

**PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI STRING
DENGAN JARINGAN RADIAL BASIS FUNCTION**

SKRIPSI

**OLEH:
ALIFIA NISA MAGHFIROH
NIM. 210601110038**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

**PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI STRING
DENGAN JARINGAN RADIAL BASIS FUNCTION**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
ALIFIA NISA MAGHFIROH
NIM. 210601110038**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI STRING DENGAN JARINGAN RADIAL BASIS FUNCTION

SKRIPSI

Oleh
Alifia Nisa Maghfiroh
NIM. 210601110038

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 14 Mei 2025

Dosen Pembimbing I



Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II



Ach. Nashiehuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA VIBRASI STRING DENGAN JARINGAN RADIAL BASIS FUNCTION

SKRIPSI

Oleh
Alifia Nisa Maghfiroh
NIM. 210601110038

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 12 Juni 2025

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji 1 : Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 3 : Ach. Nashichuddin, M.A



.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika




.....
Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini

Nama : Alifia Nisa Maghfiroh
NIM : 210601110038
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Model Matematika Vibrasi String dengan Jaringan Radial Basis Function

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juni 2025



Alifia Nisa Maghfiroh
NIM. 210601110038

MOTTO

" لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۗ (٢٨٦) "

“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

~ QS. Al-Baqarah [1]: 286

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim,

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, nikmat, pertolongan, serta kemudahan yang diberikan dalam setiap proses kehidupan ini. Dengan penuh rasa syukur dan cinta, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta, Bapak Achmad Suyuti dan Ibu Maisaroh, atas doa, kasih sayang, kesabaran, dan dukungan yang menjadi sumber kekuatan dalam setiap langkah, kepada kakak, Rahmad Dandi Fitra, yang selalu setia menjadi tempat berbagi cerita, nasihat, dan dukungan dalam berbagai fase kehidupan, Hafidhah Riska Maulidya, yang juga sudah menjadi tempat cerita di berbagai fase kehidupan dan partner apapun, kepada kerabat, sahabat dan teman-teman seperjuangan yang telah menghadirkan tawa, semangat, dan kebersamaan di sepanjang perjalanan ini, serta untuk diri sendiri, sebagai bentuk penghargaan atas keteguhan hati dalam bertahan, berjuang, dan tetap berharap hanya kepada Allah SWT dalam setiap ujian dan proses yang dijalani. Semoga segala usaha ini membawa kebaikan, keberkahan, dan menjadi awal dari perjalanan panjang yang diridhai Allah SWT.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat akademik dalam menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, penyusunan skripsi ini tidak akan terselesaikan dengan lancar. Oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang dengan penuh kesabaran dan dedikasi telah meluangkan waktu, tenaga, serta memberikan bimbingan, arahan, dan masukan yang sangat berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II yang dengan penuh kesabaran dan dedikasi telah meluangkan waktu, tenaga, serta memberikan bimbingan, arahan, dan masukan yang sangat berharga kepada penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku dosen ketua penguji yang telah bersedia memberikan ilmu, arahan, dan saran yang sangat berharga kepada penulis.
7. Dr. Mohammad Jamhuri, M.Si., selaku dosen anggota penguji I yang telah bersedia memberikan ilmu, arahan, dan saran yang sangat berharga kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan inspirasi yang sangat berharga kepada penulis.

9. Bapak Achmad Suyuti dan Ibu Maisaroh selaku orang tua penulis, atas segala doa, kesabaran, serta dukungan dalam bentuk apa pun yang senantiasa menyertai setiap proses yang penulis jalani, baik dalam kehidupan sehari-hari, perkuliahan, maupun dalam penyelesaian skripsi ini.
10. Rahmad Dandi Fitra selaku kakak penulis, atas segala doa, serta peran pentingnya yang senantiasa memberikan nasihat, semangat, dukungan, dan menjadi tempat berbagi cerita di berbagai fase kehidupan, termasuk dalam perjalanan penulis menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua sahabat, teman-teman penulis, dan seluruh mahasiswa angkatan 2021 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah memberikan dukungan, kebersamaan, dan semangat yang penuh motivasi dan kolaborasi bagi penulis.
12. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan kontribusi dalam berbagai bentuk kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis serta memberikan kontribusi positif bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya di bidang Matematika. Akhir kata, semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan ridha-Nya kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan skripsi ini.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 12 Juni 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Model Matematika Vibrasi String.....	7
2.2 Metode Radial Basis Function.....	8
2.2.1 Jenis-Jenis Radial Basis Function.....	9
2.2.2 Langkah-Langkah Metode Radial Basis Function	10
2.2.3 Implementasi Radial Basis Function	11
2.3 Galat Metode Radial Basis Function	13
2.4 Menjaga Keselamatan dalam Ajaran Islam	14
BAB III METODE PENELITIAN	18
3.1 Jenis Penelitian	18
3.2 Pra Penelitian	18
3.3 Tahapan Penelitian	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	23
4.1 Model Matematika Vibrasi String	23
4.2 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi String.....	24
4.3 Penerapan Metode Radial Basis Function	33
4.3.1 Solusi Numerik Persamaan Linier Model Vibrasi String Menggunakan Metode Radial Basis Function	33
4.3.2 Simulasi Numerik Persamaan Linier Model Vibrasi String Menggunakan Metode Radial Basis Function	41
4.3.3 Galat Metode Radial Basis Function	63
4.4 Penyelesaian Model Matematika dalam Pandangan Islam.....	67
BAB V PENUTUP	71
5.1 Kesimpulan.....	71
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan.....	71

DAFTAR PUSTAKA	73
LAMPIRAN.....	75
RIWAYAT HIDUP	84

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Perhitungan Matriks $P(t, c_j)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	46
Tabel 4.2	Perhitungan Matriks $\phi(0, c_j)$ dan $\phi_t(0, c_j)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	47
Tabel 4.3	Baris dan Kolom Matriks A untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	48
Tabel 4.4	Perkalian Elemen untuk Matriks A dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	49
Tabel 4.5	Perkalian Elemen untuk Matriks b dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	51
Tabel 4.6	Perhitungan Matriks $\phi(t, c_j)$ dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	56
Tabel 4.7	Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	66
Tabel 4.8	Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	66

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Solusi Eksak $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	32
Gambar 4.2	Solusi Eksak $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	32
Gambar 4.3	Grafik Solusi Numerik Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	58
Gambar 4.4	Grafik Solusi Numerik Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	63
Gambar 4.5	Perbandingan Solusi Eksak dengan Solusi Numerik Radial Basis Function dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	64
Gambar 4.6	Perbandingan Solusi Eksak dengan Solusi Numerik Radial Basis Function dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	64
Gambar 4.7	Grafik Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	67
Gambar 4.8	Grafik Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$	67

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Script Solusi Numerik Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 20$	75
Lampiran 2. Script Solusi Numerik Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 0.1$	76
Lampiran 3. Script Solusi Eksak dengan $\Delta t = 20$	78
Lampiran 4. Script Solusi Eksak dengan $\Delta t = 0.1$	78
Lampiran 5. Script Galat Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 20$	79
Lampiran 6. Script Galat Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 0.1$	81
Lampiran 7. Script Maple Solusi Eksak.....	83

ABSTRAK

Maghfiroh, Alifia Nisa. 2025. **Penyelesaian Model Matematika Vibrasi String dengan Jaringan Radial Basis Function**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Model Vibrasi String, Persamaan Diferensial Orde Dua, Radial Basis Function (RBF), Solusi Numerik, Analisis Galat

Fenomena vibrasi string pada jembatan gantung menggambarkan osilasi akibat gaya eksternal dan gravitasi, yang dapat mempengaruhi kestabilan dan keamanan struktur. Model matematika untuk masalah vibrasi ini dinyatakan oleh Mckenna (1999) dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde dua untuk lendutan $\ddot{y}(t)$. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis perilaku model $\ddot{y}(t)$ dan menyelesaikan solusi model dengan Radial Basis Function (RBF) dan membandingkannya dengan solusi analitik. Pada RBF dipilih fungsi basis berbentuk fungsi *multiquadratic* orde 1. Galat dilaksanakan dengan menghitung selisih RBF terhadap solusi analitik pada interval waktu $t = [0,60]$ dengan parameter $K = 1000, m = 2500, \delta = 0.01, g = 9.8$. Hasil menunjukkan bahwa solusi numerik RBF terhadap solusi eksak menghasilkan selisih 0.0628 pada waktu $t = 60$ untuk $\Delta t = 20$, dan selisih 0.00000007 pada waktu $t = 60$ untuk $\Delta t = 0.1$. Dengan tingkat akurasi tersebut, metode RBF dapat dikatakan cukup efektif dalam menyelesaikan model vibrasi string, serta berpotensi diterapkan untuk analisis kestabilan struktur teknik seperti jembatan gantung.

ABSTRACT

Maghfiroh, Alifia Nisa. 2025. **Solving the Mathematical Model of String Vibration Using Radial Basis Function Networks**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: String Vibration Model, Second-Order Differential Equation, Radial Basis Function (RBF), Numerical Solution, Error Analysis

String vibration phenomena on suspension bridges describe oscillations due to external forces and gravity, which can affect the stability and safety of the structure. The mathematical model for this vibration problem is stated by Mckenna (1999) in the form of a second-order ordinary differential equation for deflection $\ddot{y}(t)$. This study aims to analyze the behavior of the $\ddot{y}(t)$ model and solve the model solution with Radial Basis Function (RBF) and compare it with the analytical solution. In RBF, the basis function is selected in the form of a 1st order multiquadratic function. The error is implemented by calculating the difference of the RBF to the analytical solution at a time interval $t = [0,60]$ with parameters $K = 1000, m = 2500, \delta = 0.01, g = 9.8$. The results show that the numerical solution of RBF to the exact solution produces a difference of 0.0628 at time $t = 60$ for $\Delta t = 20$, and a difference of 0.00000007 at time $t = 60$ for $\Delta t = 0.1$. With this level of accuracy, the RBF method can be said to be quite effective in solving string vibration models, and has the potential to be applied to the stability analysis of engineering structures such as suspension bridges.

مستخلص البحث

مغفيرة ، أليفيا نيسا. ٢٠٢٥. حل النموذج الرياضي لاهتزاز الحيوط باستخدام شبكة دالة الأساس الشعاعية. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ. المشرفة: (١) آري كوسومستوتي، الماجستير في التربية والعلوم، (٢) أحمد نصيح الدين، الماجستير في التعلم اللغة العربية

الكلمات المفتاحية: نموذج اهتزاز الأوتار، المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية، دالة الأساس الشعاعية ، الحل العددي، تحليل الخطأ.

ظاهرة اهتزاز الأوتار في الجسور المعلقة هي عبارة عن تذبذبات بسبب القوى الخارجية والجاذبية، والتي يمكن أن تؤثر على استقرار وسلامة الهيكل. تم وضع النموذج الرياضي لمشكلة الاهتزاز بواسطة ماكينا (1999) في شكل معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثانية للانحراف $\ddot{y}(t)$. هدفت هذه الدراسة إلى تحليل سلوك نموذج $\ddot{y}(t)$ وحل حل النموذج باستخدام دالة الأساس الشعاعي (RBF) ومقارنته بالحل التحليلي. في RBF، الدالة الأساسية المختارة هي دالة متعددة التريبع من الدرجة الأولى. ثم تنفيذ الخطأ عن طريق حساب الفرق بين RBF والحل التحليلي في الفترة الزمنية $t = [0, 60]$ مع المعلمات $K = 1000$ ، $m = 2500$ ، $\delta = 0.01$ ، $g = 9.8$. ظهرت النتائج أن الحل العددي RBF للحل الدقيق يعطي فرقاً قدره 0.0628 في الوقت $t = 60$ لـ $\Delta t = 20$ ، وفرقاً قدره 0.00000007 في الوقت $t = 60$ لـ $\Delta t = 0.1$. بفضل هذا المستوى من الدقة، يمكن القول أن طريقة RBF فعالة للغاية في حل نماذج اهتزاز الأوتار، ولديها القدرة على تطبيقها على تحليل استقرار الهياكل الهندسية مثل الجسور المعلقة.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem dawai yang disebut vibrasi string menampilkan jembatan gantung dengan ketinggian yang berbeda di kedua ujungnya. Pengaruh massa eksternal dan gaya gravitasi menyebabkan sistem ini osilasi, yang menghasilkan getaran pada dawai. Defleksi vertikal dari pusat gravitasi adalah aspek utama dalam model ini, yang berperan dalam menentukan karakteristik solusi numerik serta tingkat kesalahan komputasi. Model matematika untuk masalah ini diformulasikan oleh Mckenna, (1999) untuk memprediksi defleksi vertikal dari pusat gravitasi $y(t)$ yang optimal agar terhindar dari osilasi. Model ini merupakan persamaan diferensial biasa bergantung waktu. Sementara itu parameter-parameternya terdiri dari suku redaman viskos (δ), konstanta pegas (K), massa sistem (m), dan gaya gravitasi (g). Vibrasi string mengacu pada gerakan osilasi senar atau kabel ketika mengalami tegangan dan gaya eksternal (Mckenna, 1999). Dalam konteks jembatan gantung, fenomena ini terjadi ketika kabel utama mendefleksi karena beban eksternal, angin, atau getaran alami. Sangat penting untuk memahami perilaku vibrasi string untuk mengevaluasi kestabilan jembatan, menilai beban kritis, dan meminimalkan risiko resonansi yang dapat menyebabkan kerusakan struktur. Model matematika digunakan untuk menilai defleksi vertikal dari pusat gravitasi, untuk memastikan kinerja dan keamanan sistem vibrasi string. Ini adalah komponen yang sangat penting untuk menjaga keandalan sistem. Seringkali, pemecahan persamaan diferensial yang kompleks diperlukan untuk memodelkan perilaku vibrasi string. Dalam penelitian ini, metode Radial Basis Function (RBF) digunakan sebagai teknik utama untuk menyelesaikan model matematika vibrasi string.

Interpolasi model dapat melekat melalui simulasi numerik untuk berbagai kondisi nilai awal dan parameternya. Penelitian ini menggunakan metode Radial Basis Function (RBF) sebagai teknik numerik yang digunakan untuk memperkirakan fungsi dan turunannya, terutama dalam memecahkan persamaan diferensial biasa linier ataupun nonlinier (Thahiruddin & Jamhuri, 2023). RBF bekerja dengan mengubah persamaan diferensial asli menjadi bentuk yang lebih mudah dihitung menggunakan jaringan RBF, yang memungkinkan perhitungan solusi yang efisien. Metode ini dianggap efektif dalam menangani model matematika yang kompleks dan digunakan dalam banyak bidang. Dalam penelitian ini, akan digunakan metode RBF melalui metode langsung, yaitu melalui basis fungsi *multiquadratic*. Adapun langkah penyelesaiannya terdiri dari mendefinisikan model vibrasi string yang linier beserta nilai awalnya, kemudian menentukan nilai matriks melalui model yang telah diubah kedalam bentuk persamaan RBF, selanjutnya yaitu menghitung penyelesaian model dengan menghitung hasil kali nilai bobot yang telah diperoleh dari basis fungsi *multiquadratic*. Kemudian akan disimulasikan gambar grafik dari penyelesaian yang telah diperoleh.

Beberapa literatur yang relevan mengenai metode RBF adalah Aliy dkk., (2021), yang membahas mengenai metode fungsi dasar radial berbasis kuadratur diferensial untuk persamaan panas satu dimensi, serta penelitian oleh Thahiruddin & Jamhuri (2023), dimana membahas mengenai penyelesaian numerik model *predator-prey* dengan metode jaringan fungsi radial basis menggunakan Trigonometric Shape Parameter. Selain itu, Pandia & Sitepu, (2021) juga memberikan kontribusi penting terkait analisis galat pada persamaan diferensial

biasa orde 1 menggunakan metode numerik.

Penelitian-penelitian sebelumnya telah membahas berbagai metode numerik dalam menyelesaikan model persamaan diferensial biasa (ODE), baik linier maupun nonlinier. Utami dkk., (2022) menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) untuk menyimulasikan getaran *flying fox* dan menunjukkan keunggulan metode ini dibanding Runge-Kutta dalam hal akurasi. Thahiruddin dkk., (2023) menerapkan metode jaringan fungsi basis radial (RBF) untuk menyelesaikan model predator-mangsa dengan tingkat kesalahan rendah. Mufid dkk., (2015) menganalisis dinamika sudut defleksi model vibrasi dawai berdasarkan model McKenna melalui pendekatan nilai eigen. Permata dkk., (2021) mengombinasikan metode Runge-Kutta-Fehlberg dan ABM untuk menyelesaikan sistem osilasi pada jembatan gantung, membuktikan efektivitas metode numerik berurutan. Studi Pratama, (2024) menyederhanakan model nonlinier interaksi insulin dan reseptornya melalui pendekatan Taylor dan menyelesaikannya dengan pendekatan numerik RBF, sedangkan Artaberi, (2016) membandingkan metode langsung dan tidak langsung dalam penyelesaian ODE linier orde-4 menggunakan jaringan RBF. Berbeda dengan penelitian-penelitian di atas, penelitian ini menerapkan metode RBF pada model Mckenna, (1999) untuk mengevaluasi efektivitas metode RBF dalam menghasilkan solusi yang sesuai dengan karakteristik dinamika sistem, serta menunjukkan potensinya sebagai pendekatan alternatif yang akurat dalam pemodelan fenomena vibrasi pada jembatan gantung.

Menjaga keselamatan dan keamanan dalam setiap aktivitas adalah hal yang sangat penting dalam perspektif Islam. Setiap individu bertanggung jawab untuk memastikan bahwa kegiatan atau tindakan yang mereka lakukan tidak

membahayakan diri mereka sendiri atau orang lain. Dalam Al-Qur'an, Allah berfirman,

وَأَنْفِقُوا فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَلَا تُلْقُوا بِأَيْدِيكُمْ إِلَى التَّهْلُكَةِ وَأَحْسِنُوا إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ الْمُحْسِنِينَ ﴿١٩٥﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya: "*Dan infakkanlah (hartamu) di jalan Allah, dan janganlah kamu jatuhkan (diri sendiri) ke dalam kebinasaan dengan tangan sendiri, dan berbuatbaiklah. Sungguh, Allah menyukai orang-orang yang berbuat baik*" (QS. Al-Baqarah [1]: 195).

Ayat ini memerintahkan para pengikut-pengikut Allah untuk berinfak (membagi harta) di jalan Allah, yaitu dengan berjihad dan membersihkan harta dari unsur-unsur negatif. Juga, ditegaskan bahwa tidak boleh menjatuhkan diri ke dalam kebinasaan karena bakhil dalam menginfakkan harta (Tafsir Ibnu Katsir, 2015). Oleh karena itu, penerapan prinsip kehati-hatian dan pertimbangan yang matang harus diterapkan sebelum segala jenis kegiatan yang melibatkan risiko (Nurani, 2021). Bagian dari kewajiban seorang muslim adalah menggunakan ilmu pengetahuan ini untuk memenuhi janji Allah terhadap dirinya sendiri dan lingkungannya.

