

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR PREY* DENGAN
EFEK *ALLEE***

SKRIPSI

**OLEH:
DIANI SAPUTRI
NIM. 210601110061**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR PREY* DENGAN
EFEK *ALLEE***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Diani Saputri
NIM. 210601110061**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *PREDATOR PREY* DENGAN
EFEK *ALLEE***

SKRIPSI

**Oleh
Diani Saputri
NIM. 210601110061**

Telah Disetujui Untuk Diuji

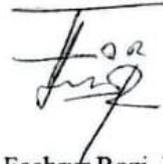
Malang, 4 Juni 2025

Dosen Pembimbing I



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Dosen Pembimbing II



Dr. Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Eka Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005



**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR PREY DENGAN
EFEK ALLEE**

SKRIPSI

Oleh
Diani Saputri
NIM. 210601110061

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 10 Juni 2025

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 1 : Juhari, M.Si

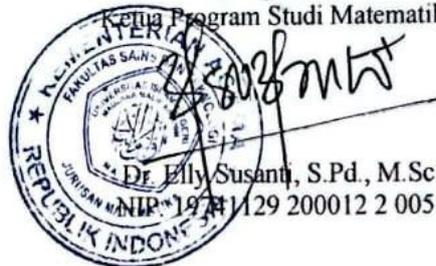
Anggota Penguji 2 : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji 3 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si



Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Diani Saputri

NIM : 210601110061

Program Studi : Matematika

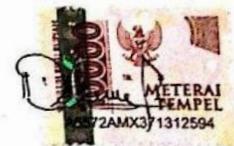
Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Predator Prey* dengan Efek *Allee*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juni 2025

Yang membuat pernyataan,



Diani Saputri
NIM. 210601110061

MOTO

”Selalu ada harga dalam sebuah proses. Nikmati saja lelah-lelah itu. Lebarakan lagi rasa sabar itu. Semua yang kau investasikan untuk menjadikan dirimu serupa yang kau impikan. Mungkin tidak akan selalu berjalan lancar. Tapi, gelombang-gelombang itu yang nanti bisa kau ceritakan”

(Boy Chandra)

“Pada akhirnya, ini semua hanyalah permulaan”

(Nadin Amizah)

”Orang lain ga akan bisa paham struggle dan masa sulitnya kita yang mereka ingintahu hanya bagian success storiesnya. Berjuanglah untuk diri sendiri walaupun gak ada yang tepuk tangan. Kelak diri kita dimasa depan akan sangat bangga dengan apa yang kita perjuangkan hari ini, tetap berjuang ya!”

PERSEMBAHAN

Puji syukur peneliti panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat-nya, sehingga peneliti berhasil menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta menyelesaikan penulisan skripsi ini. Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

1. Kepada panutanku Bapak Usman Pagalay dan Bapak Fachrur Rozi. Beliau yang selalu bekerja keras, memberi motivasi, dan memberi dukungan sehingga penulis mampu menyelesaikan program studi sampai selesai.
2. Terima kasih kepada kedua orang tua saya, Bapak Tumiran dan Ibu Tri Indrijani, S.Pd. yang selalu berjuang agar saya bisa mengenyam pendidikan setinggi-tingginya. Terima kasih, Ayah, atas kerja keras dan tanggung jawab yang menjadi teladan hidup saya. Terima kasih, Ibu, atas doa, kasih sayang, dan dukungan tanpa henti yang selalu menguatkan langkah saya. Terakhir, terima kasih atas segala hal yang kalian berikan yang tak terhitung jumlahnya.
3. Terima kasih untuk kedua kakakku Yayik Mavintantri dan Inggar Ariyani yang telah mendukung serta percaya pada tujuan-tujuan yang ingin kuraih.
4. Terima kasih kepada rekan-rekan saya. Atas tawa, cerita, dan semangat yang tak pernah putus. Kehadiran kalian membuat setiap langkah terasa lebih ringan dan setiap rintangan lebih mudah dilalui. Perjalanan ini tak akan indah tanpa kalian.
5. Kepada diriku sendiri, terima kasih telah bertahan hingga sejauh ini, bahkan di saat kepercayaan diri sempat goyah. Aku sadar bahwa setiap langkah kecil yang diambil adalah bagian berharga dari perjalanan ini, walaupun terkadang terasa berat dan lambat. Terima kasih karena terus memilih untuk berjuang hingga titik ini, dan tetap menjadi pribadi yang tak pernah lelah mencoba serta terus berusaha.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, Sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model *Predator Prey* Dengan Efek *Allee*” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku dosen pembimbing I, yang telah banyak memberikan arahan, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen pembimbing II, yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen penguji I yang telah memberikan arahan, saran, dan masukan berharga untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
7. Juhari, M.Si., selaku dosen penguji II yang dengan penuh perhatian memberikan bimbingan, koreksi, serta kontribusi penting dalam proses menyempurnakan skripsi ini.
8. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen wali selama masa kuliah yang telah memberikan arahan dan semangat dalam perkuliahan.

9. Segenap dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Bapak, Ibu, Kakak dan seluruh keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, semangat serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil
12. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2021.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 10 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN TEORI	6
2.1 Teori Pendukung.....	6
2.1.1 Efek <i>Allee</i>	6
2.1.2 Sistem Dinamik	7
2.1.3 Titik Kesetimbangan Sistem <i>Otonomus</i>	8
2.1.4 Sistem Dinamik Diskrit	9
2.1.5 Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linear	10
2.1.6 Karakteristik Pendekatan Solusi Persamaan Beda	13
2.1.7 Pendekatan Metode Beda Hingga Standar	14
2.1.8 Model <i>Predator Prey</i>	17
2.1.9 Fungsi Respon	18
2.1.10 Model Logistik.....	20
2.1.11 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	22
2.1.12 Analisis Kestabilan <i>Fixed Point</i>	23
2.2 Kajian al-Qur'an Mengenai Dinamika Populasi	25
BAB III METODE PENELITIAN	28
3.1 Jenis Penelitian	28
3.2 Pra Penelitian.....	28
3.3 Tahapan Penelitian	28
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	30
4.1 Transformasi Model Kontinu <i>Predator Prey</i>	30
4.2 Analisis Dinamik Model Kontinu <i>Predator Prey</i>	33

4.2.1 Titik Kesetimbangan Model <i>Predator Prey</i> dengan Efek <i>Allee</i>	33
4.2.2 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan	36
4.2.3 Simulasi Model <i>Predator Prey</i> dengan Efek <i>Allee</i> dan Interpretasi.....	43
4.3 Penyelesaian Model <i>Predator Prey</i> dalam Pandangan Islam	60
BAB V PENUTUP	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran	63
DAFTAR PUSTAKA	64
LAMPIRAN	66
RIWAYAT HIDUP	72

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Tipe dan Bentuk Fungsi Respon	20
Tabel 4.1	Deskripsi Nilai Variabel dan Nilai Parameter	33
Tabel 4.2	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>predator</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.09$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	45
Tabel 4.3	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>prey</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.09$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	47
Tabel 4.4	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>predator</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.12$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	50
Tabel 4.5	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>prey</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.12$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	52
Tabel 4.6	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>predator</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.01$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	54
Tabel 4.7	Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi <i>prey</i> menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$ dan $\mu = 0.01$ pada interval waktu $t \in [0,300]$	56

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit dengan efek <i>allee</i> $\mu = 0.09$ pada populasi <i>predator</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$	45
Gambar 4.2	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit tanpa efek <i>allee</i> pada populasi <i>prey</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ Saat $t \in [0, 300]$	47
Gambar 4.3	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit dengan efek <i>allee</i> $\mu = 0.12$ pada populasi <i>predator</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$	50
Gambar 4.4	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit tanpa efek <i>allee</i> pada populasi <i>prey</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ Saat $t \in [0, 300]$	52
Gambar 4.5	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit dengan efek <i>allee</i> $\mu = 0.01$ pada populasi <i>predator</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$	54
Gambar 4.6	Potret fase grafik <i>predator prey</i> kontinu dan diskrit tanpa efek <i>allee</i> pada populasi <i>prey</i> terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ Saat $t \in [0, 300]$	56
Gambar 4.5	Pengaruh efek <i>allee</i> terhadap populasi <i>predator</i> untuk $N_t = 0.3$ dan $P_t = 0.2$	58

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Matlab Gambar (4.1).....	66
Lampiran 2	Program Matlab Gambar (4.2).....	68
Lampiran 3	Program Matlab Gambar (4.3).....	70
Lampiran 4	Program Maple	71

DAFTAR SIMBOL

Simbol- simbol yang digunakan pada penelitian ini memiliki makna sebagai berikut:

N_t : Banyaknya kepadatan populasi *prey* pada waktu t

P_t : Banyaknya kepadatan populasi *predator* pada waktu t

r : laju pertumbuhan intrinsik *prey*

a : Koefisien predasi, mengukur tingkat interaksi antara *predator* dan *prey*

μ : Efek *allee* pada populasi *predator*

λ : Nilai eigen dalam menentukan stabilitas titik kesetimbangan

ABSTRAK

Saputri, Diani. 2025. **Analisis Dinamik Model Predator Prey dengan Efek Allee** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: Model *Predator Prey*; Efek *Allee*; Analisis Kestabilan.

Model *predator prey* merupakan salah satu persamaan diferensial tak linier yang menggambarkan dinamika populasi antar dua spesies yang saling berinteraksi di suatu ekosistem. Salah satunya diperlihatkan dalam bentuk model *predator prey* dengan mempertimbangkan adanya efek *allee* pada populasi *predator*. Fokus utama penelitian adalah pada model yang telah mengalami perubahan dari bentuk diskrit menjadi bentuk kontinu. Melalui analisis sistem dinamik, diperoleh gambaran mengenai perilaku solusi dinamik, khususnya pada titik kesetimbangan serta sifat kestabilannya. Hasil analisis menunjukkan bahwa model ini memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu E_1 dan E_2 yang bersifat tidak stabil, serta E_3 yang dapat menjadi stabil apabila memenuhi syarat tertentu. Kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut diperlihatkan melalui simulasi numerik untuk menguji hasil analisis yang dilakukan. Dalam simulasi ini, beberapa parameter model disesuaikan untuk menunjukkan bagaimana efek *allee* dapat mengubah kondisi kestabilan dari tidak stabil menjadi stabil pada populasi *predator*. Saran untuk penelitian selanjutnya adalah melakukan validasi lebih lanjut terhadap hasil penelitian ini.

ABSTRACT

Saputri, Diani. 2025. **Dynamic Analysis of Model of Predator Prey with Allee Effect**. Thesis. Mathematics Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Predator Prey Model; Allee Effect; Stability Analysis.

The predator prey model is a non-linear differential equation that describes the population dynamics between two interacting species in an ecosystem. One of them is shown in the form of a predator prey model by considering the Allee effect on predator populations. The main focus of the research is on models that have undergone a change from a discrete form to a continuous form. Through dynamic system analysis, an overview of the behavior of dynamic solutions is obtained, especially at the equilibrium point and its stability properties. The results of the analysis show that this model has three equilibrium points, namely E_1 and E_2 which are unstable, and E_3 which can become stable if certain conditions are met. The stability of these equilibrium points is shown through numerical simulations to test the results of the analysis carried out. In this simulation, several model parameters were adjusted to show how the allee effect can change stability conditions from unstable to stable in predator populations. Suggestions for future research include further validation of these findings.

مستخلص البحث

سافوتري، ديابي. ٢٠٢٥. التحليل الديناميكي لنموذج المفترس والفريسة بتأثير "ألي". البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج المشرف: (١) الدكتور عثمان باجالاي الماجستير في العلوم ، (٢) الدكتور فخرالرازي، الماجستير في العلوم

الكلمات الاماسية: نموذج المفترس والفريسة، تأثير " ألي"، تحليل الاستقرار .

يعد نموذج المفترس والفريسة هي من بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية فيها التي نصف الديناميات السكانية بين النوعين يتفاعلان في النظام البيئي. ويعرض احد هذه النماذج في صورة نموذج المفترس في مجموعة المفترسات والفريسة مع اخذ تأثير "ألي" في مجتمع المفترسات بعين الاعتبار. التركيز الرئيسي (*Allee effect*) بعين الاعتبار من هذا البحث هو النموذج المثقير من شكل منفصل الى شكل مستمر. من تحليل النظم الديناميكية، حصل ما على نظرة عامة على سلوك الحلول الديناميكية عند نقطة التوازن وخصائص استقرارها خاصة. حصول التحليل يدل أنّ هذه النموذج تملك ثلاث نقاط التوازن، منهنّ نقطة مستقرّة و نقطة غير مستقرّة و نقطة تكون مستقرّة بشروط معينة. استقرارهنّ يظهر من المحاكاة العددية لامتحان حصول التحليل. في هذه المحاكاة، حسبت معلمات النموذج لتدليل عن وجود تأثير "ألي" يغيّر حالة الاستقرار كانت من غير مستقرّة الى مستقرّة في سكان المفترسين الاقتراح من التحليل التالي هو ان يجرأ المحلّي تحقّقا استمرارا عن حصول هذا التحليل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Predasi adalah bentuk interaksi antara dua populasi, yaitu *predator* dan *prey*, di mana keberadaan *predator* berdampak negatif pada pertumbuhan populasi *prey*, tetapi memberikan dampak positif pada pertumbuhan populasi *predator*. Konsep model *predator prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1928, yang kini dikenal sebagai model Lotka-Volterra. Model sederhana ini kemudian mengalami berbagai pengembangan, salah satunya dilakukan oleh Wang, Zhang, dan Liu pada tahun 2011, yang membuat empat model pada *predator prey*.

Model diskrit dapat dilakukan kontinuasi menggunakan berbagai metode, salah satunya adalah metode Euler. Metode ini menggunakan pendekatan beda hingga untuk mendekati turunan pertama dengan cara beda maju atau beda mundur. Sebagai contoh, dalam penelitian Wang et al. (2011) model *predator prey* diskrit dengan efek *allee* diubah menjadi model kontinu melalui penerapan metode Euler maju.

Interaksi antarspesies memiliki peran penting dalam ekosistem yang dinamis, memengaruhi perkembangan populasi. Salah satu pendekatan yang digunakan untuk menggambarkan interaksi ini adalah model populasi, khususnya model *predator prey*. Model ini menunjukkan bagaimana pemangsaan menjadi interaksi kunci yang memengaruhi dinamika populasi kedua spesies, sekaligus menjaga keseimbangan ekosistem. Dengan mempertimbangkan faktor seperti tingkat pertumbuhan, kemampuan adaptasi, dan dampak lingkungan memiliki berbagai

teori dan eksperimen telah dikembangkan untuk menguji validitas serta stabilitas model ini dalam situasi nyata (Kimmel & Axelrod, 2015). Dalam Al-Qur'an Surat al-Hijr ayat 20 telah tertulis sebagaimana berikut:

وَجَعَلْنَا لَكُمْ فِيهَا مَعَايِشَ وَمَنْ لَسْتُمْ لَهُ بِرَازِقِينَ ﴿٢٠﴾

Artinya: “Dan Kami telah menjadikan padanya sumber-sumber kehidupan untuk keperluanmu, dan (Kami ciptakan pula makhluk-makhluk yang bukan kamu pemberi rezekinya).” (Q.S al Hijr [15]: 20), (Kementerian Agama, 2022).

