuk pemetaan dua dimensi sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.2.



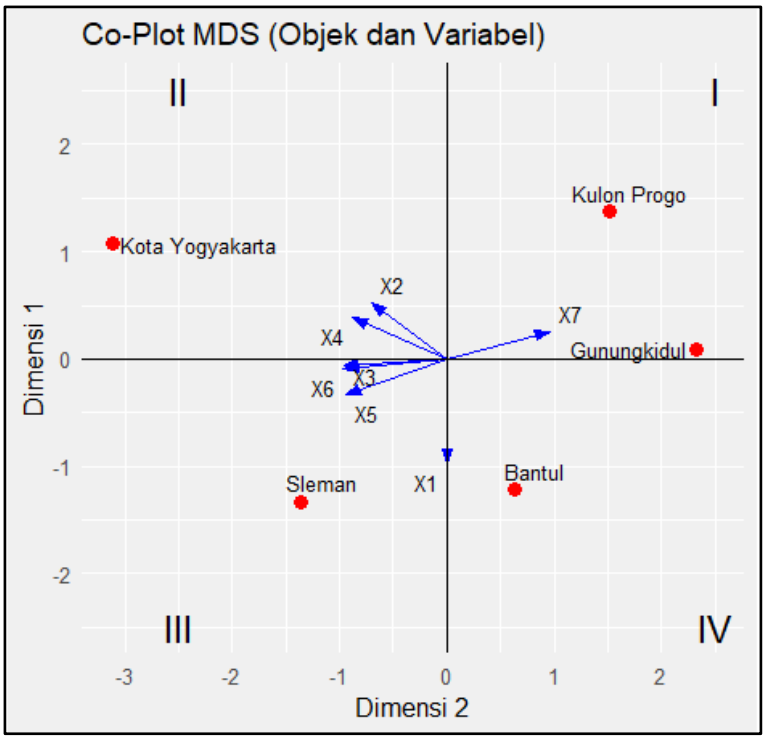
Gambar 4.2 Plot Vektor Variabel

Plot vektor variabel menggambarkan arah dan kekuatan kontribusi masing-masing variabel terhadap konfigurasi dimensi dalam ruang pemetaan. Setiap vektor menunjukkan arah korelasi variabel terhadap dua dimensi utama hasil pemetaan MDS. Vektor-vektor yang mengarah ke kuadran yang berbeda menunjukkan bahwa masing-masing variabel memiliki pola pengaruh yang berbeda-beda terhadap distribusi wilayah. Panjang vektor mencerminkan besar kontribusi (kekuatan korelasi) variabel terhadap dimensi; semakin panjang vektor, semakin besar perannya dalam membentuk konfigurasi objek.

4.5 Penggabungan Konfigurasi Objek dan Variabel

Setelah mendapatkan kedua plot, selanjutnya dengan melakukan konfigurasi gabungan dari plot objek dan plot variabel. Plot gabungan dari plot

objek dan plot variabel disajikan dalam Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Visualisasi *Co-Plot* MDS

Berdasarkan koordinat yang diperoleh dari hasil perhitungan pada Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 maka diperoleh plot yang menggambarkan posisi masing-masing wilayah (objek) dengan variabel kesejahteraan sosial ekonomi tahun 2024 yang disajikan pada Gambar 4.3. Peta tersebut menunjukkan posisi objek dan variabel yang terkait. Informasi ini digunakan untuk menentukan pengelompokkan wilayah di Provinsi DIY berdasarkan kesejahteraan sosial ekonomi. Peta ini terbagi ke dalam empat kuadran, di mana masing-masing kuadran merepresentasikan kelompok wilayah dengan tingkat kesejahteraan sosial ekonomi yang relatif serupa.

4.6 Penyesuaian Visualisasi Melalui Rotasi Konfigurasi *Co-Plot* MDS

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa Kota Yogyakarta yang secara substansi merupakan wilayah paling sejahtera berdasarkan kedekatannya dengan vektor

variabel angka harapan hidup (x_2) dan PDRB (x_4). Vektor variabel ini berada di kuadran II, yaitu pada sisi negatif di dimensi 1 dan sisi positif di dimensi 2. Padahal kedua variabel tersebut mencerminkan Kota Yogyakarta unggul dalam bidang kesehatan dan ekonomi.

Selain Kota Yogyakarta, wilayah lain juga menunjukkan ketidaksesuaian antara posisi visual dan kondisi sebenarnya. Sleman misalnya, awalnya tidak berada dekat dengan vektor harapan lama sekolah (x_3) dan pengeluaran per kapita (x_5), padahal secara substansi wilayah ini dikenal memiliki pencapaian tinggi dalam pendidikan dan konsumsi rumah tangga. Bantul, yang memiliki jumlah penduduk yang besar, seharusnya lebih dekat ke vektor jumlah penduduk (x_1), namun tidak tercermin dengan baik dalam konfigurasi awal. Sementara itu, Kulon Progo dan Gunungkidul yang memiliki tingkat kemiskinan relatif tinggi belum sepenuhnya tergambarkan dalam posisi yang berdekatan dengan vektor persentase penduduk miskin (x_7).

Keberadaan wilayah-wilayah yang tidak sesuai dengan kondisi empiris ini dapat menimbulkan interpretasi yang kurang tepat. Oleh karena itu, dilakukan rotasi sebesar -90^o terhadap seluruh konfigurasi objek dan variabel. Matriks rotasi yang digunakan adalah:

$$\boldsymbol{R}(-\mathbf{90}^{\boldsymbol{o}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Dengan $\boldsymbol{R}(-\mathbf{90}^{\boldsymbol{O}})$ adalah matriks rotasi sebesar -90^o. Transformasi ini akan mengubah setiap koordinat (x, y) menjadi $(y, -x)$. Selanjutnya proses perhitungan dilakukan dengan mengalikan matriks rotasi pada Persamaan (4.4) dengan hasil yang telah diperoleh pada Persamaan (4.3). Hasil dari perkalian ini untuk

mendapatkan titik-titik koordinat objek yang baru yang telah mengalami rotasi yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{Y}^*$.

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Y} \,.\, \boldsymbol{R}(-\mathbf{90}^{\boldsymbol{O}})$$

$$\boldsymbol{Y}^* = \begin{bmatrix} 1{,}5189 & 1{,}3379 \\ 0{,}6279 & -1{,}2134 \\ 2{,}3315 & 0{,}0919 \\ -1{,}3575 & -1{,}3301 \\ -3{,}1209 & 1{,}0737 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