Maka dari itu, penelitian ini akan membahas penyelesaian model matematika vibrasi string menggunakan metode Radial Basis Function untuk memperoleh solusi numerik yang optimal pada berbagai konfigurasi waktu.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana solusi numerik model matematika vibrasi string menggunakan metode RBF pada berbagai nilai langkah waktu?
2. Bagaimana analisis galat solusi numerik yang dihasilkan oleh metode RBF pada model matematika vibrasi string untuk masing-masing nilai langkah waktu?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengimplementasikan metode RBF untuk menyelesaikan solusi numerik model matematika vibrasi string dengan variasi Δt .
2. Menganalisis dan membandingkan galat solusi numerik yang dihasilkan oleh metode RBF pada model matematika vibrasi string pada variasi Δt .

1.4 Manfaat Penelitian

1. Menghasilkan solusi numerik yang efektif untuk memodelkan sistem vibrasi string melalui pendekatan RBF dengan variasi diskritisasi waktu.
2. Dengan mengetahui galat solusi numerik pada masing-masing nilai Δt , penelitian ini dapat mengevaluasi kestabilan dan keakuratan metode RBF dalam menyelesaikan model matematika vibrasi string.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini memiliki beberapa batasan untuk memfokuskan analisis pada aspek-aspek tertentu dari model matematika vibrasi string, yaitu:

1. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini dipresentasikan sebagai persamaan diferensial biasa orde dua. Sumber model ini berasal dari Mckenna, (1999), dengan perumusan sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2K}{m}y + g \quad (1.1)$$

Dengan nilai awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$. Adapun parameter-parameter dalam persamaan (1.1) adalah sebagai berikut:

K : Konstanta pegas dawai, bernilai 1000 N/m ,

m : Massa sistem, sebesar 2500 kg ,

δ : Koefisien redaman, sebesar 0.01 , dan

g : Percepatan gravitasi, sebesar 9.8 m/s^2 .

Nilai-nilai tersebut diambil dari Mckenna, (1999), dan digunakan untuk memodelkan sistem, yang nantinya diselesaikan secara numerik.

2. Penelitian ini membatasi metode penyelesaian numerik pada metode Radial Basis Function (RBF) dengan basis fungsi *multiquadratic* yang merujuk pada jurnal Aliy dkk., (2021) dan Thahiruddin & Jamhuri, (2023).
3. Diskritisasi waktu dibatasi pada dua nilai yaitu $\Delta t = 20$ dan $\Delta t = 0.1$, untuk mengamati pengaruh perbedaan tingkat keterperincian waktu terhadap hasil perhitungan numerik dan representasi dinamika sistem.
4. Validasi model dilakukan dengan analisis galat solusi numerik yang dihasilkan oleh metode Radial Basis Function (RBF) untuk mengetahui efektivitas metode tersebut.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika Vibrasi String

Fenomena osilasi yang terjadi ketika dawai mengalami tegangan akibat gaya gravitasi dan beban luar disebut sebagai vibrasi string. Dalam konteks jembatan gantung, sistem ini terdiri dari dawai yang menopang beban jembatan. Angin dan faktor lingkungan lainnya dapat menyebabkan dawai mengalami osilasi atau defleksi. Untuk menjamin kestabilan dan keamanan struktur jembatan, sangat penting untuk memahami respons dinamis dawai.

Metode penerjemahan masalah fisik ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi dikenal sebagai model matematika. Seringkali, model ini digambarkan dalam bentuk persamaan diferensial. Jenis persamaan diferensial ini termasuk persamaan diferensial biasa (juga dikenal sebagai *ordinary differential equations*, atau ODE) dan persamaan diferensial parsial, yang masing-masing memiliki satu variabel bebas. Model matematika yang diwakili oleh persamaan diferensial biasanya dimasukkan ke dalam kategori IVP (Masalah Nilai Awal) dan BVP (Masalah Nilai Batas). IVP melibatkan kondisi yang ditentukan pada satu titik, sedangkan BVP memiliki kondisi yang ditentukan pada beberapa titik.

Dawai memainkan peran penting dalam menopang beban jembatan serta merespons gaya eksternal yang memengaruhi sistem vibrasi string. Mckenna, (1999) membuat model matematika untuk menggambarkan vibrasi string pada sistem jembatan gantung. Tujuan dari model ini membantu dalam memahami pola osilasi dawai dan dampaknya terhadap struktur jembatan gantung. Model ini terdiri dari dua persamaan diferensial biasa orde kedua yang menjelaskan mengenai

defleksi vertikal dari pusat gravitasi ($y(t)$) sebagai fungsi waktu. Persamaan dibangun dengan mempertimbangkan berbagai parameter fisik, seperti percepatan gravitasi, massa sistem, konstanta pegas, dan koefisien redaman viskos terhadap defleksi. Adapun model yang digunakan oleh Mckenna, (1999) yaitu sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2K}{m}y + g \quad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) diatas, persamaan (2.1) bersifat linier karena setiap sukunya merupakan fungsi linier dari variabel y dan turunannya, dimana tidak ada fungsi nonlinier seperti pangkat lebih tinggi dari satu, fungsi trigonometri, atau interaksi kompleks antar variabel.

2.2 Metode Radial Basis Function

Metode Radial Basis Function (RBF) adalah teknik numerik yang digunakan untuk memperkirakan solusi model matematika yang kompleks. Metode Radial Basis Function (RBF) termasuk salah satu pendekatan yang digunakan dalam jaringan saraf tiruan untuk menyelesaikan permasalahan yang kompleks, termasuk penyelesaian persamaan diferensial biasa (PDB) (Jamhuri, 2011). Jaringan saraf tiruan Radial Basis Function (RBF) terdiri dari lapisan input, lapisan tersembunyi (hidden layer), dan lapisan output. Fungsi basis radial mewakili setiap fungsi, dan norma Euclid digunakan untuk menghitung jarak antara titik input dan pusat-pusat yang telah ditentukan.

RBF sangat cocok untuk penyelesaian numerik persamaan diferensial karena memungkinkan pendekatan fungsi linier dan nonlinier. Kelebihan utama dari teknik ini adalah kemampuan untuk diaproksimasi langsung setiap fungsi dan turunannya

menggunakan fungsi basis tanpa memerlukan nilai awal. Dalam pendekatan ini, sistem persamaan linier dibangun berdasarkan nilai-nilai fungsi basis dan turunannya untuk menghitung nilai bobot yang menentukan aproksimasi. Untuk memastikan bahwa solusi yang dihasilkan sedekat mungkin dengan solusi dari model yang disimulasikan, prosedur ini dilakukan secara iteratif hingga nilai kesalahan atau galat memenuhi batas toleransi yang telah ditetapkan. Dalam bentuk umum, fungsi yang mendekati sebuah fungsi $y(t)$ menggunakan RBF dapat didefinisikan sebagai:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j) \quad (2.2)$$

Dengan $j = 1, 2, 3, \dots, N$, di mana ω_j adalah nilai bobot yang nilainya akan ditentukan dan ϕ merupakan fungsi radial basis (radial basis function atau fungsi aktivasi), yang dapat berbentuk *multiquadratic*, *Invers Multiquadratic*, atau *Gaussian*. (Thahiruddin & Jamhuri, 2023). Notasi $\phi(t, c_j)$ dalam hal ini merepresentasikan ketergantungan fungsi pada jarak antara titik evaluasi t dengan pusat c_j , yaitu $\phi(t - c_j)$. Pada umumnya, titik pusat c_j diambil sama dengan titik data t , sehingga penulisan fungsi RBF dapat disederhanakan menjadi:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t - c_j) \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) ini menjadi dasar dalam beberapa studi yang menerapkan metode RBF untuk menyelesaikan masalah numerik pada model matematis, seperti ditunjukkan dalam Thahiruddin & Jamhuri (2023).

2.2.1 Jenis-Jenis Radial Basis Function

Dalam jaringan RBF, tiga jenis fungsi basis radial yang paling umum digunakan adalah *Gaussian*, *Multiquadric*, dan *Invers Multiquadric*. Pilihan jenis

fungsi basis ini sangat memengaruhi kinerja jaringan, terutama dalam menentukan pusat-pusat dan lebar varians fungsi basis. Ini membantu menemukan solusi persamaan diferensial.

Bentuk dari ketiga radial basis function yaitu (Aliy dkk., 2021):

1. *Multiquadric* RBF : $\phi(r) = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$
2. *Invers Multiquadric* RBF : $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}$
3. *Gaussian* : $\phi(r) = e^{-(\alpha r)^2}$

Di mana $r = (t - c_j)$ merupakan jarak antara titik evaluasi t dengan pusat fungsi radial c_j . Secara umum, fungsi dari radial basis function yang paling umum digunakan yaitu fungsi *multiquadratic*, karena fleksibilitasnya dalam menangani berbagai bentuk data dan kemampuannya untuk memberikan hasil aproksimasi yang akurat.

2.2.2 Langkah-Langkah Metode Radial Basis Function

Secara umum, langkah-langkah dalam menerapkan metode Radial Basis Function untuk menyelesaikan persamaan differensial yaitu sebagai berikut (Thahiruddin & Jamhuri, 2023):

1. Memodelkan masalah dengan parameter dan variabel.
2. Apabila model mengandung elemen nonlinier, maka dilakukan linierisasi dengan menggunakan deret Taylor.
3. Mendiskritisasikan model yang sudah linier menggunakan jaringan fungsi radial basis.

4. Memasukkan nilai-nilai pada model yang telah membentuk persamaan jaringan fungsi radial basis untuk diubah kedalam bentuk persamaan matriks.
5. Menghitung nilai bobot dan mendapatkan Solusi dari model yang telah dibentuk.
6. Melakukan simulasi dan menampilkan hasil dalam bentuk grafik.

Pemilihan fungsi basis yang tepat sangat penting untuk performa jaringan RBF. Fungsi *multiquadric* sering dipilih karena dapat menyediakan aproksimasi yang halus dan akurat terhadap data nonlinier. Kelengkungan dan rentang pengaruh fungsi basis sangat dipengaruhi oleh parameter fungsi *multiquadric*, seperti bentuk parameter α . Eksperimen atau optimasi berbasis data biasanya digunakan untuk menentukan nilai parameter α , sehingga jaringan dapat beradaptasi secara optimal terhadap pola data yang diberikan.

2.2.3 Implementasi Radial Basis Function

Fungsi RBF yang mendekati solusi kontinu $y(t)$ dapat ditulis sebagai:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j) \quad (2.4)$$

Di mana $\phi(t, c_j)$ adalah fungsi basis radial dengan pusat di c_j , dan ω_j merupakan bobot (koefisien) yang belum diketahui. Untuk setiap titik evaluasi t , persamaan (2.4) menghasilkan sistem persamaan linier sebanyak N buah, yaitu:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \omega_1 \phi(t_1, c_1) + \omega_2 \phi(t_1, c_2) + \dots + \omega_N \phi(t_1, c_N) \\ y(t_2) &= \omega_1 \phi(t_2, c_1) + \omega_2 \phi(t_2, c_2) + \dots + \omega_N \phi(t_2, c_N) \\ &\vdots \\ y(t_N) &= \omega_1 \phi(t_N, c_1) + \omega_2 \phi(t_N, c_2) + \dots + \omega_N \phi(t_N, c_N) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Selanjutnya, sistem tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut (Howlett & Jain, 2001). Misalkan:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1) & \phi(t_1, c_2) & \cdots & \phi(t_1, c_N) \\ \phi(t_2, c_1) & \phi(t_2, c_2) & \cdots & \phi(t_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(t_N, c_1) & \phi(t_N, c_2) & \cdots & \phi(t_N, c_N) \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix}$$

Maka sistem tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\varphi W = Y \quad (2.6)$$

Atau secara eksplisit, bentuk matriks dari persamaan (2.6) tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1) & \phi(t_1, c_2) & \cdots & \phi(t_1, c_N) \\ \phi(t_2, c_1) & \phi(t_2, c_2) & \cdots & \phi(t_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(t_N, c_1) & \phi(t_N, c_2) & \cdots & \phi(t_N, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Metode RBF telah digunakan secara luas dalam berbagai bidang, seperti pemodelan matematika, rekayasa, dan pembelajaran mesin. Salah satu aplikasi penting dari metode ini adalah dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa dan parsial, di mana metode RBF telah terbukti unggul dalam hal fleksibilitas dan kemudahan implementasi dibandingkan metode numerik tradisional seperti metode elemen hingga. Keunggulan lain dari metode RBF adalah kemampuan untuk menangani data dengan cara yang berbeda daripada metode numerik tradisional seperti metode elemen.

2.3 Galat Metode Radial Basis Function

Dalam metode numerik, galat merupakan bagian yang tidak dapat dihindari dalam proses penyelesaian persamaan diferensial atau permasalahan lain yang diselesaikan secara numerik. Galat menjadi penting karena memberikan informasi tentang seberapa dekat hasil numerik terhadap solusi eksak.

Misalkan $\hat{y}(t)$ menyatakan solusi eksak dari persamaan diferensial, dan $y(t)$ merupakan solusi pendekatan yang diperoleh menggunakan metode Radial Basis Function (RBF). Maka galat absolut pada titik t dapat didefinisikan sebagai:

$$e(t) = |\hat{y}(t) - y(t)| \quad (2.8)$$

Dimana:

$e(t)$ adalah galat absolut,

$\hat{y}(t)$ adalah nilai eksak dari solusi pada titik t , dan

$y(t)$ adalah nilai pendekatan numerik hasil dari metode RBF.

Galat ini kemudian dihitung untuk setiap titik t dalam domain, dan hasilnya digunakan untuk mengevaluasi akurasi dari metode numerik yang digunakan (Pandia & Sitepu, 2021).

Dalam konteks galat, metode RBF dapat memberikan solusi numerik yang mendekati solusi eksak dengan tingkat galat yang dipengaruhi oleh jenis fungsi basis yang digunakan serta parameter-parameter dalam jaringan fungsi basis tersebut.

Fungsi basis radial yang paling umum digunakan meliputi *Gaussian*, *Multiquadric*, dan *Invers Multiquadric*. Pemilihan fungsi basis yang tepat sangat penting untuk performa aproksimasi. Galat aproksimasi dalam RBF biasanya dikendalikan oleh parameter-parameter seperti lebar fungsi basis (parameter shape)

dan penentuan pusat-pusat basis. Nilai bobot yang diperoleh dari metode *least squares* juga memengaruhi akurasi solusi.

Pada metode RBF, galat aproksimasi umumnya dikategorikan ke dalam dua jenis: galat diskritisasi dan galat aproksimasi. Galat diskritisasi terjadi karena pemilihan titik-titik diskrit dalam domain masalah, sedangkan galat aproksimasi berasal dari aproksimasi fungsi eksak dengan fungsi basis (Wright & Fornberg, 2017). Dalam kasus terbaik, galat total akan naik secara eksponensial dengan bertambahnya jumlah fungsi basis yang digunakan.

2.4 Menjaga Keselamatan dalam Ajaran Islam

Sangat penting bagi umat Islam untuk menjaga keselamatan diri dan orang lain. Allah menyuruh pengikut-Nya untuk menghindari kehancuran, baik melalui tindakan fisik seperti bunuh diri atau tindakan merusak, maupun melalui penyalahgunaan harta yang dapat mengarah pada keburukan dan kemaksiatan. Di sisi lain, umat Islam dianjurkan untuk menggunakan harta mereka untuk tujuan yang menguntungkan orang lain, seperti membantu fakir miskin dan anak yatim serta membangun infrastruktur yang bermanfaat bagi masyarakat, seperti rumah sakit dan fasilitas umum.

Ajaran ini sejalan dengan firman Allah dalam Surat Al-Baqarah ayat 195 yang berbunyi:

وَأَنْفِقُوا فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَلَا تُلْقُوا بِأَيْدِيكُمْ إِلَى التَّهْلُكَةِ وَأَحْسِنُوا إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ الْمُحْسِنِينَ ﴿١٩٥﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya "*Dan infakkanlah (hartamu) di jalan Allah, dan janganlah kamu jatuhkan (diri sendiri) ke dalam kebinasaan dengan tangan sendiri, dan berbuat baiklah. Sungguh, Allah menyukai orang-orang yang berbuat baik*". (QS. Al-Baqarah [1]:195)

Ayat ini memerintahkan orang Islam untuk membelanjakan harta mereka di jalan Allah, baik untuk jihad, sedekah, atau amal kebaikan lainnya. Tafsir ayat ini juga memberikan pesan penting tentang manajemen harta dan tanggung jawab sosial, serta peringatan agar orang tidak terlalu tertarik pada kepentingan duniawi atau mengabaikan kewajiban mereka untuk beramal. Dalam tafsir Ibnu Katsir, ayat ini menegaskan lagi betapa pentingnya menjaga keseimbangan antara kehidupan dunia dan akhirat. Menurut Ibnu Katsir, perintah untuk membelanjakan harta di jalan Allah mencakup semua pengeluaran yang bertujuan untuk mendekatkan diri kepada Allah, bukan hanya untuk kebutuhan jihad fisik. Ini termasuk berderma, membantu orang miskin, membangun infrastruktur sosial, dan pengembangan ilmu pengetahuan (Tafsir Ibnu Katsir., 2015). Inti dari ajaran Islam menekankan pentingnya keseimbangan antara keselamatan duniawi dan ukhrawi (akhirat), serta menghindari kebinasaan melalui perbuatan baik. Selain menganjurkan penggunaan harta untuk kebaikan sosial, Islam juga memperhatikan keselamatan umat dalam menjalankan ibadah. Ini menunjukkan bahwa Islam selalu menjaga kesejahteraan dan keselamatan umat-Nya dalam setiap aspek kehidupan, baik dalam tanggung jawab sosial maupun pelaksanaan kewajiban agama.

Konsep *maqashid syariah* (tujuan hukum Islam) menekankan pada perlindungan jiwa (*hifz an-nafs*), seperti yang dijelaskan dalam kajian Nurani (2021), menjaga diri dari bahaya merupakan bentuk tanggung jawab sosial dan individual dalam Islam.

Selain keselamatan fisik, Islam juga menekankan keselamatan spiritual melalui keyakinan kepada qadha' dan qadar. Etika Islam juga mengajarkan bahwa

seseorang harus bertindak berdasarkan pertimbangan yang matang sebelum melakukan kegiatan berisiko, seperti halnya QS. Al-Taubah: 50-51

لَنْ نُصِيبَكَ بِحَسَنَةٍ تَسُوهُمُ ۖ وَإِنْ نُصِيبَكَ بِمُصِيبَةٍ يُتَوَلَّوْا قَدَّ أَخَذْنَا أَمْرًا مِنْ قَبْلُ وَيَتَوَلَّوْا هُمْ فَرِحُونَ ﴿٥٠﴾
 قُلْ لَنْ يُصِيبَنَا إِلَّا مَا كَتَبَ اللَّهُ لَنَا ۚ هُوَ مَوْلَانَا ۚ وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُؤْمِنُونَ ﴿٥١﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya “Jika engkau (Muhammad) mendapat kebaikan, mereka tidak senang; tetapi jika engkau ditimpa bencana, mereka berkata “Sungguh, sejak semula kami telah berhati-hati (tidak pergi berperang)”, dan mereka berpaling dengan perasaan gembira” (QS. At-Taubah [9]: 50)

“Katakanlah (Muhammad), “Tidak akan menimpa kami melainkan apa yang telah ditetapkan Allah bagi kami. Dialah pelindung kami, dan hanya kepada Allah bertawakallah orang-orang yang beriman”” (QS. At-Taubah [9]: 51).