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah menyediakan berbagai sarana kehidupan bagi makhluk di bumi Abdullah bin Muhammad (2003). Setiap ekosistem memiliki peran, manfaat, dan saling ketergantungan antar makhluk hidup. Penelitian tentang hubungan *predator prey* membantu memahami pentingnya menjaga keseimbangan ekosistem dan rantai makanan.

Efek *allee* adalah fenomena biologis di mana terdapat hubungan positif antara kepadatan populasi dan laju pertumbuhan. Pada populasi dengan kepadatan rendah, laju pertumbuhan menurun drastis karena sulitnya individu menemukan pasangan, serta gangguan sosial, depresi akibat perkawinan sedarah, dan keterbatasan sumber daya Celik dan Duman (2009). Efek ini sering menjadi perhatian karena dapat memicu ketidakstabilan dan meningkatkan risiko kepunahan, terutama pada populasi kecil. Namun, ketika kepadatan meningkat, efek ini cenderung berkurang, memungkinkan populasi kembali stabil jika kondisi lingkungan mendukung.

Model *predator prey* yang sering dikaji dalam literatur matematika dan ekologi adalah model Lotka-Volterra dalam bentuk kontinu. Sebagai contoh, Sakinah (2011) melakukan analisis global terhadap model *predator prey* dengan perlindungan pada *prey*, sementara Widayani (2012) menganalisis dinamika model

predator prey dengan perlindungan pada *prey* yang terinfeksi. Kedua penelitian tersebut berfokus pada penentuan titik kesetimbangan, syarat eksistensi, serta jenis kestabilan titik-titik kesetimbangan. Meskipun memberikan kontribusi penting terhadap pemahaman sistem *predator prey*, model yang digunakan berbeda dengan model yang dikaji dalam penelitian ini.

Sementara itu, studi terkait efek *allee* pada dinamika populasi *predator prey* masih relatif terbatas, terutama pada model diskrit. Penelitian oleh Wang et al. (2011) merupakan salah satu yang mengkaji efek *allee* pada *predator* dalam model diskrit yang kemudian ditransformasikan menjadi bentuk kontinu. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa efek *allee* dapat meningkatkan risiko kepunahan bagi populasi kecil, terutama ketika tidak ada strategi konservasi yang memadai.

Namun demikian, terdapat kekurangan yang dapat diidentifikasi dari literatur terdahulu. Pertama, sebagian besar penelitian terdahulu menggunakan pendekatan diskrit, padahal dalam praktiknya, banyak fenomena populasi yang lebih realistis dimodelkan secara kontinu. Kedua, efek *allee* pada *prey* maupun *predator* belum banyak dianalisis secara bersamaan dalam kerangka model kontinu. Ketiga, belum terdapat cukup eksplorasi terhadap pengaruh simultan dari parameter efek *allee* terhadap kestabilan sistem dan potensi kepunahan populasi. Berdasarkan celah penelitian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan dan menganalisis model kontinu *predator prey* yang mempertimbangkan efek *allee* pada *predator*. Dengan mempertimbangkan efek *allee* secara eksplisit dalam model kontinu, diharapkan hasil analisis ini dapat memberikan wawasan baru dalam pengelolaan konservasi populasi serta memperkaya kajian teoritis dalam dinamika sistem ekologi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana proses transformasi model kontinu dari model diskrit dengan efek *allee* pada *predator*?
2. Bagaimana analisis dinamik pada model kontinu *predator prey* dengan efek *allee*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk melakukan transformasi model kontinu *predator prey* yang mempertimbangkan efek *allee* dalam model tersebut.
2. Untuk melakukan analisis dinamik serta simulasi model dilakukan uji parameter dengan efek *allee* secara numerik.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan pada penelitian ini, terdapat manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Penelitian ini dapat memberikan pemahaman yang lebih baik mengenai dinamika populasi *predator prey*, terutama dalam efek *allee* pada populasi *predator* yang dapat memengaruhi pertumbuhan dan stabilitas populasi.
2. Penelitian ini memberikan informasi yang relevan bagi kebijakan biologi konservasi dan rehabilitasi habitat, dengan memahami bagaimana efek *allee* dapat mempengaruhi spesies.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tetap fokus pada tujuan yang diinginkan, maka perlu untuk menetapkan beberapa batasan masalah sebagai berikut:

1. Model *predator prey* diskrit dengan efek *allee* pada populasi *predator* mengacu pada Wang et al. (2011) persamaan dalam bentuk diskrit sebagai berikut:

$$N_{t+1} = N_t + rN_t(1 - N_t) - aN_tP_t$$

$$P_{t+1} = P_t + aP_t(N_t - P_t) \left(\frac{P_t}{\mu + P_t} \right)$$

2. Penelitian yang dilakukan terdapat nilai besaran parameter yakni $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$ efek *allee* menunjukkan peningkatan populasi pada densitas tertentu. Jika efek *allee* pada *predator* yang terpengaruh, dengan nilai konstanta $\mu = 0.09$. Sistem ini merujuk pada penelitian sebelumnya (Wang et al., 2011).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Efek *Allee*

Efek *allee* adalah penurunan laju pertumbuhan populasi pada kepadatan rendah, yang disebabkan oleh kesulitan dalam menemukan pasangan, menghambat reproduksi dan kelangsungan hidup. Contoh nyata efek *allee* terlihat pada populasi kupu-kupu *fritillary Glanvill (Melitaea cinxia)*, yang terancam punah dan menurun di habitat alaminya (Courchamp et al, 1999). Oleh karena itu, pemahaman tentang efek *allee* sangat penting untuk upaya konservasi dan pengelolaan spesies yang terancam punah.

Dalam pengamatan terhadap perilaku hewan, ditemukan bahwa kerja sama antar individu dalam populasi dapat memberikan dampak positif, terutama ketika ukuran populasi rendah. Fenomena ini dikenal sebagai efek *allee*, di mana interaksi sosial antar individu sangat penting untuk kelangsungan hidup dan reproduksi mereka. Penelitian Stephens dan Sutherland (1999) menunjukkan bahwa pada populasi dengan kepadatan rendah, individu sering kesulitan menemukan pasangan untuk berkembang biak, yang dapat menyebabkan penurunan laju pertumbuhan populasi.

Kepadatan populasi *prey* dilambangkan sebagai (N_t), sedangkan kepadatan populasi *predator* dilambangkan dengan (P_t), laju pertumbuhan dilambangkan dengan (r), sementara tingkat interaksi dilambangkan oleh (a), dan efek *allee* pada populasi *predator* diberi simbol (μ). Jika efek *allee* pada

populasi *predator* dinyatakan sebagai fungsi $\left(\frac{P}{\mu+P}\right)$, maka sistem persamaan pada penelitian Wang et al. (2011) menjadi

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + rN_t(1 - N_t) - aN_tP_t \\ P_{t+1} &= P_t + aP_t(N_t - P_t) \left(\frac{P_t}{\mu + P_t} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sebuah konsep yang menggambarkan keadaan atau kondisi yang mengalami perubahan seiring berjalannya waktu, yang biasa disimbolkan dengan variabel waktu (t). Terdapat dua kategori sistem dinamik yang berbeda dapat diterapkan secara fundamental dibedakan berdasarkan sifat waktu tersebut, yaitu sistem dinamik diskrit, di mana waktu dinyatakan dalam bilangan bulat ($t \in Z$ atau N), dan sistem dinamik kontinu, di mana waktu dinyatakan dalam bilangan real ($t \in \mathbb{R}$). Menurut Arrowsmith (1990), sistem dinamik yang bersifat diskrit umumnya direpresentasikan dalam bentuk persamaan beda, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$x_{t+1} = f(x), \text{ di mana } t \in Z \text{ atau } N.$$

Sementara itu, apabila waktu dianggap kontinu, maka sistem dinamik tersebut dinyatakan dalam bentuk yang berbeda, yaitu melalui sistem persamaan diferensial, yang dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

Secara geometris, sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik dalam bidang fase, yang mengikuti lintasan-lintasan tertentu atau kurva solusi dari sistem persamaan diferensial Perko (2001). Bidang fase ini

memungkinkan kita untuk melihat perubahan keadaan sistem seiring waktu, dengan setiap titik menunjukkan keadaan sistem pada waktu tertentu. Lintasan-lintasan ini mencerminkan evolusi sistem secara kontinu, menggambarkan perubahan variabel-variabel sistem dengan berkesinambungan.

2.1.3 Titik Keseimbangan Sistem *Otonomus*

Sebuah sistem persamaan diferensial yang tidak secara eksplisit bergantung pada variabel bebas waktu (t) disebut sebagai sistem *otonom*. Pada sistem ini, laju perubahan variabel-variabel keadaan hanya bergantung pada nilai dari variabel-variabel itu sendiri, bukan pada waktu secara langsung. Sistem *otonom* biasanya dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

di mana f dan g merupakan fungsi-fungsi yang bernilai riil, di mana keduanya hanya bergantung pada variabel x dan y tanpa melibatkan variabel waktu t . Sistem seperti ini disebut *otonom* karena evolusi variabel-variabelnya, x dan y , tidak dipengaruhi secara langsung oleh waktu t , melainkan hanya oleh keadaan sistem pada saat itu (Boyce & DiPrima, 2009).

Apabila pada koefisien $\frac{dx}{dt} = ax + by$, $\frac{dy}{dt} = cx + dy$ dengan a, b, c dan d

adalah konstanta. Jika dimisalkan bahwa $ad - bc \neq 0$, maka titik $(0, 0)$ merupakan satu-satunya titik kritis, dengan persamaan karakteristik yang berbentuk:

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + (ad - bc) = 0$$

dengan λ_1 dan λ_2 merupakan akar dari persamaan di atas. Dalam menentukan kestabilan titik kesetimbangan didapat dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A , yaitu $(A - \lambda I)x = 0$. Secara umum pada kestabilan titik kesetimbangan mempunyai tiga perilaku sebagai berikut:

Teorema 2.1

1. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem di atas stabil jika dan hanya jika kedua akar bersifat riil negatif atau memiliki bagian riil yang tidak positif.
2. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem di atas stabil asimtotik jika dan hanya jika kedua akar bersifat riil negatif atau memiliki bagian riil negatif.
3. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem di atas tidak stabil jika salah satu (atau kedua) akar bersifat riil positif, atau jika paling tidak satu akar memiliki bagian riil positif. (Santoso, 1988).

2.1.4 Sistem Dinamik Diskrit

Fenomena-fenomena yang berkaitan dengan waktu yang berjalan secara diskrit dapat direpresentasikan menggunakan persamaan beda. Contohnya, dalam situasi di mana populasi suatu spesies berkembang secara diskrit, jumlah populasi pada waktu ke- $(n + 1)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi dari populasi pada waktu ke- n . Jika terdapat interaksi antara dua spesies yang saling memengaruhi satu sama lain, maka jumlah populasi keduanya pada waktu ke- $(n + 1)$ dapat dituliskan dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{2.2}$$

di mana f dan g disebut sebagai fungsi pembangkit dari sistem tersebut. Fungsi ini menentukan bagaimana populasi kedua spesies berkembang dari satu periode ke periode berikutnya. Apabila f dan g bergantung pada suatu parameter a , yang dapat mencerminkan faktor-faktor seperti tingkat pertumbuhan atau kapasitas lingkungan, maka fungsi pembangkit tersebut dapat dinyatakan sebagai $f(a, x, y)$ dan $g(a, x, y)$ (Clark & Brandt, 2024).

Sistem persamaan beda seperti ini sering digunakan dalam model populasi ekologi untuk menggambarkan dinamika populasi spesies yang berkembang secara diskrit dari waktu ke waktu, baik dalam lingkungan sederhana maupun yang melibatkan interaksi antarspesies.

2.1.5 Sistem Dinamik Diskrit Tak-Linear

Titik (x^*, y^*) disebut sebagai titik kesetimbangan dari persamaan jika memenuhi syarat bahwa $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$, di mana f dan g adalah fungsi pembangkit dari sistem tersebut. Dalam hal ini, titik kesetimbangan mengacu pada kondisi di mana sistem berada dalam keadaan stabil, yaitu tidak ada perubahan dalam nilai x dan y dari waktu ke waktu.

Jika fungsi f dan g mengandung perkalian antara variabel yang tidak bebas, sistem ini disebut sistem dinamik diskrit tak linear. Sistem ini lebih kompleks dibandingkan sistem linear karena hubungan antar variabel tidak linear, sehingga interaksi variabel bisa menghasilkan perilaku tak terduga, seperti adanya lebih dari satu titik keseimbangan. Kompleksitas ini menjadikan analisis sistem

dinamik tak linear lebih menantang, memerlukan pendekatan dan metode canggih untuk memahami dan memprediksi evolusi sistem.

Misalkan titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem tak linear. Untuk menentukan kestabilannya, kita lakukan analisis linearisasi dengan memperluas fungsi f dan g menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik tersebut. Fungsi-fungsi ini kemudian didekati dengan bentuk linear. Setelah itu, kestabilan dianalisis melalui eigenvalue matriks Jacobian. Jika eigenvalue memiliki bagian real negatif, titik tersebut stabil; jika ada yang positif, titik tersebut tidak stabil. Analisis ini memberikan gambaran tentang respons sistem terhadap gangguan kecil di sekitar titik kesetimbangan.

Langkah linearisasi sangat penting untuk memahami dinamika sistem tak linear, karena menyederhanakan analisis perilaku sistem yang lebih rumit. Proses linearisasi dilakukan dengan ekspansi Taylor terhadap fungsi f dan g di sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) . Ekspansi Taylor untuk fungsi f dan g dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} (x_n - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} (y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Di mana $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ adalah suku sisa, yang memenuhi

$$\eta_1(x_n, y_n) / [(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ dan}$$

$$\eta_2(x_n, y_n) / [(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ untuk}$$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)$. Oleh karena itu, $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ dapat diabaikan karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan, maka sistem pada persamaan (2.5) dapat didekati dengan

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) \\y_{n+1} &= y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) \\y_{n+1} &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)\end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan memisalkan $u_n = x_n - x^*$ dan $v_n = y_n - y^*$, maka sistem (2.3) akan menjadi

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}u_n + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}v_n \\v_{n+1} &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}u_n + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}v_n\end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\vec{W}_{n+1} = J(x^*, y^*)\vec{W}_n,$$

dengan $\vec{W}_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ dan $J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi (Clark

& Brandt, 2024).