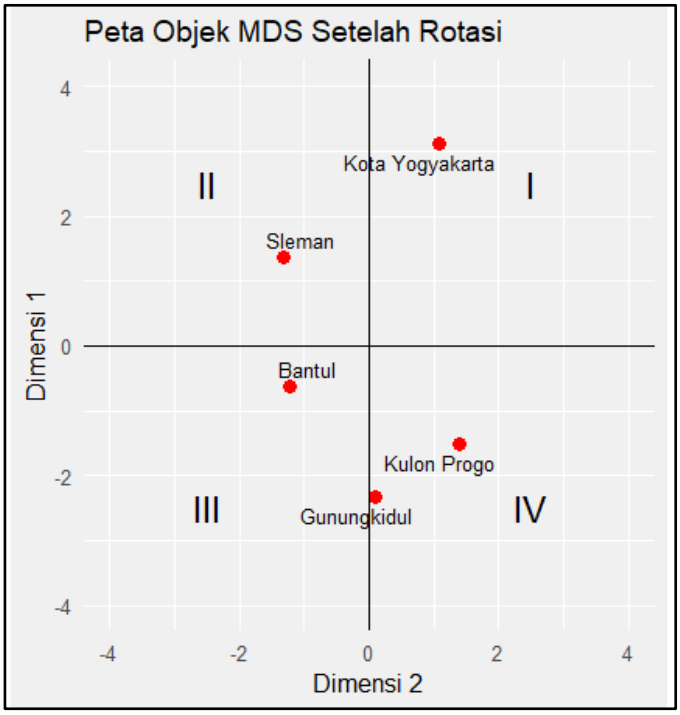
$$\boldsymbol{Y}^* = \begin{bmatrix} 1{,}3379 & -1{,}5189 \\ -1{,}2134 & -0{,}6279 \\ 0{,}0919 & -2{,}3315 \\ -1{,}3301 & 1{,}3575 \\ 1{,}0737 & 3{,}1209 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka diperoleh titik-titik koordinat objek setelah dilakukan matriks rotasi sebesar -90^o. Titik-titik koordinat objek yang baru kemudian disajikan dalam bentuk Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Titik Koordinat Objek Setelah Rotasi

No.	Nama Objek	Dimensi	
		1	2
1.	Kulon Progo	1,3379	−1,5189
2.	Bantul	−1,2134	−0,6279
3.	Gunungkidul	0,0919	−2,3315
4.	Sleman	−1,3301	1,3575
5.	Kota Yogyakarta	1,0737	3,1209

Berdasarkan Tabel 4.4 tersebut dapat diperoleh visualisasi titik koordinat objek yang baru, sebagaimana yang ditunjukkan dalam Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Peta Objek MDS Setelah Rotasi

Perhitungan serupa juga dilakukan pada titik-titik koordinat variabel, dengan menerapkan matriks rotasi yang sama. Hasil dari transformasi ini menghasilkan titik-titik koordinat variabel yang baru, yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{r}^*$.

$$\boldsymbol{r}^* = \begin{bmatrix} 0{,}0027 & -0{,}9808 \\ -0{,}7021 & 0{,}5197 \\ -0{,}9608 & -0{,}0621 \\ -0{,}8773 & 0{,}3901 \\ -0{,}9417 & -0{,}3361 \\ -0{,}9646 & -0{,}0883 \\ 0{,}9629 & 0{,}2579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

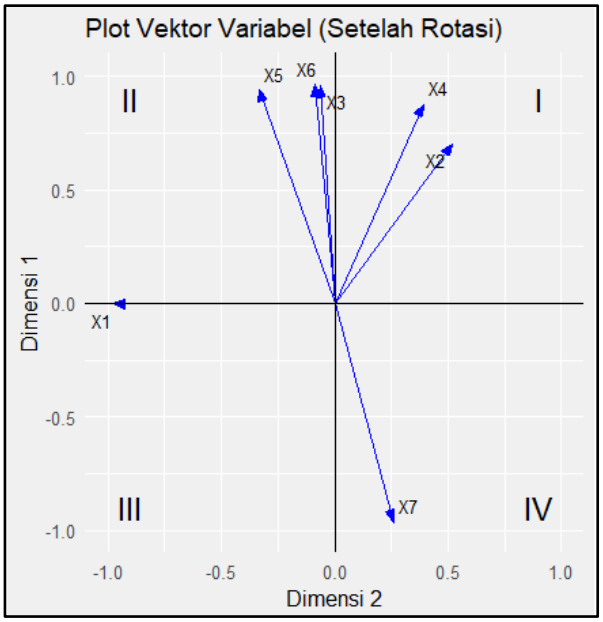
$$\boldsymbol{r}^* = \begin{bmatrix} -0{,}9808 & -0{,}0027 \\ 0{,}5197 & 0{,}7021 \\ -0{,}0621 & 0{,}9608 \\ 0{,}3901 & 0{,}8773 \\ -0{,}3361 & 0{,}9417 \\ -0{,}0883 & 0{,}9646 \\ 0{,}2579 & -0{,}9629 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka diperoleh titik koordinat variabel setelah dilakukan matriks rotasi. Titik koordinat varibael telah disajikan dalam bentuk Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Titik Koordinat Variabel Setelah Rotasi

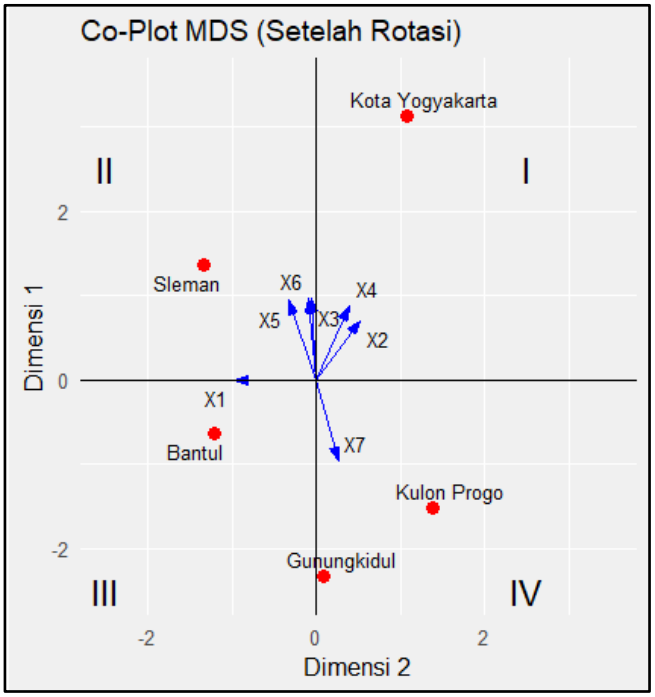
Variabel	Keterangan	Dimensi	
		1	2
x_1	Jumlah Penduduk	−0,9808	−0,0027
x_2	Angka Harapan Hidup	0,5197	0,7021
x_3	Harapan Lama Sekolah	−0,0621	0,9608
x_4	PDRB	0,3901	0,8773
x_5	Pengeluaran Per Kapita	−0,3361	0,9417
x_6	Persentase Tingkat Pengangguran Terbuka	−0,0883	0,9646
x_7	Persentase Penduduk Miskin	0,2579	−0,9629

Berdasarkan Tabel 4.5 tersebut dapat diperoleh visualisasi titik koordinat objek yang baru, sebagaimana yang ditunjukkan dalam Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Plot Vektor Variabel Setelah Rotasi

Setelah diperoleh dua peta yakni peta objek dan peta variabel yang telah dilakukan rotasi, maka selanjutnya dilakukan penggabungan konfigurasi peta objek dan peta variabel. Berdasarkan Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 maka diperoleh gabungan konfigurasi, sebagaimana ditampilkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Peta *Co-Plot* MDS Setelah Rotasi

Setelah dilakukan rotasi terhadap konfigurasi objek dan variabel, hasil visualisasi co-plot menjadi lebih selaras dengan kondisi substantif di lapangan. Wilayah-wilayah kini berada pada posisi kuadran yang lebih logis sesuai dengan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi masing-masing. Rotasi ini membantu meningkatkan akurasi interpretasi visual serta memperjelas keterkaitan antara objek wilayah dan indikator-indikator kesejahteraan.

4.7 Evaluasi Model *Co-Plot* MDS

Untuk menilai seberapa baik hasil pemetaan dalam analisis *Co-Plot* MDS maka perlu dilakukan evaluasi model dengan menggunakan dua ukuran utama yaitu nilai *stress* dan R^2.