Berdasarkan tafsir tematik, dalam ayat ke-50, orang-orang munafik ini merasa senang dan membanggakan diri ketika Nabi dan para sahabatnya mendapat kemenangan dan rezeki, seperti yang terjadi dalam Perang Badar, karena mereka sangat membenci Islam. Sebaliknya, ketika Nabi dan para sahabatnya menghadapi kekalahan, seperti yang terjadi dalam Perang Uhud, mereka merasa iri dan kecewa. Mereka percaya bahwa mereka telah membuat keputusan yang tepat dengan melakukan apa yang mereka lakukan. Mereka berpendapat ini menunjukkan kesalahan moral mereka yang jelas, karena mereka hanya mencari keuntungan diri sendiri dan tidak mendukung perjuangan untuk kebenaran (Raya dkk., 2021).

Dalam ayat ke-51, Allah memerintahkan Rasulullah untuk menegaskan bahwa takdir Allah yang tertulis di Lauh Mahfuzh mencakup segala sesuatu, termasuk kemenangan dan kekalahan. Ini menggambarkan konsep utama Islam tentang tawakal, qadha', dan qadar. Muslim dididik untuk menerima apa pun yang terjadi dalam hidup mereka sebagai bagian dari rencana Allah dan selalu bertawakal kepada-Nya. Mereka harus menghadapi ujian ini dengan kesabaran dan iman (Raya dkk., 2021). Ayat ini mengingatkan kita dalam konteks keselamatan dalam Islam

bahwa hanya dengan berserah diri kepada Allah dan mempercayai kehendak-Nya kita dapat menemukan ketenangan dan keselamatan dalam setiap situasi yang kita temui.

Dengan demikian, keselamatan dalam Islam mencakup keseimbangan antara keselamatan fisik dan spiritual. Umat Islam tidak hanya dituntut untuk menjaga diri dan masyarakat dari kebinasaan, tetapi juga diajarkan untuk menghadapi ujian hidup dengan kesabaran dan tawakal kepada Allah. Keselamatan ini hanya dapat terwujud ketika individu mematuhi hukum-hukum Allah, menjaga diri dari kehancuran, dan percaya sepenuhnya kepada takdir-Nya.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian dengan pendekatan simulasi numerik. Pendekatan ini digunakan untuk memodelkan sistem vibrasi string melalui penyelesaian numerik persamaan diferensial menggunakan metode, yaitu Radial Basis Function (RBF). Simulasi ini dilakukan untuk mengetahui efektivitas metode tersebut dalam menyelesaikan persamaan matematis yang terkait dengan keamanan dan performa vibrasi string. Penelitian ini bersifat kualitatif, di mana hasil yang diharapkan adalah solusi numerik dan analisis galat dari metode RBF.

3.2 Pra Penelitian

Tahap pra pelaksanaan dimulai dengan:

1. Studi literatur: Mengkaji berbagai literatur yang relevan dengan model matematika vibrasi string, metode Radial Basis Function (RBF), serta penerapan metode RBF dalam konteks persamaan diferensial biasa (ODE).
2. Identifikasi model dan parameter: Mengadaptasi model matematika vibrasi string dari McKenna (1999) beserta parameter dan kondisi awal yang telah ditentukan dalam McKenna (1999) sebagai dasar simulasi.
3. Persiapan perangkat lunak: Menyiapkan perangkat lunak untuk melakukan simulasi numerik seperti MATLAB, yang mendukung komputasi metode RBF.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian ini terdiri dari beberapa langkah sebagai berikut:

1. Model vibrasi string: Sistem vibrasi string dimodelkan sebagai persamaan diferensial yang berdasarkan kondisi awal dan batas yang telah ditentukan.

Adapun model matematika vibrasi string dinyatakan dalam bentuk:

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2K}{m}y + g$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$. Model ini berasal dari McKenna, (1999), dan memuat parameter $K = 1000 \text{ N/m}$, $m = 2500 \text{ kg}$, $\delta = 0.01$ dan $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

2. Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi String: Menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan metode analitik dengan pendekatan umum, yaitu:
 - a. Menentukan solusi homogen $y_h(t)$ dengan menyelesaikan persamaan diferensial homogen. Pendekatan yang digunakan adalah dengan mengasumsikan bentuk solusi eksponensial $y_h(t) = e^{rt}$, kemudian diturunkan dan disubstitusikan untuk memperoleh persamaan karakteristik.
 - b. Menyelesaikan persamaan karakteristik untuk mendapatkan nilai r , yang kemudian digunakan untuk menyusun bentuk lengkap dari solusi homogen.
 - c. Substitusi kondisi awal ke dalam solusi umum untuk menentukan konstanta yang muncul dalam solusi homogen.
 - d. Menentukan solusi partikular $y_p(t)$ berdasarkan bentuk ruas kanan persamaan. Karena ruas kanan berupa konstanta, maka solusi partikular diasumsikan sebagai suatu konstanta C .
 - e. Menggabungkan solusi homogen dan partikular untuk memperoleh solusi

umum $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

3. Penyelesaian Model Matematika Vibrasi String dengan Metode Radial Basis Function (RBF): Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian numerik terhadap model di atas dengan pendekatan metode RBF berbasis fungsi *multiquadratic*. Perhitungan dilakukan pada dua nilai langkah waktu, $\Delta t = 20$ dan $\Delta t = 0.1$, untuk menguji pengaruh diskritisasi waktu terhadap hasil solusi numerik.

- a. Penyusunan Fungsi Aproksimasi

Solusi $y(t)$ diasumsikan berbentuk kombinasi linier dari fungsi basis radial:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j)$$

Dengan $\phi(t, c_j) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$, dalam hal ini α adalah parameter positif, dan c_j adalah titik pusat. Turunan pertama dan kedua dari ϕ juga dihitung untuk memperoleh bentuk $\dot{y}(t)$ dan $\ddot{y}(t)$.

- b. Penyusunan Sistem Persamaan Linier

Hasil substitusi aproksimasi $y(t)$, $\dot{y}(t)$, dan $\ddot{y}(t)$ ke dalam model menghasilkan sistem persamaan linier:

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \left(\phi_{tt}(t, c_j) + \delta \phi_t(t, c_j) + \frac{2K}{m} \phi(t, c_j) \right) = g$$

Untuk setiap titik t , sistem diubah ke bentuk matriks:

$$AW = F$$

Dengan $A = \phi_{tt}(t, c_j) + \delta \phi_t(t, c_j) + \frac{2K}{m} \phi(t, c_j)$, $W =$

$[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T$, dan $F = [g, g, \dots, g]^T$

c. Penyelesaian Sistem Linier

Penyelesaian sistem linier $A \times W = F$ dilakukan untuk memperoleh vektor bobot ω_j , di mana matriks A dan F masing-masing diperoleh dari hasil perkalian matriks basis dan vektor target. Nilai ω_j dihitung dengan perintah backslash (\backslash) pada Matlab, yaitu $W = A \backslash F$, sistem $A \times W = F$ juga dapat diselesaikan melalui eliminasi gauss.

d. Menghitung Solusi Model Vibrasi String

Setelah bobot ω_j diperoleh, maka dilakukan perhitungan solusi dimana solusi $y(t)$ diperoleh dengan cara mengalikan fungsi radial basis tanpa diturunkan dengan nilai-nilai bobot yang telah didapatkan:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j)$$

Untuk setiap titik waktu t dalam interval yang ditentukan.

4. Galat RBF dan Analitik: Solusi RBF $y(t)$ pada kedua nilai langkah waktu $\Delta t = 20$ dan $\Delta t = 0.1$ dibandingkan dengan solusi eksak $\hat{y}(t)$ untuk mengevaluasi akurasi metode RBF. Galat absolut dihitung menggunakan rumus:

$$e(t) = |\hat{y}(t) - y(t)|$$

Galat RBF dan Analitik ini memberikan gambaran tentang efektivitas metode RBF dalam menyelesaikan model vibrasi string secara numerik.

5. Visualisasi Hasil: Hasil perhitungan pada masing-masing nilai Δt ditampilkan dalam bentuk grafik yang menggambarkan solusi numerik $y(t)$, perbandingan antara solusi numerik dan solusi eksak, dan grafik galat absolut

$e(t)$. Visualisasi dilakukan untuk menunjukkan sejauh mana pendekatan numerik mampu merepresentasikan dinamika sistem secara akurat.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan langkah-langkah penyelesaian numerik untuk model matematika vibrasi string menggunakan metode jaringan Radial Basis Function (RBF). Model ini berupa persamaan diferensial biasa linier orde dua. Untuk mengetahui keefektifan metode RBF, hasilnya akan dianalisis menggunakan analisis galat. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaian numerik model matematika vibrasi string dengan menggunakan metode tersebut.

4.1 Model Matematika Vibrasi String

Model matematika vibrasi string dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2K}{m}y + g \quad (4.1)$$

Kondisi awal diberikan sebagai $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$. Dalam persamaan tersebut, beberapa parameter yang telah didefinisikan, yaitu:

1. K : Konstanta pegas dawai, bernilai 1000 N/m ,
2. m : Massa sistem, sebesar 2500 kg ,
3. δ : Koefisien redaman, sebesar 0.01 , dan
4. g : Percepatan gravitasi, diasumsikan sebesar 9.8 m/s^2 .

Model matematika vibrasi string yang telah dijelaskan ini akan diselesaikan menggunakan metode numerik pada subbab berikutnya. Pada subbab 4.2, akan dibahas mengenai solusi analitik pada model matematika vibrasi string, pada subbab 4.3, akan dilakukan penyelesaian dengan menggunakan metode Radial Basis Function (RBF), perbandingan dengan solusi eksak, serta analisis galat

kinerja metode RBF dalam menyelesaikan model matematika vibrasi string dalam bentuk persamaan diferensial orde dua.

4.2 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi String

Berdasarkan persamaan (4.1), didefinisikan persamaan dari model vibrasi string yaitu:

$$\ddot{y}(t) = -\delta\dot{y}(t) - \frac{2K}{m}y(t) + g$$

Dengan parameter:

$$K = 1000 \text{ N/m}$$

$$m = 2500 \text{ kg}$$

$$\delta = 0.01$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Kemudian Substitusi:

$$\frac{2K}{m} = \frac{2(1000)}{2500} = 0.8$$

Maka persamaan diferensial menjadi:

$$\ddot{y}(t) + 0.01 \dot{y}(t) + 0.8 y(t) = 9.8 \quad (4.2)$$

Dengan kondisi awal:

$$y(0) = 12.25, \dot{y}(0) = 1$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (4.2) secara analitik, yaitu dengan menentukan solusi umum yang terdiri atas dua bagian, yaitu solusi homogen dan solusi partikular. Solusi umum dituliskan sebagai (Firosi dkk., 2023):

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

1. Solusi Homogen

Untuk solusi homogen, didefinisikan:

$$\ddot{y}_h + 0.01\dot{y}_h + 0.8y_h = 0$$

Untuk menyelesaikan persamaan homogen ini, diasumsikan bentuk solusi $y_h(t)$ berupa eksponensial:

$$y_h(t) = e^{rt}$$

Dengan r merupakan konstanta. Dengan substitusi ke dalam persamaan, diperoleh turunan-turunan sebagai berikut:

$$\dot{y}_h(t) = re^{rt}, \ddot{y}_h(t) = r^2e^{rt}$$

Kemudian substitusi ke dalam persamaan homogen sehingga menghasilkan:

$$r^2e^{rt} + 0.01re^{rt} + 0.8e^{rt}$$

Setelah itu difaktorkan menjadi:

$$e^{rt}(r^2 + 0.01r + 0.8) = 0$$

Karena $e^{rt} \neq 0$ untuk setiap t , maka diperoleh persamaan karakteristik:

$$r^2 + 0.01r + 0.8 = 0$$

$$r = \frac{-0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 - 4(1)(0.8)}}{2} = \frac{-0.01 \pm \sqrt{-3.1999}}{2}$$

$$r = \frac{-0.01}{2} \pm i \frac{\sqrt{3.1999}}{2} = -0.005 \pm i \frac{\sqrt{3.1999}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3.1999}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3.1999} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{31999}}{100} = \frac{\sqrt{31999}}{200}$$

Maka:

$$r = -0.005 \pm i \frac{\sqrt{31999}}{200}$$

Karena r merupakan dua akar real berbeda, maka untuk solusi homogen yaitu:

$$y_h(t) = e^{-0.005t} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right)$$

2. Solusi Partikular

Karena ruas kanan persamaan 4.2 merupakan konstanta 9.8, maka untuk bentuk solusi partikular didefinisikan:

$$y_p(t) = C$$

Turunan pertama dan kedua dari $y_p(t)$ adalah nol, sehingga Ketika disubstitusikan ke persamaan (4.2) diperoleh:

$$0 + 0 + 0.8C = 9.8$$

$$C = \frac{9.8}{0.8} = 12.25$$

3. Solusi Umum

Dengan menggabungkan solusi partikular dan solusi homogen, maka untuk solusi umum didapatkan:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = e^{-0.005t} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right) + \frac{49}{4}$$

4. Setelah solusi umum diketahui, maka akan digunakan kondisi awal untuk menentukan A dan B.

Akan digunakan $y(0) = 12.25$:

$$y(0) = A(1) + B(0) + 12.25 = 12.25$$

$$A = 0$$

Untuk turunan solusi umum:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{-0.005t} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= (-0.005t \cdot e^{-0.005t}) \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right) \\
&\quad + e^{-0.005t} \left(-A \frac{\sqrt{31999}}{200} \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right. \\
&\quad \left. + B \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right) \\
\dot{y}(t) &= e^{-0.005t} \left(-0.005 \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - A \frac{\sqrt{31999}}{200} \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right. \\
&\quad \left. + B \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) \right)
\end{aligned}$$

Substitusikan $t = 0$ dan $A = 0$ maka:

$$\begin{aligned}
\dot{y}(0) &= e^0 \left(-0.005 (0 + B \sin(0)) - 0 + B \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos(0) \right) \\
\dot{y}(0) &= 1 \left(-0.005(0) + B \frac{\sqrt{31999}}{200} (1) \right) = B \frac{\sqrt{31999}}{200}
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi awal $\dot{y}(0) = 1$, maka:

$$\begin{aligned}
B \frac{\sqrt{31999}}{200} &= 1 \\
B &= \frac{1}{\frac{\sqrt{31999}}{200}} = \frac{200}{\sqrt{31999}}
\end{aligned}$$

Setelah itu, substitusikan Nilai A dan B ke bentuk solusi umum, sehingga:

$$y(t) = e^{-0.005t} \frac{200}{\sqrt{31999}} \sin\left(\frac{\sqrt{31999}}{200}t\right) + \frac{49}{4} \quad (4.3)$$

Karena $\frac{200}{\sqrt{31999}} = \frac{200}{31999} \sqrt{31999}$, $e^{-0.005t} = e^{-\frac{1}{200}t}$, dan $\frac{\sqrt{31999}}{200} = \frac{1}{200} \sqrt{31999}$,

maka bentuk solusi persamaan 4.3 menjadi:

$$y(t) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}t\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4} \quad (4.4)$$

Dimana solusi ini setara dengan hasil yang diperoleh menggunakan Maple. Selanjutnya, dengan menggunakan selang waktu $\Delta t = 20$, maka nilai-nilai waktu yang akan dihitung adalah $t = 0, 20, 40, 60$. Untuk setiap nilai t , akan dihitung solusi eksak $\hat{y}(t)$ pada selang waktu $\Delta t = 20$ berdasarkan persamaan 4.4:

Untuk $t = 0$:

$$y(0) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}0} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}(0)\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$$

$$y(0) = 0.0062502 e^0 \sin(0) 178.88 + 12.25$$

$$y(0) = 0 + 12.25$$

$$y(0) = 12.25$$

Untuk $t = 20$:

$$y(20) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}20} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}(20)\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$$

$$y(20) = 0.0062502 e^{-0.1} \sin(0.8944(20)) 178.88 + 12.25$$

$$y(20) = 0.0062502 e^{-0.1} \sin(17.8854) 178.88 + 12.25$$

$$y(20) = 0.0062502 \cdot 0.904837 \cdot (-0.2864) \cdot 178.88 + 12.25$$

$$y(20) = -0.8295 + 12.25$$

$$y(20) = 11.4205$$

Untuk $t = 40$:

$$y(40) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}40} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}(40)\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$$

$$y(40) = 0.0062502 e^{-0.2} \sin(0.8944(40)) 178.88 + 12.25$$

$$y(40) = 0.0062502 e^{-0.2} \sin(35.7708) 178.88 + 12.25$$

$$y(40) = 0.0062502 \cdot 0.81873 \cdot (-0.2958) \cdot 178.88 + 12.25$$

$$y(40) = -0.8594 + 12.25$$

$$y(40) = 11.3906$$

Untuk $t = 60$:

$$y(60) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}60} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}(60)\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$$

$$y(60) = 0.0062502 e^{-0.3} \sin(0.8944(60)) 178.88 + 12.25$$

$$y(60) = 0.0062502 e^{-0.3} \sin(53.6562) 178.88 + 12.25$$

$$y(60) = 0.00625028 \cdot 0.740818 \cdot (-0.2850) \cdot 178.88 + 12.25$$

$$y(60) = -0.2112 + 12.24$$

$$y(60) = 12.0388$$

Solusi $y(t) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}t\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$ (pada persamaan 4.4)

dianggap valid sebagai solusi eksak apabila memenuhi:

1. Kondisi awal $y(0) = 12.25$

Substitusi $t = 0$ ke fungsi $y(t)$

$$y(0) = \frac{200}{31999} e^0 \sin(0) \sqrt{31999} + \frac{49}{4} = 0 + \frac{49}{4} = 12.25$$

Jadi, kondisi awal $y(0) = 12.25$ terpenuhi

2. Kondisi awal $\dot{y}(0) = 1$

Diketahui:

$$y(t) = \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{200}\sqrt{31999}t\right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4}$$

Maka

$$\dot{y}(t) = \frac{200}{31999} \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{200}t} \sin \frac{1}{200} \sqrt{31999}t \cdot \sqrt{31999} \right) \right]$$

$$\dot{y}(t) = \frac{200}{31999} \sqrt{31999} \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{200}t} \sin \frac{1}{200} \sqrt{31999}t \right) \right]$$

Gunakan turunan hasil kali:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{200}t} \sin \frac{1}{200} \sqrt{31999} t \right) &= -\frac{1}{200} e^{-\frac{t}{200}} \sin \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \\ &\quad + e^{-\frac{t}{200}} \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \\ \dot{y}(t) &= \frac{200\sqrt{31999}}{31999} \left[-\frac{1}{200} e^{-\frac{t}{200}} \sin \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{t}{200}} \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \right] \end{aligned}$$

Substitusi $t = 0$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \frac{200\sqrt{31999}}{31999} \left[0 + \frac{\sqrt{31999}}{200} (1) \right] = \frac{200\sqrt{31999}}{31999} \cdot \frac{\sqrt{31999}}{200} = \frac{31999}{31999} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\dot{y}(0) = 1$