2.1.6 Karakteristik Pendekatan Solusi Persamaan Beda

Perhatikan persamaan beda berorde k :

$$y(n+k) + p_1y(n+k-1) + \dots + p_ky(n) = 0, \quad (2.4)$$

dengan persamaan karakteristik yang berbentuk:

$$\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{(n+k-1)} + \dots + p_k\lambda^n = 0$$

Jika $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$ Akar-akar dari persamaan karakteristik yang terkait dengan persamaan beda (2.4) dapat digunakan untuk menentukan sifat kestabilan sistem dinamik. Oleh karena itu, berlaku definisi 2.2 berikut:

Definisi 2.2

Menurut Clark dan Brandt (2024), semua solusi dari persamaan (2.4) akan konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika semua akar dari persamaan karakteristik yang terkait dengan sistem tersebut memiliki bagian real negatif. Hal ini menunjukkan bahwa setiap solusi yang dimulai dari kondisi awal manapun akan berkurang seiring waktu dan mendekati nilai nol, yang berarti sistem tersebut stabil secara asimtotik. Jika ada satu atau lebih akar dengan bagian real positif, solusi akan menjauh dari titik keseimbangan, menunjukkan ketidakstabilan sistem. Dengan kata lain, stabilitas asimtotik merupakan indikator penting dalam menganalisis perilaku jangka panjang dari sistem dinamik yang sedang dipelajari.

$$\text{maks } \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, \dots, |\lambda_k|\} \leq 1$$

Teorema 2.3

Persamaan kuadrat $f(\lambda) = \lambda^2 - p_1\lambda + p_2 = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi syarat $|\lambda_i| \leq 1, i = 1, 2$ jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi (Clark & Brandt, 2024):

1. $f(1) = 1 - p_1 + p_2 > 0$
2. $f(-1) = 1 + p_1 + p_2 > 0$
3. $f(0) = p_2 < 1$.

Sebagai contoh, jika matriks Jacobi dari suatu sistem yang dilinierkan adalah:

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

maka nilai eigen dari matriks Jacobi merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

atau dalam bentuk yang lebih umum:

$$\lambda^2 - p_1\lambda + p_2 = 0.$$

2.1.7 Pendekatan Metode Beda Hingga Standar

Persamaan diferensial merupakan alat matematis penting yang digunakan dalam berbagai bidang untuk menggambarkan perubahan variabel seiring waktu atau ruang. Salah satu cara efektif untuk menyelesaikannya adalah dengan metode beda hingga, yang mendekati turunan pertama fungsi. Beberapa metode yang digunakan untuk mendekati turunan pertama antara lain beda maju, beda pusat, dan beda mundur, masing-masing dengan karakteristik yang dapat disesuaikan dengan kondisi masalah. Untuk pendekatan turunan kedua, metode beda pusat sering dipilih karena akurasinya yang lebih tinggi.

Salah satu metode beda hingga yang paling standar dan umum digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah Metode Euler. Metode ini cukup populer karena kesederhanaannya dan kemudahan implementasinya dalam berbagai aplikasi. Dengan menggunakan Metode Euler, kita dapat memperkirakan nilai dari

fungsi yang diinginkan dengan cukup akurat, sehingga sangat bermanfaat dalam pemecahan berbagai masalah matematis dan ilmiah. Untuk lebih memahami konsep ini, mari kita perhatikan ekspansi deret Taylor dari $x(t)$ pada titik t_n sebagai berikut dimana $h > 0$:

$$x(t_n + h) = x(t_n) + h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots \quad (2.5)$$

$$x(t_n - h) = x(t_n) - h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots \quad (2.6)$$

Menurut persamaan (2.5), didapatkan

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} + O(h),$$

Dalam hal ini

$$O(h) = \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots$$

$O(h)$ merupakan suku sisa yang dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan metode beda maju untuk fungsi x adalah

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}$$

Jika dinyatakan $x_n = x(t_n)$ dan $x_{n+1} = x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan metode beda maju dapat dinyatakan sebagai:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), diperoleh

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h} + O(h).$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan metode beda mundur untuk fungsi x adalah

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h}$$

Jika dinyatakan $x_n = x(t_n)$ dan $x_{n-1} = x(t_n - h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan metode beda mundur dapat dinyatakan sebagai:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{h}$$

Beda pusat didekati dengan operasi pengurangan persamaan (2.5) dengan persamaan (2.6) diperoleh

$$x(t_n + h) - x(t_n - h) = 2h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} - 2 \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots$$

Sehingga akan menjadi

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} &= \frac{x(t_n+h) - x(t_n-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_n} + \dots \\ &= \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h} + O(h^2). \end{aligned}$$

Jika dinyatakan $x_{n-1} = x(t_n - h)$ dan $x_{n+1} = x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan metode beda pusat dapat dinyatakan sebagai (Banagaaya, 2008):

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_n} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h}$$

Metode Euler maju adalah salah satu skema diskrit yang paling sederhana dan umum digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial. Metode ini menggunakan pendekatan beda maju, di mana turunan pertama $\frac{dx}{dt}$ digantikan oleh

$$\frac{[x(t_n + h) - x(t_n)]}{h}$$

Di mana h adalah ukuran langkah (Erjaee G.H., Alnasr, 2001).

Pada bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Ruas kiri dari persamaan diferensial dapat digantikan oleh pendekatan dengan beda maju, yaitu:

$$\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} = f(x(t_n), y(t_n))$$

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} = g(x(t_n), y(t_n))$$

Sehingga, diskritisasi dengan metode Euler dapat dituliskan dalam bentuk sederhana sebagai berikut:

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n))$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n))$$

Atau dapat dituliskan seperti berikut ini:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n) = f(x_n, y_n)h$$

$$y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n) = g(x_n, y_n)h$$

2.1.8 Model Predator Prey

Model *predator prey* diperkenalkan pertama kali oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1928, yang kemudian dikenal dengan nama model Lotka-Volterra. Model ini menggambarkan dinamika interaksi antara populasi mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*), dan dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d)\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan a, b, c , dan d adalah konstanta positif. $N(t)$ dan $P(t)$ masing-masing menyatakan jumlah populasi *predator* dan *prey* pada waktu t .

Suku aN menggambarkan pertumbuhan populasi *prey* tanpa kehadiran *predator*, di mana mangsa bertambah secara eksponensial. Suku $-bNP$ dan cNP merepresentasikan interaksi antara kedua spesies. Populasi *prey* berkurang karena dimangsa oleh *predator*, sedangkan populasi *predator* meningkat karena memperoleh sumber makanan dari mangsa. Suku $-dP$ menggambarkan penurunan populasi *predator* akibat kelangkaan *prey*, yang mengakibatkan predator tidak memiliki cukup makanan untuk bertahan hidup.

Model ini mencerminkan keseimbangan ekosistem, di mana adanya interaksi antara *predator* dan *prey* memengaruhi populasi keduanya secara dinamis. Ketika *prey* melimpah, *predator* dapat bertahan hidup dan berkembang, tetapi ketika *prey* menurun, populasi predator juga akan berkurang. Model Lotka-Volterra menjadi dasar bagi banyak penelitian lanjutan dalam ekologi matematika. (Perko, 2001).

2.1.9 Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), pemahaman hubungan antara *predator* dan *prey* adalah dasar utama dalam studi ekologi. Salah satu aspek pentingnya adalah laju pemangsaan oleh *predator*, yang sering disebut dengan fungsi respon. Fungsi respon ini menggambarkan bagaimana jumlah *prey* yang ditangkap *predator*

dipengaruhi oleh kepadatan populasi *prey* dan karakteristik *predator*. Fungsi respon dapat dibedakan menjadi beberapa tipe, seperti linier, saturasi, dan sigmoidal, yang masing-masing menjelaskan dinamika pemangsaan dalam kondisi ekologis yang berbeda. Memahami fungsi respon penting untuk mengembangkan model ekologi yang dapat memprediksi dinamika populasi dan interaksi spesies dalam ekosistem. Seiring dengan kemajuan penelitian mengenai model *predator prey*, dihasilkan bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(x) - aq(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= q(x, y)y = \mu y\end{aligned}\tag{2.8}$$

Di mana $q(x, y)$ Di mana adalah fungsi respon, dan parameter a menyatakan efisiensi pemangsaan. Fungsi respon ini menjelaskan bagaimana energi berpindah dari mangsa ke *predator*, yang menggambarkan hubungan antara kepadatan *prey* dan laju pemangsaan oleh *predator*. Beberapa tipe dan bentuk fungsi respon telah dikembangkan untuk mencerminkan dinamika interaksi ini, masing-masing dengan karakteristik yang berbeda dalam menggambarkan cara *predator* merespons perubahan jumlah *prey* yang tersedia.

Tipe-tipe fungsi respon yang umum meliputi fungsi respon linear, yang menunjukkan peningkatan pemangsaan sebanding dengan jumlah mangsa; fungsi respon saturasi, di mana laju pemangsaan mencapai batas maksimum saat kepadatan mangsa tinggi; serta fungsi respon sigmoidal, yang menggambarkan transisi dari laju pemangsaan yang rendah ke tinggi seiring dengan peningkatan kepadatan mangsa. Semua tipe fungsi respon ini dirangkum dalam tabel 2.1, yang memberikan gambaran jelas tentang bagaimana masing-masing fungsi dapat

digunakan untuk memahami dan memodelkan interaksi *predator prey* dalam berbagai konteks ekologi.

Tabel 2.1 Tipe dan Bentuk Fungsi Respon

Tipe	Bentuk Fungsi Respon $q(x, y)$
<i>Holling tipe I</i>	cx
<i>Holling tipe II</i>	$\frac{cx}{r + ex}$
<i>Holling tipe III</i>	$\frac{cx^2}{r + ex^2}$
<i>Beddington DeAngelis</i>	$\frac{cx}{r + ex + y}$
<i>Ratio Dependent</i>	$\frac{cx}{ex + y}$
<i>Nicholson Bailey</i>	axe^{-by}

Fungsi respon menjadi alat penting dalam memahami dinamika populasi *predator* dan *prey* karena menggambarkan hubungan antara jumlah *prey* dan perilaku pemangsaan *predator* pada populasi tersebut.

2.1.10 Model Logistik

Salah satu model yang digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik (*logistic growth model*). Model ini lebih realistis untuk populasi yang hidup di lingkungan terbatas, dibandingkan dengan model eksponensial yang mengasumsikan pertumbuhan populasi berlangsung tanpa batas dan tanpa adanya musuh alami. Namun, untuk lingkungan yang tak terbatas dan tanpa adanya *predator*, pertumbuhan populasi dapat dimodelkan sebagai pertumbuhan eksponensial. Model pertumbuhan eksponensial dituliskan sebagai:

$$\frac{dN}{dt} = aN \quad (2.9)$$

Dalam persamaan (2.9), laju pertumbuhan populasi $\frac{dN}{dt}$ berbanding lurus dengan jumlah populasi N , dengan a sebagai rasio laju pertumbuhan konstan. Jadi, ketika populasi bertambah secara eksponensial, jumlah populasi pada waktu t dapat dihitung dengan rumus:

$$N(t) = N_0 e^{at}$$

Di sini, N_0 adalah jumlah populasi awal pada waktu $t = 0$, dan e^{at} menunjukkan pertumbuhan eksponensial populasi dari waktu ke waktu. Solusi dari persamaan pertumbuhan eksponensial pada persamaan (2.9) adalah $N(t) = N_0 e^{at}$, di mana N_0 adalah jumlah populasi awal. Jumlah populasi terus bertambah seiring dengan berjalannya waktu (t). Namun, model ini dianggap tidak realistis, karena dalam kenyataannya, populasi dibatasi oleh faktor-faktor lingkungan seperti ketersediaan sumber makanan dan ruang. faktor-faktor lain yang muncul saat populasi mencapai kepadatan yang tinggi.

Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh faktor lingkungan seperti kelahiran, kematian, perburuan, dan persaingan. Pada awalnya, populasi tumbuh secara eksponensial ketika sumber daya melimpah. Namun, seiring populasi mendekati kapasitas dukung (K), laju pertumbuhannya melambat akibat faktor penghambat seperti kekurangan makanan. Ketika rasio sumber daya dan populasi menurun, hambatan pertumbuhan semakin besar, dan jika kapasitas maksimum tercapai, populasi stabil.

Berdasarkan kondisi ini, pertumbuhan populasi dapat dimodelkan dengan model logistik, yang memperhitungkan keterbatasan sumber daya:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN \left(\frac{k-N}{k} \right), 0 \leq N \leq k, a > 0 \\ &= aN - \frac{a}{k} N^2\end{aligned}$$

Jika masing-masing ruas persamaan dikalikan dengan $\frac{1}{k}$, maka persamaannya menjadi:

$$\frac{d\left(\frac{N}{k}\right)}{dt} = a \frac{N}{k} - a \frac{N}{k} \frac{N}{k}, 0 \leq \frac{N}{k} \leq \frac{k}{k}$$

Misalkan $y = \frac{N}{k}$, sehingga akan terbentuk persamaan baru berikut ini:

$$\frac{dy}{dt} = ay(1-y), 0 \leq y \leq 1 \quad (2.10)$$

Persamaan ini disebut persamaan logistik kontinu.

2.1.11 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut sebagai vektor eigen dari A (atau operator matriks T_A) jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x , yang dapat ditulis sebagai $Ax = \lambda x$. Dalam hal ini, skalar λ disebut nilai eigen dari A atau T_A , sedangkan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Untuk menemukan nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Jika A adalah matriks $n \times n$ dan terdapat $x \in \mathbb{R}^n$ dengan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen dari A , maka ada suatu $\lambda \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$Av = \lambda v$$

$$Av = \lambda Iv$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Vektor v adalah solusi dari sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A)x = 0$ karena $v \neq 0$ sistem persamaan ini memiliki solusi nontrivial yang hanya mungkin jika determinan dari $(\lambda I - A)$ sama dengan nol, yaitu $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan ini, $\det(\lambda I - A) = 0$ dikenal sebagai persamaan karakteristik dari matriks A , dan akar-akar dari persamaan ini adalah nilai eigen dari A .

Lemma λ

Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Skalar $\lambda \in R$ disebut sebagai akar dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah solusi dari sistem persamaan linear homogen $(\lambda I - A)x = 0$ (Anton, 2004).

2.1.12 Analisis Kestabilan *Fixed Point*

Perhatikan sistem linear berikut ini Perhatikan sistem linear berikut ini untuk memahami analisis kestabilan titik tetap (*fixed point*).

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

di mana a, b, c , dan d menjadi konstan.

Dalam dinamika populasi, sistem linear sering kali dikenal sebagai "model data spesies". Model ini digunakan untuk mempelajari interaksi antara populasi berbagai spesies, seperti pertumbuhan atau penurunan jumlah individu.

Jika matriks A memiliki bentuk $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan λ nilai eigen dari A , maka

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ & = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ di mana } \begin{cases} p = a+d \\ q = ad-bc \end{cases} \end{aligned}$$

Stabilitas sistem linear dapat dijelaskan berdasarkan sifat nilai eigen $\lambda_{1,2}$ dari

sistem. Berikut adalah analisisnya:

1. Jika $\lambda_{1,2}$ adalah bilangan real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$:

a. Jika $\lambda_{1,2}$ memiliki tanda yang sama $q > 0$:

i. $\lambda_{1,2}$ kedua nilai positif jika $p > 0 \rightarrow$ Tidak stabil.

ii. $\lambda_{1,2}$ kedua nilai negatif jika $p < 0 \rightarrow$ Stabil.

b. $\lambda_{1,2}$ memiliki tanda yang berbeda jika $p < 0 \rightarrow$ Tidak stabil.

c. Salah satu dari $\lambda_{1,2}$ adalah nol $q = 0$:

i. Akar yang lain positif jika $p > 0 \rightarrow$ Tidak stabil.

ii. Akar yang lain negatif jika $p < 0 \rightarrow$ Stabil.