1. Nilai *Stress (Standardized Residual Sum of Square)*

   Nilai *stress* objek yang dihasilkan dapat dihitung menggunakan Persamaan (2.11). Sebelumnya, dilakukan perhitungan $\bar{d}$ sebagai berikut:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i,p}^{n} d_{ip}}{n}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i,p}^{25} d_{ip}}{25}$$

$$\bar{d} = \frac{d_{11} + d_{12} + d_{13} + d_{14} + \cdots + d_{55}}{25}$$

$$\bar{d} = \frac{0{,}0000 + 2{,}9817 + 1{,}9606 + 3{,}9685 + \cdots + 0{,}000}{25}$$

$$\bar{d} = \frac{71{,}3613}{25}$$

$$\bar{d} = 2{,}8545$$

Hasil $\bar{d}$ yang telah diperoleh kemudian di substitusikan ke dalam Persamaan (2.11) untuk menghitung nilai *stress* sebagai berikut:

$$Stress = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{p=1}^{5}(d_{ip} - \hat{d}_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{5}\sum_{p=1}^{5}(d_{ip} - \bar{d})^2}}$$

$$Stress = \sqrt{\frac{(d_{11} - \hat{d}_{11})^2 + (d_{12} - \hat{d}_{12})^2 + \cdots + (d_{55} - \hat{d}_{55})^2}{\left(d_{11} - \bar{d}\right)^2 + \left(d_{12} - \bar{d}\right)^2 + \cdots + \left(d_{55} - \bar{d}\right)^2}}$$

$$Stress = \sqrt{\frac{(0-0)^2 + (2{,}9817 - 2{,}7403)^2 + \cdots + (0-0)^2}{(0 - 2{,}8545)^2 + (2{,}9817 - 2{,}8545)^2 + \cdots + (0 - 2{,}8545)^2}}$$

$$Stress = \sqrt{\frac{1{,}1027}{76{,}3028}}$$

$$Stress = \sqrt{0{,}0145}$$

$$Stress \approx 0{,}1202$$

Nilai *stress* objek yang diperoleh ialah sebesar 0,1202 atau 12,02%. Mengacu pada Tabel 2.1 yang menjelaskan kriteria *stress*, hal ini

menunjukkan bahwa model *Co-Plot* MDS yang diperoleh termasuk dalam kriteria cukup baik.

2. Perhitungan R^2

Pada metode ini, nilai R^2 menunjukkan apakah model penskalan layak untuk mewakili data input. Semakin tinggi nilai R^2 pada peta *Co-Plot* MDS yang dihasilkan maka semakin baik model tersebut. Untuk menghitung nilai R^2 dapat menggunakan Persamaan (2.12). Perhitungan R^2 sebagai berikut:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{p=1}^{5}(d_{ip} - \hat{d}_{ip})^2}{\sum_{i=1}^{5}\sum_{p=1}^{5}(d_{ip} - \bar{d})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{(d_{11} - \hat{d}_{11})^2 + (d_{12} - \hat{d}_{12})^2 + \cdots + (d_{55} - \hat{d}_{55})^2}{\left(d_{11} - \bar{d}\right)^2 + \left(d_{12} - \bar{d}\right)^2 + \cdots + \left(d_{55} - \bar{d}\right)^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{(0-0)^2 + (2{,}9817 - 2{,}7403)^2 + \cdots + (0-0)^2}{(0 - 2{,}8545)^2 + (2{,}9817 - 2{,}8545)^2 + \cdots + (0 - 2{,}8545)^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{1{,}1027}{76{,}3028}$$

$$R^2 = 1 - 0{,}0145$$

$$R^2 = 0{,}9855$$

Nilai R^2 yang diperoleh dari perhitungan ialah sebesar 0,9855 atau 98,55%. Karena nilai $R^2 > 0{,}6$ maka hal ini menunjukkan bahwa model sudah dapat diterima.

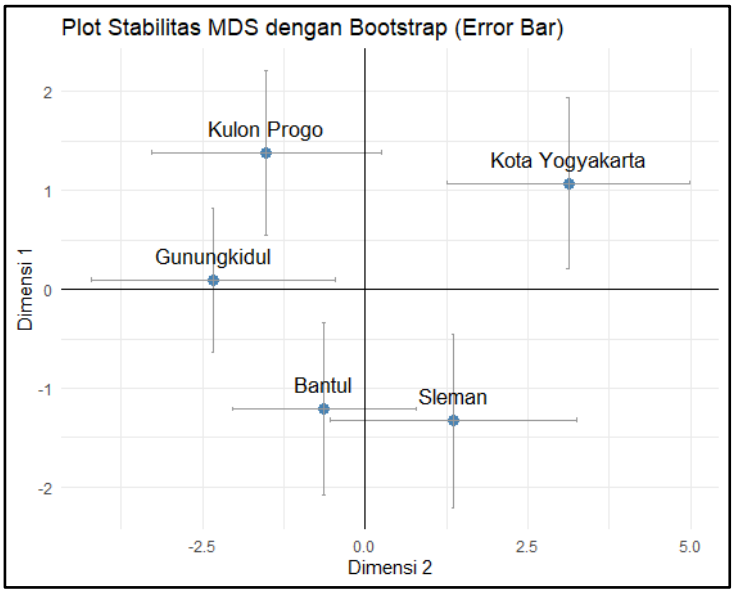
4.8 Menentukan Stabilitas Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS

Untuk mengukur kestabilan posisi objek dalam pemetaan *Co-Plot* MDS, dilakukan evaluasi tambahan menggunakan metode *bootstrap*. Evaluasi ini sangat

berguna terutama pada data berukuran kecil, di mana kestabilan hasil pemetaan perlu dipastikan meskipun informasi yang tersedia terbatas. Teknik ini dilakukan dengan cara melakukan resampling terhadap matriks *dissimilarity* antar objek sebanyak 1000 kali, lalu menghitung ulang konfigurasi posisi objek pada setiap iterasi.

Hasil dari proses *bootstrap* divisualisasikan dalam bentuk rata-rata posisi objek dilengkapi dengan *error bar* pada setiap dimensi. Titik tengah menunjukkan posisi rata-rata hasil resampling, sedangkan panjang error bar menggambarkan sebaran posisi objek sepanjang iterasi *bootstrap*.

Simpangan baku dari posisi hasil *bootstrap* dihitung menggunakan Persamaan (2.13), yang menghasilkan visualisasi pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Visualisasi Stabilitas Objek dengan *Bootstrap*

Berdasarkan hasil visualisasi, diketahui bahwa sebagian besar objek memiliki error bar yang relatif pendek dan tidak saling tumpang tindih secara signifikan. Hal ini menunjukkan bahwa posisi objek dalam ruang MDS cukup stabil, meskipun terjadi variasi pada data input.

Pola distribusi objek dari hasil *bootstrap* juga cenderung mirip dengan hasil MDS awal, yang ditunjukkan oleh peta objek sebelumnya. Dengan demikian, hasil *bootstrap* ini memperkuat kepercayaan terhadap konfigurasi objek yang diperoleh dari analisis *Co-Plot* MDS.