3. $\dot{y} = -0.01\dot{y} - 0.8y + 9.8$

Untuk $-0.01\dot{y}(0) - 0.8y(0) + 9.8 = -0.01(1) - 0.8(12.25) + 9.8 = -0.01$

Diketahui:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{200}{31999} e^{-\frac{1}{200}t} \sin \left(\frac{1}{200} \sqrt{31999} t \right) \sqrt{31999} + \frac{49}{4} \\ \dot{y}(t) &= \frac{200}{31999} \sqrt{31999} \left[-\frac{1}{200} e^{-\frac{t}{200}} \sin \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{t}{200}} \frac{\sqrt{31999}}{200} \cos \left(\frac{\sqrt{31999}}{200} t \right) \right] \end{aligned}$$

Untuk turunan $\dot{y}(t)$, maka:

$$\text{Hitung } \sqrt{31999} = 178.88, \frac{\sqrt{31999}}{200} = 0.8944, \frac{200 \cdot \sqrt{31999}}{31999} = 1.118$$

$$\dot{y}(t) = 1.118e^{-\frac{t}{200}}[-0.005 \sin(0.8944t) + 0.8944 \cos(0.8944t)]$$

Untuk turunan $\ddot{y}(t)$, maka:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = 1.118 \left[\left(-\frac{1}{200} e^{-\frac{t}{200}} (-0.005 \sin(0.8944t)) \right. \right. \\ \left. \left. + 0.8944 \cos(0.8944t) \right) \right. \\ \left. + e^{-\frac{t}{200}} (-0.005(0.8944) \cos(0.8944t) \right. \\ \left. - 0.8944^2 \sin(0.8944t)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = 1.118e^{-\frac{t}{200}} \left[\left(-\frac{1}{200} (0.005 \sin(0.8944t)) \right. \right. \\ \left. \left. - 0.8944 \cos(0.8944t) - 0.0045 \cos(0.8944t) \right) \right. \\ \left. - 0.8 \sin(0.8944t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = 1.118e^{-\frac{t}{200}} [0.000025 \sin(0.8944t) - 0.004472 \cos(0.8944t) \\ - 0.0045 \cos(0.8944t) - 0.8 \sin(0.8944t)] \end{aligned}$$

$$\ddot{y}(t) = 1.118e^{-\frac{t}{200}} [-0.799975 \sin(0.8944t) - 0.008972 \cos(0.8944t)]$$

Substitusi $t = 0$

$$\sin(0) = 0$$

$$\cos(0) = 1$$

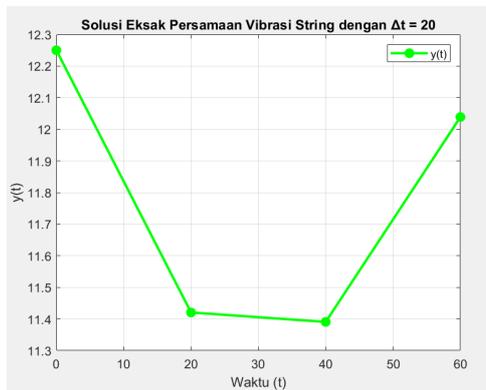
$$e^{-0} = 1$$

$$\ddot{y}(0) = 1.118(-0 - 0.008972) = -0.01$$

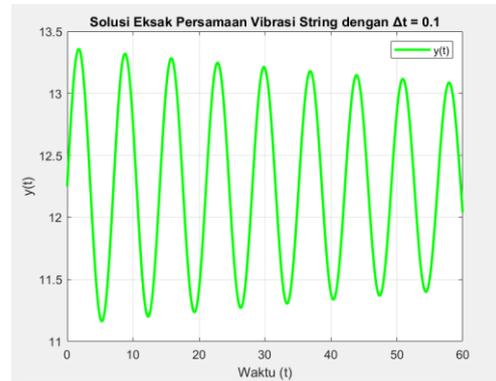
Karena solusi analitik memenuhi 3 syarat, maka solusi analitik dianggap valid sebagai solusi eksak. Untuk validasi dan perbandingan terhadap hasil simulasi numerik, solusi analitik dihitung dan divisualisasikan dengan dua pendekatan

interval waktu, yaitu $\Delta t = 20$ dan $\Delta t = 0.1$. Evaluasi dengan $\Delta t = 20$ menghasilkan 4 titik evaluasi ($t = 0, 20, 40, 60$), sedangkan dengan $\Delta t = 0.1$ menghasilkan total 601 titik evaluasi ($t = 0$ hingga $t = 60$ dengan kenaikan 0.1).

Berikut merupakan grafik hasil evaluasi solusi analitik pada empat titik waktu dengan $\Delta t = 20$ (gambar 4.1) dan grafik hasil evaluasi solusi analitik pada 601 titik waktu dengan $\Delta t = 0.1$ (gambar 4.2):



Gambar 4.1 Solusi Eksak $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$



Gambar 4.2 Solusi Eksak $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Berdasarkan grafik pada gambar 4.1 dan gambar 4.2, fungsi $y(t)$ menunjukkan pola osilasi yang disebabkan oleh pengaruh parameter sistem seperti K, m, δ , dan g . Pada grafik dengan $\Delta t = 20$ (gambar 4.1), meskipun hanya ada empat titik evaluasi, pola naik-turun $y(t)$ tetap dapat diamati. Nilai $y(t)$ sempat turun dari 12.25 ke sekitar 11.4 sebelum kembali naik ke 12. Sebaliknya, grafik dengan $\Delta t = 0.1$ (gambar 4.2) menunjukkan dinamika osilasi yang lebih rinci dan halus, memperlihatkan bentuk gelombang yang lebih lengkap dalam rentang waktu $[0, 60]$.

4.3 Penerapan Metode Radial Basis Function

Dalam hal ini, akan digunakan basis fungsi *Multiquadratic* untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang merepresentasikan model matematika vibrasi string pada persamaan (4.1).

4.3.1 Solusi Numerik Persamaan Linier Model Vibrasi String Menggunakan Metode Radial Basis Function

Persamaan (4.1), yang merupakan persamaan diferensial linier pada model *vibrasi string*, dapat ditulis ulang dalam bentuk berikut:

$$\ddot{y}(t) = -\delta\dot{y}(t) - \frac{2K}{m}y(t) + g \quad (4.5)$$

Solusi $y(t)$ dihitung dengan menggabungkan fungsi basis radial yang bergantung pada jarak antara titik pusat dan titik yang ingin dihitung, dengan koefisien yang melibatkan $\delta, \frac{2K}{m}$, dan g . Pendekatan ini memungkinkan perubahan persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih mudah dihitung secara numerik, dengan tujuan untuk memperoleh solusi yang mendekati nilai eksak.

1. Bentuk Jaringan Fungsi Radial Basis:

Metode RBF pada dasarnya melibatkan fungsi basis $\phi(|t - c_j|)$ yang bergantung pada jarak antara titik t dan pusat c_j . Untuk fungsi *multiquadratic*, fungsi basisnya adalah:

$$\phi(r) = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$$

Dimana $r = |t - c_j|$, dan α adalah parameter positif. Dalam hal ini, t mempresentasikan waktu dan titik c_j adalah posisi titik grid dalam domain solusi. Dalam hal ini, ϕ akan digunakan untuk membangun fungsi solusi

aproksimasi dalam bentuk kombinasi linier fungsi basis:

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j) \quad (4.6)$$

Kemudian untuk $\dot{y}(t)$:

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_t(t, c_j) \quad (4.7)$$

Dan $\ddot{y}(t)$:

$$\ddot{y}(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_{tt}(t, c_j) \quad (4.8)$$

Berdasarkan $\phi(r) = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$ (Aliy dkk., 2021) dengan $r = (t - c_j)$,

maka:

$$\phi(t, c_j) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \quad (4.9)$$

Untuk menghitung turunan pertama dari $\phi_t(t, c_j)$, dimulai dengan persamaan:

$$\phi_t(t, c_j) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \right)$$

Yang dapat ditulis ulang sebagai:

$$\phi_t(t, c_j) = \frac{d}{dt} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan menggunakan aturan rantai yang menyatakan bahwa turunan dari fungsi komposit adalah turunan dari fungsi luar dikalikan dengan turunan fungsi dalam (Varberg dkk., 2007), diperoleh:

$$\phi_t(t, c_j) = \frac{1}{2} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \left((t - c_j)^2 + \alpha^2 \right) \quad (4.10)$$

Selanjutnya turunan dari $(t - c_j)^2 + \alpha^2$ terhadap t (turunan bagian dalam):

$$\frac{d}{dt}((t - c_j)^2 + \alpha^2) = 2(t - c_j)$$

Substitusi hasil turunan tersebut ke dalam persamaan (4.10)

$$\begin{aligned}\phi_t(t, c_j) &= \frac{1}{2}((t - c_j)^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t - 2c_j) \\ \phi_t(t, c_j) &= \frac{(2t - 2c_j)}{2}((t - c_j)^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \phi_t(t, c_j) &= \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Maka

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}} \quad (4.12)$$

Kemudian untuk turunan ketiga, berdasarkan (4.11), karena

$$\phi_t(t, c_j) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}$$

Maka dapat diperoleh dengan naikkan persamaan diatas dengan menggunakan aturan hasil bagi, yang menyatakan bahwa turunan suatu hasil bagi adalah sama dengan penyebut dikalikan turunan pembilang dikurangi pembilang dikalikan turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut (Varberg dkk., 2007), maka untuk turunan $\phi_t(t, c_j)$ terhadap t dapat ditulis

$$\phi_{tt}(t, c_j) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}} \right)$$

Dengan menggunakan aturan hasil bagi dengan penyebut $\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$

dan pembilang $t - c_j$, maka dapat ditulis turunan pembilang terhadap t :

$$\frac{d}{dt}(t - c_j) = 1$$

Kemudian berdasarkan persamaan (4.11), turunan penyebut terhadap t menggunakan aturan rantai yaitu

$$\frac{d}{dt}\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}$$

Setelah itu substitusi ke rumus hasil bagi:

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(t, c_j) &= \frac{\left(1 \cdot \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right) - \left((t - c_j) \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}\right)}{\left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right) - \left(\frac{(t - c_j)^2}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}\right)}{\left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right)^2} \end{aligned}$$

Karena $(\sqrt{x})^2 = x$, maka pada penyebut, $\left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right)^2 = (t - c_j)^2 + \alpha^2$. Sehingga:

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}\right) - \left(\frac{(t - c_j)^2}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}\right)}{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \\ &= \frac{\left((t - c_j)^2 + \alpha^2\right)^{1/2}}{(t - c_j)^2 + \alpha^2} - \frac{\frac{(t - c_j)^2}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}}{(t - c_j)^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Karena persamaan (4.13) dijabarkan menjadi 2 suku, maka untuk penyelesaian suku yang kedua:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(t-c_j)^2}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}}}{(t-c_j)^2 + \alpha^2} &= \frac{(t-c_j)^2}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} \div (t-c_j)^2 + \alpha^2 \\
&= \frac{(t-c_j)^2}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} \times \frac{1}{(t-c_j)^2 + \alpha^2} \\
&= \frac{(t-c_j)^2}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2} \left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)} \\
&= \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{1/2} \left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^1} \\
&= \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Kemudian substitusikan suku kedua ke persamaan (4.13), maka:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{1/2}}{(t-c_j)^2 + \alpha^2} - \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{3/2}} \\
&= \frac{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{1/2}}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^1} - \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{3/2}} \\
&= \left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{-1/2} - \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{1/2}} - \frac{(t-c_j)^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2 \right)^{3/2}} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Untuk menyamakan penyebut, maka $\frac{1}{((t-c_j)^2+\alpha^2)^{1/2}}$ akan dikalikan dengan

$(t-c_j)^2 + \alpha^2$, sehingga:

$$\frac{1}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{1/2}} \cdot \frac{(t-c_j)^2 + \alpha^2}{(t-c_j)^2 + \alpha^2} = \frac{(t-c_j)^2 + \alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{3/2}}$$

Kembali ke persamaan (4.14), maka:

$$\begin{aligned} & \frac{(t-c_j)^2 + \alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{(t-c_j)^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \\ &= \frac{((t-c_j)^2 + \alpha^2) - (t-c_j)^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(t-c_j)^2 + \alpha^2 - (t-c_j)^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \\ \phi_{tt}(t, c_j) &= \frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Maka dapat ditulis

$$\dot{y}(t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.16)$$

Diketahui α dapat dihitung dengan rentang antara 0.5 sampai 5 (Aliy dkk., 2021). Kemudian dari persamaan (4.8), (4.12), dan (4.16), dapat disubstitusi ke dalam persamaan (4.1) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\alpha^2}{\left((t-c_j)^2 + \alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\delta \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{t-c_j}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} - \frac{2K}{m} \sum_{j=1}^N \omega_j \sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2} \\
&+ g
\end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \phi_{tt}(t, c_j) = -\delta \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_t(t, c_j) - \frac{2K}{m} \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j) + g$$

Kemudian karena:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + \delta \dot{y}(t) + \frac{2K}{m} y(t) - g &= 0 \\
\ddot{y}(t) + \delta \dot{y}(t) + \frac{2K}{m} y(t) &= g
\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_{tt}(t, c_j) + \delta \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_t(t, c_j) \\
&+ \frac{2K}{m} \sum_{j=1}^N \omega_j \phi(t, c_j) = g
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Persamaan (4.17) tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \left(\phi_{tt}(t, c_j) + \delta \phi_t(t, c_j) + \frac{2K}{m} \phi(t, c_j) \right) = g$$

Kemudian misalkan

$$P(t, c_j) = \phi_{tt}(t, c_j) + \delta \phi_t(t, c_j) + \frac{2K}{m} \phi(t, c_j)$$

Dan

$$C = g$$

Maka persamaan tersebut menjadi:

$$\sum_{j=1}^N \omega_j P(t, c_j) = C \quad (4.18)$$

Dimana ω_j adalah bobot yang perlu dihitung.

2. Memasukkan Nilai-nilai t dan Mengubah kedalam Bentuk Persamaan Matriks

Misalkan t diberikan sebagai $t = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ maka persamaan diatas dapat dijabarkan menjadi:

$$\begin{aligned} C_1 &= \omega_1 P(t_1, c_1) + \omega_2 P(t_1, c_2) + \dots + \omega_N P(t_1, c_N) \\ C_2 &= \omega_1 P(t_2, c_1) + \omega_2 P(t_2, c_2) + \dots + \omega_N P(t_2, c_N) \\ &\vdots \\ C_N &= \omega_1 P(t_N, c_1) + \omega_2 P(t_N, c_2) + \dots + \omega_N P(t_N, c_N) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Karena sistem persamaan diatas memiliki variabel ω_j yang sama, maka sistem persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan matriks.

Berdasarkan bentuk matriks pada (4.19), maka:

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & \dots & P(t_1, c_N) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & \dots & P(t_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(t_N, c_1) & P(t_N, c_2) & \dots & P(t_N, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Kemudian matriks (4.20) tersebut akan digunakan untuk mencari nilai bobot ω_j .

3. Menghitung Nilai Bobot

Dari langkah sebelumnya, misalkan

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & \dots & P(t_1, c_N) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & \dots & P(t_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(t_N, c_1) & P(t_N, c_2) & \dots & P(t_N, c_N) \end{bmatrix} = A$$

$$[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T = W$$

$$[C_1, C_2, \dots, C_N]^T = F$$

Maka, nilai W dapat dihitung dengan perintah backslash (\backslash) pada Matlab, yaitu $W = A \backslash F$, sistem $A \times W = F$ juga dapat diselesaikan melalui eliminasi gauss.

4. Menghitung Solusi Model Vibrasi String

Setelah W dihitung, solusi $y(t)$ diperoleh dengan cara mengalikan fungsi radial basis tanpa diturunkan dengan nilai-nilai bobotnya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1) & \phi(t_1, c_2) & \dots & \phi(t_1, c_N) \\ \phi(t_2, c_1) & \phi(t_2, c_2) & \dots & \phi(t_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(t_N, c_1) & \phi(t_N, c_2) & \dots & \phi(t_N, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}$$

4.3.2 Simulasi Numerik Persamaan Linier Model Vibrasi String

Menggunakan Metode Radial Basis Function

1. Simulasi Numerik Model Vibrasi String dengan $\Delta t = 20$ menggunakan Metode Radial Basis Function

Setelah langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode Radial Basis Function (RBF) dijelaskan, pada subbab ini akan dilakukan simulasi numerik untuk memperoleh solusi dari persamaan linier model vibrasi string yang telah dirumuskan. Adapun untuk persamaan diferensial linier tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\ddot{y}(t) + \delta \dot{y}(t) + \frac{2K}{m} y(t) - g = 0 \quad (4.21)$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$.

$$\text{Hitung } \frac{2K}{m} = \frac{2(1000)}{2500} = \frac{2000}{2500} = 0.8$$

Kemudian substitusi parameter-parameter pada subbab 4.1, sehingga

persamaan (4.19) diatas dapat direformulasikan menjadi:

$$\ddot{y}(t) + 0.01\dot{y}(t) + 0.8y(t) = 9.8 \quad (4.22)$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut menggunakan metode Radial Basis Function (RBF), persamaan (4.22) diubah ke dalam bentuk jaringan fungsi RBF sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \omega_j \phi_{tt}(t, c_j) + 0.01 \sum_{j=1}^4 \omega_j \phi_t(t, c_j) + 0.8 \sum_{j=1}^4 \omega_j \phi(t, c_j) \\ = 9.8 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Persamaan 4.23 tersebut juga dapat ditulis sebagai:

$$\sum_{j=1}^4 \omega_j \left(\phi_{tt}(t, c_j) + 0.01\phi_t(t, c_j) + 0.8\phi(t, c_j) \right) = 9.8$$

Substitusikan $\phi_{tt}(t, c_j) = \frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\phi_t(t, c_j) = \frac{t-c_j}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}}$, dan

$\phi(t, c_j) = \frac{1}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}}$, sehingga:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \omega_j \left(\frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + 0.01 \frac{t-c_j}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} + 0.8 \frac{1}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} \right) \\ = 9.8 \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} P(t, c_j) = \frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + 0.01 \frac{t-c_j}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} \\ + 0.8 \frac{1}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} \end{aligned}$$

Maka persamaan tersebut menjadi:

$$\sum_{j=1}^4 \omega_j P(t, c_j) = 9.8$$

Sehingga:

$$\omega_1 P(t, c_1) + \omega_2 P(t, c_2) + \omega_3 P(t, c_3) + \omega_4 P(t, c_4) = 9.8$$

Kemudian dari persamaan (4.23) tersebut, akan dipartisi menjadi data dengan $\Delta t = 20$, dimana berdasarkan nilai awal dan kondisi batas didapatkan $t = \{0; 20; 40; 60\}$, dimana jumlah t yang diketahui yaitu 4 ($N = 4$). Adapun untuk titik-titik pusat diambil dari $c = t$. Selanjutnya yaitu memasukkan nilai t pada persamaan (4.23) tersebut sehingga untuk $t_1 = t = 0$ diperoleh:

$$\omega_1 P(t_1, c_1) + \omega_2 P(t_1, c_2) + \omega_3 P(t_1, c_3) + \omega_4 P(t_1, c_4) = 9.8$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \omega_j P(0, c_j) &= \omega_1 P(0,0) + \omega_2 P(0,20) + \omega_3 P(0,40) + \omega_4 P(0,60) \\ &= 9.8 \end{aligned}$$