2. Jika $\lambda_{1,2}$ adalah bilangan real yang sama saat $\Delta = 0$:
 - a. $\lambda_{1,2}$ memiliki tanda yang sama:
 - i. Kedua nilai eigen positif $p > 0 \rightarrow$ Tidak stabil.
 - ii. Kedua nilai eigen negatif $p < 0 \rightarrow$ Stabil.
 - b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ jika $p = 0 \rightarrow$ Tidak stabil.
3. Jika $\lambda_{1,2}$ bersifat kompleks saat $\Delta < 0$:
 - a. Bagian real $R_e \lambda_{1,2}$ memiliki tanda yang sama:
 - i. $R_e \lambda_{1,2}$ semua positif jika $p > 0 \rightarrow$ Tidak stabil.
 - ii. $R_e \lambda_{1,2}$ semua negatif jika $p < 0 \rightarrow$ Stabil.
 - b. $R_e \lambda_{1,2}$ jika $p = 0 \rightarrow$ Tidak stabil.

(Boyce & DiPrima, 2009).

2.2 Kajian al-Qur'an Mengenai Dinamika Populasi

Kompetisi antarspesies adalah interaksi yang dapat mempengaruhi pertumbuhan dan kelangsungan hidup populasi. Kompetisi sering mengarah pada pemisahan ekologi antara spesies serupa, yang dikenal sebagai asas pengeluan kompetisi (*competitive exclusion principle*). Hasilnya bisa berupa penyesuaian keseimbangan antara spesies, di mana keduanya hidup berdampingan dengan perubahan dinamika populasi. Kompetisi juga bisa menyebabkan satu spesies menggantikan yang lain, memaksa spesies yang lebih lemah pindah habitat atau mengubah pola konsumsi untuk bertahan hidup. Fenomena ini mempengaruhi struktur dan keseimbangan ekosistem. Fenomena ini menunjukkan bagaimana

kompetisi antarspesies dapat mempengaruhi struktur dan keseimbangan ekosistem secara keseluruhan (Djohar, 2017).

Efek *allee* dalam dinamika populasi menunjukkan bahwa pada kepadatan populasi rendah, pertumbuhan populasi terhambat karena kesulitan menemukan pasangan untuk reproduksi. Fenomena ini mencerminkan kompleksitas proses alam yang diciptakan oleh Allah, sebagaimana tercermin dalam ayat-ayat yang menjelaskan bahwa segala sesuatu diciptakan dengan ukuran dan ketentuan tertentu. Ini menunjukkan bahwa setiap aspek kehidupan, termasuk dinamika populasi dan interaksi antar-spesies, berjalan sesuai takdir dan pengaturan Allah. Dalam al-Quran surah al-Qamar (54:49) telah tertulis sebagaimana berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran.*” (Q.S al-Qamar [54]: 49), (Kementerian Agama, 2022).

Fenomena efek *allee*, di mana populasi kecil menghadapi tantangan pertumbuhan seperti kesulitan dalam reproduksi, menunjukkan keteraturan alam yang diatur oleh Allah. Penurunan laju pertumbuhan pada populasi kecil mencerminkan tantangan bagi makhluk hidup untuk bertahan hidup dan berkembang dalam kondisi tertentu. Dari perspektif al-Qur’an, ini adalah bagian dari takdir dan ketentuan Allah, yang menetapkan bahwa semua makhluk hidup, termasuk manusia, beroperasi dalam sistem dengan ukuran dan aturan yang ditentukan oleh-Nya.

Dengan demikian, perspektif al-Qur’an menekankan bahwa di balik setiap proses alam, termasuk dinamika populasi dan interaksi antar-spesies, ada keteraturan Ilahi yang tidak hanya mengatur keseimbangan, tetapi juga mengajarkan umat manusia untuk memahami peran mereka dalam menjaga

kelangsungan dan harmoni alam. Semua ini menegaskan bahwa Allah SWT adalah pengatur dan pencipta yang Mahakuasa, yang menetapkan segala sesuatu di alam ini dengan takdir dan ukuran yang tepat, sebagaimana tercermin dalam dinamika ekosistem di bumi.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini, akan digunakan studi penelitian secara kualitatif menggunakan studi literatur. Metode kualitatif diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam terhadap kasus model *predator prey* dengan efek *allee* yang diteliti. Kemudian akan dilakukan perhatian pada variabel-variabel dengan hubungan antara satu variabel dengan variabel lainnya Waruwu (2023). Metode tersebut merupakan suatu bentuk pendekatan penelitian kualitatif.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum memulai penelitian, terdapat beberapa langkah yang perlu dilakukan. Tahap pertama adalah perencanaan, yang mencakup pengkajian terhadap model yang dikembangkan oleh Wang et al. (2011) serta pemahaman mendalam mengenai isi penelitian tersebut. Setelah itu, setiap variabel dalam model yang digunakan dalam penelitian Wang et al. (2011) dianalisis guna memahami interaksi yang terjadi di dalamnya.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dapat dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis perilaku *predator* dan *prey* yang dipengaruhi oleh variabel respon efisiensi pemangsaan dan respon kompetisi antar spesies sebagai berikut:

- a. Menentukan model kontinu pada *predator prey* yang merujuk pada (Wang et al., 2011).
 - b. Menentukan titik tetap dari model *predator prey*.
 - c. Menentukan matriks jacobian dan nilai eigen dari model *predator prey*.
 - d. Menentukan model plot dari uji parameter model *predator prey*.
2. Uji pengaruh parameter laju pemangsaan oleh *predator* terhadap populasi *prey* dan laju respon antar spesies pada variable *predator*, *prey*, efisiensi pemangsaan, dan respon dalam model interaksi *predator prey* dengan efek *allee*:
- a. Mensimulasikan model *predator prey* dengan efek *allee* menggunakan variasi parameter yang berbeda.
 - b. Mensimulasikan model *predator prey* dengan bantuan Matlab.
 - c. Menganalisis hasil simulasi dari model *predator prey* dengan efek *allee*.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Transformasi Model Kontinu *Predator Prey*

Dalam penelitian ini, penulis akan menganalisis model populasi *predator* dan *prey* dengan mempertimbangkan pengaruh efek *allee* sebagaimana dikemukakan oleh Wang et al. (2011), yang dideskripsikan sebagai persamaan diskrit, di mana efek *allee* pada *predator* dapat direpresentasikan dalam model persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + rN_t(1 - N_t) - aN_tP_t \\ P_{t+1} &= P_t + aP_t(N_t - P_t) \left(\frac{P_t}{\mu + P_t} \right) \end{aligned}$$

Di mana laju pertumbuhan (r) dan tingkat interaksi (a) merupakan konstanta positif yang memiliki peran penting dalam menentukan dinamika populasi. Kepadatan populasi *prey* dilambangkan dengan (N_t), sedangkan kepadatan populasi *predator* dilambangkan dengan (P_t), dan efek *allee* pada *predator* dilambangkan dengan (μ).

Tingkat pertumbuhan populasi *prey* ketika tidak ada kehadiran *predator* dijelaskan melalui persamaan, yang mencerminkan pertumbuhan eksponensial yang kemudian dibatasi oleh kapasitas lingkungan. Sementara itu, menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey*, di mana *predator* memangsa *prey* sehingga mempengaruhi dinamika keduanya. Selain itu, merepresentasikan kemungkinan punahnya *predator* akibat tidak adanya *prey* untuk dimakan serta adanya persaingan internal di antara sesama *predator*. Dengan sistem pendekatan kontinu

yang diberikan pada persamaan (2.1) menggunakan metode Euler, bentuk kontinu dari model tersebut dengan selang waktu kecil h dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{N(t+h) - N(t)}{h} &= rN(t)(1 - N(t)) - aN(t)P(t) \\ \frac{P(t+h) - P(t)}{h} &= aP(t)(N(t) - P(t)) \left(\frac{P(t)}{\mu + P(t)} \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

dari persamaan (4.1) dengan mensubstitusikan $N(t) = N_j, N(t+h) = N_{j+1}, P(t) = P_j$ dan $P(t+h) = P_{j+1}$, kemudian kedua ruas dengan h dan pindahkan N_j dan P_j ke ruas kanan sehingga dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}N_{j+1} &= N_j + h \left[rN_j(1 - N_j) - aN_jP_j \right] \\ P_{j+1} &= P_j + h \left[aP_j(N_j - P_j) \left(\frac{P_j}{\mu + P_j} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.2)$$

dari persamaan (4.2) untuk menyederhanakan sistem diskrit, asumsikan $h = 1$, maka diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}N_{j+1} &= N_j + rN_j(1 - N_j) - aN_jP_j = f(N_j, P_j) \\ P_{j+1} &= P_j + aP_j(N_j - P_j) \left(\frac{P_j}{\mu + P_j} \right) = g(N_j, P_j)\end{aligned}\quad (4.3)$$

karena akan mengubah dari bentuk diskrit menjadi bentuk kontinu, perlu menggunakan definisi turunan dalam kalkulus, yaitu (Perko, 2001):

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{j+1} - f_j}{h}$$

jika dituliskan dalam bentuk model *predator prey* maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{N_{j+1} - N_j}{h} = \frac{f(N_j, P_j)}{h}$$

$$\frac{P_{j+1} - P_j}{h} = \frac{g(N_j, P_j)}{h}$$

sehingga untuk mengubah model diskrit ini menjadi kontinu dari persamaan (4.3), dilakukan pendekatan kontinu dengan limit $h \rightarrow 0$ dengan mendefinisikan turunan:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N_{j+1} - N_j}{h}$$

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{j+1} - P_j}{h}$$
(4.4)

dari persamaan (4.3) masukkan bentuk $N_{n+1} - N_j$ dan $P_{n+1} - P_j$ ke dalam persamaan (4.4) sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N_{j+1} - N_j}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[rN_j(1 - N_j) - aN_jP_j \right]}{h} = rN(1 - N) - aNP$$

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{j+1} - P_j}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[aP_j(N_j - P_j) \left(\frac{P_j}{\mu + P_j} \right) \right]}{h} = aP(N - P) \left(\frac{P}{\mu + P} \right)$$

Dengan asumsi limit $h \rightarrow 0$, semua fungsi diskrit N_j, P_j menjadi fungsi kontinu $N(t), P(t)$ sehingga diperoleh persamaan (4.5) sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N) - aNP$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(N - P) \left(\frac{P}{\mu + P} \right)$$
(4.5)

Sehingga sistem persamaan (4.5) merupakan bentuk kontinu dari model *predator prey* dengan efek *allee* pada *predator* yang diperoleh dari pendekatan limit metode Euler. Di mana $\left(\frac{P}{\mu + P} \right)$ adalah fungsi *allee* yang merepresentasikan efek *allee* pada populasi *predator*, di mana fungsi tersebut mengikuti bentuk fungsi *Holling*

tipe II. Konstanta *allee* μ adalah parameter positif yang diasumsikan berada dalam rentang $0 < \mu < \frac{r}{a}$ dengan tujuan menggambarkan dinamika *predator* yang dipengaruhi oleh efek *allee*.

Tabel 4.1 Deskripsi Nilai Variabel dan Nilai Parameter

Parameter	Deskripsi	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3	Satuan	Sumber
N_t	Banyaknya kepadatan populasi <i>prey</i> pada waktu t	0.3	0.3	0.3	Biomasa/bulan	(Wang <i>et al.</i> , 2011)
P_t	Banyaknya kepadatan populasi <i>predator</i> pada waktu t	0.2	0.2	0.2	Biomasa/bulan	(Wang <i>et al.</i> , 2011)
r	Laju pertumbuhan intrinsik pada populasi <i>prey</i>	1.6	1.6	1.6	Biomasa/bulan	(Wang <i>et al.</i> , 2011)
a	Koefisien predasi dalam mengukur intensitas interaksi antara <i>predator</i> dan <i>prey</i>	2.5	2.5	2.5	Biomasa/bulan	(Wang <i>et al.</i> , 2011)
μ	Efek <i>allee</i> pada populasi <i>predator</i>	0.09	0.12	0.01	Biomasa/bulan	(Wang <i>et al.</i> , 2011)

4.2 Analisis Dinamik Model Kontinu *Predator Prey*

4.2.1 Titik Keseimbangan Model *Predator Prey* dengan Efek *Allee*

Berikut tahapan-tahapan dalam menentukan kestabilan yaitu mencari titik tetap terlebih dahulu kemudian dilakukan linierisasi, dan yang terakhir menentukan kestabilan pada setiap titik tetapnya. Dalam model *predator prey*

yang terdapat efek *allee* pada populasi *predator* dinyatakan ketika titik $U^* = (N, P) \in \mathbb{R}^n$ merupakan titik kesetimbangan dari sistem (4.2) apabila $\dot{U}_i = 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dengan memisalkan $\frac{dN}{dt} = 0$ dan $\frac{dP}{dt} = 0$, keadaan ini disebut sebagai kondisi *steady state*, yaitu kondisi di mana populasi *prey* dan *predator* berada dalam keseimbangan dan tidak berubah seiring waktu. maka titik tetap (N^*, P^*) diperoleh dengan mensubstitusi:

$$0 = rN(1 - N) - aNP \quad (4.6)$$

$$0 = aP(N - P) \left(\frac{P}{\mu + P} \right) \quad (4.7)$$

1. Titik Kesetimbangan $E_1^* = (N_1^*, P_1^*,)$

Akan ditentukan $E_1^* = (N_1^*, P_1^*)$ untuk titik tetap pertama, maka substitusikan dari persamaan (4.6) dan (4.7) untuk titik tetap, didefinisikan

$0 = \frac{dN}{dt}$, dan $0 = \frac{dP}{dt}$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$rN(1 - N) - aNP = 0 \Rightarrow N = 0 \text{ atau } P = \frac{r(1 - N)}{a} \quad (4.8)$$

$$aP(N - P) \left(\frac{P}{\mu + P} \right) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ atau } N = P \quad (4.9)$$

Dengan mengambil langkah lebih lanjut dari persamaan (4.8) dengan penyelesaian persamaan sistem (4.9) jika $N = 0$ dan $P = 0$, maka kedua turunan nol:

$$0 = \frac{dN}{dt}, 0 = \frac{dP}{dt} \quad (4.10)$$

Sehingga dapat dikatakan titik tetap yang pertama yang memenuhi persamaan dari (4.8) adalah $E_1^* = (0, 0)$.

2. Titik Kesetimbangan $E_2^* = (N_2^*, P_2^*)$

Akan ditentukan $E_2^* = (N_2^*, P_2^*)$ untuk titik tetap pertama, dengan mengambil langkah lebih lanjut dari persamaan (4.10) dengan mendefinisikan mengasumsikan $P = 0$ dan $N \neq 0$ sebagai berikut:

$$rN(1-N) - aN(0) = rN(1-N) \Rightarrow N = 0 \text{ atau } N = 1$$

kemudian sesudah punya $N = 0$ dititik pertama. Maka titik baru yakni:

$$N = 1, \quad P = 0 \Rightarrow 0 = \frac{dN}{dt}, \quad 0 = \frac{dP}{dt}$$

jadi titik kesetimbangan kedua adalah $E_2^* = (1, 0)$.