4.9 Interpretasi Hasil Pemetaan *Co-Plot* MDS

Berdasarkan peta *Co-Plot* MDS hasil rotasi pada Gambar 4.6, diperoleh visualisasi hubungan antara lima wilayah di Provinsi DIY dengan tujuh variabel kesejahteraan sosial ekonomi tahun 2024. Peta tersebut menampilkan titik-titik plot yang mewakili lima wilayah, dan letaknya mencerminkan tingkat kemiripan karakteristik kesejahteraan sosial ekonominya. Peta tersebut terbagi menjadi empat kuadran yang mengelompokkan wilayah berdasarkan kesamaan arah atau kedekatannya terhadap vektor masing-masing variabel

Kuadran I ditempati oleh Kota Yogyakarta yang berdekatan dengan vektor angka harapan hidup (x_2) dan Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) (x_4). Posisinnya yang berada pada koordinat positif untuk kedua dimensi menunjukkan bahwa wilayah ini memiliki tingkat kesejahteraan yang tinggi. Kedekatan dengan arah vektor x_2 menunjukkan bahwa tingkat kesehatan masyarakat dan harapan hidup di Kota Yogyakarta tergolong tinggi, mencerminkan kualitas layanan kesehatan dan umur panjang yang baik. Selain itu, keberadaan vektor variabel x_4 pada kuadran yang sama menunjukkan bahwa Kota Yogyakarta juga memiliki kekuatan ekonomi yang baik berdasarkan nilai PDRB. Dengan demikian, Kota Yogyakarta merupakan wilayah yang unggul dalam hal pembangunan manusia dalam dua bidang, yaitu kesehatan dan ekonomi, sesuai dengan karakteristik wilayah sebagai pusat pelayanan dan aktivitas ekonomi utama di Provinsi DIY.

Wilayah Sleman menempati Kuadran II, yang ditandai dengan koordinat negatif pada Dimensi 1 dan positif pada Dimensi 2. Wilayah ini berada dekat dengan arah panah tiga variabel, yaitu harapan lama sekolah (x_3), pengeluaran per kapita (x_5), dan persentase pengangguran terbuka (x_6). Kedekatan ini menunjukkan bahwa Sleman memiliki keunggulan dalam aspek pendidikan dan konsumsi rumah tangga, yang tercermin dari tingginya rata-rata lama sekolah dan besarnya pengeluaran per kapita. Namun, pada saat yang sama, tingkat pengangguran terbuka di wilayah ini juga tinggi, sehingga menandakan adanya ketidakseimbangan antara potensi sumber daya manusia dan ketersediaan lapangan kerja. Secara umum, posisi Sleman di kuadran dengan kombinasi nilai negatif Dimensi 1 dan positif Dimensi 2 menunjukkan bahwa meskipun wilayah ini memiliki kekuatan dalam pembangunan sumber daya manusia dan ekonomi mikro, namun ketimpangan dalam aspek ketenagakerjaan masih menjadi isu yang perlu diperhatikan.

Bantul menempati Kuadran III, dengan posisi koordinat yang negatif pada kedua dimensi. Wilayah ini berada paling dekat dengan arah panah jumlah penduduk (x_1). Hal ini menunjukkan bahwa Bantul memiliki jumlah penduduk yang besar, yang berpotensi menimbulkan tekanan terhadap ketersediaan layanan sosial, pendidikan, dan kesehatan. Letaknya yang cukup jauh dari arah vektor variabel-variabel kesejahteraan seperti harapan hidup (x_2), harapan lama sekolah (x_3), dan pengeluaran per kapita (x_5) menunjukkan bahwa Bantul relatif tertinggal dalam beberapa aspek kesejahteraan sosial ekonomi. Posisi tersebut mencerminkan perlunya strategi pembangunan yang difokuskan pada peningkatan kualitas hidup untuk mengimbangi beban demografis yang besar.

Kuadran IV ditempati oleh dua wilayah, yaitu Kulon Progo dan Gunungkidul yang keduanya berada pada koordinat positif pada Dimensi 1 dan negatif pada Dimensi 2. Posisi kedua wilayah ini tampak cukup dekat dengan arah vektor persentase penduduk miskin (x_7), yang menunjukkan bahwa tantangan utama kedua wilayah ini terletak pada aspek kemiskinan. Kedekatannya dengan vektor persentase penduduk miskin (x_7) mencerminkan bahwa tingkat kemiskinan di Kulon Progo dan Gunungkidul cenderung tinggi dibandingkan wilayah lainnya di Provinsi DIY. Jika dibandingkan satu sama lain, Gunungkidul tampak lebih dekat dengan arah vektor (x_7) dibandingkan Kulon Progo. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat kemiskinan di Gunungkidul kemungkinan lebih tinggi daripada di Kulon Progo. Sementara itu, posisi kedua wilayah ini cukup jauh dari arah vektor kesejahteraan lainnya, seperti harapan hidup (x_2), harapan lama sekolah (x_3), dan pengeluaran perkapita (x_5), yang menunjukkan kerentanan dalam aspek pendidikan, kesehatan, dan daya beli masyarakat. Akibat kedekatan Gunungkidul dan Kulon Progo dengan variabel (x_7) adalah mereka menghadapi tekanan serius terhadap efektivitas program penanggulangan kemiskinan, serta berisiko mengalami keterbatasan dalam penyediaan layanan dasar seperti pendidikan dan kesehatan. Tingginya angka kemiskinan berpotensi memperberat beban pemerintah daerah dalam mengatasi ketimpangan sosial. Fokus pembangunan di wilayah ini perlu diarahkan pada penguatan akses dan mutu layanan sosial, serta pengembangan ekonomi lokal yang inklusif, agar disparitas antarwilayah dapat diminimalkan.

4.10 Penerapan Metode Pemetaan Objek dalam Pandangan Islam

Konsep pemetaan objek mencerminkan pemahaman mendalam terhadap posisi spiritual seseorang. Sebagaimana dijelaskan pada Bab I dan II, tujuan utama penciptaan manusia adalah untuk beribadah kepada Allah SWT. Ibadah memiliki tingkatan motivasi yang berbeda, mulai dari rasa takut (*al-khauf*), mengharap pahala (*ar-raja'*), hingga karena cinta dan syukur (*al-mahabbah wa asy-syukr*). Dalam ajaran Islam, segala aktivitas yang dilakukan manusia pada hakikatnya dapat bernilai ibadah, jika dilandasi dengan niat yang benar dan sesuai syariat.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak aktivitas yang tampak bersifat duniawi, seperti belajar, bekerja, berdagang, atau aktivitas lainnya. Namun, Islam tidak memisahkan urusan dunia dan akhirat. Suatu aktivitas dapat bernilai ibadah jika diawali dengan adanya niat yang lurus karena Allah, dilakukan dengan cara yang halal dan baik, serta ditujukan untuk mencari ridha Allah SWT. Sebagai contoh, seorang mahasiswa yang belajar dengan tujuan untuk memperdalam ilmu agar bermanfaat bagi masyarakat, dan dalam prosesnya menjaga adab serta menjauhi hal-hal yang dilarang, maka aktivitas belajarnya tersebut bernilai ibadah. Begitu pula seorang pekerja yang mencari nafkah secara halal, jujur, dan bertanggung jawab, telah menunaikan bagian dari ibadah dalam bentuk amal harian.