Untuk $t_2 = t = 20$:

$$\omega_1 P(t_2, c_1) + \omega_2 P(t_2, c_2) + \omega_3 P(t_2, c_3) + \omega_4 P(t_2, c_4) = 9.8$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \omega_j P(20, c_j) \\ &= \omega_1 P(20,0) + \omega_2 P(20,20) + \omega_3 P(20,40) \\ &+ \omega_4 P(20,60) = 9.8 \end{aligned}$$

Untuk $t_3 = t = 40$:

$$\omega_1 P(t_3, c_1) + \omega_2 P(t_3, c_2) + \omega_3 P(t_3, c_3) + \omega_4 P(t_3, c_4) = 9.8$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 \omega_j P(40, c_j) \\
&= \omega_1 P(40,0) + \omega_2 P(40,20) + \omega_3 P(40,40) \\
&+ \omega_4 P(40,60) = 9.8
\end{aligned}$$

Untuk $t_4 = t = 60$:

$$\omega_1 P(t_4, c_1) + \omega_2 P(t_4, c_2) + \omega_3 P(t_4, c_3) + \omega_4 P(t_4, c_4) = 9.8$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 \omega_j P(60, c_j) \\
&= \omega_1 P(60,0) + \omega_2 P(60,20) + \omega_3 P(60,40) \\
&+ \omega_4 P(60,60) = 9.8
\end{aligned}$$

Sehingga dari 4 persamaan tersebut dihasilkan:

$$\omega_1 P(t_1, c_1) + \omega_2 P(t_1, c_2) + \omega_3 P(t_1, c_3) + \omega_4 P(t_1, c_4) = 9.8$$

$$\omega_1 P(t_2, c_1) + \omega_2 P(t_2, c_2) + \omega_3 P(t_2, c_3) + \omega_4 P(t_2, c_4) = 9.8$$

$$\omega_1 P(t_3, c_1) + \omega_2 P(t_3, c_2) + \omega_3 P(t_3, c_3) + \omega_4 P(t_3, c_4) = 9.8$$

$$\omega_1 P(t_4, c_1) + \omega_2 P(t_4, c_2) + \omega_3 P(t_4, c_3) + \omega_4 P(t_4, c_4) = 9.8$$

Dengan substitusi nilai t_1, t_2, t_3, t_4 dan c_1, c_2, c_3, c_4 , maka:

$$\omega_1 P(0,0) + \omega_2 P(0,20) + \omega_3 P(0,40) + \omega_4 P(0,60) = 9.8$$

$$\omega_1 P(20,0) + \omega_2 P(20,20) + \omega_3 P(20,40) + \omega_4 P(20,60) = 9.8 \quad (4.24)$$

$$\omega_1 P(40,0) + \omega_2 P(40,20) + \omega_3 P(40,40) + \omega_4 P(40,60) = 9.8$$

$$\omega_1 P(60,0) + \omega_2 P(60,20) + \omega_3 P(60,40) + \omega_4 P(60,60) = 9.8$$

Setelah itu, sistem persamaan (4.24) dapat diubah kedalam persamaan

matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & P(t_1, c_3) & P(t_1, c_4) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & P(t_2, c_3) & P(t_2, c_4) \\ P(t_3, c_1) & P(t_3, c_2) & P(t_3, c_3) & P(t_3, c_4) \\ P(t_4, c_1) & P(t_4, c_2) & P(t_4, c_3) & P(t_4, c_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$, maka:

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & P(t_1, c_3) & P(t_1, c_4) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & P(t_2, c_3) & P(t_2, c_4) \\ P(t_3, c_1) & P(t_3, c_2) & P(t_3, c_3) & P(t_3, c_4) \\ P(t_4, c_1) & P(t_4, c_2) & P(t_4, c_3) & P(t_4, c_4) \\ \phi(0, c_1) & \phi(0, c_2) & \phi(0, c_3) & \phi(0, c_4) \\ \phi_t(0, c_1) & \phi_t(0, c_2) & \phi_t(0, c_3) & \phi_t(0, c_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan substitusi nilai t_1, t_2, t_3, t_4 dan c_1, c_2, c_3, c_4 berdasarkan

$\Delta t = 20$, maka:

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,20) & P(0,40) & P(0,60) \\ P(20,0) & P(20,20) & P(20,40) & P(20,60) \\ P(40,0) & P(40,20) & P(40,40) & P(40,60) \\ P(60,0) & P(60,20) & P(60,40) & P(60,60) \\ \phi(0,0) & \phi(0,20) & \phi(0,30) & \phi(0,60) \\ \phi_t(0,0) & \phi_t(0,20) & \phi_t(0,40) & \phi_t(0,60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan pada matriks (4.26) tersebut, yaitu:

Perhitungan Matriks $P(t, c_j)$

$$P(0,0) = \frac{\alpha^2}{((t - c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + 0.01 \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}} + 0.8 \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$$

Karena $t_1 = 0$, $c_1 = 0$, dan $\alpha = 2$, maka persamaan menjadi:

$$P(0,0) = \frac{\alpha^2}{\alpha^3} + 0 + 0.8\alpha$$

$$P(0,0) = \frac{1}{\alpha} + 0.8\alpha$$

Kemudian:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$0.8\alpha = 0.8 \times 2 = 1.6$$

Kemudian menghitung $P(0,0)$

$$\frac{1}{\alpha} + 0.8\alpha = 0.5 + 1.6 = 2.1$$

$$P(0,0) = 2.1$$

Sehingga berdasarkan rumus perhitungan diatas, hasil perhitungan manual untuk $P(0,0)$ hingga $P(60,60)$ disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 4.1 Perhitungan Matriks $P(t, c_j)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

t	c_j	$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{(t-c_j)^2}{+\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{0.01}{\sqrt{\frac{(t-c_j)^2}{+\alpha^2}}}$	$\frac{0.8}{\sqrt{\frac{(t-c_j)^2}{+\alpha^2}}}$	$P(t, c_j)$
0	0	0.5	0	1.6	2.1
0	20	0.000493	-0.00995	16.0798	16.07034
0	40	0.000062	-0.00999	32.03998	32.03005
0	60	0.000018	-0.00999	48.02666	48.01668
20	0	0.000493	0.00995	16.0798	16.09024
20	20	0.5	0	1.6	2.1
20	40	0.000493	-0.00995	16.0798	16.07034
20	60	0.000062	-0.00999	32.03998	32.03005
40	0	0.000062	0.009988	32.03998	32.05003
40	20	0.000493	0.00995	16.0798	16.09024
40	40	0.5	0	1.6	2.1
40	60	0.000493	-0.00995	16.0798	16.07034
60	0	0.000018	0.009994	48.02666	48.03667
60	20	0.000062	0.009988	32.03998	32.05003
60	40	0.000493	0.00995	16.0798	16.09024
60	60	0.5	0	1.6	2.1

Setelah memperoleh nilai untuk matriks $P(t, c_j)$, selanjutnya akan dilakukan perhitungan untuk matriks $\phi(0, c_j)$ dan $\phi_t(0, c_j)$.

Untuk $\phi(0, c_1) = \phi(0, 0)$:

$$\phi(0, 0) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + 2^2} = 2$$

Dan seterusnya hingga $\phi(0, 60)$.

Untuk perhitungan Matriks $\phi_t(0, c_1) = \phi_t(0, 0)$:

$$\phi_t(0, 0) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}} = \frac{0 - 0}{\sqrt{(0 - 0)^2 + 2^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

Dan seterusnya hingga $\phi_t(0, 60)$. Adapun untuk hasil dari perhitungan disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 4.2 Perhitungan Matriks $\phi(0, c_j)$ dan $\phi_t(0, c_j)$ untuk $t \in [0, 60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

c_j	$t - c_j$	$(t - c_j)^2 + \alpha^2$	$\phi(0, c_j) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$	$\phi_t(0, c_j) = \frac{t - c_j}{\sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}}$
0	0	4	2	0
20	-20	404	20.0998	-0.995
40	-40	1604	40.0249	-0.999
60	-60	3604	60.0167	-0.9998

Setelah menghitung semua matriks pada persamaan (4.26), maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 16.07034 & 32.03005 & 48.0166 \\ 16.0902 & 2.1 & 16.07034 & 32.03 \\ 32.05 & 16.09024 & 2.1 & 16.0703 \\ 48.0366 & 32.05003 & 16.0902 & 2.1 \\ 2 & 20.0998 & 40.0249 & 60.0167 \\ 0 & -0.995 & -0.999 & -0.9998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Dalam hal ini, persamaan matriks (4.27) tersebut dapat dimisalkan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} 2.1 & 16.07034 & 32.03005 & 48.0166 \\ 16.0902 & 2.1 & 16.07034 & 32.03 \\ 32.05 & 16.09024 & 2.1 & 16.0703 \\ 48.0366 & 32.05003 & 16.0902 & 2.1 \\ 2 & 20.0998 & 40.0249 & 60.0167 \\ 0 & -0.995 & -0.999 & -0.9998 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}, \text{ dan } F =$$

$$\begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai dari matriks A dan F , selanjutnya akan dihitung nilai bobot persamaan matriks (4.27) tersebut dengan eliminasi gauss, melalui rumus:

$$A \times W = F \quad (4.28)$$

Karena matriks berukuran 4×6 , maka untuk menghitung nilai bobot, akan didefinisikan terlebih dahulu untuk matriks $A_t = A^T \times A$ (Andrilli & Hecker, 2010). Dalam hal ini, akan dihitung perkalian antara transpose dari matriks A dengan matriks A , sehingga hasil perkalian matriks A_t akan berukuran 4×4 . Untuk baris dan kolom matriks A yaitu:

Tabel 4.3 Baris dan Kolom Matriks A untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Baris	Kolom 1	Kolom 2	Kolom 3	Kolom 4
1	2.1	16.07034	32.03005	48.0166
2	16.0902	2.1	16.07034	32.03
3	32.05	16.09024	2.1	16.0703
4	48.0366	32.05003	16.0902	2.1
5	2	20.0998	40.0249	60.0167
6	0	-0.995	-0.999	-0.9998

Oleh karena itu, setiap elemen dari matriks A dihitung dengan rumus perkalian antara kolom A . Contohnya elemen A_{11} adalah hasil penjumlahan kuadrat dari semua elemen pada kolom pertama matriks A :

$$A_{11} = 2.1^2 + 16.0902^2 + 32.5^2 + 48.0366^2 + 2^2 + 0 + 2.1^2$$

Selanjutnya elemen A_{12} dihitung sebagai hasil perkalian antara kolom pertama dan kolom kedua dari A :

$$\begin{aligned} A_{12} = & (2.1 \times 16.07034) + (16.0902 \times 2.1) + (32.5 \times 16.09024) \\ & + (48.0366 \times 32.05003) + (2 \times 20.0998) \\ & + (0 \times (-0.995)) \end{aligned}$$

Langkah ini dilakukan sehingga seluruh elemen A_{11} sampai A_{44} diperoleh dan disusun menjadi matriks A_t .

Tabel 4.4 Perkalian Elemen untuk Matriks A dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

t	C_j	Rumus (perkalian tiap elemen)	Hasil
1	1	$2.1^2 + 16.0902^2 + 32.5^2 + 48.0366^2 + 2^2 + 0 + 2.1^2$	3602.02198
1	2	$(2.1 \times 16.07034) + (16.0902 \times 2.1) + (32.5 \times 16.09024) + (48.0366 \times 32.05003) + (2 \times 20.0998) + (0 \times (-0.995))$	2163.0034
1	3	$(2.1 \times 32.03005) + (16.0902 \times 16.07034) + (32.05 \times 2.1) + (48.0366 \times 16.0902) + (2 \times 40.0249) + (0 \times (-0.992))$	1246.11139
1	4	$(2.1 \times 48.0166) + (16.0902 \times 32.03) + (32.05 \times 16.0703) + (48.0366 \times 2.1) + (2 \times 60.0167) + (0 \times (-0.9998))$	1352.16734

2	1	$(16.07034 \times 2.1) + (2.1 \times 16.0902)$ $+ (16.09024 \times 32.5)$ $+ (32.05003 \times 48.0366)$ $+ (20.0998 \times 2)$ $+ ((-0.995) \times 0)$	2163.0034
2	2	$16.07034^2 + 2.1^2 + 32.05003^2$ $+ 20.0998^2 + (-0.995)^2$	1953.75806
2	3	$(16.0704 \times 32.03005)$ $+ (2.1 \times 16.07034)$ $+ (32.05003 \times 16.0902)$ $+ (20.0998 \times 40.0249)$ $+ ((-0.995)$ $\times (-0.999))$	1903.44889
2	4	$(16.07034 \times 48.0166) + (2.1 \times 32.03)$ $+ (16.09024 \times 16.0703)$ $+ (32.05003 \times 2.1)$ $+ (20.0998 \times 60.0167)$ $+ ((-0.995)$ $\times (-0.9998))$	2372.1046
3	1	(32.03005×2.1) $+ (16.07034 \times 16.0902)$ $+ (2.1 \times 32.05)$ $+ (16.0902 \times 48.0366)$ $+ (40.0249 \times 2)$ $+ ((-0.992) \times 0)$	1246.11139
3	2	$(32.03005 \times 16.0704)$ $+ (16.07034 \times 2.1)$ $+ (2.1 \times 16.0902)$ $+ (16.0902 \times 32.05003)$ $+ (40.0249 \times 20.0998)$ $+ ((-0.999)$ $\times (-0.995))$	1903.44889
3	3	$32.03005^2 + 16.07034^2 + 2.1^2$ $+ 16.0902^2 + 40.0249^2$ $+ (-0.999)^2$	3150.47509
3	4	$(32.03005 \times 48.0166)$ $+ (16.07034 \times 32.02)$ $+ (2.1 \times 16.0703)$ $+ (16.0902 \times 2.1)$ $+ (40.0249 \times 60.0167)$ $+ ((-0.999)$ $\times (-0.9998))$	4523.40536
4	1	$(48.0166 \times 2.1) + (32.03 \times 16.0902)$ $+ (16.0703 \times 32.05)$ $+ (2.1 \times 48.0366)$ $+ (60.0167 \times 2)$ $+ ((-0.9998) \times 0)$	1352.16734

4	2	$(48.0166 \times 16.07034) + (32.03 \times 2.1)$ $+ (16.0703 \times 16.09024)$ $+ (2.1 \times 32.05003)$ $+ (60.0167 \times 20.0998)$ $+ ((-0.9998)$ $\times (-0.995))$	2372.1046
4	3	$(48.0166 \times 32.03005)$ $+ (32.02 \times 16.07034)$ $+ (16.0703 \times 2.1)$ $+ (2.1 \times 16.0902)$ $+ (60.0167 \times 40.0249)$ $+ ((-0.9998)$ $\times (-0.999))$	4523.40536
4	4	$48.0166^2 + 32.03^2 + 16.0703^2 + 2.1^2$ $+ 60.0167^2 + (-0.998)^2$	7197.1832

Selanjutnya untuk menghitung matriks b , matriks b dihitung sebagai hasil dari perkalian transpose A dengan vektor F sehingga dapat dirumuskan matriks $b = A^T \times F$:

Tabel 4.5 Perkalian Elemen untuk Matriks b dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

j	Rumus	Hasil
1	$(2.1 \times 9.8) + (16.0902 \times 9.8) + (32.05 \times 9.8)$ $+ (48.0366 \times 9.8) + (2 \times 12.25)$ $+ (0 \times 1)$	987.61
2	$(16.07034 \times 9.8) + (2.1 \times 9.8)$ $+ (16.09024 \times 9.8)$ $+ (32.05003 \times 9.8)$ $+ (20.0998 \times 12.25)$ $+ ((-0.995) \times 1)$	895.07
3	$(32.03005 \times 9.8) + (16.07034 \times 9.8)$ $+ (2.1 \times 9.8) + (16.0902 \times 9.8)$ $+ (40.0249 \times 12.25)$ $+ ((-0.999) \times 1)$	1138.95
4	$(48.0166 \times 9.8) + (32.03 \times 9.8)$ $+ (16.0703 \times 9.8) + (2.1 \times 9.8)$ $+ (60.0167 \times 12.25)$ $+ ((-0.9998) \times 1)$	1696.73

Sehingga berdasarkan perhitungan pada tabel 4.4, dihasilkan matriks A_t :

$$A_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3602.02 & 2163.003 & 1246.11 & 1352.16 \\ 2163.003 & 1953.75 & 1903.44 & 2372.104 \\ 1246.11 & 1903.44 & 3150.47 & 4523.405 \\ 1352.16 & 2372.104 & 4523.4 & 7197.18 \end{bmatrix}$$

Dan berdasarkan perhitungan pada tabel 4.5, dihasilkan matriks b :

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 987.61 \\ 895.07 \\ 1138.95 \\ 1696.73 \end{bmatrix}$$

Untuk selanjutnya, akan dibentuk matriks $[A_t|b]$, sehingga:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3602.02 & 2163.003 & 1246.11 & 1352.16 & 987.61 \\ 2163.003 & 1953.75 & 1903.44 & 2372.104 & 895.07 \\ 1246.11 & 1903.44 & 3150.47 & 4523.405 & 1138.95 \\ 1352.16 & 2372.104 & 4523.4 & 7197.18 & 1696.73 \end{array} \right]$$

Setelah membentuk matriks $[A_t|b]$ tersebut, akan dilakukan eliminasi untuk membentuk matriks segitiga, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Eliminasi Pivot Pertama

$$\text{Pivot } a_{11} = 3602.02$$

Eliminasi baris 2:

$$L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2163.003}{3602.02} = 0.6005$$

$$R_2 = R_2 - L_{21} \times R_1$$

$$R_2 = \begin{cases} a_{21} = 2163.003 - 0.6005 \times 3602.02 = 0 \\ a_{22} = 1953.75 - 0.6005 \times 2163.003 = 654.85 \\ a_{23} = 1903.44 - 0.6005 \times 1246.11 = 1154.94 \\ a_{24} = 2372.104 - 0.6005 \times 1352.16 = 1560.04 \\ b_2 = 895.07 - 0.6005 \times 987.61 = 302.07 \end{cases}$$

Eliminasi baris 3:

$$L_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1246.11}{3602.02} = 0.346$$

$$R_3 = R_3 - L_{31} \times R_1$$

$$R_3 = \begin{cases} a_{31} = 1246.11 - 0.346 \times 3602.02 = 0 \\ a_{32} = 1903.44 - 0.346 \times 2163.003 = 1154.96 \\ a_{33} = 3150.47 - 0.346 \times 1246.11 = 2718.76 \\ a_{34} = 4523.4 - 0.346 \times 1352.16 = 4054.29 \\ b_3 = 1138.95 - 0.346 \times 987.61 = 704.05 \end{cases}$$