3. Titik Kesetimbangan $E_3^* = (N_3^*, P_3^*)$

Menyelesaikan untuk mendapatkan E_3^* , dengan asumsikan $N \neq 0, P \neq 0$ dari persamaan (4.9) sebagai berikut:

$$aP(N-P) \left(\frac{P}{\mu+P} \right) = 0 \Rightarrow N = P \text{ karena } P \neq 0$$

substitusikan $N = P$ ke persamaan (4.8)

$$rN(1-N) - aN^2 = 0$$

kemudian lakukan pempfaktoran hasilnya sebagai berikut:

$$rN(1-N) - aN^2 = N[r(1-N) - aN] = 0$$

sehingga didapatkan solusi $N = 0$ dan $r(1-N) - aN = 0$

kemudian dilanjutkan perhitungannya diperoleh sebagai berikut:

$$r(1-N) - aN = 0 \Rightarrow r - rN - aN = 0 \Rightarrow r = N(r+a) \Rightarrow N = \frac{r}{a+r}$$

Karena $N = P$, maka:

$$P = \frac{r}{a+r}$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang ketiga adalah

$$E_3^* = \left(\frac{r}{a+r}, \frac{r}{a+r} \right). \text{ Efek } \textit{allee} \text{ pada populasi } \textit{predator} \text{ hanya}$$

mempengaruhi laju pertumbuhan pada $\frac{dP}{dt}$ dan kestabilan akan tetapi tidak mengubah posisi titik tetap. Perbedaan akan terlihat pada analisis kestabilan.

4.2.2 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Ketika melakukan analisis titik kesetimbangan, langkah yang diambil adalah menggunakan matriks Jacobian untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobian ini disusun berdasarkan persamaan. Hasilnya matriks Jacobian dapat diuraikan sebagai berikut. Misalkan untuk matriks Jacobi pada sistem (4.1) di titik kesetimbangan (N_n^*, P_n^*) yang dituliskan sebagai:

$$J(N_n^*, P_n^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Atau secara lebih eksplisit sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= f_1(n, p) \\ \frac{dp}{dt} &= f_2(n, p) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sehingga dapat diperoleh matriks Jacobian dari hasil linearisasi sistem pada persamaan 4.1 sebagai berikut.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} 1-rN^* & -aN^* \\ \frac{aN^*}{\mu+N^*} & 1+\frac{(a-2)N^*}{\mu+N^*} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Analog dengan model *predator prey* dengan efek *allee*, karena masing-masing matriks Jacobi merupakan matriks segitiga atas, maka nilai eigen dari masing-masing titik kesetimbangan adalah elemen-elemen pada diagonal matriks tersebut. Agar stabil, disyaratkan bahwa $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$. Jenis kestabilan untuk masing-masing titik kesetimbangan adalah:

1. $E_1 = (0, 0)$

Matriks Jacobi dari sistem (4.1) di E_1 adalah

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi $J(0,0)$ adalah $\lambda_1 = 1+r$ dan $\lambda_2 = 1$, jelas bahwa $\lambda_1 > 0$ sehingga jenis kestabilan pada E_1 adalah tidak stabil.

2. $E_2 = (1, 0)$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan E_2 adalah

$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 1+r & -a \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi $J(1,0)$ adalah $\lambda_1 = 1-r$ dan $\lambda_2 = 1+a$ jelas bahwa $\lambda_2 > 1$ sehingga jenis kestabilan pada E_2 adalah tidak stabil.

3. $E_3 = (N_1^*, P_1^*) = \frac{r}{a+r}$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ adalah

$$J(E_3) = J = \left(\frac{r}{a+r}, \frac{r}{a+r} \right) \begin{bmatrix} 1 - \frac{r^2}{a+r} & -\frac{ar}{a+r} \\ \delta \left(\frac{r}{a+r} \right) & 1 + \beta \left(\frac{r}{a+r} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

di mana

$$J_{11} = 1 - rN^* = 1 - r \frac{r}{a+r} = 1 - \frac{r^2}{a+r}$$

$$J_{12} = -aN^* = -a \frac{r}{a+r} = -\frac{ar}{a+r}$$

Misalkan:

$$\delta = \frac{aN^*}{\mu + N^*}, \beta = \frac{(a-2)N^*}{\mu + N^*}$$

$$\begin{aligned} J_{21} &= \left(\delta \left(\frac{r}{a+r} \right) \right) \\ &= \frac{a \frac{r}{a+r}}{\mu + \frac{r}{a+r}} \\ &= \frac{ar}{(a+r) \left(\mu + \frac{r}{a+r} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= 1 + \beta \left(\frac{r}{a+r} \right) \\ &= 1 + \frac{(a-2) \frac{r}{a+r}}{\mu + \frac{r}{a+r}} \\ &= 1 + \frac{(a-2)r}{(a+r) \left(\mu + \frac{r}{a+r} \right)} \end{aligned}$$

Untuk memastikan stabilitas pada titik kesetimbangan, maka perlu menghitung nilai eigen dari titik kesetimbangan dengan menggunakan matriks

Jacobian di titik kesetimbangan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ berikut ini:

$$J(E_3) = \left[\begin{array}{cc} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right] = 0$$

Dari matriks Jacobian tersebut, nilai Eigen dicari dengan cara:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &\Leftrightarrow \det \left[\begin{array}{cc} 1 - \frac{r^2}{a+r} & -\frac{ar}{a+r} \\ \delta\left(\frac{r}{a+r}\right) & 1 + \beta\left(\frac{r}{a+r}\right) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \left[\begin{array}{cc} 1 - \frac{r^2}{a+r} - \lambda & -\frac{ar}{a+r} \\ \delta\left(\frac{r}{a+r}\right) & 1 + \beta\left(\frac{r}{a+r}\right) - \lambda \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right] = 0 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_3)$ adalah

$$f(x) = (J_{11} - \lambda)(J_{22} - \lambda) - (J_{12} - J_{21}) = 0$$

$$f(\lambda) = \left(1 - \lambda - \frac{r^2}{a+r}\right) \left(1 - \lambda + \beta\left(\frac{r}{a+r}\right)\right) - \left(-\frac{ar}{a+r}\right) \left(\delta\left(\frac{r}{a+r}\right)\right) = 0$$

$$f(\lambda) = \left(1 - \lambda - \frac{r^2}{a+r}\right) \left(1 - \lambda \frac{(a-2)r}{(a+r)(\mu+r/(a+r))}\right) -$$

$$\left(-\frac{ar}{a+r}\right) \left(\frac{ar}{(a+r)(\mu+r/(a+r))}\right) = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(J(E_3))\lambda + \det(J(E_3)) = 0$$

Akan dicari nilai (p) untuk *trace* sebagai berikut:

$$p = \text{trace}(J(E_3)) = J_{11} + J_{22}$$

diketahui

$$J_{11} = 1 - \frac{r^2}{a+r}$$

$$J_{22} = 1 + \frac{(a-2)r}{(a+r)\left(u + \frac{r}{(a+r)}\right)}$$

maka

$$p = \left(1 - \frac{r^2}{a+r}\right) + \left[1 + \frac{(a-2)r}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}\right]$$

$$p = 2 - \frac{r^2}{a+r} + \frac{(a-2)r}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}$$

$$p = (1 - rN^*) + (1 + \beta N^*) = 2 - rN^* + \beta N^*$$

Selanjutnya mencari nilai (q) untuk determinan sebagai berikut:

$$q = \det(J(E_3)) = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21}$$

diketahui

$$J_{12} = -\frac{ar}{a+r}$$

$$J_{21} = \frac{ar}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{(a+r)}\right)}$$

$$J_{12} \cdot J_{21} = -\frac{ar}{a+r} \cdot \frac{ar}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{(a+r)}\right)} = -\frac{a^2 r^2}{(a+r)^2 \left(\mu + \frac{r}{(a+r)}\right)}$$

Maka

$$q = \left(1 - \frac{r^2}{a+r}\right) + \left(1 + \frac{(a-2)r}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}\right) - \left(-\frac{a^2 r^2}{(a+r)^2 \left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}\right)$$

$$q = \left(1 - \frac{r^2}{a+r}\right) + \left(1 + \frac{(a-2)r}{(a+r)\left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}\right) + \frac{a^2 r^2}{(a+r)^2 \left(\mu + \frac{r}{a+r}\right)}$$

$$q = (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) - (-aN^* \cdot \delta N^*) = (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + a\delta (N^*)^2$$

Sehingga

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (2 - rN^* + \beta N^*)\lambda + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2} = 0$$

Berdasarkan Teorema 2.2

$f(\lambda) = \lambda^2 - (2 - rN^* + \beta N^*)\lambda + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2} = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$ jika pada kondisi berikut ini terpenuhi.

a. $f(1) = 1 - p + q > 0$

akan dibuktikan $f(1) = 1 - p + q > 0$

substitusikan nilai p dan q , sehingga didapatkan sebagai berikut:

$$f(1) = 1^2 - (2 - rN^* + \beta N^*)(1) + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

kemudian sederhanakan

$$f(1) = 1^2 - (2 - rN^* + \beta N^*)(1) + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

$$f(1) = 1 - 2 + rN^* - \beta N^* + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

$$f(1) = -1 + rN^* - \beta N^* + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

jika hasil disederhanakan dan disubstitusikan pada nilai β dan δ maka didapatkan sebagai berikut:

$$\left(\frac{(a-2)r^2}{(\mu a + \mu r + r(a+r))} + 1 \right) \left(r - \frac{a+r}{2r} \right) - \frac{a^2 r^2}{(\mu a + \mu r + r(a+r))} + r > 0$$

Hasil ini lebih besar dari 0, sehingga syarat $f(1) = 1 - p + q > 0$ terpenuhi.

b. $f(-1) = 1 + p + q > 0$

akan dibuktikan $f(-1) = 1 + p + q > 0$

substitusikan nilai p dan q , sehingga didapatkan sebagai berikut:

$$f(-1) = (-1^2) - (2 - rN^* + \beta N^*)(-1) + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

kemudian sederhanakan

$$f(-1) = 1 + (2 - rN^* + \beta N^*) + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

$$f(-1) = 1 - 2 - rN^* + \beta N^* + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

$$f(-1) = 3 - rN^* + \beta N^* + (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + \delta N^{*2}$$

jika hasil disederhanakan dan disubstitusikan pada nilai β dan δ maka didapatkan

sebagai berikut:

$$\frac{a^2 r^3 + (a-2)r^4}{(\mu a + \mu r + r)(a+r)^2} + 2 > 0$$

Hasil ini lebih besar dari 0, sehingga syarat $f(-1) = 1 + p + q > 0$ terpenuhi.

c. $f(0) = q < 1$

Akan dibuktikan $f(0) = q < 1$

diketahui bahwa determinan dari matriks Jacobian (J_1) diberikan oleh:

$$q = (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) - (aN^* \cdot \delta N^*)$$

$$q = (1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + a\delta(N^*)^2$$

agar stabil asimtotik, determinan harus memenuhi

$$q < 1$$

sehingga

$$(1 + \beta N^*)(rN^* - 1) + a\delta(N^*)^2 < 1$$

jika hasil disederhanakan dan disubstitusikan pada nilai β dan δ maka didapatkan sebagai berikut:

$$\left(\frac{(a-2)r^2}{(\mu a + \mu r + r)(a+r)} + 1 \right) \left(1 - \frac{r^2}{1+r} \right) + \left(\frac{ar^2}{(\mu a + \mu r + r)(a+r)} \right) \frac{ar}{a+r} < 1$$

Hasil ini lebih kecil dari 1, sehingga syarat $q < 1$ terpenuhi.

Berdasarkan nilai $f(1) = 1 - p + q > 0$, $f(-1) = 1 + p + q > 0$ dan $q < 1$ yang masing-masing bernilai positif, maka sesuai dengan Definisi 2.1 dan Teorema 2.2, titik kesetimbangan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ pada model *predator prey* dalam persamaan (4.2) bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut terpenuhi.

$$\max \{1 - rN^* + \beta N^*, rN^* - \beta N^* - 2\} < (1 + \beta N^*)(1 - rN^*) + a\delta(N^*)^2 < 1$$

4.2.3 Simulasi Model *Predator Prey* dengan Efek *Allee* dan Interpretasi

Penelitian ini menggambarkan kondisi simulasi numerik, hasil simulasi numerik ini akan menggambarkan solusi N_t terhadap P_t , terutama di sekitar titik kesetimbangan untuk model *predator prey* dengan efek *allee* pada *predator* diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab. Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh, model *predator prey* dengan efek *allee* pada populasi *predator* dalam persamaan (4.1) memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (1, 0)$ yang bersifat tidak stabil, dan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ yang bersifat stabil asimtotik jika kondisi berikut terpenuhi.

$$\max \{1 - rN^* + \beta N^*, rN^* - \beta N^* - 2\} < (1 + \beta N^*)(1 - rN^*) + a\delta(N^*)^2 < 1$$

1. Simulasi Satu

Dengan simulasi pertama menggunakan parameter-parameter yang telah disebutkan sebelumnya dengan nilai sebagai berikut, $r = 1.6$, $a = 2.5$, dan nilai awal $N_1^* = 0.3$, $P_1^* = 0.2$. Dari kondisi syarat kestabilan titik

kesetimbangan $E_3 = (N_1^*, P_1^*) = \frac{r}{a+r}$ terpenuhi karena

$$\frac{r}{a+r} = \frac{1.6}{2.5+1.6} \approx 0.3902$$

$$\delta = \frac{aN^*}{\mu+N} = \frac{2.5 \cdot 0.3902}{0.09+0.3902} \approx 1.394$$

$$\beta = \frac{(a-2)N^*}{\mu+N^*} = \frac{(2.5-2) \cdot 0.3902}{0.09+0.3902} \approx 0.4064$$

kemudian periksa syarat kestabilannya

$$\max \{1 - rN^* + \beta N^*, rN^* - \beta N^* - 2\} < (1 + \beta N^*)(1 - rN^*) + a\delta(N^*)^2 < 1$$

hitung bagian kiri:

$$1 - (1.6 \cdot 0.3902) + (0.4064 \cdot 0.3902) = 0.5344$$

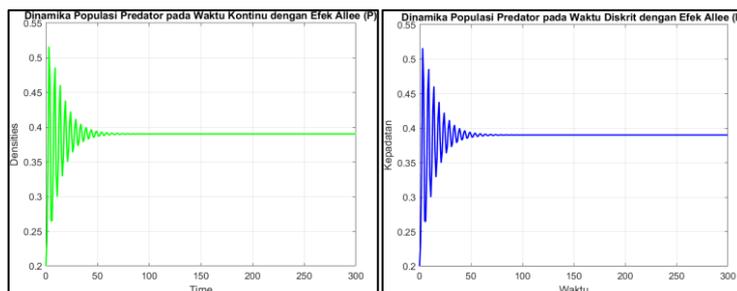
$$(1.6 \cdot 0.3902) - (0.4064 \cdot 0.3902) - 2 = -1.5344$$

sehingga didapatkan hasil $\max (0.5344, -1.5344) = 0.5344$

selanjutnya, hitung bagian kanan:

$$(1 + 0.4064 \cdot 0.3902)(1 - 1.6 \cdot 0.3902) + 2.5 \cdot 1.394 \cdot (0.3902)^2 = 0.9658$$

karena $0.5344 < 0.9658$ sehingga E_3 bersifat stabil asimtotik. Berikut ini adalah grafik yang diambil dari jurnal Wang et al. (2011), yang menggambarkan model *predator prey* dalam bentuk diskrit dan selanjutnya dibandingkan dengan hasil grafik dari model kontinu.



Gambar 4.1 Potret fase grafik *predator* kontinu dan diskrit dengan efek *allee* $\mu = 0.09$ pada populasi *predator* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

Tabel 4.2 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *predator* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, $a = 2.5$ dan $\mu = 0.09$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

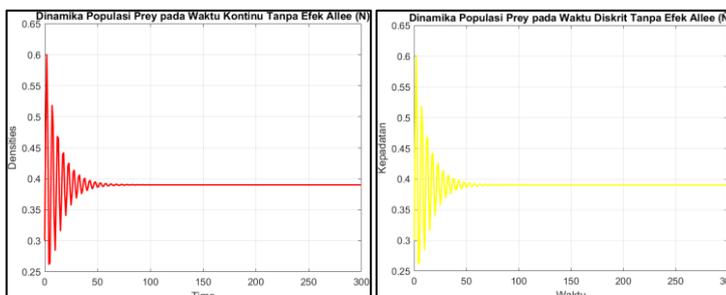
Waktu (t)	Predator (P)	Predator (\hat{P})	Analisis Galat Predator ($P - \hat{P}$)
0	20.0000	20.0000	0
10	39.0276	32.9817	6.0459
20	39.0192	38.3782	0.6410
30	39.0002	39.1338	0.1336
40	39.0216	39.1743	0.1526
50	39.0275	39.1256	0.0981
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0289	39.0243	0.0045

Berdasarkan gambar 4.1 menunjukkan perbandingan grafik populasi *predator* dalam model diskrit dan kontinu dengan mempertimbangkan efek *allee* pada populasi *predator* terhadap waktu, dengan parameter $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, $a = 2.5$ dan $\mu = 0.09$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$. Pada grafik 4.1 (a) yang merepresentasikan model kontinu, populasi *predator* mengalami osilasi yang tajam dan berlangsung cukup lama sebelum akhirnya mencapai kestabilan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem diskrit cenderung memiliki konvergensi yang lambat akibat sifat langkah waktunya yang terputus-putus. Sebaliknya, pada gambar 4.1 (b)

yang merupakan model diskrit, osilasi hanya terjadi pada awal waktu dan cepat meredam, sehingga populasi *predator* lebih cepat mencapai keadaan stabil. Perilaku sistem kontinu tampak lebih halus dan realistis karena perubahan waktu yang bersifat kontinu memungkinkan sistem merespons lebih cepat terhadap efek *allee*. Dengan demikian, meskipun kedua model menghasilkan kestabilan pada populasi *predator*, perbedaan utama terletak pada kecepatan dan bentuk konvergensinya, di mana model kontinu lebih efisien dalam mencapai kestabilan dibandingkan model diskrit.

Berdasarkan tabel 4.2 menyajikan analisis galat antara solusi diskrit dan kontinu dari model populasi *predator* dengan menggunakan metode Euler maju, pada parameter $r = 1.6$, $a = 2.5$ dan $\mu = 0.09$ untuk interval waktu $t \in [0,300]$. Penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100% agar densitas tidak lagi ditampilkan sebagai angka desimal dan lebih mudah dipahami. Pada awal waktu, yaitu $t = 0$, nilai populasi *predator* dari kedua model sama, yaitu 20, sehingga galatnya bernilai nol. Namun, pada waktu $t = 10$, terjadi lonjakan galat yang signifikan hingga mencapai 6.0459, yang merupakan galat tertinggi dalam tabel. Ini menunjukkan bahwa perbedaan terbesar antara solusi diskrit dan kontinu terjadi di awal simulasi. Seiring berjalannya waktu, nilai galat terus menurun secara drastis. Pada $t = 30$, galat hanya sebesar 0.1336 dan semakin mengecil pada waktu-waktu berikutnya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa meskipun pada awalnya terdapat perbedaan yang cukup besar antara solusi diskrit dan kontinu, seiring waktu keduanya menjadi semakin serupa. Ini

menunjukkan bahwa model diskrit dengan metode Euler maju cukup akurat dalam merepresentasikan perilaku model kontinu, terutama setelah fase awal dari evolusi sistem sebelum mencapai kestabilan.



Gambar 4.2 Potret fase grafik *prey* kontinu dan diskrit tanpa efek *allee* pada populasi *prey* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6,$ dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

Tabel 4.3 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *prey* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6,$ dan $a = 2.5$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

Waktu (t)	Prey (N)	Prey (\hat{N})	Analisis Galat Prey ($N - \hat{N}$)
0	30.0000	30.0000	0
10	39.0576	28.3961	10.6614
20	39.0332	34.0106	5.0226
30	39.0069	36.8176	2.1893
40	39.0253	38.0581	0.9671
50	39.0279	38.6032	0.4247
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0097	39.0243	0.0146

Berdasarkan gambar 4.1 menunjukkan perbandingan grafik populasi *prey* dalam model diskrit dan kontinu tanpa efek *allee*, dengan parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6,$ dan $a = 2.5$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$. Dari kedua grafik tersebut, terlihat bahwa baik model diskrit maupun kontinu mengalami osilasi awal yang cukup besar, yang kemudian meredam dan menuju kestabilan dalam jangka panjang. Meskipun bentuk

umum dinamika keduanya serupa, terdapat beberapa perbedaan penting. Pada gambar 4.2 (a) populasi *prey* menunjukkan osilasi yang relatif halus dan cepat mereda, dengan amplitudo osilasi yang menyusut secara bertahap hingga sistem mencapai kondisi *steady state* sekitar waktu $t = 100$. Sebaliknya, gambar 4.2 (b) memperlihatkan osilasi awal yang lebih besar dan tajam, dengan fluktuasi yang lebih ekstrem sebelum akhirnya meredam dan konvergen ke nilai kestabilan yang sama. Perbedaan ini mengindikasikan bahwa meskipun kedua model sama-sama menggambarkan konvergensi menuju kestabilan, model kontinu menunjukkan dampak stabil yang lebih kuat di awal waktu dibandingkan model diskrit. Namun setelah melewati fase kestabilan, kedua model menyatu pada perilaku yang hampir identik. Hal ini menegaskan bahwa tanpa efek *allee*, baik model diskrit maupun kontinu cenderung stabil, meskipun karakteristik awalnya berbeda dalam hal intensitas osilasi.

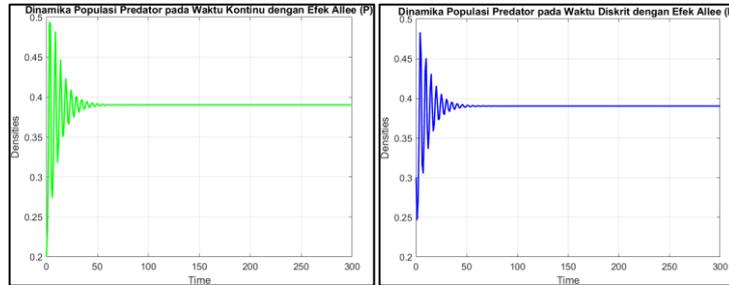
Berdasarkan tabel 4.3 menyajikan analisis galat antara solusi diskrit dan kontinu dari model populasi *prey* tanpa efek *allee*, menggunakan metode Euler maju, untuk parameter $r = 1.6$ dan $a = 2.5$ pada interval waktu $t \in [0,300]$. Penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100% agar densitas tidak lagi ditampilkan sebagai angka desimal dan lebih mudah dipahami. Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa meskipun pada waktu awal $t = 0$ nilai *prey* dari model diskrit dan kontinu sama, yaitu 30, perbedaan atau galat mulai muncul cukup besar pada waktu $t = 10$, dengan nilai galat sebesar 10.6614, yang merupakan galat tertinggi dalam tabel. Hal ini

menunjukkan bahwa pada fase transien, terdapat perbedaan yang signifikan antara solusi dari kedua pendekatan. Namun, seiring bertambahnya waktu, galat semakin menurun secara signifikan. Misalnya, pada $t = 30$, galat telah turun menjadi 2.1893. Setelah waktu tersebut, nilai galat menjadi sangat kecil dan cenderung stabil, menunjukkan bahwa kedua solusi mulai konvergen dan mendekati kestabilan *steady state* yang sama. Mulai dari $t = 110$ hingga $t = 200$, nilai galat tetap berada di kisaran sangat kecil yang menunjukkan bahwa model diskrit sangat mendekati perilaku model kontinu. Dengan demikian, tabel ini menunjukkan bahwa meskipun awalnya terdapat perbedaan besar, solusi diskrit dan kontinu pada populasi *prey* tanpa efek *allee* menjadi hampir sama dalam jangka panjang. Ini menegaskan keandalan metode Euler maju dalam merepresentasikan dinamika model kontinu setelah sistem mencapai kestabilan.

2. Simulasi Dua

Pada simulasi kedua, digunakan parameter-parameter yang membedakan dari nilai awal pada jurnal Wang et al. (2011), dengan tujuan mengamati perubahan hasil ketika nilai parameter ditingkatkan. Sebelumnya, dilakukan penyesuaian terhadap parameter untuk mengevaluasi dampaknya terhadap dinamika sistem., berikut ini adalah nilai parameter yang digunakan $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$, dan $\mu = 0.12$. Selanjutnya ditampilkan grafik model *predator* dalam bentuk diskrit yang dibandingkan dengan kontinu untuk menunjukkan perbedaan perilaku

sistem. Perbandingan ini bertujuan menilai sejauh mana pendekatan diskrit merepresentasikan sistem kontinu serta mengevaluasi akurasi dan kestabilannya.



Gambar 4.3 Potret fase grafik *predator* kontinu dan diskrit dengan efek *allee* $\mu = 0.12$ pada populasi *predator* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

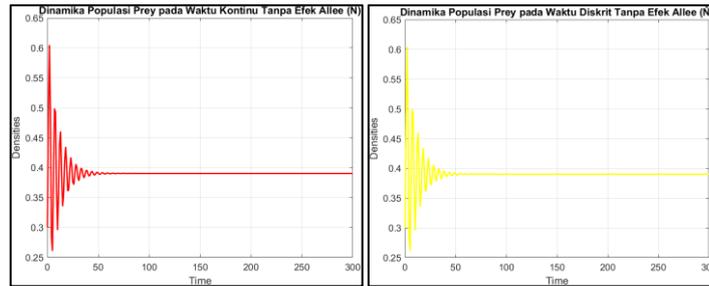
Tabel 4.4 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *predator* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, $a = 2.5$ dan $\mu = 0.12$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

Waktu (t)	Predator (P)	Predator (\hat{P})	Analisis Galat Predator ($P - \hat{P}$)
0	20.0000	20.0000	0
10	39.0196	36.9184	2.1011
20	39.0516	40.5879	1.5362
30	39.0305	40.0207	0.9901
40	39.0377	39.4701	0.4323
50	39.0225	39.1917	0.1692
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0395	39.0243	0.0151

Berdasarkan gambar 4.3 menunjukkan perbandingan antara hasil simulasi model diskrit dan kontinu dari perubahan populasi *predator* yang mempertimbangkan efek *allee* terhadap waktu, dengan parameter $N_t = 0.3$, $P_t = 0.2$, $r = 1.6$, $a = 2.5$, dan $\mu = 0.12$ dalam rentang waktu $t \in [0, 300]$. Gambar 4.3 (a) menggambarkan hasil dari model kontinu, sedangkan gambar 4.3 (b) merupakan hasil dari model diskrit.

menampilkan potret fase dari populasi *predator* dalam bentuk grafik kontinu dan diskrit. Kedua grafik tersebut memperlihatkan perilaku osilasi dari populasi *predator* seiring waktu pada interval $t \in [0,300]$. Jika nilai awal dan efek *allee* ditingkatkan terlihat sistem bisa berosilasi dengan amplitudo yang kecil populasi *predator* dalam grafik menunjukkan kecenderungan stabil mendekati densitas 0,39. Meskipun awalnya terjadi fluktuasi tajam, sistem diskrit dengan efek *allee* mampu mencapai kestabilan setelah beradaptasi dari kondisi awal.

Berdasarkan tabel 4.4 menyajikan analisis galat antara solusi model diskrit dan kontinu dari dinamika populasi *predator* dengan mempertimbangkan efek *allee* dengan penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100% menggunakan metode Euler maju. Pada awal simulasi $t = 0$, galat bernilai nol karena kondisi awal identik. Namun, seiring bertambahnya waktu, Seiring waktu, nilai galat mengalami penurunan signifikan. Misalnya, pada $t = 10$, galat cukup besar sebesar 2.1011, namun pada $t = 50$ turun menjadi 0.1692, dan pada $t = 300$ hanya tersisa 0.0151. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun terdapat perbedaan yang cukup besar antara solusi kontinu dan diskrit pada awal simulasi, perbedaan tersebut semakin mengecil seiring waktu. Dengan demikian, model diskrit mampu mendekati perilaku solusi kontinu secara lebih akurat seiring berlangsungnya waktu simulasi.



Gambar 4.4 Potret fase grafik *prey* kontinu dan diskrit tanpa efek *allee* pada populasi *prey* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

Tabel 4.5 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *prey* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

Waktu (t)	Prey (N)	Prey (\hat{N})	Analisis Galat Prey ($N - \hat{N}$)
0	30.0000	30.0000	0
10	39.0681	29.5626	9.5054
20	38.9850	36.0767	2.9083
30	39.0111	38.3409	0.6701
40	39.0519	38.9638	0.0881
50	38.9950	39.0791	0.0841
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0279	39.0243	0.0035

Berdasarkan gambar 4.4 menunjukkan perbandingan antara hasil simulasi model diskrit dan kontinu dari perubahan populasi *prey*, dengan parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.2$ dan $a = 2.5$ dalam rentang waktu $t \in [0, 300]$. Gambar 4.3 (a) menggambarkan hasil dari model kontinu, sedangkan gambar 4.3 (b) merupakan hasil dari model diskrit. menampilkan potret fase dari populasi *prey* dalam bentuk grafik kontinu dan diskrit. Secara visual, kedua kurva menunjukkan pola osilasi yang serupa, dengan fluktuasi populasi yang relatif fluktuasi sepanjang waktu $t \in [0, 300]$. Hal ini menunjukkan bahwa tanpa efek *allee*, sistem

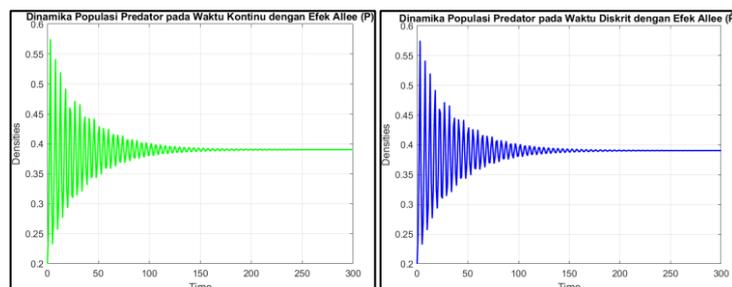
cenderung lebih cepat stabil. Meskipun terdapat sedikit perbedaan pada detail amplitudo osilasi, bentuk umum grafik menunjukkan bahwa solusi diskrit masih dapat mengikuti pola dari solusi kontinu.

Berdasarkan Tabel 4.5 menyajikan analisis galat antara solusi model diskrit dan kontinu dari dinamika populasi *prey*. Penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100%. Pada awal simulasi $t = 0$, galat tidak ada karena nilai awal sama. Namun, seiring bertambahnya waktu, galat mulai muncul dan perlahan meningkat. Pada awal waktu $t = 10$, perbedaan nilai antara solusi kontinu dan diskrit masih cukup besar, yaitu sekitar 9.5054. Namun, seiring berjalannya waktu, selisih tersebut semakin mengecil. Sebagai contoh, pada $t = 30$ perbedaan menurun menjadi 0.6701, dan bahkan pada $t = 300$, selisih antara kedua solusi hanya 0.0035. Hal ini mengindikasikan bahwa meskipun terdapat galat pada awal simulasi, seiring waktu solusi diskrit mampu mengikuti pola dari solusi kontinu dengan lebih baik. Artinya, pendekatan numerik yang digunakan menunjukkan akurasi yang meningkat terhadap waktu, dan solusi diskrit menjadi semakin mendekati solusi kontinu pada interval yang lebih panjang.

3. Simulasi Tiga

Pada simulasi ketiga, digunakan parameter yang berbeda dari nilai awal yang tercantum dalam jurnal Wang et al. (2011), dengan tujuan untuk mengamati bagaimana hasil berubah ketika nilai parameter diturunkan.

Penyesuaian parameter dilakukan terlebih dahulu guna mengevaluasi pengaruhnya terhadap dinamika sistem. Adapun parameter yang digunakan dalam simulasi ini adalah sebagai berikut: $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$, dan $\mu = 0.01$. Selanjutnya, ditampilkan grafik model *predator* dalam bentuk diskrit yang dibandingkan dengan kontinu guna memperlihatkan perbedaan perilaku sistem. Tujuan dari perbandingan ini adalah untuk menilai sejauh mana pendekatan diskrit mampu merepresentasikan sistem kontinu, serta untuk mengkaji tingkat akurasi dan kestabilan dari metode numerik yang digunakan.



Gambar 4.5 Potret fase grafik *prey* kontinu dan diskrit tanpa efek *allee* $\mu = 0.01$ pada populasi *predator* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

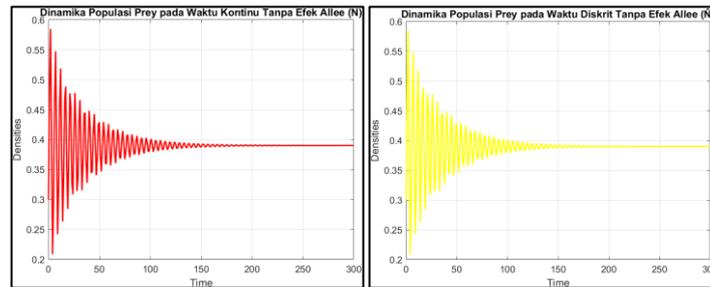
Tabel 4.6 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *predator* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5$, dan $\mu = 0.01$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

Waktu (t)	Predator (P)	Predator (\hat{P})	Analisis Galat Predator ($P - \hat{P}$)
0	20.0000	20.0000	0
10	39.0300	25.6826	13.3473
20	39.0324	29.2992	9.7332
30	39.0279	33.0785	5.9494
40	39.0264	37.9472	1.0792
50	38.9863	41.7854	2.7991
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0307	39.0207	0.0100

Berdasarkan gambar 4.5 menunjukkan perbandingan antara hasil simulasi model diskrit dan kontinu, dengan parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6, a = 2.5,$ dan $\mu = 0.01$ dalam rentang waktu $t \in [0,300]$. Gambar 4.3 (a) menggambarkan hasil dari model kontinu, sedangkan gambar 4.3 (b) merupakan hasil dari model diskrit. menampilkan potret fase dari populasi *predator* dalam bentuk grafik kontinu dan diskrit. ditampilkan grafik dinamika populasi *predator* secara kontinu dan diskrit dengan mempertimbangkan efek *allee* $\mu = 0.01$. Grafik menunjukkan bahwa baik solusi gambar 4.5 (a) maupun gambar 4.5 (b) terlihat bahwa kedua model masih menunjukkan pola osilasi yang stabil dan meredam seiring waktu, dengan amplitudo yang perlahan mengecil hingga sistem mencapai kestabilan. Baik solusi kontinu maupun diskrit menunjukkan dinamika yang serupa, meskipun terdapat sedikit perbedaan dalam tinggi puncak-puncaknya di fase awal.

Berdasarkan Tabel 4.6 menunjukkan hasil perbandingan nilai populasi *predator* dari simulasi kontinu P dan diskrit \hat{P} menggunakan metode Euler maju. Penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100% menunjukkan perbandingan antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *predator* dengan efek *allee* kecil $\mu = 0.01$ menggunakan metode Euler maju. Terlihat bahwa pada awal waktu, yaitu saat $t = 10$, terdapat galat yang cukup besar sebesar 13.3473, yang menunjukkan perbedaan signifikan antara kedua pendekatan di fase awal. Namun, seiring waktu, nilai galat menurun secara konsisten, seperti pada $t = 30$ sebesar 5.4944 dan terus

berkurang hingga menjadi sangat kecil, yaitu 0.0100 pada $t = 300$. Hal ini mengindikasikan bahwa solusi diskrit semakin mendekati solusi kontinu seiring waktu, dan metode Euler maju mampu merepresentasikan dinamika *predator* secara akurat dalam jangka panjang, khususnya ketika efek *allee* tidak terlalu kuat.



Gambar 4.6 Potret fase grafik *prey* kontinu dan diskrit tanpa efek *allee* pada populasi *prey* terhadap waktu untuk $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

Tabel 4.7 Persentase galat antara solusi kontinu dan diskrit pada populasi *prey* menggunakan metode Euler maju terhadap solusi N dan P untuk parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ pada interval waktu $t \in [0, 300]$.

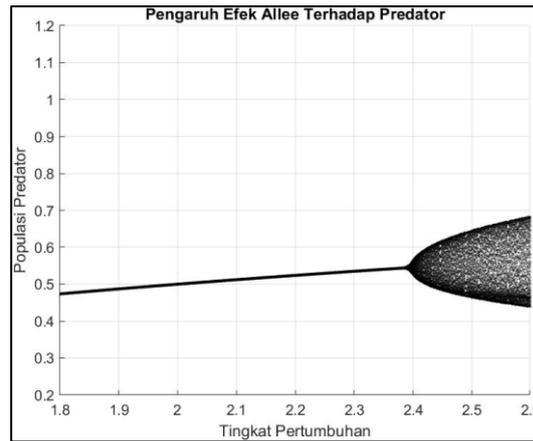
Waktu (t)	Prey (N)	Prey (\hat{N})	Analisis Galat Prey ($N - \hat{N}$)
0	30.0000	30.0000	0
10	39.0341	31.7771	7.2569
20	38.9945	37.8667	1.1277
30	38.9963	42.9243	3.9280
40	39.0251	44.8119	5.7867
50	39.0195	42.8976	3.8781
⋮	⋮	⋮	⋮
300	39.0473	39.0266	0.0206

Berdasarkan gambar 4.6 menunjukkan perbandingan antara hasil simulasi model diskrit dan kontinu dari perubahan populasi *prey*, dengan parameter $N_t = 0.3, P_t = 0.2, r = 1.6$, dan $a = 2.5$ dalam rentang waktu $t \in [0, 300]$. Gambar 4.3 (a) menggambarkan hasil dari model kontinu,

sedangkan gambar 4.3 (b) merupakan hasil dari model diskrit. menampilkan potret fase dari populasi *prey* dalam bentuk grafik kontinu dan diskrit. Kedua grafik memperlihatkan pola osilasi yang serupa, di mana amplitudo fluktuasi populasi *prey* secara bertahap mengecil dan akhirnya mendekati nilai kestabilan. Meskipun terdapat perbedaan kecil dalam tinggi puncak gelombang pada fase awal, grafik kontinu dan diskrit menunjukkan pola yang konsisten sepanjang interval waktu $t \in [0,300]$. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun model diskrit menggunakan pendekatan numerik Euler maju, dinamika yang dihasilkan masih sangat mendekati hasil model kontinu.

Berdasarkan tabel 4.7 menunjukkan analisis galat atau perbedaan antara nilai populasi *prey* dari solusi kontinu N dan diskrit \hat{N} dengan penyajian data pada tabel dilakukan dalam bentuk persentase dengan mengalikan nilai awal sebesar 100%. Analisis galat antara solusi kontinu dan diskrit untuk populasi *prey*. Pada awal waktu $t = 10$, galat yang tercatat adalah sebesar 7.2569, menandakan perbedaan yang cukup besar antara kedua pendekatan saat sistem masih dalam fase penyesuaian. Namun, seiring bertambahnya waktu, nilai galat mengalami penurunan yang signifikan, menjadi 3.8781 pada $t = 50$, dan semakin kecil hingga hanya 0.0206 pada $t = 300$. Penurunan galat ini menunjukkan bahwa seiring sistem menuju kestabilan, solusi diskrit semakin mendekati solusi kontinu, sehingga metode Euler maju terbukti efektif dalam merepresentasikan dinamika populasi *prey* dalam jangka panjang, terutama ketika tidak terdapat efek *allee* dalam model.

Berdasarkan ketiga grafik yang ditampilkan pada gambar 4.1, 4.3, dan 4.5 yang membahas mengenai efek *allee* pada *predator*, dapat dilihat bahwa perubahan nilai parameter μ , yang merepresentasikan kekuatan efek *allee* pada *predator*, sangat mempengaruhi dinamika populasi *predator* dari waktu ke waktu. Pada Gambar 4.5, saat $\mu = 0.01$ efek *allee* sangat kecil, grafik menunjukkan osilasi yang relatif besar dan lambat meredam. Baik pada model kontinu maupun diskrit, amplitudo fluktuasi masih cukup tinggi hingga sekitar $t = 100$ sebelum akhirnya menurun secara bertahap menuju keadaan stabil. Sementara pada gambar 4.1 dengan $\mu = 0.09$, amplitudo osilasi meredam lebih cepat dibandingkan sebelumnya, grafik menunjukkan penurunan getaran secara signifikan hingga mendekati stabilitas pada waktu sekitar $t = 70$. Pada kondisi gambar 4.3, yaitu $\mu = 0.12$, efek *allee* lebih kuat lagi, menyebabkan peredaman osilasi berlangsung lebih cepat, dan kestabilan tercapai lebih awal sekitar $t = 50$. Selain itu, amplitudo awal osilasi juga semakin kecil dibandingkan dua grafik sebelumnya, menunjukkan bahwa efek *allee* yang lebih besar dapat menekan fluktuasi populasi *predator* sejak awal. Secara keseluruhan, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai μ , maka amplitudo osilasi populasi *predator* cenderung semakin kecil dan lebih cepat meredam menuju titik kestabilan, baik pada model kontinu maupun diskrit. Efek ini mencerminkan bahwa faktor *allee* memainkan peran penting dalam mengurangi ketidakstabilan populasi *predator* pada fase awal dinamika ekosistem.



Gambar 4.7 Pengaruh efek *allee* terhadap populasi *predator* untuk $N_t = 0.3$ dan $P_t = 0.2$.

Gambar 4.7 menunjukkan bagaimana efek *allee* memengaruhi kepadatan *predator* dalam suatu model dinamika populasi. Sumbu horizontal (x) merepresentasikan tingkat pertumbuhan (r) dari populasi, yang berkisar antara sekitar 1.8 hingga 2.6, sementara sumbu vertikal (y) menunjukkan kepadatan *predator* pada nilai r yang lebih kecil sekitar $1.8 \leq r \leq 2.3$. Dalam penelitian ini, digunakan fungsi efek *allee* $\frac{P}{\mu + P}$ dengan asumsi $0 < \mu < \frac{r}{a}$ dan konstanta *allee* $\mu = 0.09$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis yang telah diperoleh, karena sesuai dengan kondisi kestabilan titik kesetimbangan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ bersifat stabil asimtotik jika memenuhi syarat $f(1) = 1 - p + q > 0$, $f(-1) = 1 + p + q > 0$ dan $f(0) = q < 1$. Oleh karena itu, pada hasil simulasi numerik, diambil nilai parameter yang diperlukan untuk menunjukkan analisis kestabilan fungsi *allee* pada populasi *predator*. Efek *allee* tampaknya memiliki peran dalam menjaga

stabilitas populasi pada nilai μ kecil, tetapi seiring pertumbuhan meningkat, interaksi antara *predator* dan *prey* menjadi lebih kompleks, menghasilkan variasi dalam pola populasi. Secara keseluruhan, gambar ini menggambarkan bagaimana perubahan tingkat pertumbuhan dapat menyebabkan pergeseran dari keadaan stabil menuju pola yang semakin fluktuatif dan sulit diprediksi dalam sistem yang mempertimbangkan efek *allee*.

4.3 Penyelesaian Model *Predator Prey* dalam Pandangan Islam

Model dinamik pada permasalahan *predator prey* yang mempertimbangkan efek *allee* pada *predator* menunjukkan bahwa setiap titik kesetimbangan dalam sistem memiliki aturan serta ketentuan yang harus dipenuhi agar tetap berada dalam kondisi stabil. Jika dalam sistem terdapat beberapa titik kesetimbangan yang bersifat tidak stabil, maka diperlukan pemenuhan syarat-syarat tertentu guna memastikan bahwa sistem dapat mencapai keadaan yang stabil dan terjaga kesetimbangannya dalam jangka panjang.

Islam mengajarkan prinsip keselarasan dalam alam semesta, hal ini menunjukkan bahwa dalam setiap aspek kehidupan, termasuk dalam ekosistem yang terbentuk oleh hubungan timbal balik tak terpisahkan antara makhluk hidup dengan lingkungannya, segala sesuatu telah ditetapkan ukurannya dengan sempurna. Dalam al-Qur'an, Allah Swt. berfirman:

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran.*” (Q.S al-Qamar [54]: 49), (Kementerian Agama, 2022). Hubungan yang seimbang antara *predator* dan *prey* hanya dapat terwujud jika faktor-faktor seperti tingkat

pertumbuhan, kematian, dan kondisi lingkungan diperhitungkan dengan tepat. Begitu pula dalam kehidupan, manusia perlu menjaga keteraturan dan ketertiban agar sistem yang ada tetap teratur, sebagaimana segala sesuatu telah ditetapkan ukurannya oleh Allah Swt.

Al-Qur'an sendiri memuat banyak ayat dalam berbagai surat yang menjelaskan tentang persoalan lingkungan (ekologi) serta keteraturan yang ada di dalamnya. Setiap ciptaan Allah Swt. telah dirancang dengan perhitungan yang sempurna, mencerminkan kebijaksanaan dan kekuasaan-Nya. Segala sesuatu di alam semesta ini diciptakan dengan penuh keteraturan dan kesempurnaan, tanpa adanya kecacatan ataupun ketidakseimbangan sedikit pun, Allah Swt. berfirman:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَّا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمٰنِ مِن تَفٰوُتٍ ۗ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُوْرٍ

Artinya: “(Dia juga) yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih ketidakseimbangan sedikit pun. Maka, lihatlah sekali lagi! Adakah kamu melihat suatu yang tidak seimbang?” (Q.S al-Mulk : 3), (Kementerian Agama, 2022).

Ayat ini menegaskan sesungguhnya, Allah Swt. menciptakan segala sesuatu berdasarkan hukum dan peraturan yang telah ditetapkan-Nya, sehingga seluruh ciptaan Allah berjalan dengan teratur, selaras, dan indah. Bayangkan betapa kacau sebuah sistem tata surya jika tidak ada keseimbangan antar planet, yang pada akhirnya dapat mengakibatkan tabrakan antar planet lainnya dan kehancuran yang tak terhindarkan. Begitu pula dalam kehidupan di bumi, Allah Swt. menciptakan berbagai makhluk hidup dengan saling keterkaitan satu sama lain, baik itu manusia, binatang, maupun tumbuhan. Masing-masing memiliki peran dalam menjaga ekosistem agar tetap stabil dan berfungsi sebagaimana mestinya.

Untuk menghindari semakin parahnya kerusakan alam, Allah Swt. telah memberikan manusia peran sebagai khalifah di bumi. Sebagai makhluk yang dikaruniai akal, manusia memiliki tanggung jawab besar untuk menjaga, merawat, dan melestarikan alam agar tetap berjalan sesuai dengan keseimbangan yang telah Allah tetapkan. Amanah ini bukan hanya sekadar tugas, tetapi juga bentuk ibadah dan tanggung jawab moral yang harus dijalankan dengan penuh kesadaran. Dengan menjaga alam, manusia tidak hanya memastikan kelangsungan hidupnya sendiri, tetapi juga menjalankan perintah Allah Swt. dengan sebaik-baiknya, sehingga kehidupan di bumi tetap teratur dan bermanfaat bagi seluruh makhluk.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian yang telah dijelaskan pada Bab I dan hasil yang disajikan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *predator prey* diskrit dengan efek *allee* pada *predator* telah dilakukan transformasi menjadi bentuk kontinu menggunakan pendekatan metode beda hingga standar, yaitu metode Euler maju (*forward Euler*).
2. Pada model *predator prey* dengan efek *allee* pada *predator*, diperoleh tiga titik kesetimbangan yakni, $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (1,0)$ yang bersifat tidak stabil sedangkan $E_3 = (N_1^*, P_1^*)$ bersifat stabil asimtotik jika memenuhi kondisi syarat $f(1) = 1 - p + q > 0$, $f(-1) = 1 + p + q > 0$ dan $f(0) = q < 1$. Hasil analisis kestabilan menunjukkan adanya pengaruh nilai parameter (μ) sebagai efek *allee* pada perilaku sistem.

5.2 Saran

Dalam penelitian selanjutnya, disarankan untuk mempertimbangkan pengaruh parameter-parameter lainnya seperti efek *allee* pada kedua populasi baik *predator* maupun *prey*. Selain itu, diharapkan penggunaan metode simulasi numerik yang lebih kompleks agar dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang karakteristik dinamik dari model *predator prey*.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah bin Muhammad, B. A. bin I. A.-S. (2003). *Tafsir Ibnu Katsir* (Vol. 5, hlm. 121). Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Anton. (2004). Summary of changes. In *American College of Radiology Network*.
- Banagaaya, N. (2008). *Nonstandard Finite Difference Method Definitions and Implementation*. African Institute for Mathematical Sciences (AIMS).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Textbook and Student Solutions Manual Set*. 796.
- Çelik, C., & Duman, O. (2009). Allee effect in a discrete-time predator-prey system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(4), 1956–1962. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.09.077>
- Clark, J. D., & Brandt, S. A. (2024). An Introduction to an Introduction. In *From Hunters to Farmers*. <https://doi.org/10.1525/9780520407213-002>
- Courchamp, F., Clutton-Brock, T., & Grenfell, B. (1999). Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends in Ecology and Evolution*, 14(10), 405–410. [https://doi.org/10.1016/S0169-5347\(99\)01683-3](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(99)01683-3)
- Arrowsmith, D.K., (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- Djohar, M. (2017). *Ekologi: Populasi, Komunitas, Ekosistem*. 5–259. Yogyakarta: Deepublish.
- Erjaee G.H., Alnasr, M. dan S. M. (2001). *Non-Standard Discretization of Fractional Differential Equations*. Qatar University Interior Research Under Grant QUUG-CAS- MATH-08-03.
- Kementerian Agama. (2022). *Qur'an Kemenag*
- Kimmel, M., & Axelrod, D. E. (2015). Branching processes in biology. In *Interdisciplinary Applied Mathematics* (Vol. 19).
- Perko, L. (2001). *Equations and Dynamical Systems*. (3rd ed.). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
- Sakinah. (2011). *Analisis Global Model Predator-Prey dengan Perlindungan Prey*. Malang: Skripsi Universitas Brawijaya.
- Santoso, W. (1988). *Persamaan Differensial Biasa Dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Bandung: ITB Press.
- Skalski, G. T., & Gilliam, J. F. (2001). Functional responses with predator

interference: Viable alternatives to the Holling type II model. *Ecology*, 82(11), 3083–3092.

Stephens, P. A., & Sutherland, W. J. (1999). Consequences of the *Allee* effect for behaviour, ecology and conservation. *Trends in Ecology and Evolution*, 14(10), 401–405. [https://doi.org/10.1016/S0169-5347\(99\)01684-5](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(99)01684-5)

Wang, W. X., Zhang, Y. B., & Liu, C. zhong. (2011). Analysis of a discrete-time predator-prey system with *Allee* effect. *Ecological Complexity*, 8(1), 81–85. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2010.04.005>

Waruwu, M. (2023). Pendekatan penelitian pendidikan: metode penelitian kualitatif, metode penelitian kuantitatif dan metode penelitian kombinasi (*Mixed Method*). *Jurnal Pendidikan Tambusai*. 7(2), 1234–1245.

Widayani H. (2012). *Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Perlindungan terhadap Prey Terinfeksi*. Malang: Skripsi Universitas Brawijaya.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Gambar (4.1)

Gambar 4.1 Potret fase grafik *predator prey* diskrit dan kontinu dengan efek *allee* pada populasi *predator* terhadap waktu untuk $r = 1.6$ dan $a = 2.5$. Saat $t \in [0, 300]$.

```
clc;
clear all;
N0 = 0.3;
P0 = 0.2;
n_steps = 300;
r = 1.6;
a = 2.5;
u = 0.09;
N = zeros(1, n_steps + 1);
P = zeros(1, n_steps + 1);
N(1) = N0;
P(1) = P0;
for i = 1:n_steps
    N(i + 1) = N(i) + r * N(i) * (1 - N(i)) - a * N(i) * P(i);
    P(i + 1) = P(i) + a * P(i) * (N(i) - P(i)) * (P(i) / (u + P(i)));
end

figure;
plot(0:n_steps, N, 'y-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Prey pada Waktu Diskrit Tanpa Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;

figure;
plot(0:n_steps, P, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Predator pada Waktu Diskrit dengan Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;

clc;
clear all;
N0 = 0.3;
P0 = 0.2;
n_steps = 300;
r = 1.6;
a = 2.5;
u = 0.09;
N = zeros(1, n_steps + 1);
P = zeros(1, n_steps + 1);
N(1) = N0;
P(1) = P0;
for i = 1:n_steps
    N(i + 1) = N(i) + r * N(i) * (1 - N(i)) - a * N(i) * P(i);
    P(i + 1) = P(i) + a * P(i) * (N(i) - P(i)) * (P(i) / (u + P(i)));
end
```

```
figure;
plot(0:n_steps, N, 'y-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Prey pada Waktu Kontinu Tanpa Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;

figure;
plot(0:n_steps, P, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Predator pada Waktu Kontinu dengan Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;
```

Lampiran 2. Program Matlab Gambar (4.2)

Gambar 4.2 Potret fase grafik *predator prey* diskrit dan kontinu tanpa efek *allee* pada populasi *prey* terhadap waktu untuk $r = 2.2$ dan $a = 2$. Saat $t \in [0, 300]$.

```

clc;
clear all;
N0 = 0.3;
P0 = 0.2;
n_steps = 300;
r = 2.2;
a = 2;
u = 0.09;
N = zeros(1, n_steps + 1);
P = zeros(1, n_steps + 1);
N(1) = N0;
P(1) = P0;
for i = 1:n_steps
    N(i + 1) = N(i) + r * N(i) * (1 - N(i)) - a * N(i) * P(i);
    P(i + 1) = P(i) + a * P(i) * (N(i) - P(i)) * (P(i) / (u + P(i)));
end

figure;
plot(0:n_steps, N, 'y-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Prey pada Waktu Diskrit Tanpa Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;

figure;
plot(0:n_steps, P, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('Dinamika Populasi Predator pada Waktu Diskrit dengan Efek Allee');
xlabel('Waktu');
ylabel('Kepadatan');
grid on;

clc;
clear all;
N0 = 0.3;
P0 = 0.2;
n_steps = 300;
r = 2.2;
a = 2;
u = 0.09;
N = zeros(1, n_steps + 1);
P = zeros(1, n_steps + 1);
N(1) = N0;
P(1) = P0;
for i = 1:n_steps
    N(i + 1) = N(i) + r * N(i) * (1 - N(i)) - a * N(i) * P(i);
    P(i + 1) = P(i) + a * P(i) * (N(i) - P(i)) * (P(i) / (u + P(i)));
end

figure;
plot(0:n_steps, N, 'y-', 'LineWidth', 1.5);

```

```
title('Dinamika Populasi Prey pada Waktu Kontinu Tanpa Efek Allee');  
xlabel('Waktu');  
ylabel('Kepadatan');  
grid on;  
  
figure;  
plot(0:n_steps, P, 'b-', 'LineWidth', 1.5);  
title('Dinamika Populasi Predator pada Waktu Kontinu dengan Efek  
Allee');  
xlabel('Waktu');  
ylabel('Kepadatan');  
grid on;
```

Lampiran 3. Program Matlab Gambar (4.3)

Gambar 4.5 Pengaruh efek *allee* terhadap populasi *predator*.

```

clc;
clear all;
N0 = 0.3;
P0 = 0.2;
n_steps = 2000;
r_values = 1.8:0.0005:2.6;

figure;
hold on;
title('Pengaruh Efek ALlee Terhadap Predator');
xlabel('Tingkat pertumbuhan');
ylabel('Populasi Predator');
xlim([1.8, 2.6]);
ylim([0, 1.2]);

for r = r_values
    N = N0;
    P = P0;
    prey_series = [];
    for i = 1:n_steps
        N_new = N + r * N * (1 - N) - 2 * N * P;
        P_new = P + 2 * P * (N - P) * (P / (0.09 + P));
        N = N_new;
        P = P_new;

        if i > n_steps - 500
            prey_series = [prey_series, N];
        end
    end
    plot(r * ones(size(preying_series)), prey_series, '.b', 'MarkerSize',
2);
end

grid on;
hold off;

```

Lampiran 4. Program Maple

Program Maple dari model *predator prey* dengan efek *allee* pada *predator*.

```
> restart;with(plots);with(DEtools);with(linalg);unprotect(gamma);
  DFE;

> dN := r*N*(1 - N) - a*N*P;
> dP := a*P*(N - P)*P/(mu + P);

> fixpoint := solve({dN, dP}, {N, P});
> fixpoint1 := fixpoint[1];
> fixpoint2 := fixpoint[2];
> fixpoint3 := fixpoint[3];

> Jacobian := Matriks(jacobian([dN, dP], [N, P]));
> Jacobian1 := subs(fixpoint1, Jacobian);
> Jacobian2 := subs(fixpoint2, Jacobian);
> Jacobian3 := subs(fixpoint3, Jacobian);
```

RIWAYAT HIDUP



Diani Saputri, lahir di Kediri pada 01 April 2002. Penulis merupakan anak ketiga dari pasangan Bapak Tumiran dan Ibu Tri Indrijani, S.Pd. serta adik dari Yayik Mavintantri dan Inggar Ariyani. Penulis telah menempuh Pendidikan mulai dari TK Dharma Wanita yang lulus pada tahun 2009, dilanjutkan menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN Klampitan dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di SMPN 2 Purwoasri dan lulus pada tahun 2018. Selanjutnya penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di SMAN 1 Purwoasri dan lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang sama melalui jalur SBMPTN, penulis diterima menjadi mahasiswi pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis aktif terlibat sebagai volunteer dalam Komunitas Bahagia Bareng Malang dan Tameem Care Indonesia untuk menyelenggarakan berbagai kegiatan sosial. Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Mahasiswa (KKM) di Desa Kedok, Kecamatan Turen, Kabupaten Malang selama satu bulan sebagai anggota Divisi Penerbitan dan Jurnalistik pada tahun 2024. Selain itu pada tahun 2024 pada bulan juni-juli penulis juga mengikuti program Praktik Kerja Lapangan (PKL) di PT. ASABRI KC Malang yang melaksanakan tugas seperti processing data, scanning document E-Dosir, dan customer service dalam penggunaan aplikasi Asabri Mobile.

Hidup tidak selalu mudah, dan setiap orang pasti menghadapi tantangan, begitu pula dengan penulis. Meski begitu, semangat dan optimisme selalu menjadi pegangan dalam menjalani hari-hari. Keberanian serta keteguhan hati diyakini sebagai kunci untuk menghadapi berbagai rintangan. Daripada terlarut dalam kesedihan, penulis memilih untuk tetap melangkah dan percaya bahwa setiap impian dapat diwujudkan. Harapannya, kehadiran penulis bisa membawa manfaat dan memberikan kontribusi positif bagi sesama.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Diani Saputri
NIM : 210601110061
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Predator Prey* dengan Efek *Allee*
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M Si
Pembimbing II : Dr. Fachrur Rozi, M Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	18 September 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	26 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	15 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	21 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	23 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	25 Oktober 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	29 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	1 November 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	21 November 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	30 Desember 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	20 Januari 2025	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	3 Februari 2025	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	4 Februari 2025	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	7 Februari 2025	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	10 Februari 2025	ACC Bab IV dan V	15.
16.	11 Februari 2025	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	21 Februari 2025	ACC Kajian Agama Bab IV	17. <i>FP</i>
18.	5 Maret 2025	ACC Seminar Hasil	18. <i>→</i>
19.	11 Maret 2025	ACC Seminar Hasil lanjutan	19. <i>→</i>
20.	14 April 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20. <i>→</i>
21.	5 Mei 2025	ACC Sidang Skripsi	21. <i>→</i>
22.	10 Juni 2025	ACC Keseluruhan	22. <i>→</i>

Malang, 10 Juni 2025

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005