Melalui pendekatan pemetaan, aktivitas-aktivitas ini dapat diklasifikasikan berdasarkan motivasi spiritual yang mendasarinya. Jika seseorang melakukan sesuatu karena takut akan hukuman Allah, maka ia berada pada tingkat ibadah *al-khauf*. Bila tujuannya untuk mendapat ganjaran atau ridha-Nya, maka masuk dalam kategori *ar-raja'*. Dan bila dilakukan dengan penuh cinta dan rasa syukur, maka itu

adalah bentuk ibadah yang paling tinggi, yaitu *al-mahabbah wa asy-syukr*. Hal ini penting untuk mengetahui posisi ibadah manusia, lalu dapat digunakan untuk mengambil langkah agar bisa meningkatkan kualitas ibadahnya. Dengan begitu, aktivitas yang dilakukan tidak hanya menjadi rutinitas semata, melainkan dapat menjadi bentuk penghambaan diri kepada Allah SWT.

Pemahaman terhadap posisi spiritual ini penting sebagai sarana interospeksi diri. Dengan mengetahui pada tahap mana seseorang berada, maka akan lebih mudah baginya untuk mengambil langkah dalam meningkatkan kualitas ibadah. Kegiatan yang awalnya bersifat rutin dapat diarahkan menjadi sarana untuk lebih dekat kepada Allah SWT.

Untuk meningkatkan kualitas ibadah, seseorang perlu membiasakan muhasabah (introspeksi diri), memperbaiki niat sebelum beramal, serta terus belajar untuk memahami agama secara lebih mendalam. Langkah-langkah seperti memperbanyak dzikir, menjaga konsistensi ibadah wajib dan sunnah, serta memperhatikan adab dalam setiap aktivitas juga menjadi cara nyata untuk naik ke tingkatan ibadah yang lebih tinggi. Semakin kuat hubungan seorang hamba dengan Allah melalui cinta dan syukur, semakin besar pula kemungkinan seluruh aktivitas hidupnya bernilai ibadah dan menjadi bekal menuju ridha-Nya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan yang telah dijabarkan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Implementasi metode Co-Plot MDS dengan rotasi $-90°$ dalam pemetaan wilayah Provinsi DIY berdasarkan karakteristik kesejahteraan sosial ekonomi berhasil menggambarkan distribusi lima wilayah ke dalam empat kuadran secara lebih representatif. Kuadran I diisi oleh Kota Yogyakarta, yang menunjukkan tingkat kesejahteraan tertinggi. Wilayah ini berada dekat dengan vektor angka harapan hidup (x_2) dan PDRB (x_4), menandakan keunggulan dalam bidang kesehatan dan kekuatan ekonomi. Kuadran II dihuni oleh Kabupaten Sleman, yang berdekatan dengan vektor harapan lama sekolah (x_3), pengeluaran per kapita (x_5), dan pengangguran terbuka (x_6). Hal ini mencerminkan bahwa Sleman memiliki kualitas pendidikan dan konsumsi rumah tangga yang tinggi, meskipun masih menghadapi tantangan dalam aspek ketenagakerjaan. Kuadran III ditempati oleh Kabupaten Bantul, yang berdekatan dengan vektor jumlah penduduk (x_1). Wilayah ini menghadapi tekanan kependudukan yang tinggi dan perlu perhatian dalam penyediaan layanan sosial dasar. Sementara itu, Kuadran IV menampilkan Kabupaten Kulon Progo dan Kabupaten Gunungkidul yang berada dekat dengan vektor persentase penduduk miskin (x_7) yang menunjukkan bahwa kemiskinan masih menjadi isu utama di kedua wilayah

tersebut. Hasil ini menunjukkan bahwa metode *Co-Plot* MDS dengan rotasi memberikan peta visual yang lebih sesuai dengan realitas sosial ekonomi wilayah, serta dapat menjadi acuan dalam penyusunan kebijakan pembangunan yang lebih tepat sasaran.

2. Validitas hasil implementasi metode *Co-Plo*t MDS yang ditunjukkan melalui nilai *Stress* dan *R-Square* yang diperoleh dari pengujian konfigurasi dua dimensi. Nilai *Stress* yang rendah dan *R-Square* yang tinggi mencerminkan bahwa model visual yang dihasilkan mampu menjelaskan struktur data secara optimal. Dengan demikian, metode ini mampu menghasilkan pemetaan yang valid secara statistik dan relevan untuk digunakan dalam analisis kesejahteraan sosial ekonomi, serta layak dijadikan dasar dalam perumusan kebijakan pembangunan.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan variabel agar mampu merepresentasikan kondisi kesejahteraan sosial ekonomi secara lebih menyeluruh. Indikator tambahan yang dapat digunakan seperti indeks kebahagiaan, tingkat partisipasi tenaga kerja, tingkat kriminalitas, serta akses terhadap layanan dasar seperti air bersih, sanitasi, dan fasilitas kesehatan dapat dipertimbangkan untuk dimasukkan. Selain itu, disarankan pula untuk memperluas cakupan objek penelitian dengan melibatkan lebih banyak wilayah. Hal ini bertujuan agar hasil pemetaan yang diperoleh dapat memberikan gambaran yang lebih luas mengenai tingkat kesejahteraan sosial ekonomi di berbagai daerah.

DAFTAR PUSTAKA

Atilgan, Y. K. (2016). Robust Coplot Analysis. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, *45*(5), 1763–1775. https://doi.org/10.1080/03610918.2013.875571

Badan Pusat Statistik. (2024). *Persentase Penduduk Miskin (P0) Menurut Provinsi dan Daerah (Persen), 2024*. Badan Pusat Statistik (BPS). https://www.bps.go.id/id/statistics-table/2/MTkyIzI=/persentase-penduduk-miskin--p0--menurut-provinsi-dan-daerah.html (Diakses 25 Desember 2024).

Bahtiyar, R., Lestanti, S., & Budiman, S. N. (2023). Penerapan Metode Fuzzy C-Means Clustering untuk Pengelompokan Kabupaten di Jawa Timur Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat. *Jurnal Mahasiswa Teknik Informatika*, *7*(5), 3701–3710. https://doi.org/10.36040/jati.v7i5.7812

Borg, I., & Groenen, P. (2005). *Modern Multidimensional Scaling*. New York, NY: Springer.

Cangur, S., Ercan, I., & Ozkaya, G. (2015). Co-plot method: A research on tobacco control in the European region. *Epidemiology Biostatistics and Public Health*, *12*(4). https://doi.org/10.2427/11480

Dama, H. Y., Lapian, A. L. C., & Sumual, J. I. (2016). Pengaruh Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) Terhadap Tingkat Kemiskinan di Kota Manado (Tahun 2005-2014). *Jurnal Berkala Ilmiah Efisiensi*, *16*(03), 549–561. http://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/jbie/article/view/13519

Dinas Pariwisata Daerah Istimewa Yogyakarta. (2024). *Statistik Kepariwisataan Daerah Istimewa Yogyakarta tahun 2023*. Dinas Pariwisata DIY.

Duarsa, F. A., & Wijaya, R. S. (2023). Analisis Pengaruh Pengeluaran Perkapita, RLS, AHH, Dan Jumlah Penduduk terhadap Ketimpangan Distribusi Pendapatan. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Ekonomi*, *8*(2), 117–124. https://doi.org/10.26877/ep.v8i2.17306

Gudono. (2011). *Analisis Data Multivariat* (Vol. 1). Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Härdle, W., & Simar, L. (2003). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Berlin: MD Tech.

Islami, M., & Handayani, L. (2019). Penerapan Analisis Multidimensional Scaling (MDS) Pada Pemetaan Kabupaten/Kota di Provinsi Sulawesi Tengah Berdasarkan Indikator Tenaga Kesehatan (Application of Multidimensional Scaling (MDS) Analysis to the Mapping of Districts/Cities in Central Sulawesi Province Based on Indicators of Health Workers). *Natural Science Journal of Science and Technology*, *08*(02), 138–143. https://doi.org/10.22487/25411969.2019.v8.i2.13544

LPMQ Kemenag. (2022a). *Qur'an Kemenag - Surah Al-Anbiya' ayat 90*. https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/21?from=90&to=90 (Diakses 15 Februari 2025).