Eliminasi baris 4:

$$L_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{1352.16}{3602.02} = 0.3753$$

$$R_4 = R_4 - L_{41} \times R_1$$

$$R_4 = \begin{cases} a_{41} = 1352.16 - 0.3753 \times 3602.02 = 0 \\ a_{42} = 2372.104 - 0.3753 \times 2163.003 = 1559.84 \\ a_{43} = 4523.4 - 0.3753 \times 1246.11 = 4059.46 \\ a_{44} = 7197.18 - 0.3753 \times 1352.16 = 6189.67 \\ b_4 = 1696.73 - 0.3753 \times 987.61 = 1223.84 \end{cases}$$

Sehingga bentuk matriks $[A_t|b]$ setelah eliminasi pivot pertama yaitu:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3602.02 & 2163.003 & 1246.11 & 1352.16 & 987.61 \\ 0 & 654.85 & 1154.94 & 1560.04 & 302.07 \\ 0 & 1154.96 & 2718.76 & 4054.29 & 704.05 \\ 0 & 1559.84 & 4059.46 & 6189.67 & 1223.84 \end{array} \right]$$

b. Eliminasi Pivot Kedua di Baris 2

$$\text{Pivot } a_{22} = 654.85$$

Eliminasi baris 3:

$$L_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1154.96}{654.85} = 1.763$$

$$R_3 = R_3 - L_{32} \times R_2$$

$$R_3 = \begin{cases} a_{32} = 1154.96 - 1.763 \times 654.85 = 0 \\ a_{33} = 2718.76 - 1.763 \times 1154.94 = 682.26 \\ a_{34} = 4054.29 - 1.763 \times 1560.04 = 1300.84 \\ b_3 = 704.05 - 1.763 \times 302.07 = 171.61 \end{cases}$$

Eliminasi baris 4:

$$L_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = \frac{1559.84}{654.85} = 2.381$$

$$R_4 = R_4 - L_{42} \times R_2$$

$$R_4 = \begin{cases} a_{42} = 1559.84 - 2.381 \times 654.85 = 0 \\ a_{43} = 4059.46 - 2.381 \times 1154.94 = 1310.37 \\ a_{44} = 6189.67 - 2.381 \times 1560.04 = 2454.04 \\ b_4 = 1223.84 - 2.381 \times 302.07 = 506.64 \end{cases}$$

Sehingga bentuk matriks setelah eliminasi pivot kedua di baris 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3602.02 & 2163.003 & 1246.11 & 1352.16 & 987.61 \\ 0 & 654.85 & 1154.94 & 1560.04 & 302.07 \\ 0 & 0 & 682.26 & 1300.84 & 171.61 \\ 0 & 0 & 1310.37 & 2454.04 & 506.64 \end{array} \right]$$

c. Eliminasi Pivot Ketiga di Baris 3

$$\text{Pivot } a_{33} = 682.26$$

Eliminasi baris 4:

$$L_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{1310.37}{682.26} = 1.921$$

$$R_4 = R_4 - L_{43} \times R_3$$

$$R_4 = \begin{cases} 1310.37 - 1.921 \times 682.26 = 0 \\ 2454.04 - 1.921 \times 1300.84 = 0.62 \\ 506.64 - 1.921 \times 171.61 = 176.52 \end{cases}$$

Setelah melakukan eliminasi tiap baris, maka dihasilkan matriks segitiga

$[A_t|b]$ menjadi:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3602.02 & 2163.003 & 1246.11 & 1352.16 & 987.61 \\ 0 & 654.85 & 1154.94 & 1560.04 & 302.07 \\ 0 & 0 & 682.26 & 1300.84 & 171.61 \\ 0 & 0 & 0 & 0.62 & 176.52 \end{array} \right]$$

Selanjutnya, akan dihitung substitusi mundur untuk mencari nilai ω_j , yaitu:

Baris 4:

$$0.62\omega_4 = 176.52; \omega_4 = \frac{176.52}{0.62} = 0.2096$$

Baris 3:

$$682.26\omega_3 + (1300.84 \times 0.2096) = 171.61$$

$$\omega_3 = \frac{171.61 - (1300.84 \times 0.2096)}{682.26} = -0.0127$$

Baris 2:

$$654.85\omega_2 + (1154.94 \times (-0.0127)) + (1560.04 \times 0.2096) = 302.07$$

$$\omega_2 = \frac{302.07 - ((1154.94 \times (-0.0127)) + (1560.04 \times 0.2096))}{654.85}$$

$$= -0.0157$$

Baris 1:

$$3602\omega_1 + (2163.003 \times (-0.0157)) + (1246.11 \times (-0.0127))$$

$$+ (1352.16 \times 0.2096) = 987.61$$

$$\omega_1 = \frac{987.61 - (-33.95) - (-15.83) - (283.42)}{3602.02} = 0.2094$$

Sehingga didapatkan:

$$\omega = [0.2094; -0.0157; -0.0127; 0.2096] \quad (4.29)$$

Kemudian untuk mencari solusi dari $y(t)$, dapat dihitung menggunakan perkalian dari fungsi basis dengan bobot yang sudah diperoleh pada persamaan (4.29). Adapun bentuk solusi dari $y(t)$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ y(t_3) \\ y(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1) & \phi(t_1, c_2) & \phi(t_1, c_3) & \phi(t_1, c_4) \\ \phi(t_2, c_1) & \phi(t_2, c_2) & \phi(t_2, c_3) & \phi(t_2, c_4) \\ \phi(t_3, c_1) & \phi(t_3, c_2) & \phi(t_3, c_3) & \phi(t_3, c_4) \\ \phi(t_4, c_1) & \phi(t_4, c_2) & \phi(t_4, c_3) & \phi(t_4, c_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ y(t_3) \\ y(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(0,0) & \phi(0,20) & \phi(0,40) & \phi(0,60) \\ \phi(20,0) & \phi(20,20) & \phi(20,40) & \phi(20,60) \\ \phi(40,0) & \phi(40,20) & \phi(40,40) & \phi(40,60) \\ \phi(60,0) & \phi(60,20) & \phi(60,40) & \phi(60,60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2094 \\ -0.0157 \\ -0.0127 \\ 0.2096 \end{bmatrix}$$

Karena $\phi(t, c_j) = \sqrt{(t - c_j)^2 + \alpha^2}$, maka untuk perhitungannya disajikan

dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 4.6 Perhitungan Matriks $\phi(t, c_j)$ dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

t	c_j	$(t - c_j)^2$	$(t - c_j)^2 + \alpha^2$	$\phi(t, c_j)$
0	0	0	4	2.000
0	20	400	404	20.099
0	40	1600	1604	40.050
0	60	3600	3604	60.033
20	0	400	404	20.099
20	20	0	4	2.000
20	40	400	404	20.099
20	60	1600	1604	40.050
40	0	1600	1604	40.050
40	20	400	404	20.099
40	40	0	4	2.000
40	60	400	404	20.099
60	0	3600	3604	60.033
60	20	1600	1604	40.050
60	40	400	404	20.099
60	60	0	4	2.000

Sehingga:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ y(t_3) \\ y(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 20.099 & 40.050 & 60.033 \\ 20.099 & 2 & 20.099 & 40.050 \\ 40.050 & 20.099 & 2 & 20.099 \\ 60.033 & 40.050 & 20.099 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2094 \\ -0.0157 \\ -0.0127 \\ 0.2096 \end{bmatrix}$$

Adapun hasil untuk $y(t_1)$:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= (\phi(t_1, c_1) \times \omega_1) + (\phi(t_1, c_2) \times \omega_2) + (\phi(t_1, c_3) \times \omega_3) \\ &\quad + (\phi(t_1, c_4) \times \omega_4) \end{aligned}$$

$$y(t_1) = (\phi(0,0) \times 0.2094) + (\phi(0,20) \times -0.0157) \\ + (\phi(0,40) \times -0.0127) + (\phi(0,60) \times 0.2096)$$

$$y(t_1) = (2 \times 0.2094) + (20.099 \times -0.0157) + (40.050 \times -0.0127) \\ + (60.033 \times 0.2096) \\ = 0.4188 + (-0.3155) + (-0.5086) + 12.582$$

$$y(t_1) = 12.174$$

Untuk $y(t_2)$:

$$y(t_2) = (\phi(t_2, c_1) \times \omega_1) + (\phi(t_2, c_2) \times \omega_2) + (\phi(t_2, c_3) \times \omega_3) \\ + (\phi(t_2, c_4) \times \omega_4)$$

$$y(t_2) = (\phi(20,0) \times 0.2094) + (\phi(20,20) \times -0.0157) \\ + (\phi(20,40) \times -0.0127) + (\phi(20,60) \times 0.2096)$$

$$y(t_2) = (20.099 \times 0.2094) + (2 \times -0.0157) + (20.099 \times -0.0127) \\ + (40.050 \times 0.2096) \\ = 4.2087 + (-0.0314) + (-0.2552) + 8.394$$

$$y(t_2) = 12.314$$

Untuk $y(t_3)$:

$$y(t_3) = (\phi(t_3, c_1) \times \omega_1) + (\phi(t_3, c_2) \times \omega_2) + (\phi(t_3, c_3) \times \omega_3) \\ + (\phi(t_3, c_4) \times \omega_4)$$

$$y(t_3) = (\phi(40,0) \times 0.2094) + (\phi(40,20) \times -0.0157) \\ + (\phi(40,40) \times -0.0127) + (\phi(40,60) \times 0.2096)$$

$$y(t_3) = (40.050 \times 0.2094) + (20.099 \times -0.0157) + (2 \times -0.0127) \\ + (20.099 \times 0.2096) \\ = 8.386 + (-0.3155) + (-0.0254) + 4.213$$

$$y(t_3) = 12.255$$

Untuk $y(t_4)$:

$$y(t_4) = (\phi(t_4, c_1) \times \omega_1) + (\phi(t_4, c_2) \times \omega_2) + (\phi(t_4, c_3) \times \omega_3) \\ + (\phi(t_4, c_4) \times \omega_4)$$

$$y(t_4) = (\phi(60,0) \times 0.2094) + (\phi(60,20) \times -0.0157) \\ + (\phi(60,40) \times -0.0127) + (\phi(60,60) \times 0.2096)$$

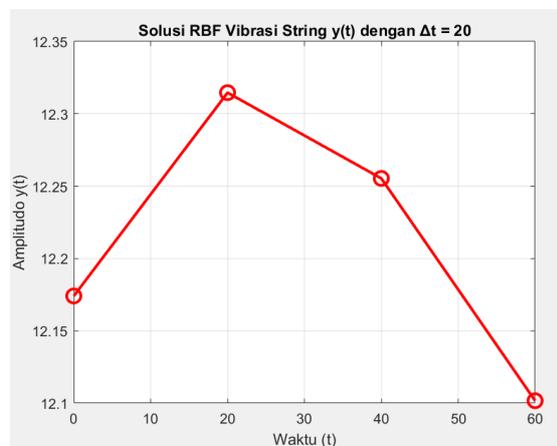
$$y(t_4) = (60.033 \times 0.2094) + (40.050 \times -0.0157) \\ + (20.099 \times -0.0127) + (2 \times 0.2096) \\ = 12.5709 + (-0.6287) + (-0.255) + 0.4192$$

$$y(t_4) = 12.101$$

Berdasarkan perhitungan, maka didapatkan solusi dari $y(t)$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ y(t_3) \\ y(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.174 \\ 12.314 \\ 12.255 \\ 12.101 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Kemudian berdasarkan solusi yang telah didapatkan pada (4.31), selanjutnya grafik hasil simulasi numerik persamaan (4.31) menggunakan program Matlab disajikan dalam gambar sebagai berikut:



Gambar 4.3 Grafik Solusi Numerik Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Berdasarkan grafik pada gambar 4.3, solusi numerik $y(t)$ hanya divisualisasikan pada empat titik waktu, yaitu $t = 0, 20, 40,$ dan 60 . Meskipun pola yang ditunjukkan oleh titik-titik tersebut tidak sehalus grafik dengan Δt yang lebih kecil, tetapi dalam grafik tersebut masih menunjukkan indikasi osilasi. Nilai berada di sekitar $12.15-12.2$ pada $t = 0$, naik menjadi sekitar 12.3 pada $t = 20$, sedikit turun pada $t = 40$, dan turun lagi menjadi 12.1 pada $t = 60$. Meskipun jumlah titik terbatas membuat pola osilasi tidak dapat dijelaskan secara menyeluruh, ini menunjukkan adanya fluktuasi nilai $y(t)$. Oleh karena itu, pendekatan $\Delta t = 20$ kurang mampu memberikan gambaran menyeluruh tentang dinamika sistem, tetapi mampu memberikan gambaran umum tentang perilaku osilasi.

2. Simulasi Numerik Model Vibrasi String dengan $\Delta t = 0.1$ menggunakan Metode Radial Basis Function

Diketahui persamaan diferensial linier model vibrasi string dituliskan sebagai:

$$\ddot{y}(t) + \delta\dot{y}(t) + \frac{2K}{m}y(t) - g = 0 \quad (4.32)$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$.

Hitung $\frac{2K}{m} = \frac{2(1000)}{2500} = \frac{2000}{2500} = 0.8$

Kemudian substitusi parameter-parameter pada subbab 4.1, sehingga persamaan (4.32) diatas dapat direformulasikan menjadi:

$$\ddot{y}(t) + 0.01\dot{y}(t) + 0.8y(t) = 9.8 \quad (4.33)$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut menggunakan metode Radial Basis Function (RBF), persamaan (4.33) diubah ke dalam bentuk jaringan fungsi RBF sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{601} \omega_j \phi_{tt}(t, c_j) + 0.01 \sum_{j=1}^{601} \omega_j \phi_t(t, c_j) + 0.8 \sum_{j=1}^{601} \omega_j \phi(t, c_j) = 9.8 \quad (4.34)$$

Kemudian dari persamaan (4.34) tersebut, akan dipartisi menjadi data dengan $\Delta t = 0.1$, dimana berdasarkan nilai awal dan kondisi batas didapatkan $t = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 60\}$, dimana jumlah t yang diketahui yaitu 601 ($N = 601$). Adapun untuk titik-titik pusat diambil dari $c = t$. Selanjutnya yaitu memasukkan nilai t pada persamaan (4.23) tersebut sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 9.8 &= \omega_1 P(t_1, c_1) + \omega_2 P(t_1, c_2) + \dots + \omega_{601} P(t_1, c_{601}) \\ 9.8 &= \omega_1 P(t_2, c_1) + \omega_2 P(t_2, c_2) + \dots + \omega_{601} P(t_2, c_{601}) \\ &\vdots \\ 9.8 &= \omega_1 P(t_{601}, c_1) + \omega_2 P(t_{601}, c_2) + \dots + \omega_{601} P(t_{601}, c_{601}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dengan

$$P(t, c_j) = \frac{\alpha^2}{((t-c_j)^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + 0.01 \frac{t-c_j}{\sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}} + 0.8 \sqrt{(t-c_j)^2 + \alpha^2}$$

$j = 1, 2, \dots, 601$ dan α bernilai 2.

Setelah itu, sistem persamaan (4.35) dapat diubah kedalam persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & \cdots & P(t_1, c_{601}) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & \cdots & P(t_2, c_{601}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(t_{601}, c_1) & P(t_{601}, c_2) & \cdots & P(t_{601}, c_{601}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ \vdots \\ 9.8 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$, maka:

$$\begin{bmatrix} P(t_1, c_1) & P(t_1, c_2) & \cdots & P(t_1, c_{601}) \\ P(t_2, c_1) & P(t_2, c_2) & \cdots & P(t_2, c_{601}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(t_{601}, c_1) & P(t_{601}, c_2) & \cdots & P(t_{601}, c_{601}) \\ \phi(0, c_1) & \phi(0, c_2) & \cdots & \phi(0, c_{601}) \\ \phi_t(0, c_1) & \phi_t(0, c_2) & \cdots & \phi_t(0, c_{601}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ \vdots \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi nilai t_1, t_2, \dots, t_{601} dan c_1, c_2, \dots, c_{601} berdasarkan $\Delta t = 0.1$, maka:

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,0.1) & \cdots & P(0,60) \\ P(0.1,0) & P(0.1,0.1) & \cdots & P(0.1,60) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(60,0) & P(60,0.1) & \cdots & P(60,60) \\ \phi(0,0) & \phi(0,0.1) & \cdots & \phi(0,60) \\ \phi_t(0,0) & \phi_t(0,0.1) & \cdots & \phi_t(0,60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ \vdots \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Karena persamaan pada matriks (4.37) memiliki elemen matriks 601×601 , maka semua perhitungan elemen tidak mungkin dimunculkan dalam tulisan. Oleh karena itu, semua perhitungan elemen akan dimunculkan didalam lampiran menggunakan program Matlab. Setelah dilakukan perhitungan pada matriks (4.26) tersebut, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 2.0996 & \cdots & 48.0166 \\ 2.1006 & 2.1 & \cdots & 47.9367 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 48.0366 & 47.9567 & \cdots & 2.1 \\ 2 & 2.0024 & \cdots & 60.0334 \\ 0 & -0.0499 & \cdots & -0.9994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ \vdots \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Setelah mendapatkan nilai dari matriks A , selanjutnya akan dihitung nilai bobot persamaan matriks (4.38) tersebut, melalui rumus:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.0996 & \cdots & 48.0166 \\ 2.1006 & 2.1 & \cdots & 47.9367 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 48.0366 & 47.9567 & \cdots & 2.1 \\ 2 & 2.0024 & \cdots & 60.0334 \\ 0 & -0.0499 & \cdots & -0.9994 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9.8 \\ 9.8 \\ \vdots \\ 9.8 \\ 12.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Berdasarkan hasil perhitungan matriks (4.39) tersebut dengan menggunakan backlash (\) pada Matlab, didapatkan nilai-nilai bobot nya yaitu:

$$\omega = [-2.9113; 2.2088; \cdots; -3.7140] \quad (4.40)$$

Kemudian untuk mencari solusi dari $y(t)$, dapat dihitung menggunakan perkalian dari fungsi basis dengan bobot yang sudah diperoleh pada persamaan (4.40). Adapun bentuk solusi dari $y(t)$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t_1, c_1) & \phi(t_1, c_2) & \cdots & \phi(t_1, c_{601}) \\ \phi(t_2, c_1) & \phi(t_2, c_2) & \cdots & \phi(t_2, c_{601}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(t_{601}, c_1) & \phi(t_{601}, c_2) & \cdots & \phi(t_{601}, c_{601}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

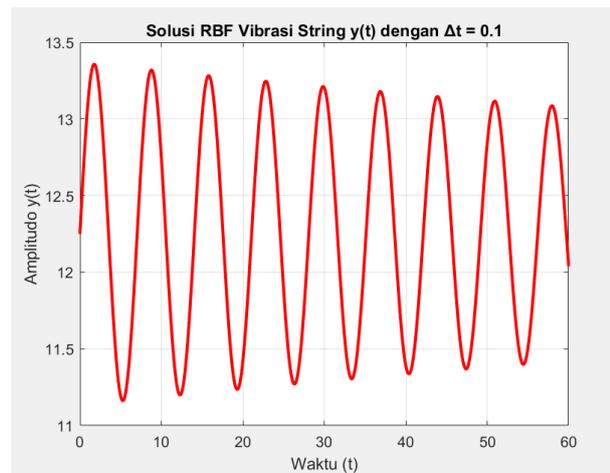
$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(0,0) & \phi(0,0.1) & \cdots & \phi(0,60) \\ \phi(0.1,0) & \phi(0.1,0.1) & \cdots & \phi(0.1,60) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi(60,0) & \phi(60,0.1) & \cdots & \phi(60,60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{601} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2.0024 & \cdots & 60.0333 \\ 2.0024 & 2 & \cdots & 59.933 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 60.0333 & 59.933 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.9113 \\ 2.2088 \\ \vdots \\ -3.7140 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan melalui Matlab, maka didapatkan solusi dari $y(t)$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_{601}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.25 \\ 12.3498 \\ \vdots \\ 12.0388 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Kemudian berdasarkan solusi yang telah didapatkan pada (4.42), selanjutnya grafik hasil simulasi numerik persamaan (4.42) menggunakan program Matlab disajikan dalam gambar sebagai berikut:

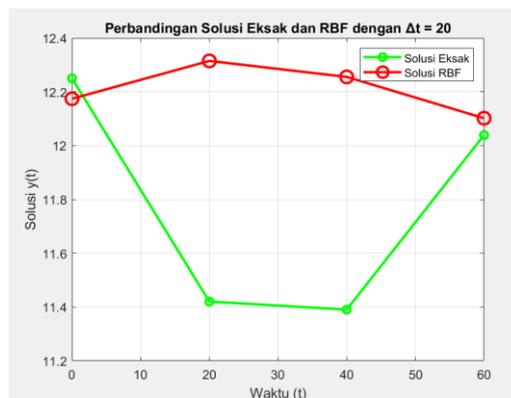


Gambar 4.4 Grafik Solusi Numerik Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

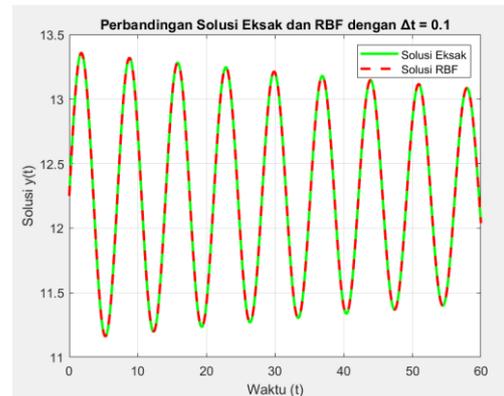
Berdasarkan grafik pada gambar 4.4, sepanjang rentang waktu 0–60 detik, solusi numerik $y(t)$ menunjukkan pola osilasi periodik yang stabil dengan amplitudo yang relatif konstan. Bentuk gelombang halus mencerminkan dinamika terus menerus sistem di grafik. Hal ini menunjukkan bahwa metode Radial Basis Function (RBF) efektif dalam menunjukkan perilaku sistem secara akurat pada resolusi waktu yang lebih kecil ($\Delta t = 0.1$). Metode ini juga memiliki kemampuan untuk mengumpulkan perubahan nilai secara menyeluruh seiring waktu.

4.3.3 Galat Metode Radial Basis Function

Pada subbab ini, dilakukan galat solusi yang dihasilkan oleh metode Radial Basis Function (RBF). Tujuannya adalah untuk menentukan tingkat akurasi solusi numerik dibandingkan dengan solusi eksak. Pada penelitian ini, metode RBF diterapkan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial dengan memanfaatkan titik diskretisasi dan pusat basis (c) yang terdistribusi secara uniform pada domain $[0,60]$. Galat bertujuan untuk mengukur tingkat akurasi solusi numerik yang dihasilkan oleh metode Radial Basis Function (RBF) dibandingkan dengan solusi eksak. Galat dihitung berdasarkan perbedaan antara solusi numerik ($y(t)$) dan solusi eksak ($\hat{y}(t)$). Selanjutnya, hasil solusi numerik menggunakan metode Radial Basis Function (RBF) dibandingkan dengan solusi eksak untuk mengevaluasi tingkat akurasi metode. Perbandingan ini divisualisasikan dalam dua grafik yang masing-masing menunjukkan hasil simulasi dengan $\Delta t = 20$ dan $\Delta t = 0.1$ secara berdampingan, sebagaimana ditampilkan pada gambar 4.5 dan gambar 4.6 berikut:



Gambar 4.5 Perbandingan Solusi Eksak dengan Solusi Numerik Radial Basis Function dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$



Gambar 4.6 Perbandingan Solusi Eksak dengan Solusi Numerik Radial Basis Function dengan $t \in [0,60]$ dan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Pemilihan interval waktu (t) sangat memengaruhi akurasi solusi numerik yang diperoleh melalui metode RBF, seperti yang ditunjukkan dalam grafik pada gambar 4.5. Solusi eksak dan solusi RBF memiliki perbedaan yang signifikan pada grafik sebelah kiri ($\Delta t = 20$). Jumlah titik evaluasi (N) yang sangat kecil, yaitu hanya empat titik ($t = 0, 20, 40, 60$) adalah penyebab utama dari perbedaan ini. Karena jumlah titik yang terbatas, aproksimasi solusi menggunakan metode RBF menjadi kurang akurat dan tidak dapat menangkap dinamika sistem secara penuh. Akibatnya, pola osilasi sistem tidak jelas dan solusi tidak akurat.

Sebaliknya, solusi RBF, yang ditunjukkan pada grafik sebelah kanan ($\Delta t = 0.1$), sangat mirip dengan solusi eksak, bahkan tidak terlihat secara visual. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil nilai Δt yang digunakan, semakin banyak titik evaluasi yang diperoleh (dalam kasus ini 601 titik), sehingga solusi numerik dapat mengikuti perubahan dinamika sistem dengan lebih akurat dan halus. Dalam situasi seperti ini, metode RBF telah terbukti sangat efektif dalam merekonstruksi perilaku osilasi sistem.

Setelah menghitung nilai solusi numerik menggunakan metode Radial Basis Function (RBF), hasil perhitungan ditampilkan dalam bentuk tabel yang memuat waktu (t), solusi numerik ($y(t)$), solusi eksak ($\hat{y}(t)$), dan hasil galat $|\hat{y}(t) - y(t)|$. Hasil perhitungan untuk interval waktu $\Delta t = 20$ ditampilkan pada Tabel 4.7. Tabel ini menyajikan nilai solusi pada empat titik waktu, yaitu $t = 0, 20, 40$, dan 60 , beserta galat antara solusi numerik dan solusi eksaknya:

Tabel 4.7 Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

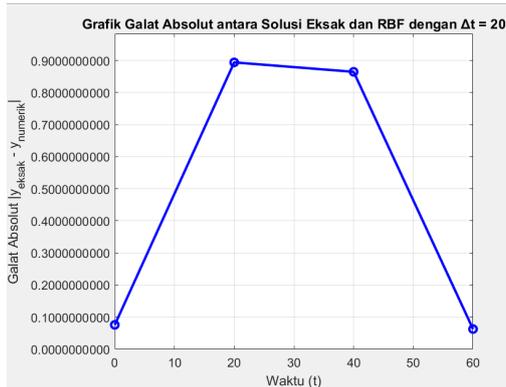
Waktu (t)	Solusi Eksak ($\hat{y}(t)$)	Solusi RBF ($y(t)$)	Galat $ \hat{y}(t) - y(t) $
0	12.25	12.174	0.0758
20	11.4205	12.314	0.89413
40	11.3906	12.255	0.86467
60	12.0388	12.101	0.0628

Selanjutnya, tabel 4.8 menampilkan hasil perhitungan untuk interval waktu $\Delta t = 0.1$. Dengan jumlah titik evaluasi yang lebih banyak, tabel ini memperlihatkan detail solusi numerik dan eksak dalam rentang waktu yang lebih rapat, sehingga dapat dievaluasi tingkat akurasi secara lebih menyeluruh.

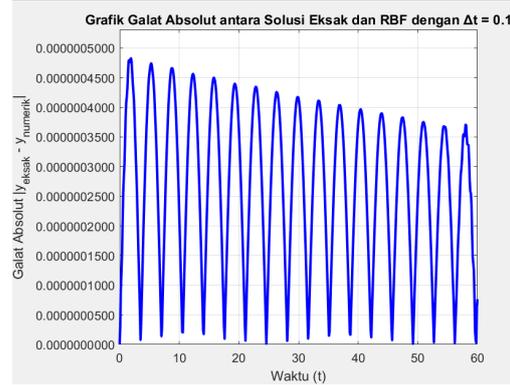
Tabel 4.8 Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Waktu (t)	Solusi Eksak ($\hat{y}(t)$)	Solusi RBF ($y(t)$)	Galat $ \hat{y}(t) - y(t) $
0	12.25000000	12.25000000	0.00000000
0.1	12.34981680	12.34981683	0.00000003
0.2	12.44873623	12.44873633	0.00000009
⋮	⋮	⋮	⋮
60	12.03889443	12.03889436	0.00000007

Berdasarkan Tabel 4.12 dan Tabel 4.13, terlihat bahwa nilai galat absolut $|\hat{y}(t) - y(t)|$ mengalami variasi pada setiap titik waktu. Hal ini menunjukkan bagaimana pendekatan solusi numerik dengan metode RBF berperilaku terhadap solusi eksak, baik pada interval waktu $\Delta t = 20$ maupun $\Delta t = 0.1$. Untuk memberikan gambaran visual mengenai distribusi galat pada kedua interval waktu tersebut, pola perubahan galat absolut ditampilkan secara berdampingan dalam grafik berikut:



Gambar 4.7 Grafik Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 20$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$



Gambar 4.8 Grafik Galat Solusi Vibrasi String $y(t)$ untuk $t \in [0,60]$ dengan kondisi awal $y(0) = 12.25$ dan $\dot{y}(0) = 1$ dengan parameter $\Delta t = 0.1$; $K = 1000$; $m = 2500$; $\delta = 0.01$; $g = 9.8$

Berdasarkan grafik pada gambar 4.7 dan gambar 4.8, galat absolut dari solusi numerik menunjukkan pola osilasi yang menurun seiring waktu. Pada $\Delta t = 20$ (gambar 4.7), galat awal bernilai sekitar 0.1, kemudian meningkat hingga mencapai puncak sekitar 0.9 pada $t = 20$, dan mulai menurun kembali hingga mendekati 0 pada $t = 60$. Sementara itu, pada $\Delta t = 0.1$ (gambar 4.8), galat awal sangat kecil, sekitar 0.0000005, dan berosilasi dengan amplitudo rendah sepanjang waktu. Pola ini menunjukkan bahwa metode RBF mampu mendekati solusi eksak secara akurat, terutama dengan langkah waktu yang kecil, serta memiliki kestabilan numerik dalam memodelkan sistem osilasi.

4.4 Penyelesaian Model Matematika dalam Pandangan Islam

Agama Islam menekankan pentingnya berhati-hati dalam setiap tindakan, baik untuk diri sendiri maupun orang lain. Prinsip kehati-hatian dan tanggung jawab menjadi nilai-nilai penting yang harus diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari, termasuk dalam pengambilan keputusan yang melibatkan sains dan teknologi. Dalam Islam, menjaga keselamatan adalah salah satu tujuan utama dari maqashid

syariah, yang bertujuan untuk melindungi jiwa, akal, keturunan, agama, dan harta benda umat manusia (Nurani, 2021). Sebagaimana tergambar dalam firman Allah SWT dan hadis Rasulullah SAW, konsep ini menjadi salah satu pilar penting dalam menjaga keselamatan umat. Dalam QS. At-Taubah ayat 51, Allah SWT berfirman:

قُلْ لَنْ يُصِيبَنَا إِلَّا مَا كَتَبَ اللَّهُ لَنَا ۚ هُوَ مَوْلَانَا ۗ وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُؤْمِنُونَ ﴿٥١﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya “Katakanlah (Muhammad), “Tidak akan menimpa kami melainkan apa yang telah ditetapkan Allah bagi kami. Dialah pelindung kami, dan hanya kepada Allah bertawakallah orang-orang yang beriman”” (QS. At-Taubah [9]: 51).

Ayat ini menunjukkan betapa pentingnya tawakal, yaitu menyerahkan semua urusan kepada Allah setelah berusaha sekuat tenaga. Ayat ini mengajarkan orang Islam untuk percaya sepenuhnya pada takdir Allah, baik itu nikmat yang harus disyukuri maupun ujian yang harus dihadapi dengan sabar, menurut tafsir Ibnu Katsir. Tawakal bukan berarti mengabaikan usaha, tetapi usaha yang penuh perhitungan, dilakukan dengan niat yang tulus, dan dilakukan sesuai dengan syariat adalah bagian dari iman itu sendiri (Tafsir Ibnu Katsir., 2015). Dalam hadis, Rasulullah SAW mengingatkan:

حَدَّثَنَا أَبُو بَكْرِ بْنُ أَبِي شَيْبَةَ، وَابْنُ، نُمَيْرٍ قَالَا حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ إِدْرِيسَ، عَنْ رَبِيعَةَ بْنِ عُثْمَانَ، عَنْ مُحَمَّدِ بْنِ يَحْيَى بْنِ حَبَّانَ، عَنِ الْأَعْرَجِ، عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ " الْمُؤْمِنُ الْقَوِيُّ خَيْرٌ وَأَحَبُّ إِلَى اللَّهِ مِنَ الْمُؤْمِنِ الضَّعِيفِ "

Artinya: “Abu Bakar bin Abi Shaybah dan Ibnu Numayr meriwayatkan kepada kami, ia berkata: Abdullah bin Idris meriwayatkan kepada kami, atas wewenang Rabi'ah bin Utsman, atas wewenang Muhammad bin Yahya. Ibnu Hibban, dari Al-Araj, dari Abu Hurairah, dia berkata: Rasulullah SAW bersabda: "Seorang mukmin yang kuat lebih dicintai Allah daripada mukmin yang lemah." ” (HR. Muslim) (Sunnah.com, 2025, Hadis No. 2664)

Menurut hadis ini, beribadah kepada Allah membutuhkan kekuatan fisik, mental, dan intelektual. Salah satu bentuk kekuatan intelektual adalah kemampuan berpikir logis dan analitis, yang ditunjukkan dengan menyelesaikan model

matematika. Dalam dunia modern, model matematika digunakan untuk memecahkan berbagai masalah kompleks, termasuk yang berkaitan dengan keselamatan manusia. Sebagai contoh, solusi numerik untuk sistem vibrasi string menunjukkan integrasi antara prinsip-prinsip Islam dan sains. Model matematika digunakan dalam perhitungan vibrasi string untuk menghitung tegangan dawai, sudut defleksi, dan faktor keamanan. Setiap perhitungan harus dilakukan dengan hati-hati karena kesalahan kecil bisa fatal. Prinsip-prinsip kehati-hatian yang diterapkan di sini menunjukkan profesionalisme selain kepatuhan terhadap ajaran Islam untuk menjaga keselamatan diri dan orang lain.

Dalam tafsir Imam al-Qurtubi, dikatakan bahwa tawakal adalah keyakinan bahwa tidak ada sesuatu pun yang terjadi tanpa izin Allah (Setiawan & Mufarihah, 2021). Namun, manusia tetap diwajibkan untuk berusaha. Dalam konteks vibrasi string, usaha ini mencakup pengumpulan data, analisis matematis, dan pengujian hasil. Dengan demikian, penerapan solusi numerik menjadi salah satu bentuk tanggung jawab manusia atas amanah Allah dalam menjaga keselamatan.

Dalam Islam, keselamatan tidak hanya dipandang sebagai tanggung jawab teknis, tetapi juga merupakan bagian dari ibadah. Dalam Al-Qur'an dan hadis, terdapat banyak perintah untuk menjaga jiwa, seperti menggunakan teknologi dan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, nilai-nilai Islam sejalan dengan penggunaan model matematika, seperti yang terlihat pada sistem vibrasi string. Seperti yang ditunjukkan oleh integrasi antara model matematika dan ajaran Islam ini, iman seseorang tidak hanya tercermin dalam doa dan ibadah ritual, tetapi juga dalam tindakan sehari-hari yang menunjukkan tanggung jawab seseorang kepada Allah dan masyarakat. Kajian ini menegaskan bahwa keselamatan adalah bagian dari

kepatuhan terhadap syariat Islam, yang diwujudkan melalui usaha manusia untuk mencapai hasil terbaik dalam setiap situasi.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Solusi numerik model matematika vibrasi string yang diselesaikan menggunakan metode Radial Basis Function (RBF) menunjukkan pola osilasi yang mendekati solusi eksak. Pada diskritisasi waktu dengan $\Delta t = 0.1$, metode RBF mampu menghasilkan solusi yang halus, kontinu, dan secara konsisten mengikuti dinamika sistem yang digambarkan oleh solusi eksak. Sementara itu, pada $\Delta t = 20$, meskipun jumlah titik evaluasi lebih sedikit, pola osilasi utama masih dapat ditangkap dengan baik oleh metode RBF.

Analisis galat absolut untuk kedua nilai Δt menunjukkan bahwa galat berosilasi namun tetap berada dalam rentang yang terkendali. Pada $\Delta t = 0.1$, galat sangat kecil, menunjukkan osilasi secara konsisten mendekati 0. Sedangkan pada $\Delta t = 20$, galat cenderung lebih besar dan fluktuatif, namun tetap menunjukkan kecenderungan menurun pada akhir interval. Secara keseluruhan, metode RBF terbukti efektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua pada model vibrasi string, serta dapat digunakan sebagai pendekatan numerik alternatif yang akurat terhadap solusi eksak.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian berikutnya, diharapkan dapat dilakukan eksplorasi terhadap penerapan metode numerik lain atau variasi model yang lebih kompleks untuk mempelajari aspek-aspek tambahan vibrasi string. Selain itu, studi perbandingan dengan metode alternatif lain dapat memberikan wawasan lebih luas mengenai

keunggulan dan kelemahan pendekatan yang digunakan dalam menyelesaikan model matematika vibrasi string.

DAFTAR PUSTAKA

- Aliy, K., Shiferaw, A., & Muleta, H. (2021). *Radial Basis Functions Based Differential Quadrature Method for One Dimensional Heat Equation*. *American Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 6(2), 35. <https://doi.org/10.11648/j.ajmcm.20210602.12>
- Andrilli, S., & Hecker, D. (2010). *Elementary Linear Algebra, Fourth Edition*. <http://elsevier.com>
- Artaberi, dkk. (2024). *Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde-4 Menggunakan Jaringan Radial Basis Function*. Malang: Skripsi Uin Maulana Malik Ibrahim Malang
- Firosi, V. I., Napitupulu, H., & Supriatna, A. K. (2023). *Metode Transformasi Diferensial untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Linier Nonhomogen*. *Jurnal Matematika Integratif*, 19(2), 183. <https://doi.org/10.24198/jmi.v19.n2.48876.183-200>
- Howlett, Dr. R. J., & Jain, P. L. C. (2001). *Radial Basis Function Networks 2* (Vol. 67).
- Jamhuri, M. (2011). *Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis* (Nomor 2).
- Kementerian Agama. (2022). *Qur'an Kemenag*
- Mckenna, P. J. (1999). *Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited: Fixing an Old Approximation*. In Source: The American Mathematical Monthly (Vol. 106, Issue 1).
- Mufid, I., Kusumastuti, A., Rozi, F. (2015). Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai. *Jurnal Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*
- Nurani, S. (2021). *The Qur'an and Mental Health in Post Pandemic Era*. *Ilmu Al Qur'an dan Tafsir*, 6(2). <https://doi.org/10.24090/maghza.v6i2.5711>
- Pandia, W., & Sitepu, I. (2021). *Penentuan Galat Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 Dengan Metode Numerik*. *Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia*, 6(1). <https://doi.org/10.51544/mutiara%20pendidik.v6i1.1907>
- Permata, H. W., Kusumastuti, A., & Juhari, J. (2021). Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Pada Jembatan Gantung. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 1(1), 1–13. <https://doi.org/10.18860/jrmm.v1i1.13409>
- Pratama, dkk. (2024). *Radial Basis Function pada Model Matematika Interaksi Insulin dan Reseptornya*. Malang: Skripsi Uin Maulana Malik Ibrahim Malang

- Raya, A. T., Faizin, H., Dimyathi, M. A. (2021). *Tafsir Al Qur'an*. Diambil dari <https://tafsiralquran.id/tafsir-surah-at-taubah-ayat-49-51/>
- Rifadi, M., & Abdi, M. (2023). *Suatu Pengantar Persamaan Diferensial Biasa. Uwais Inspirasi Indonesia*.
- Setiawan, D., & Mufarihah, S. (2021). *Tawakal dalam Al-Qur'an Serta Implikasinya dalam Menghadapi Pandemi Covid-19. Jurnal Online Studi Al-Qur'an*, 17(01), 1–18. <https://doi.org/10.21009/jsq.017.1.01>
- Sunnah.com. (2025). *Sahih Muslim - The Book of Destiny - كتاب القدر (Hadis No. 2664)*. Diambil dari <https://sunnah.com/muslim:2664>.
- Tafsir Ibnu Katsir. (2015). *Tafsir Ibnu Katsir*. Diambil dari <http://www.ibnukatsironline.com/2015/04/tafsir-surat-al-baqarah-ayat-195.html>
- Thahiruddin, M., & Jamhuri, M. (2023). *Penyelesaian Numerik Model Pemangsa-Mangsa dengan Metode Jaringan Fungsi Radial Basis Menggunakan Trigonometric Shape Parameter. Jurnal Arjuna: Publikasi Ilmu Pendidikan, Bahasa dan Matematika*, 1(4), 248–263. <https://doi.org/10.61132/arjuna.v1i4.135>
- Utami, F. N., Kusumastuti, A., & Juhari, J. (2022). Simulasi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 2(1), 10–18. <https://doi.org/10.18860/jrmm.v2i1.14512>
- Varberg, D., Purcell, E. J., Rigdon, S. E. (2007). *Calculus 9th Edition, Jilid I*. Terjemahan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga
- Wright, G. B., & Fornberg, B. (2017). *Stable computations with flat radial basis functions using vector-valued rational approximations. Journal of Computational Physics*, 331, 137–156. <https://doi.org/10.46/j.jcp.2016.11.030>

LAMPIRAN

Lampiran 1. Script Solusi Numerik Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 20$

```
clc;
clear;

format long;

% Parameter sistem
K = 1000;
m = 2500;
delta = 0.01;
g = 9.8;

% Discretisasi waktu
dt = 20;
t = 0:dt:60;
N = length(t);
c = t;

alpha = 2;

% Matriks P dan Ph (persamaan 4.25)
P = zeros(N, N);
Ph = zeros(N, N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        r = t(i) - c(j);
        val1 = (alpha^2 / ((r^2 + alpha^2)^(3/2)));
        val2 = delta * (r / sqrt(r^2 + alpha^2));
        val3 = (2*K/m) * sqrt(r^2 + alpha^2);
        P(i, j) = val1 + val2 + val3;
        Ph(i, j) = sqrt(r^2 + alpha^2);
    end
end

% Tampilkan Matriks P
disp('Matriks P:');
disp(P);

% Kondisi awal
Ph0 = sqrt(c.^2 + alpha^2);
Ph_t0 = (-c) ./ sqrt(c.^2 + alpha^2);

% Tampilkan kondisi awal (persamaan 4.26)
disp('Kondisi awal  $\varphi(0, c_j)$ :');
```

```

disp(Ph0);

disp('Kondisi awal  $\varphi_t(0, c_j)$ :');
disp(Ph_t0);

% Definisi Pt dan Ct (persamaan 4.26)
Pt = [P; Ph0; Ph_t0];
C = 9.8 * ones(N, 1);
Ct = [C; 12.25; 1];

% Solusi sistem linier (persamaan 4.27)
omega = Pt \ Ct;

% Tampilkan bobot omega (persamaan 4.29)
disp('Bobot  $\omega$ :');
disp(omega);

% Hitung solusi y(t) (persamaan 4.30)
y = Ph * omega;

% Tampilkan solusi y(t)
disp('Solusi y(t):');
disp(table(t, y, 'VariableNames', {'t', 'y(t)'}));

% Plot solusi (gambar 4.23)
figure;
plot(t, y, 'ro-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 10);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Amplitudo y(t)');
title('Solusi RBF Vibrasi String y(t) dengan  $\Delta t = 20$ ');
grid on;

```

Lampiran 2. Script Solusi Numerik Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 0.1$

```

clc;
clear;

format long; % Tampilkan hasil dengan presisi tinggi

% Parameter
K = 1000; % Konstanta pegas dawai (N/m)
m = 2500; % Massa sistem (kg)
delta = 0.01; % Koefisien redaman
g = 9.8; % Percepatan gravitasi (m/s^2)

% Discretisasi
dt = 0.1; % Delta t

```

```

N = 601; % Jumlah titik
t = linspace(0, 60, N); % Titik t
c = t; % Titik pusat

% Parameter alpha
for j = 1:N
    alpha = 2;
end

% Matriks P (persamaan 4.36)
P = zeros(N, N);
disp('Debugging Matriks P:');
for i = 1:N
    for j = 1:N
        r = t(i) - c(j);
        val1 = (alpha^2 / ((r^2 + alpha^2)^(3/2)));
        val2 = delta * (r / sqrt(r^2 + alpha^2));
        val3 = (2*K/m) * sqrt(r^2 + alpha^2);
        P(i, j) = val1 + val2 + val3;
        Ph(i,j) = sqrt(r^2 + alpha^2);
    end
end

% Menambahkan matriks kondisi awal (Pt) (persamaan 4.37)
Ph0 = sqrt(c.^2 + alpha.^2);
Ph_t0 = (-c) ./ sqrt(c.^2 + alpha.^2);
%disp('Nilai  $\phi(0, c_j)$  untuk j = 1, 2, ..., 601:');
%disp(Ph0);
%disp('Nilai  $\phi_t(0, c_j)$  untuk j = 1, 2, ..., 601:');
%disp(Ph_t0);

% Definisi Pt (persamaan 4.37)
Pt = [P; Ph0; Ph_t0];

% Definisi Ct (persamaan 4.37)
C = 9.8 * ones(N, 1);
Ct = [C; 12.25; 1];

% Mencari nilai omega (persamaan 4.39)
omega = Pt \ Ct;
%disp('Nilai Bobot omega:');
%disp(omega);

% Hitung solusi (persamaan 4.41)
y = Ph * omega;

% Tampilkan solusi y(t)
%disp('Solusi y(t):');

```

```

%disp(y);

% Plot solusi y(t) (gambar 4.4)
figure;
plot(t, y, 'r-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Amplitudo y(t)');
title('Solusi RBF Vibrasi String y(t) dengan  $\Delta t = 0.1$ ');
grid on;

```

Lampiran 3. Script Solusi Eksak dengan $\Delta t = 20$

```

clc; clear; close all;
format long;

% Definisi parameter
t = 0:20:60; % Waktu dari 0 sampai 60 dengan langkah 20
A = 200 / 31999;
B = 1 / 200;
omega = sqrt(31999) / 200;

% Definisi solusi eksak (persamaan 4.4)
y = A * exp(-t / 200) .* sin(omega * t) * sqrt(31999) + 49/4;

% Menampilkan hasil di Command Window untuk setiap 20 detik (tabel 4.7)
fprintf(' t (detik) | y(t)\n');
fprintf('-----\n');
for i = 1:length(t)
    fprintf(' %8.1f | %.10f\n', t(i), y(i));
end

% Plot solusi (gambar 4.1)
figure;
plot(t, y, 'g-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6, 'MarkerFaceColor', 'g');
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('y(t)');
title('Solusi Eksak Persamaan Vibrasi String dengan  $\Delta t = 20$ ');
grid on;
legend('y(t)');

```

Lampiran 4. Script Solusi Eksak dengan $\Delta t = 0.1$

```

clc; clear; close all;
format long;

% Definisi parameter
t = 0:0.1:60; % Waktu dari 0 sampai 60 dengan langkah 0.1
A = 200 / 31999;
B = 1 / 200;

```

```

omega = sqrt(31999) / 200;

% Definisi solusi eksak (persamaan 4.4)
y = A * exp(-t / 200) .* sin(omega * t) * sqrt(31999) + 49/4;

% Menampilkan hasil di Command Window untuk setiap 0.1 detik (tabel 4.8)
fprintf(' t (detik) | y(t)\n');
fprintf('-----\n');
for i = 1:length(t)
    fprintf(' %8.1f | %10fn', t(i), y(i));
end

% Plot solusi (gambar 4.2)
figure;
plot(t, y, 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('y(t)');
title('Solusi Eksak Persamaan Vibrasi String dengan  $\Delta t = 0.1$ ');
grid on;
legend('y(t)');

```

Lampiran 5. Script Galat Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 20$

```

clc;
clear;
close all;

% Parameter
K = 1000; % Konstanta pegas dawai (N/m)
m = 2500; % Massa sistem (kg)
delta = 0.01; % Koefisien redaman
g = 9.8; % Percepatan gravitasi (m/s^2)

% Konstanta solusi eksak
t = 0:20:60; % Waktu dari 0 sampai 60 dengan langkah 0.1
A = 200 / 31999;
B = 1 / 200;
omeg = sqrt(31999) / 200;

% Waktu
dt = 20; % Interval waktu
t = 0:dt:60; % Waktu dari 0 hingga 60 detik
N = length(t);

% Solusi eksak (persamaan 4.4)
y_exact = A * exp(-t / 200) .* sin(omeg * t) * sqrt(31999) + 49/4;

% Solusi numerik menggunakan jaringan RBF
c = t; % Titik pusat

```

```

alpha = zeros(1, N);
for j = 1:N
    alpha = 2;
end

% Matriks P (persamaan 4.25)
P = zeros(N, N);
Ph = zeros(N, N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        r = t(i) - c(j);
        val1 = (alpha^2 / ((r^2 + alpha^2)^(3/2)));
        val2 = delta * (r / sqrt(r^2 + alpha^2));
        val3 = (2*K/m) * sqrt(r^2 + alpha^2);
        P(i, j) = val1 + val2 + val3;
        Ph(i, j) = sqrt(r^2 + alpha^2);
    end
end

% Menambahkan matriks kondisi awal (Pt) (persamaan 4.26)
Ph0 = sqrt(c.^2 + alpha.^2);
Ph_t0 = (-c) ./ sqrt(c.^2 + alpha.^2);

% Definisi Pt (persamaan 4.26)
Pt = [P; Ph0; Ph_t0];

% Definisi Ct (persamaan 4.26)
C = 9.8 * ones(N, 1);
Ct = [C; 12.25; 1];

% Penyelesaian sistem linear (persamaan 4.27)
omega = Pt \ Ct;

% Hitung solusi RBF (persamaan 4.30)
y_numerik = Ph * omega;

% Analisis galat absolut
galat_absolut = abs(y_exact - y_numerik);

% --- PLOT 1: Perbandingan Solusi Eksak dan RBF --- (gambar 4.5)
figure;
plot(t, y_exact, 'go-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6); hold on;
plot(t, y_numerik, 'ro-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 10);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Solusi y(t)');
title('Perbandingan Solusi Eksak dan RBF dengan  $\Delta t = 20$ ');
legend('Solusi Eksak', 'Solusi RBF');
grid on;

```

```

% --- PLOT 2: Galat Absolut --- (gambar 4.7)
figure;
plot(t, galat_absolut, 'bo-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Galat Absolut |y_{eksak} - y_{numerik}|');
title('Grafik Galat Absolut antara Solusi Eksak dan RBF dengan  $\Delta t = 20$ ');
grid on;
ytickformat('%0.10f'); % Format desimal tanpa eksponensial
ylim([0 max(galat_absolut) * 1.1]);
yticks = get(gca, 'YTick'); % Ambil nilai pada sumbu Y
yticklabels(arrayfun(@(x) sprintf('%0.10f', x), yticks, 'UniformOutput', false));

% Tampilkan galat absolut (tabel 4.7)
disp('t Galat Absolut');
disp([t galat_absolut]);

```

Lampiran 6. Script Galat Metode Radial Basis Function dengan $\Delta t = 0.1$

```

clc;
clear;
close all;

% Parameter
K = 1000; % Konstanta pegas dawai (N/m)
m = 2500; % Massa sistem (kg)
delta = 0.01; % Koefisien redaman
g = 9.8; % Percepatan gravitasi (m/s^2)

% Konstanta solusi eksak
t = 0:0.1:60; % Waktu dari 0 sampai 60 dengan langkah 0.1
A = 200 / 31999;
B = 1 / 200;
omeg = sqrt(31999) / 200;

% Waktu
dt = 0.1; % Interval waktu
t = 0:dt:60; % Waktu dari 0 hingga 60 detik
N = length(t);

% Solusi eksak (persamaan 4.4)
y_exact = A * exp(-t / 200) .* sin(omeg * t) * sqrt(31999) + 49/4;

% Solusi numerik menggunakan jaringan RBF
c = t; % Titik pusat
alpha = zeros(1, N);
for j = 1:N
    alpha = 2;

```

```

end

% Matriks P (persamaan 4.36)
P = zeros(N, N);
Ph = zeros(N, N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        r = t(i) - c(j);
        val1 = (alpha^2 / ((r^2 + alpha^2)^(3/2)));
        val2 = delta * (r / sqrt(r^2 + alpha^2));
        val3 = (2*K/m) * sqrt(r^2 + alpha^2);
        P(i, j) = val1 + val2 + val3;
        Ph(i, j) = sqrt(r^2 + alpha^2);
    end
end

% Menambahkan matriks kondisi awal (Pt) (persamaan 4.37)
Ph0 = sqrt(c.^2 + alpha.^2);
Ph_t0 = (-c) ./ sqrt(c.^2 + alpha.^2);

% Definisi Pt (persamaan 4.37)
Pt = [P; Ph0; Ph_t0];

% Definisi Ct (persamaan 4.37)
C = 9.8 * ones(N, 1);
Ct = [C; 12.25; 1];

% Penyelesaian sistem linear (persamaan 4.39)
omega = Pt \ Ct;

% Hitung solusi RBF (persamaan 4.41)
y_numerik = Ph * omega;

% Analisis galat absolut
galat_absolut = abs(y_exact - y_numerik');

% --- PLOT 1: Perbandingan Solusi Eksak dan RBF (gambar 4.6)
figure;
plot(t, y_exact, 'g-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(t, y_numerik, 'r--', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Solusi y(t)');
title('Perbandingan Solusi Eksak dan RBF dengan Δt = 0.1');
legend('Solusi Eksak', 'Solusi RBF');
grid on;

% --- PLOT 2: Galat Absolut (gambar 4.8)
figure;

```

```

plot(t, galat_absolut, 'b-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Galat Absolut |y_{eksak} - y_{numerik}|');
title('Grafik Galat Absolut antara Solusi Eksak dan RBF dengan Δt = 0.1');
grid on;
ytickformat('%0.10f'); % Format desimal tanpa eksponensial
ylim([0 max(galat_absolut) * 1.1]);
yticks = get(gca, 'YTick'); % Ambil nilai pada sumbu Y
yticklabels(arrayfun(@(x) sprintf('%0.10f', x), yticks, 'UniformOutput', false));

% Tampilkan galat absolut (tabel 4.28)
disp('t Galat Absolut');
disp([t galat_absolut]);

```

Lampiran 7. Script Maple Solusi Eksak

```

-
- Akar-akar Real Berbeda
- > restart:
- > pers := (D@@2)(y)(t) + 0.01 D(y)(t) + 0.8 y(t) = 9.8
-                                     pers := D^(2)(y)(t) + 0.01 D(y)(t) + 0.8 y(t) = 9.8 (1)
- > solu := dsolve(pers);
-                                     solu := y(t) = e^(-1/200 t) sin(1/200 sqrt(31999) t) _C2 + e^(-1/200 t) cos(1/200 sqrt(31999) t) _C1 + 49/4 (2)
- > solp := dsolve({pers, y(0) = 12.25, D(y)(0) = 1});
-                                     solp := y(t) = 200/31999 e^(-1/200 t) sin(1/200 sqrt(31999) t) sqrt(31999) + 49/4 (3)
-
- Menggambar Solusi
- > plot(200/31999 e^(-1/200 t) sin(1/200 sqrt(31999) t) sqrt(31999) + 49/4, t = 0 .. 60);

```

RIWAYAT HIDUP



Alifia Nisa Maghfiroh, yang dikenal dengan nama Alifia, lahir di Pasuruan, 21 November 2002. Penulis merupakan anak tunggal dari pasangan Bapak Achmad Suyuti dan Ibu Maisaroh. Saat ini, penulis bertempat tinggal di RT 02 RW 02 Kelurahan Arjosari, Kecamatan Blimbing, Kota Malang.

Penulis menempuh pendidikan di RA Muslimat NU 17 (2006–2008), melanjutkan ke SDN Arjosari 1 (2008–2014), kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 16 Malang (2015–2018), dan meneruskan ke jenjang SMA di SMA Negeri 7 Malang (2018–2021). Pada tahun 2021, penulis diterima melalui jalur SBMPTN di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menempuh pendidikan di perguruan tinggi, penulis aktif mengikuti berbagai organisasi dan kegiatan. Pada tahun 2021, penulis menjadi anggota UKM Seni Religius hingga tahun 2022. Selain itu, penulis bergabung dengan Forum Mahasiswa Bidikmisi dan KIP-K (Formadika), menjabat sebagai Wakil Sekretaris pada tahun 2022–2023 dan sebagai Bendahara pada tahun 2023–2024. Penulis juga aktif dalam kepanitiaan, di antaranya menjadi anggota Sie Kesekretariatan dalam Ormaba Matematika 2022, serta menjadi anggota Sie Humas dalam kepanitiaan Artmosfair Festival Metanoia tahun 2023 yang diselenggarakan oleh DEMA Fakultas. Dalam bidang kepenulisan, penulis terpilih sebagai penulis cerpen dalam Lomba Cipta Cerpen Nasional 2023 yang diselenggarakan oleh PT Bara Pustaka Group, berpartisipasi dalam Lomba Menulis Artikel Populer Sejarah Tingkat Nasional 2023 oleh Himpunan Mahasiswa Sejarah Universitas Negeri Malang (dengan artikel yang diterbitkan oleh Redaksi NNC), serta mengikuti Essay Writing Contest 2023 yang diadakan oleh BEM STISPOL Raja Haji Tanjungpinang.