LPMQ Kemenag. (2022b). *Qur'an Kemenag - Surah Al-Baqarah ayat 165* . https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/2?from=165&to=165 (Diakses 15 Februari 2025).

LPMQ Kemenag. (2022c). *Qur'an Kemenag - Surah Ar-Rahman ayat 46*. https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/55?from=46&to=46 (Diakses 15 Februari 2025).

Masuku, T. J., Paendong, M. S., & Langi, Y. A. R. (2014). Persepsi Konsumen Terhadap Produk Sepatu Olahraga di Sport Station Megamall dengan Menggunakan Analisis Multidimensional Scaling. *Jurnal Ilmiah Sains*, *14*(2), 68–72. https://doi.org/10.35799/jis.14.2.2014.5929

Mattjik, A. A., & Sumertajaya, I. M. (2011). *Sidik Peubah Ganda dengan menggunakan SAS*. Bogor: IPB Press.

Muliyawati, A., & Sasana, H. (2019). Analisis Determinan Kesejahteraan Masyarakat di Kabupaten/Kota Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta. *Jurnal Inovasi Daerah*, *II*(1), 41–56. https://doi.org/10.56354/jendelainovasi.v5i1.116

Mursyidah, H. (2017). Algoritma Polinomial Minimum untuk Membentuk Matriks Diagonal dari Matriks Persegi. *Jurnal Pendidikan Matematika FKIP Univ. Muhammadiyah Metro*, *6*(2). http://doi.org/10.24127/ajpm.v6i2.978

Poosapati, P., Shi, Y., Gebauer, J., & Song, Y. (2024). *An Application of Co-plot Analysis: A Multidimensional Scaling Data Visualization*. 91–95. https://doi.org/10.1145/3639479.3639498

Pratiwi, Y. E., Kiftiah, M., Wulan, E., & Intisari, R. (2017). Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Interval Menggunakan Metode Pangkat. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)*, *6*, 17–26. https://doi.org/10.26418/bbimst.v6i02.20600

Ramadhani, E., Rahmi, S., & Nurhasanah. (2022). *Multidimensional Scaling Biplot dalam Melihat Persepsi Mahasiswa Statistika Terhadap Keberhasilan Belajar* (Vol. 22, Issue 1). https://doi.org/10.29313/statistika.v22i1.341

Salsabila, T. A., & Wachidah, L. (2022). Analisis Multidimensional Scaling pada Pemetaan Kabupaten/Kota di Jawa Barat Berdasarkan Indikator Kesejahteraan Rakyat. *Bandung Conference Series: Statistics*, *2*(2), 173–179. https://doi.org/10.29313/bcss.v2i2.3701

Sembiring, C., Masinambow, V. A. J., Tumangkeng, S. Y. L., Studi, P., Pembangunan, E., Ekonomi, F., & Bisnis, D. (2023). Pengaruh Jumlah Penduduk, Tingkat Pendidikan dan Tingkat Pengangguran Terhadap Kemiskinan di Kota-Kota Provinsi Jawa Barat. *Jurnal Berkala Ilmiah Efisiensi*, *23*(2), 25–36. https://ejournal.unsrat.ac.id/v3/index.php/jbie/article/view/45324

Sugiantari, A. P., & Budiantara, I. N. (2013). Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Angka Harapan Hidup di Jawa Timur Menggunakan Regresi Semiparametrik Spline. *Jurnal Sains Dan Seni Pomits*, *2*(1), D37–D41. https://doi.org/10.12962/j23373520.v2i1.3132

Supranto, Prof. J. (2004). *Analisis Multivariat Arti &Interpretasi* (Vol. 1). Jakarta: PT Asdi Mahasatya.

Sutadji, E., Wargijono Utomo, Mp., Purnawirawan, O., Farich, R., Ratna Fajarwati, Mp. M., Carina, A., & Najih Gilang, Mp. R. (2022). *Analisis Data Multivariat*. Omera Pustaka.

Tumini, & Minatania, A. (2023). Visualisasi Data Covid-19 Tahun 2021 di Jawa Barat Menggunakan Google Data Studio. *Jurnal Informasi Dan Komputer*, *11*(1), 44–51. https://ojs.dcckotabumi.ac.id/index.php/jik/article/view/347/275

Walundungo, G. A., Paendong, M., & Manurung, T. (2014). *Penggunaan Analisis Multidimensional Scaling Untuk Mengetahui Kemiripan Rumah Makan Di Manado Town Square Berdasarkan Karakteristik Pelanggan*. 30–35. https://doi.org/10.35799/dc.3.1.2014.3806

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Kesejahteraan Sosial Ekonomi Provinsi DIY Tahun 2024

No.	Wilayah	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1.	Kulon Progo	459.078	75,49	9,20	37.976.680	1.152.288	2,01	15,62
2.	Bantul	1.092.647	74,80	9,81	35.842.510	1.730.515	3,62	11,66
3.	Gunungkidul	795.408	74,91	7,35	35.503.530	1.163.499	2,16	15,18
4.	Sleman	1.318.086	75,48	11,31	54.501.310	2.181.883	4,13	7,46
5.	Kota Yogyakarta	461.225	75,73	12,12	131.433.330	2.248.145	5,80	6,26

Lampiran 2. Hasil Standardisasi Data

No.	Wilayah	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1.	Kulon Progo	-0,9602	0,5145	-0,4066	-0,5112	-1,0255	-0,9847	1,0194
2.	Bantul	0,7010	-1,1921	-0,0794	-0,5630	0,0666	0,0488	0,0986
3.	Gunungkidul	-0,0783	-0,9201	-1,3990	-0,5712	-1,0044	-0,8884	0,9171
4.	Sleman	1,2921	0,4897	0,7253	-0,1104	0,9191	0,3762	-0,8781
5.	Kota Yogyakarta	-0,9545	1,1080	1,1598	1,7559	1,0442	1,4482	-1,1571

Lampiran 3. Jarak *Euclidean* antar Objek

Wilayah	Kulon Progo	Bantul	Gunungkidul	Sleman	Kota Yogyakarta
Kulon Progo	0,0000	2,9817	1,9606	3,9685	4,7839
Bantul	2,9817	0,0000	2,2623	2,4121	4,4086
Gunungkidul	1,9606	2,2623	0,0000	4,1367	5,5500
Sleman	3,9685	2,4121	4,1367	0,0000	3,2162
Kota Yogyakarta	4,7839	4,4086	5,5500	3,2162	0,0000

Lampiran 4. Matriks *Disparities* antar Objek

Wilayah	Kulon Progo	Bantul	Gunungkidul	Sleman	Kota Yogyakarta
Kulon Progo	0,000	2,7403	1,5212	3,9506	4,6498
Bantul	2,7403	0,000	2,1462	1,988	4,3915
Gunungkidul	1,5212	2,1462	0,000	3,9536	5,5402
Sleman	3,9506	1,988	3,9536	0,000	2,9536
Kota Yogyakarta	4,6498	4,3915	5,5402	2,9813	0,000

Lampiran 5. *Script* Metode *Co-Plot* MDS

```
# Load Library
library(readxl)
library(ggplot2)
library(ggrepel)

# Load Data
SKRIPSI <- read_excel("D:/Kuliah/SKRIPSI/SKRIPSI.xlsx")

# Pisahkan kolom wilayah dan data numerik
Wilayah <- SKRIPSI[[1]]
SKRIPSI_num <- SKRIPSI[, -1]

# Analisis Deskriptif
summary(SKRIPSI)

# Standardisasi Data
Z <- scale(SKRIPSI_num)

# Hitung Jarak Euclidean
dist_matrix <- dist(Z, method = "euclidean")
D <- as.matrix(dist_matrix)  # Matriks jarak asli
A <- D^2  # Matriks kuadrat jarak

# Matriks Transformasi (untuk B)
n <- nrow(D)
I <- diag(n)
J <- matrix(1, nrow = n, ncol = n)
V <- I - (1/n) * J

# Matriks B
B <- (-1/2) * V %*% A %*% V

# Eigen Decomposition
eigen_B <- eigen(B)
c <- eigen_B$values[1:2]  # Dua eigenvalue terbesar
d <- diag(c)
b <- eigen_B$vectors[, 1:2]  # Dua eigenvector terkait

# Koordinat Objek dalam 2 Dimensi
fit <- cmdscale(D, k = 2)
koordinat <- data.frame(
  Dimensi1 = fit[, 1],
  Dimensi2 = fit[, 2],
  Wilayah = Wilayah
)

# Hitung Jarak dari hasil koordinat MDS
D_hat <- dist(as.matrix(koordinat[, 1:2]), method = "euclidean")
D_hat_matrix <- as.matrix(D_hat)

# Hitung d_bar (rata-rata seluruh d_ip)
d_bar <- mean(D)

# Perhitungan Stress
stress_num <- sum((D - D_hat_matrix)^2)
stress_denom <- sum((D - d_bar)^2)
Stress <- sqrt(stress_num / stress_denom)
```

```
print(paste("Stress:", round(Stress, 4)))

# Hitung R-squared
R_squared <- 1 - (stress_num / stress_denom)
print(paste("R-squared:", round(R_squared, 4)))

# Plot Objek (Wilayah)
ggplot(koordinat, aes(x = Dimensi1, y = Dimensi2)) +
  geom_point(color = "red", size = 3) +
  geom_text_repel(aes(label = Wilayah), size = 3.5) +
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  annotate("text", x = 2.5, y = 2.5, label = "I", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = 2.5, label = "II", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = -2.5, label = "III", size = 6)
+
  annotate("text", x = 2.5, y = -2.5, label = "IV", size = 6) +
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Peta Objek MDS", x = "Dimensi 1", y = "Dimensi
2") +
  coord_fixed()

# Hitung rata-rata koordinat objek dan data standar
y_bar <- colMeans(koordinat[, c("Dimensi1", "Dimensi2")])  #
ganti dari w_bar ke y_bar
z_bar <- colMeans(Z)

# Hitung korelasi antara variabel dengan Dimensi MDS
r_jk <- matrix(0, ncol = ncol(Z), nrow = 2)
colnames(r_jk) <- colnames(Z)
rownames(r_jk) <- c("Dimensi1", "Dimensi2")

for (j in 1:ncol(Z)) {
  for (k in 1:2) {
    num <- sum((koordinat[, k] - y_bar[k]) * (Z[, j] -
z_bar[j]))
    denom <- sqrt(sum((koordinat[, k] - y_bar[k])^2) * sum((Z[,
j] - z_bar[j])^2))
    r_jk[k, j] <- num / denom
  }
}

#Plot Variabel
ggplot() +
  # Panah dari pusat (0,0) ke arah variabel
  geom_segment(data = variabel_df, aes(x = 0, y = 0, xend = x,
yend = y),
               arrow = arrow(length = unit(0.2, "inches")),
               color = "blue", size = 1) +

  # Label nama variabel
```

```
  geom_text_repel(data = variabel_df, aes(x = x, y = y, label =
label),
                  size = 3.5, color = "black") +

  # Garis sumbu
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +

  # Tema
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Plot Panah Variabel MDS", x = "Dimensi 1", y =
"Dimensi 2") +
  coord_fixed()


# Ubah ke data frame panah variabel
variabel_koordinat <- t(r_jk)
variabel_df <- data.frame(
  x = variabel_koordinat[, 1],
  y = variabel_koordinat[, 2],
  label = colnames(Z)
)

# CO-PLOT GABUNGAN
ggplot() +
  # Titik objek
  geom_point(data = koordinat, aes(x = Dimensi1, y = Dimensi2),
color = "red", size = 3) +
  geom_text_repel(data = koordinat, aes(x = Dimensi1, y =
Dimensi2, label = Wilayah), size = 3.5) +

  # Panah variabel
  geom_segment(data = variabel_df, aes(x = 0, y = 0, xend = x,
yend = y),
               arrow = arrow(length = unit(0.2, "inches")),
               color = "blue", size = 1) +
  geom_text_repel(data = variabel_df, aes(x = x, y = y, label =
label),
                  size = 3.5, color = "black") +

  # Garis kuadran
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  annotate("text", x = 2.5, y = 2.5, label = "I", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = 2.5, label = "II", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = -2.5, label = "III", size = 6)
+
  annotate("text", x = 2.5, y = -2.5, label = "IV", size = 6) +

  # Tema
  theme_minimal(base_size = 12) +
```

```
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Co-Plot MDS (Objek dan Variabel)",
       x = "Dimensi 1", y = "Dimensi 2") +
  coord_fixed()

# ROTASI KOORDINAT MDS
rotate_matrix <- function(theta_degrees) {
  theta <- theta_degrees * pi / 180
  matrix(c(cos(theta), -sin(theta),
           sin(theta),  cos(theta)), nrow = 2)
}

# Rotasi -90 derajat
R <- rotate_matrix(-90)
rotated_coords <- as.matrix(koordinat[, c("Dimensi1",
"Dimensi2")]) %*% R
koordinat$Dimensi1 <- rotated_coords[, 1]
koordinat$Dimensi2 <- rotated_coords[, 2]

# Hitung ulang korelasi setelah rotasi
y_bar <- colMeans(koordinat[, c("Dimensi1", "Dimensi2")])
r_jk <- matrix(0, ncol = ncol(Z), nrow = 2)
colnames(r_jk) <- colnames(Z)
rownames(r_jk) <- c("Dimensi1", "Dimensi2")

for (j in 1:ncol(Z)) {
  for (k in 1:2) {
    num <- sum((koordinat[, k] - y_bar[k]) * (Z[, j] -
z_bar[j]))
    denom <- sqrt(sum((koordinat[, k] - y_bar[k])^2) * sum((Z[,
j] - z_bar[j])^2))
    r_jk[k, j] <- num / denom
  }
}

variabel_df <- data.frame(
  x = r_jk[1, ],
  y = r_jk[2, ],
  label = colnames(Z)
)

# Plot Objek (Wilayah) Setelah Rotasi
ggplot(koordinat, aes(x = Dimensi1, y = Dimensi2)) +
  geom_point(color = "red", size = 3) +
  geom_text_repel(aes(label = Wilayah), size = 3.5) +
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  annotate("text", x = 2.5, y = 2.5, label = "I", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = 2.5, label = "II", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = -2.5, label = "III", size = 6)
+
  annotate("text", x = 2.5, y = -2.5, label = "IV", size = 6) +
```

```
  xlim(-4, 4) + ylim(-4, 4) +
  coord_fixed() +
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Peta Objek MDS Setelah Rotasi", x = "Dimensi 1",
y = "Dimensi 2")


# Plot Vektor Variabel Setelah Rotasi
ggplot() +
  geom_segment(data = variabel_df, aes(x = 0, y = 0, xend = x,
yend = y),
               arrow = arrow(length = unit(0.2, "inches")),
               color = "blue", size = 1) +
  geom_text_repel(data = variabel_df, aes(x = x, y = y, label =
label),
                  size = 3.5, color = "black") +
  annotate("text", x = 0.9, y = 0.9, label = "I", size = 6) +
  annotate("text", x = -0.9, y = 0.9, label = "II", size = 6) +
  annotate("text", x = -0.9, y = -0.9, label = "III", size = 6)
+
  annotate("text", x = 0.9, y = -0.9, label = "IV", size = 6) +
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  xlim(-1, 1) + ylim(-1, 1) +
  coord_fixed() +
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Plot Vektor Variabel (Setelah Rotasi)", x =
"Dimensi 1", y = "Dimensi 2")

# Co-plot Objek dan Variabel
ggplot() +
  geom_point(data = koordinat, aes(x = Dimensi1, y = Dimensi2),
color = "red", size = 3) +
  geom_text_repel(data = koordinat, aes(x = Dimensi1, y =
Dimensi2, label = Wilayah), size = 3.5) +
  geom_segment(data = variabel_df, aes(x = 0, y = 0, xend = x,
yend = y),
               arrow = arrow(length = unit(0.2, "inches")),
               color = "blue", size = 1) +
  geom_text_repel(data = variabel_df, aes(x = x, y = y, label =
label),
                  size = 3.5, color = "black") +
  geom_hline(yintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
```

```
  geom_vline(xintercept = 0, color = "black", linewidth = 0.5) +
  annotate("text", x = 2.5, y = 2.5, label = "I", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = 2.5, label = "II", size = 6) +
  annotate("text", x = -2.5, y = -2.5, label = "III", size = 6)
+
  annotate("text", x = 2.5, y = -2.5, label = "IV", size = 6) +
  xlim(-2.5, 3.5) + ylim(-2.5, 3.5) +
  coord_fixed() +
  theme_minimal(base_size = 12) +
  theme(
    panel.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    plot.background = element_rect(fill = "#f0f0f0", color =
NA),
    panel.grid.major = element_line(color = "white"),
    panel.grid.minor = element_line(color = "white")
  ) +
  labs(title = "Co-Plot MDS (Setelah Rotasi)", x = "Dimensi 1",
y = "Dimensi 2")

BOOSTRAP (masukkan setelah koordinat objek)
# ================================
# Bootstrap Uji Stabilitas MDS (Aman dari Error)
# ================================
set.seed(123)
n_boot <- 1000
n <- nrow(Z)
boot_coords <- array(NA, dim = c(n, 2, n_boot))

for (b in 1:n_boot) {
  samp_idx <- sample(1:n, replace = TRUE)
  Z_boot <- Z[samp_idx, ]
  dist_boot <- dist(Z_boot, method = "euclidean")
  fit_boot <- tryCatch(
    cmdscale(dist_boot, k = 2),
    error = function(e) NULL
  )

  if (!is.null(fit_boot) && nrow(fit_boot) == n &&
ncol(fit_boot) == 2) {
    boot_coords[, , b] <- fit_boot
  }
}

# Hitung rata-rata dan standar deviasi (abaikan NA akibat
iterasi gagal)
boot_sd <- apply(boot_coords, c(1, 2), sd, na.rm = TRUE)

# Gabungkan dengan data koordinat asli
stability_df <- data.frame(
  Wilayah = Wilayah,
  Dimensi1 = koordinat$Dimensi1,
  Dimensi2 = koordinat$Dimensi2,
  SD_Dimensi1 = boot_sd[, 1],
  SD_Dimensi2 = boot_sd[, 2]
)

print("Stabilitas Koordinat (Standar Deviasi per Dimensi):")
print(stability_df)
```

```
# ================================
# Plot Error Bar dari Hasil Bootstrap MDS
# ================================
library(ggplot2)

# Buat data frame dari hasil koordinat dan deviasi
plot_data <- data.frame(
  Wilayah = stability_df$Wilayah,
  x = stability_df$Dimensi1,
  y = stability_df$Dimensi2,
  sd_x = stability_df$SD_Dimensi1,
  sd_y = stability_df$SD_Dimensi2
)

# Plot dengan error bar horizontal (x) dan vertikal (y)
ggplot(plot_data, aes(x = x, y = y, label = Wilayah)) +
  geom_point(color = "steelblue", size = 3) +
  geom_errorbar(aes(ymin = y - sd_y, ymax = y + sd_y), width =
0.05, color = "gray60") +
  geom_errorbarh(aes(xmin = x - sd_x, xmax = x + sd_x), height =
0.05, color = "gray60") +
  geom_text(vjust = -1, size = 4.5) +
  theme_minimal() +
  labs(
    title = "Plot Stabilitas MDS dengan Bootstrap (Error Bar)",
    x = "Dimensi 1",
    y = "Dimensi 2"
  )
```

RIWAYAT HIDUP

Hanik Muafiyah, lahir di Lamongan pada tanggal 03 Oktober 2002. Penulis merupakan anak kelima serta anak terakhir dari Alm. Bapak Lasidi dan Ibu Surati. Penulis telah menempuh pendidikan mulai dari TK di TK Putra Bangsa yang lulus pada tahun 2009. Kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN Sambangrejo dan lulus pada tahun 2015. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di MTsN 1 Lamongan dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di MAN 2 Lamongan dan lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menempuh pendidikan perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti beberapa kegiatan. Penulis bergabung dalam organisasi HMPS "Integral" Matematika Tahun 2022 sebagai anggota Divisi *Internal Public Relation*. Pada tahun yang sama, penulis bergabung dalam organisasi daerah IKAMALA UIN Malang sebagai Bendahara II. Pada Tahun selanjutnya, penulis kembali bergabung dalam organisasi HMPS "Integral" Matematika sebagai Ketua Divisi *Internal Public Relation.* Penulis juga kembali mendapatkan amanah untuk menjadi Bendahara Umum dalam organisasi daerah IKAMALA UIN Malang. Pada tahun 2024 penulis bergabung dalam organisasi DEMA Fakultas Sains dan Teknologi pada Departemen Dalam Negeri.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hanik Muafiyah
NIM : 210601110098
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Implementasi Metode *Co-Plot Multidimensional Scaling* dalam Pemetaan Wilayah Berdasarkan Kesejahteraan Sosial Ekonomi (Studi Kasus: Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta)
Pembimbing I : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	16 Oktober 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	8 November 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	6 Desember 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	23 Desember 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	10 Januari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	12 Februari 2025	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	12 Februari 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	13 Februari 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	21 Februari 2025	ACC Bab I, II, dan III	9.
10.	25 Februari 2025	ACC Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	25 Februari 2025	ACC Seminar Proposal	11.
12.	29 April 2025	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	7 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	14 Mei 2025	Konsultasi Bab IV dan V	14.

Dipindai dengan CamScanner

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

15.	16 Mei 2025	ACC Bab IV dan V	15.
16.	16 Mei 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	16 Mei 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	16 Mei 2025	ACC Seminar Hasil	18.
19.	4 Juni 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	10 Juni 2025	ACC Sidang Skripsi	20.
21.	16 Juni 2025	ACC Keseluruhan	21.

Malang, 16 Juni 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner