KEKONTINUAN FUNGSI FUZZY DI RUANG TOPOLOGI-TRI

SKRIPSI

OLEH:
MARIZCHA LUTFIANA PUTRI
NIM. 210601110097

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KEKONTINUAN FUNGSI FUZZY DI RUANG TOPOLOGI-TRI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Marizcha Lutfiana Putri
NIM. 210601110097

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025

KEKONTINUAN FUNGSI FUZZY DI RUANG TOPOLOGI-TRI

SKRIPSI

Oleh
Marizcha Lutfiana Putri
NIM. 210601110097

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 6 Januari 2025

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

KEKONTINUAN FUNGSI FUZZY DI RUANG TOPOLOGI-TRI

SKRIPSI

Oleh
Marizcha Lutfiana Putri
NIM. 210601110097

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Mei 2025

Ketua Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Marizcha Lutfiana Putri

NIM : 210601110097

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Mei 2025

Yang membuat pernyataan,

Marizcha Lutfiana Putri

NIM. 210601110097

MOTO

"Kerja keras adalah langkah kecil yang membawa mimpi besar menjadi nyata".

PERSEMBAHAN

Skripsi ini dengan tulus dan penuh rasa syukur penulis persembahkan kepada: Ayah dan Mama tercinta, yang senantiasa menjadi pilar kekuatan dalam hidup penulis. Terima kasih atas cinta tanpa syarat, doa yang tiada henti, serta motivasi yang selalu menyemangati di setiap langkah. Nasihat bijak, arahan penuh kasih, dan dukungan yang tulus, baik secara spiritual maupun material, adalah anugerah yang menguatkan penulis untuk terus maju dan menyelesaikan proses ini. Nenek tersayang, yang selalu setia memberikan doa terbaik, semangat yang tak pernah padam, dan dorongan yang berarti di setiap saat sulit. Terima kasih telah mengingatkan penulis untuk tidak menyerah, menghargai setiap pencapaian kecil, dan terus melangkah dengan keyakinan bahwa setiap usaha akan membuahkan hasil yang manis. Sahabat dan teman-teman, yang hadir sebagai cahaya di tengah tantangan. Terima kasih atas dukungan, bantuan yang tulus saat menghadapi kesulitan, dan kebersamaan yang memberi warna dalam proses panjang ini. Kalian adalah pengingat bahwa perjalanan ini tidak perlu dilalui sendirian. Dan terakhir, kepada diri sendiri, atas segala kerja keras, tekad yang tak tergoyahkan, dan semangat untuk terus berjuang meski dihadapkan pada berbagai hambatan. Terima kasih telah percaya bahwa mimpi ini layak diperjuangkan, bahwa setiap usaha kecil adalah langkah menuju keberhasilan, dan bahwa menyerah bukanlah pilihan. Semoga karya ini menjadi bentuk syukur atas semua cinta, doa, dan dukungan dari orang-orang yang berharga dalam hidup penulis.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menjadi suri teladan bagi umat manusia, membawa kita keluar dari kegelapan menuju cahaya Islam yang penuh dengan petunjuk dan kebenaran. Penulisan skripsi ini tidak akan terwujud tanpa dukungan, bimbingan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua sekaligus dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang dengan penuh kesabaran dan ketulusan membimbing, memberikan masukan, serta arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. M. Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, dukungan, dan motivasi yang sangat berarti bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan berbagai ilmu pengetahuan dan saran yang bermanfaat dalam penyusunan skripsi.
6. Dian Maharani, M.Si., selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi yang telah memberikan berbagai ilmu pengetahuan dan saran yang bermanfaat dalam penyusunan skripsi.

7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu, wawasan, dan pengalaman berharga selama masa perkuliahan.
8. Ayah Mohammad Hadiyono, Mama Mar’atus Sholihah, Adik Ardya Pramesti R.C. dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat kepada penulis, dari awal perkuliahan hingga selesainya skripsi ini.
9. Kepada sahabat-sahabat penulis yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terima kasih atas dukungan, kebersamaan, dan semangat yang diberikan.
10. Seluruh mahasiswa angkatan 2021 yang selalu memberikan kebersamaan, dukungan moral, serta motivasi selama menjalani proses perkuliahan.

Malang, 15 Mei 2025

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki makna sebagai berikut:

$\in$	: Anggota
$\wedge$	: Irisan
$\vee$	: Gabungan
$\subseteq$	: Himpunan Bagian
$\subset$	: Himpunan Bagian Sejati
$\emptyset$	: Himpunan Kosong
$\supset$	: Superset
$\rightarrow, \leftarrow$	: Implikasi
$\mathbb{R}$	: Himpunan Bilangan Real
δ	: Delta
ε	: Epsilon
V	: Persekitaran
f^{-1}	: Prapeta
$\prec$	: Asimetri Biner

ABSTRAK

Putri, Marizcha Lutfiana. 2025. **Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Fuzzy, Kekontinuan, Ruang Topologi-Tri.

Penelitian ini mengkaji kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri. Ruang topologi-tri adalah pasangan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ untuk X adalah himpunan tak kosong dan τ_1, τ_2, dan τ_3 adalah tiga topologi di X disebut ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy jika: (1) $0_X \in \tau_i$ dan $1_X \in \tau_i$; (2) Jika $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$; (3) Jika $A \in \tau_i$ maka $1_X \backslash A \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$. Ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy adalah pengembangan dari konsep ruang topologi klasik. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan sifat kekontinuan fungsi fuzzy dalam ruang topologi-tri serta menyusun pembuktian teorema-teorema yang relevan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi fuzzy dalam ruang topologi-tri memenuhi sifat kekontinuan melalui pembuktian formal teorema-teorema yang terkait.

ABSTRACT

Putri, Marizcha Lutfiana. 2025. **Fuzzy Function Continuity in Tri-Topological Space**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang.
Advisor: (I) Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Fuzzy, Continuity, Tri-Topology Space.

This research studies the continuity of fuzzy functions in tri-topological spaces. A tri-topological space is a pair $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ for X is a nonempty set and τ_1, τ_2, dan τ_3 are three topologies in X is called a tri-topological space on fuzzy sets if: (1) $0_X \in \tau_i$ and $1_X \in \tau_i$; (2) If $A, B \in \tau_i$, then $A \cap B \in \tau_i$; (3) If $A \in \tau_i$ then $1_X \backslash A \in \tau_i$ for $i = 1, 2, 3$. Tri-topological space on fuzzy sets is a development of the concept of classical topological space. This study aims to prove the nature of the continuity of fuzzy functions in tri-topology space and compile the proof of the relevant theorems. The results show that fuzzy functions in tri-topology space fulfill the property of continuity through the formal proof of the relevant theorems.

مستخلص البحث

بوتري، ماريتشا لطفينا. ٢٠٢٥. **استمرارية الدالة الضبابية في الفضاء الطوبولوجي الثلاثي**.الحنالعلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلاميةالحكومية مالانج. المشرف: (١) د. إيلي سوسانتي، دكتوراه في العلوم السياسية، ماجستير (٢) محمد نافع جوهري الماجستير في العلوم

الكلمات المفتاحية: الضبابية، الاستمرارية الضبابية، الفضاء الثلاثي الطوبولوجي

بحث هذا البحث استمرارية الدوال الضبابية في الفضاءات الثلاثية الطبقية. الفضاء الثلاثي الطبولوجيا هو زوج (X,τ_1,τ_2,τ_3) لأن X مجموعة غير فارغة τ_1,τ_2,τ_3 ، هي ثلاثة طوبولوجيا في X يسمى فضاء ثلاثي الطبولوجيا على مجموعات ضبابية إذا: $0_X \in \tau_i$ (1) و $1_X \in \tau_i$, إذا كان $A,B \in \tau_i$ (2) ثم $A \cap B \in \tau_i$, إذا كان $A \in \tau_i$ (3) ثم $1_X \setminus A \in \tau_i$ الى $i = 1,2,3$ الفضاء الثلاثي الطوبولوجي على المجموعة الضبابية هو تطوير لمفهوم الفضاء الطوبولوجي الكلاسيكي. هدفت هذه الدراسة إلى إثبات طبيعة استمرارية الدوال الضبابية في الفضاءات الثلاثية الطبولوجية وتجميع برهان النظريات ذات الصلة. ظهرت النتائج أن الدوال الضبابية في الفضاءات الثلاثية الطبولوجية تحقق خاصية الاستمرارية من خلال البرهنة الشكلية للنظريات ذات الصلةز

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Himpunan adalah konsep fundamental dalam matematika, di mana setiap objek yang termasuk di dalamnya disebut elemen, atau anggota. Hingga kini, himpunan yang umum dikenal adalah himpunan klasik atau himpunan tegas, yaitu kumpulan objek dengan keanggotaan yang terdefinisi secara jelas. Namun, pada tahun 1965, Zadeh, memperkenalkan konsep baru yang dikenal sebagai himpunan fuzzy. Himpunan ini memungkinkan derajat keanggotaan setiap elemen untuk berada pada rentang [0,1], sehingga memberikan nilai kekaburan dalam keanggotaan.

Logika fuzzy telah diaplikasikan secara luas dalam analisis matematika untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan data yang ambigu. Dalam bidang ini, konsep himpunan fuzzy dimanfaatkan untuk pemodelan sistem yang kompleks, pengambilan keputusan, dan optimasi di mana variabel-variabel tidak memiliki nilai pasti atau biner. Misalnya, dalam pemrosesan citra dan pengenalan pola, himpunan fuzzy dapat digunakan untuk mengklasifikasikan objek yang sulit ditentukan batasannya secara tegas.

Himpunan fuzzy mengubah cara kita memandang keanggotaan sebuah elemen dalam suatu himpunan dengan menggunakan derajat keanggotaan yang kontinu, berbeda dengan logika klasik yang hanya mengenal nilai benar atau salah. Misalkan X himpunan tak kosong, didefinisikan $\tilde{A}$ himpunan Fuzzy yang terdiri dari pasangan $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, di mana x adalah anggota dari himpunan X dan

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$. $\mu_{\tilde{A}}$ merupakan fungsi keanggotaan dari X, dengan $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ digunakan untuk mengukur ketidakpastian atau ambiguitas dalam menentukan apakah elemen x termasuk dalam himpunan X. Derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menunjukkan seberapa besar hubungan elemen x dengan himpunan fuzzy $\tilde{A}$. (Oktaviana & Juniati, 2013).

Konsep topologi pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan Jerman, Johann Benedict, melalui karyanya yang berjudul *Vorstudien zur Topologie* pada tahun 1847. Sedangkan definisi ruang topologi yaitu misalkan X adalah himpunan tak kosong, koleksi himpunan pada X, yaitu τ disebut topologi pada X jika memenuhi: (1) X dan himpunan kosong ($\emptyset$) ada di τ; (2) Gabungan dari dua himpunan dalam τ tetap ada di τ; dan (3) Irisan dua himpunan dalam τ tetap ada di τ. Pasangan (X, τ) disebut ruang topologi. (Morris, 2011)

Topologi pada himpunan fuzzy dikenal sebagai topologi fuzzy. Ruang topologi fuzzy pertama kali diperkenalkan oleh C.L. Chang pada tahun 1968. Topologi fuzzy pada himpunan X merupakan sekumpulan himpunan fuzzy δ pada subset dari X, di mana δ mencakup himpunan fuzzy 0 dan himpunan fuzzy 1. Selain itu, gabungan semua elemen dari setiap subset δ harus berada dalam δ, dan irisan dari seluruh elemen subset berhingga dari δ juga harus berada dalam δ. Pasangan berurutan X, δ ini dikenal sebagai ruang topologi fuzzy. Ruang topologi X, τ juga bisa disebut sebagai ruang topologi fuzzy jika setiap subset X dalam τ adalah himpunan fuzzy dengan derajat keanggotaan setiap elemennya berada pada 0 atau 1. Salah satu topik dalam topologi fuzzy adalah pemba hasan tentang fungsi kontinu fuzzy dalam ruang topologi-tri.

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu fungsi $A \to \mathbb{R}$, dikatakan kontinu di $c \in A$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk sebarang titik X di A memenuhi $|x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Jika f tidak kontinu di c, maka f dikatakan diskontinu di c. (Bartle dan Sherbet, 2010).

Kekontinuan dalam teori fuzzy merupakan perluasan dari konsep kekontinuan dalam matematika klasik, yang memberikan cara berbeda untuk menganalisis fungsi fuzzy. Terdapat tiga pendekatan utama dalam mendefinisikan kekontinuan fuzzy, yang serupa dengan konsep kekontinuan dalam kalkulus. Pertama, menggunakan limit fuzzy pada deret atau fungsi. Kedua, mengevaluasi dan menerapkan pengukuran diskontinuitas. Ketiga, melalui konstruksi$-(\varepsilon, \delta)$. Kekontinuan fungsi dalam konteks fuzzy dapat didefinisikan dengan menggantikan bilangan kecil tertentu, misalnya $r + \varepsilon$, di mana r menunjukkan tingkat keanggotaan kekontinuan dengan rentang nilai di antara [0,1].

Ruang fuzzy topologi-tri didefinisikan sebagai berikut, misalkan X adalah himpunan tak kosong dan τ_1, τ_2, τ_3 adalah tiga topologi di X, himpunan X bersama-sama dengan topologi τ_1, τ_2, τ_3 disebut ruang topologi-tri dan dilambangkan dengan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Dengan kata lain ruang topologi-tri merupakan topologi yang mengacu pada ruang yang dilengkapi dengan tiga topologi yang berbeda pada himpunan yang sama (Ranu Sharma, dkk, 2018).

Himpunan fuzzy juga dilengkapi dengan fungsi kekontinuan. Fungsi kontinu tri fuzzy didefinisikan sebagai, apabila χ_λ adalah fungsi karakteristik. Diberikan dua Ruang Topologi-Tri fuzzy $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $(Y, \tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$ fungsi fuzzy $f: I^X \to I^Y$ disebut fungsi kontinu tri fuzzy jika χ_λ adalah fuzzy terbuka-tri di X, untuk setiap himpunan terbuka-tri χ_λ di Y (Ranu Sharma, dkk, 2018).

Dalam QS. Al-‘Alaq: 1-5 Allah SWT berfirman :

اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿١﴾ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ﴿٢﴾ اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ﴿٣﴾ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿٤﴾
عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ﴿٥﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya: *"Bacalah dengan nama Tuhanmu yang menciptakan. Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmu-lah yang Maha Pemurah. Yang mengajarkan dengan pena. Dia mengajarkan kepada manusia apa yang tidak diketahuinya."*

Menurut Abu Fida al-Hafiz Ibnu Katsir al-Dimasqi menyatakan bahwa ayat di atas menandai awal kemurahan Allah kepada hamba-Nya, yang dimulai dengan penciptaan manusia dari segumpal darah. Selain itu, “Bacalah” tentang keagungan kemanusiaan di atas hamba-hamba Allah lainnya. Ditekankan di sini bahwa Allah menganugerahkan kebijaksanaan kepada umat manusia untuk membantu mereka menjadi individu yang luar biasa dan bermoral. Menegaskan pentingnya ilmu pengetahuan, di mana Allah memberikan kebijaksanaan kepada manusia agar mereka dapat mencapai keagungan dan kemuliaan melebihi makhluk lainnya Oleh karena itu, manusia memerlukan proses belajar untuk memperoleh pengetahuan dan memperluas wawasan, sehingga manusia dapat mencapai status yang lebih tinggi.

Ayat di atas juga menyoroti pentingnya membaca dan belajar sebagai sarana untuk memahami dunia. Menggabungkan topologi dan logika fuzzy dalam konteks ruang topologi-tri mencerminkan semangat mencari pengetahuan baru dan memberikan perspektif yang inovatif. Ini menunjukkan bahwa ilmu pengetahuan harus terus berkembang dan beradaptasi, sejalan dengan ajaran Al-Qur'an untuk terus belajar dan meningkatkan pemahaman kita.

Selain itu, firman Allah SWT dalam QS Al-Mulk: 3-4

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۖ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَٰنِ مِنْ تَفَاوُتٍ ۖ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِنْ فُطُورٍ ﴿٣﴾ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

(Kementerian Agama, 2022)

Artinya: *"...Lihatlah sekali lagi, adakah kamu melihat sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian ulangi pandanganmu sekali lagi dan sekali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu dalam keadaan letih."*

Ayat ini mendorong manusia untuk melihat dan meneliti ciptaan Allah dan terus mencari pengetahuan melalui pengamatan dan perenungan. Juga mengajak manusia untuk memperhatikan ciptaan Allah dengan cermat dan berulang kali, menekankan pentingnya penelitian yang mendalam. Pengamatan berkali-kali ini mirip dengan cara ilmuwan mencari kebenaran dan pemahaman yang lebih jelas.

Dalam belajar, kita diajak untuk terus mencoba dan tidak cepat merasa cukup dengan hasil awal. Dengan begitu, kita bisa memperluas pengetahuan dan lebih memahami keajaiban alam. Sebagaimana pada penelitian ini terdapat teorema yang harus dibuktikan untuk mendapatkan keilmuan baru. Pada teorema tersebut harus digali unsur unsur keilmuan yang menopang pembuktiannya sehingga teorema pada kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri dapat terbukti.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Ranu Sharma, dkk (2018) yaitu mengkaji mengenai Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy dengan judul “Fuzzy Semi-Open Sets and Fuzzy Pre-Open Sets in Fuzzy Topological Space”. Pada penelitian ini, membuktikan Fungsi Kontinu Fuzzy berlaku di Ruang Topologi-Tri. Lebih lanjut dibuktikan bahwa fuzzy kontinu dan menjelaskan pembuktian dari teorema yang menjadi acuan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah penelitian ini adalah: "Bagaimana Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri dan bagaimana pembuktian teoremanya?"

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri dan pembuktian teoremanya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat dilakukannya penelitian ini adalah sebagai sumber referensi, informasi serta dapat menambah wawasan keilmuan terkait Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, kami membatasi fokus pada kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri dengan derajat keanggotaan dalam interval [0,1]. Pembahasan terpusat pada fungsi-fungsi fuzzy yang kontinu dalam konteks topologi-tri, dengan ruang topologi-tri yang didefinisikan secara jelas dalam literatur matematika dan memiliki tiga topologi yang saling berkaitan. Kekontinuan dianalisis berdasarkan definisi yang berlaku dalam setiap topologi.

1.6 Definisi Istilah

1. Nilai fuzzy: Fuzzy secara bahasa diartikan sebagai kabur atau samar samar. Suatu nilai dapat bernilai benar atau salah secara bersamaan, dengan derajat keanggotaan dari fuzzy memiliki rentang nilai 0 (nol) hingga 1(satu).
2. Fungsi Keanggotaan: Fungsi keanggotaan adalah sebuah fungsi yang menetapkan seberapa besar anggota suatu himpunan memenuhi kriteria tertentu, diukur dalam bentuk derajat keanggotaan yang bisa berada dalam rentang dari 0 hingga 1.
3. Ruang Topologi: Misalkan X adalah himpunan kosong, koleksi himpunan pada X (τ) disebut topologi pada X jika memenuhi: X dan himpunan tak kosong $(\emptyset)$ ada di τ; gabungan dari dua himpunan dalam τ tetap ada di τ; irisan dua himpunan dalam τ tetap ada di τ. Pasangan (X, τ) disebut ruang topologi.
4. Ruang topologi-tri: Ruang topologi-tri adalah teori topologi yang mengacu pada ruang yang dilengkapi dengan tiga topologi yang berbeda pada himpunan yang sama.
5. Fungsi Kontinu: Fungsi yang grafiknya tidak terputus atau terpotong di manapun.
6. Diskontinu: Fungsi yang tidak kontinu.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, penelitian ini akan mengkaji beberapa teori dasar yang berkaitan dengan teorema yang akan dibuktikan.

2.1.1 Himpunan Fuzzy

Diberikan X himpunan tak kosong, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X didefinisikan: $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in X\}$ di mana $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$. Selanjutnya $\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x , dan fungsi $\mu_{\tilde{A}}$ disebut fungsi keanggotaan dari X . Terdapat tiga operator pada himpunan fuzzy yaitu komplemen, irisan, dan gabungan

1. Komplemen

   Komplemen dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinotasikan sebagai $\tilde{A}^c$. Bentuk umum dari komplemen ini menunjukkan derajat keanggotaan elemen-elemen yang tidak termasuk dalam himpunan $\tilde{A}$. Diberikan X himpunan tak kosong, himpunan fuzzy $\tilde{A}^c$ pada X didefinisikan: $\tilde{A}^c = \{(x, \mu_{\tilde{A}^c}(x))|x \epsilon X\}$ di mana $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$. Selanjutnya $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x, dan fungsi $\mu_{\tilde{A}^c}$ disebut fungsi keanggotaan dari komplemen himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di X, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X didefinisikan: $\tilde{A}$ fuzzy X. Berikut akan dijelaskan sebuah contoh tentang bagaimana himpunan fuzzy bisa memiliki bagian yang tidak termasuk di dalamnya.

Definisi 2.1 (Zimmermann, 2001)

Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}^c$ adalah $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$ yang didefinisikan sebagai $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$.

Contoh 2.1

Diberikan $X = \{2, 3\}$ dengan $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = \{0.3, 0.8\}$, himpunan $\tilde{A} = \{(3{,}0.3), (2{,}0.8)\}$. Tentukan Komplemen dari $\tilde{A}$!

Penyelesaian:

a) Untuk elemen $x = 2$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(2) = 0{,}8$

$\mu_{\tilde{A}^c}(2) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(2)$

$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Sehingga $\tilde{A}^c$ = (2,0.2)

b) Untuk elemen $x = 3$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(3) = 0{,}3$

$\mu_{\tilde{A}^c}(3) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(3)$

$= 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Sehingga $\tilde{A}^c$ = (3,0.7)

Setelah menghitung derajat keanggotaan setiap elemen, didapatkan bahwa himpunan fuzzy komplemen dari $\tilde{A}$, yaitu $\tilde{A}^c$, adalah $\tilde{A}^c = \{(3{,}0.7), (2{,}0.2)\}$.

2. Irisan

Didefinisikan $\tilde{A} = \{(\mathrm{x}, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in A\}$ dan $\tilde{B} = \{(\mathrm{y}, \mu_{\tilde{B}}(y))|y \in A\}$, irisan dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan sebagai $\tilde{A} = \tilde{A} \wedge \tilde{B}$.

Definisi 2.2 (Zimmermann, 2001)

Diberikan X himpunan tak kosong, fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{C}}(x)$ dari himpunan fuzzy pada X dinotasikan $\tilde{C} = \tilde{A} \wedge \tilde{B}$ adalah $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ untuk semua $x \in X$.

Irisan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan komplemennya $\tilde{A}$ adalah himpunan kosong, atau secara matematis ditulis $\tilde{A} \wedge \tilde{A}^c = \emptyset$.

Contoh 2.2

Diberikan $X = \{1, 2, 3\}$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = \{0.1, 0.5, 0.7\}$, $\mu_{\tilde{B}}(x) = \{0.5, 0.6, 0.7\}$ himpunan fuzzy $\tilde{A} = \{(3{,}0.5), (2{,}0.1), (1{,}0.7)\}$ dan $\tilde{B} = \{(1{,}0.7), (3{,}0.5), (2{,}0.6)\}$. Tentukan $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$!

Penyelesaian:

a) Untuk $x = 1$:

$\mu_{\tilde{A}}(1) = 0.7$

$\mu_{\tilde{B}}(1) = 0.7$

$\mu_{\tilde{C}}(1) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \min(0.7{,}0.7) = 0.7$

b) Untuk $x = 2$:

$\mu_{\tilde{A}}(2) = 0.1$

$\mu_{\tilde{B}}(2) = 0.6$

$\mu_{\tilde{C}}(2) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \min(0.1{,}0.6) = 0.1$

c) Untuk $x = 3$:

$\mu_{\tilde{A}}(3) = 0.5$

$\mu_{\tilde{B}}(3) = 0.5$

$\mu_{\tilde{C}}(3) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \min(0.5{,}0.5) = 0.5$

Berdasarkan perhitungan di atas, himpunan fuzzy hasil irisan $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ adalah $\tilde{C} = \{(1{,}0.7),\ (2{,}0.1),\ (3{,}0.5)\}$.

3. Gabungan

Didefinisikan $\tilde{A} = \{(\mathrm{x}, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in A\}$ dan $\tilde{B} = \{(\mathrm{y}, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y \in A\}$, gabungan dari dua himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan sebagai $\widetilde{D} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$.

Definisi 2.3 (Zimmermann, 2001)

Diberikan X himpunan tak kosong, fungsi keanggotaan $\mu_{\widetilde{D}}(x)$ gabungan dari himpunan fuzzy pada X dinotasikan $\widetilde{D} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$ didefinisikan oleh $\mu_{\widetilde{D}}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ untuk semua $x \in X$. Gabungan dua himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang tidak mempunyai anggota yang sama maka $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ adalah $\emptyset$.

Contoh 2.3

Diberikan $X = \{2, 3\}$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = \{0.3, 0.4\}$, $\mu_{\tilde{B}}(x) = \{0.1, 0.7\}$, himpunan fuzzy $\tilde{A} = \{(2{,}0.4), (3{,}0.3)\}$ dan $\tilde{B} = \{(2{,}0.7), (3{,}0.1)\}$. Tentukan $\tilde{A} \vee \tilde{B}$!

Penyelesaian:

a) Untuk $x = 2$:

$\mu_{\tilde{A}}(2) = 0.4$

$\mu_{\tilde{B}}(2) = 0.7$

$\mu_{\widetilde{D}}(2) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \max(0.4, 0.7) = 0.7$

b) Untuk $x = 3$:

$\mu_{\tilde{A}}(3) = 0.3$

$\mu_{\tilde{B}}(3) = 0.1$

$$\mu_{\tilde{D}}(3) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \max(0.3,0.1) = 0.3$$

Berdasarkan perhitungan di atas, himpunan fuzzy hasil gabungan $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ adalah $\tilde{D} = \{(2,0.7), (3,0.3)\}$.

Contoh 2.4

Misalkan himpunan semesta $S = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.6), (4, 0.8)\}$

Tentukan himpunan bagian dengan derajat keanggotaan $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4$, dan $\alpha = 0.6$!

Penyelesaian:

a) $\tilde{A}_{0.1} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.2\} = \{1,2,3,4\}$

$\tilde{A}_{0,2}\{0.2\}$: Memuat semua elemen dari S karena semua elemen memiliki derajat keanggotaan yang ≥ 0.2 yaitu $1, 2, 3, 4$

b) $\tilde{A}_{0.2} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.4\} = \{2,3,4\}$

$\tilde{A}_{0,4}\{0.4\}$: Memuat semua elemen dari S karena semua elemen memiliki derajat keanggotaan yang ≥ 0.4 yaitu $2, 3, 4$

c) $\tilde{A}_{0.3} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.6\} = \{3,4\}$

$\tilde{A}_{0,6}\{0.6\}$: Memuat semua elemen dari S karena semua elemen memiliki derajat keanggotaan yang ≥ 0.6 yaitu $3, 4$

Definisi 2.4 (Oktaviana & Juniati, 2013)

I^X adalah koleksi semua himpunan fuzzy pada X.

Definisi 2.5 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Himpunan fuzzy nol pada X dinotasikan $\tilde{0}$ adalah himpunan fuzzy di mana $\mu_{\tilde{0}}(x) = 0, \forall x \in X$. Himpunan fuzzy satu pada X dinotasikan $\tilde{1}$ adalah himpunan fuzzy di mana $\mu_{\tilde{1}}(x) = 1, \forall x \in X$.

Definisi 2.6 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Misalkan $\tilde{A}_j$ adalah himpunan fuzzy pada $X, \forall j \in J$ dengan J adalah himpunan indeks, maka gabungan dan irisan berturut-turut pada himpunan fuzzy tersebut didefinisikan:

$$\vee_{j\in J} \tilde{A}_j = \left\{\left(x, \mu_{\vee_{j\in J}\tilde{A}_j}(x)\right) : x \in X\right\}$$

di mana $x, \mu_{\vee_{j\in J}\tilde{A}_j}(x) = \sup\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j \in J\right\}, \forall x \in X.$

$$\wedge_{j\in J} \tilde{A}_j = \left\{\left(x, \mu_{\wedge_{j\in J}\tilde{A}_j}(x)\right) : x \in X\right\}$$

di mana $x, \mu_{\wedge_{j\in J}\tilde{A}_j}(x) = \sup\left\{\mu_{\tilde{A}_j}(x) : j \in J\right\}, \forall x \in X.$

Definisi 2.7 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Diberikan fungsi $f: X \to Y$, $A \in I^X$ dan $B \in I^Y$. Maka:

1. Peta dari himpunan fuzzy A adalah himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada Y dengan derajat keanggotaan $\forall y \in Y$

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \begin{cases} sup\ \mu_{\tilde{A}}(x) : x \in f^{-1}(y), f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 \qquad , f^{-1}(y) \neq \emptyset \end{cases}$$

2. Prapeta dari himpunan fuzzy B adalah himpunan fuzzy $f^{-1}(B)$ pada X dengan derajat keanggotaan $\mu_{f-1(\tilde{B})}(x) = \mu_B(f(x), \forall x \in X$

Teorema 2.1 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Diberikan fungsi $f: X \to Y$. Maka berlaku:

1. $f^{-1}(\tilde{B}^C) = \left(f^{-1}(\tilde{B})\right)^C$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ di Y.
2. b) $f^{-1}(\tilde{B}_1 \wedge \tilde{B}_2) = f^{-1}(\tilde{B}_1) \wedge f^{-1}(\tilde{B}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_1$ di Y.

3. $f(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) \subset f(\tilde{A}_1) \wedge f(\tilde{A}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ di X.
4. $f(f^{-1}(\tilde{B}) \subset \tilde{B}$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}$ di Y.
5. $\tilde{A} \subset f^{-1}(f(\tilde{A}))$, untuk sebarang himpunan fuzzy A di X.
6. Jika $\tilde{B}_1 \subset \tilde{B}_2$ maka $f^{-1}(\tilde{B}_1) \subset f^{-1}(\tilde{B}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{B}_1$ dan $\tilde{B}_2$ di Y.
7. Jika $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2$ maka $f(\tilde{A}_1) \subset f(\tilde{A}_2)$, untuk sebarang himpunan fuzzy $\tilde{A}_1$dan $\tilde{A}_2$ di X.

2.1.2 Ruang Topologi

Pengertian dari ruang topologi didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.8 (Morris, 2011)

Ruang Topologi adalah pasangan terurut (X, τ) di mana X adalah himpunan, dan τ adalah koleksi sub himpunan dari X, dikatakan sebagai topologi pada X jika memenuhi tiga aksioma berikut:

1. Himpunan kosong dan X termasuk dalam X, yaitu $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$.
2. Gabungan dari elemen-elemen dalam τ juga merupakan bagian dari τ. Artinya, jika A_i adalah elemen-elemen di τ untuk setiap i dalam suatu indeks, maka gabungan A_i juga merupakan anggota dari τ.
3. Irisan dari dua elemen dalam τ juga merupakan bagian dari τ. Artinya, jika untuk setiap A_i dan B_i adalah elemen dalam τ, maka $A_i \cap B_i$ juga merupakan anggota dari τ.

Contoh 2.5

$X = \{1,3,5,6\}$

$\tau = \{\emptyset, X, \{6\}, \{3,6\}\}$

Bukti

1. Jelas bahwa $\emptyset$, $X \in \tau$
2. $\emptyset$ digabung sebarang anggota τ adalah himpunan tersebut dan itu adalah anggota τ.

   $X \cup \{6\} = X \in \tau$

   $X \cup \{3,6\} = X \in \tau$

   $\{6\} \cup \{3,6\} = \{3,6\} \in \tau$

   Maka terbukti $A_i \in \tau, \bigcup_i^u A_i \in \tau$
3. $\emptyset$ diiris sebarang anggota τ adalah himpunan tersebut dan itu adalah anggota τ.

   $X \cap \{6\} = \{6\} \in \tau$

   $X \cap \{3,6\} = \{3,6\} \in \tau$

   $\{6\} \cap \{3,6\} = \{6\} \in \tau$

   Maka terbukti $A_i \in \tau, \bigcup_i^u A_i \in \tau$

   Jadi τ adalah topologi pada X.

2.1.3 Himpunan Buka pada Ruang Topologi

Dalam ruang topologi, konsep himpunan terbuka menjadi salah satu fondasi utama dalam memahami struktur ruang tersebut. Setiap anggota dari koleksi himpunan dalam topologi, yang dikenal sebagai τ, memenuhi sifat-sifat khusus yang menjadikannya himpunan terbuka. Definisi formal berikut ini menjelaskan konsep himpunan terbuka pada ruang topologi menurut Morris (2011).

Definisi 2.9 (Morris, 2011)

Misalkan (X, τ) ruang topologi, maka anggota τ dikatakan himpunan terbuka.

Proporsisi 2.1 (Morris, 2011)

Jika (X, τ) adalah setiap ruang topologi, maka

1. X dan $\emptyset$ merupakan himpunan terbuka
2. Gabungan dari setiap himpunan terbuka (berhingga atau tak hingga) bilangan merupakan Himpunan buka.
3. Irisan setiap himpunan terbuka yang berhingga merupakan Himpunan Buka.

Bukti:

1. X dan $\emptyset$ adalah himpunan terbuka:

   Berdasarkan Definisi 2.7, setiap ruang topologi (X, τ) memiliki dua himpunan terbuka dasar, yaitu X dan $\emptyset$. Oleh karena itu, $X \in \tau$ dan $\emptyset \in \tau$.
2. Gabungan dari setiap himpunan terbuka (berhingga atau tak hingga) bilangan merupakan Himpunan buka:

   Misalkan $\{U_i\}_{i \in I}$ adalah koleksi sembarang himpunan terbuka, yaitu $U_i \in \tau$ untuk semua $i \in I$. Menurut Definisi 2.7, himpunan τ adalah koleksi himpunan terbuka yang tertutup di bawah operasi gabungan. Sehingga $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, yang berarti gabungan dari sembarang jumlah himpunan terbuka adalah himpunan terbuka.
3. Irisan setiap himpunan terbuka yang berhingga merupakan Himpunan Buka.

   Misalkan $U_1, U_2, \dots, U_n$ adalah sejumlah berhingga himpunan terbuka. Berdasarkan Definisi 2.7, topologi τ juga tertutup di bawah operasi irisan berhingga. Sehingga $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in \tau$ yang berarti irisan dari sejumlah berhingga himpunan terbuka adalah himpunan terbuka.

2.1.4 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi

Suatu himpunan disebut tertutup jika komplemennya dalam ruang tersebut adalah himpunan terbuka. Pemahaman mengenai himpunan tertutup memudahkan kita untuk mengkaji sifat-sifat dasar topologi, seperti kekompakan dan keterurutan, yang memiliki banyak aplikasi dalam analisis dan matematika modern. Berikut ini adalah definisi formal himpunan tertutup pada ruang topologi sesuai dengan Morris (2011).

Definisi 2.10 (Morris, 2011)

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi. Suatu himpunan bagian S dari X dikatakan himpunan tertutup di (X, τ) komplemennya di X, yaitu $X \backslash S$, terbuka di (X, τ).

Proposisi 2.2 (Morris, 2011)

Jika (X, τ) adalah setiap ruang topologi, maka

1. X dan Ø merupakan himpunan tertutup
2. Irisan setiap himpunan terbuka (berhingga atau tak terhingga) bilangan merupakan Himpunan Tutup.
3. Gabungan dari setiap himpunan tertutup yang berhingga merupakan Himpunan Tutup.

Bukti:

1. $\emptyset$ dan X merupakan himpunan tertutup

Menurut Proposisi 2.1, $\emptyset$ dan X adalah himpunan terbuka. Berdasarkan Definisi 2.8, komplemen dari himpunan terbuka adalah himpunan tertutup. Oleh karena itu, $X \setminus \emptyset = X$ dan $X \setminus X = \emptyset$ adalah himpunan tertutup. Jadi, $\emptyset$ dan X adalah himpunan tertutup.

2. Irisan setiap himpunan terbuka (berhingga atau tak terhingga) bilangan merupakan Himpunan Tutup.

   Misalkan $\{C_i\}_{i\in I}$ adalah koleksi sembarang himpunan tertutup, yaitu $C_i \in T$ untuk semua $i \in I$. Berdasarkan Definisi 2.8, diketahui bahwa komplemen dari himpunan tertutup adalah himpunan terbuka, yaitu $X \setminus C_i$ adalah terbuka untuk semua $i \in I$. Karena irisan dari sembarang jumlah himpunan terbuka adalah terbuka, maka:

$$X \setminus \left(\bigcap_{\{i\in I\}} C_i \right) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus C_i)$$

   adalah terbuka. Dengan demikian, $\bigcap_{i\in I} C_i$ adalah himpunan tertutup karena komplemennya adalah himpunan terbuka. Jadi, irisan dari sembarang koleksi himpunan tertutup adalah himpunan tertutup.

3. Gabungan dari setiap himpunan tertutup yang berhingga merupakan Himpunan Tutup.

   Misalkan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ adalah sejumlah berhingga himpunan tertutup. Dibuktikan $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ adalah himpunan tertutup. Berdasarkan Definisi 2.8, komplemen dari gabungan tersebut adalah

$$X \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = (X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2 \cap \ldots \cap (X \setminus C_n)$$

   Karena setiap $X \setminus C_i$ adalah himpunan terbuka dan irisan dari sejumlah berhingga himpunan terbuka adalah terbuka, sehingga

$$(X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2) \cap \ldots \cap (X \setminus C_n)$$

adalah himpunan terbuka. Dengan demikian, $X \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)$ adalah himpunan terbuka, yang berarti $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ adalah himpunan tertutup.

2.1.5 *Interior* pada Ruang Topologi

Definisi 2.11 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan A adalah himpunan bagian dari X, maka *interior* dari A adalah gabungan dari semua himpunan buka pada X yang termuat di A. *Interior* dari A dinotasikan dengan $int\ A$

Proposisi 2.3 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan A himpunan bagian dari X. Jika A merupakan himpunan buka, maka $A = int\ A$

Teorema 2.2 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dengan $A, B \subset X$, maka

1. Jika $A \subset B$ maka $int\ A \subset int\ B$
2. $int\ (int\ A) = int\ A$
3. $int\ (A \cap B) = int\ A \cup int\ B$
4. $int\ X = X,\ int\ \emptyset = \emptyset$

2.1.6 *Closure* (tutupan) pada Ruang Topologi

Definisi 2.12 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) ruang topologi dan A adalah himpunan bagian dari X, maka *closure* dari A adalah irisan dari semua himpunan tutup pada X yang memuat A. *Closure* dari A dinotasikan dengan $cl\ A$.

Proposisi 2.4 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) ruang topologi dan A adalah himpuanan bagian dari X. Jika A merupakan himpunan tutup, maka $A = cl\ A$.

Teorema 2.3 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dengan $A, B \subset X$, maka

1. Jika $A \subset B$ maka $cl\ A \subset cl\ B$
2. $cl\ (cl\ A) = cl\ A$
3. $cl\ (A \cup B) = cl\ A \cup cl\ B$
4. $cl\ X = X, cl\ \emptyset = \emptyset$

2.1.7 Ruang Topologi-Tri

Definisi 2.13 (Ranu sharma, dkk., 2018)

Ruang topologi-tri didefinisikan sebagai berikut misalkan X adalah himpunan tak kosong dan τ_1, τ_2, τ_3 adalah tiga topologi di X. Himpunan X bersama-sama dengan tiga topologi disebut ruang topologi-tri dan dilambangkan dengan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Ruang topologi-tri merupakan teori topologi yang mengacu pada ruang yang dilengkapi dengan tiga topologi yang berbeda pada himpunan yang sama.

Contoh 2.6

Misalkan $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, $\tau_2 = P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, X\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, X\})$. Buktikan bahwa $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah ruang topologi-tri.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah ruang topologi-tri.

1. (X, τ_1) adalah ruang topologi

   Akan ditunjukkan τ_1 topologi di X, dengan memeriksa tiga aksioma sebagai berikut:

   Aksioma 1

   $\emptyset \in \tau_1$dan $X \in \tau_1$, jelas terpenuhi karena $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$

   Aksioma 2

   $\emptyset \cup X = X$, dan $X \in \tau_1$. Maka terbukti $A_i \in \tau_1, \bigcup_i^u A_i \in \tau_1$

   Aksioma 3

   $\emptyset \cap X = \emptyset$, dan $\emptyset \in \tau_1$. Maka terbukti $A_i \in \tau_1, \bigcup_i^u A_i \in \tau_1$

   ketiga aksioma terpenuhi, sehingga τ_1 adalah topologi di X .

2. (X, τ_2) adalah ruang topologi

   Diketahui $\tau_2 = P(X)$ adalah power set dari X, yang berarti seluruh subset dari X berada dalam T_2. dengan memeriksa tiga aksioma sebagai berikut:

   Aksioma 1

   $\emptyset \in \tau_2$ dan $X \in \tau_2$, jelas terpenuhi karena $\tau_2 = P(X)$

Aksioma 2

Gabungan dari sembarang elemen τ_2 akan tetap menjadi subset dari X. Maka terbukti $A_i \in \tau_2, \bigcup_i^u A_i \in \tau_2$

Aksioma 3

Irisan dari sembarang elemen τ_2 akan tetap menjadi subset dari X. Maka terbukti $A_i \in \tau_2, \bigcup_i^u A_i \in \tau_2$

Ketiga aksioma terpenuhi, sehingga τ_2 adalah topologi di X

3. (X, τ_3) adalah ruang topologi:

Akan ditunjukkan τ_3 topologi di X, dengan memeriksa tiga aksioma sebagai berikut:

Aksioma 1

$\emptyset \in \tau_3$ dan $X \in \tau_3$, jelas terpenuhi karena $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

Aksioma 2

$\emptyset \cup \{a\} = \{a\}, \{a\} \cup X = X$, dan $\emptyset \cup X = X$. Maka terbukti $A_i \in \tau_3, \bigcup_i^u A_i \in \tau_3$

Aksioma 3

$\{a\} \cap X = \{a\}$, $\emptyset \cap X = \emptyset$, dan $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset$. Maka terbukti $A_i \in \tau_3, \bigcup_i^u A_i \in \tau_3$

Ketiga aksioma terpenuhi, sehingga $\tau_3$adalah topologi di X .

Karena τ_1, τ_2, dan τ_3 topologi di X, maka $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah ruang topologi-tri, di mana setiap koleksi τ_i untuk $(i = 1, 2, 3)$ memenuhi sifat-sifat topologi.

Contoh 2.7

$X = \{a, b, c, d\}$

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$

$\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, X\}$

Misalkan $\tau = \tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_3$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

Bukti:

Akan membuktikan bahwa (X, τ) adalah ruang topologi.

Aksioma 1

$\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$, jelas terpenuhi karena $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

Aksioma 2

$\emptyset \cup \{a\} = \{a\}, \{a\} \cup X = X$, dan $\emptyset \cup X = X$. Maka terbukti $A_i \in \tau, \bigcup_i^u A_i \in \tau$

Aksioma 3

$\{a\} \cap X = \{a\}$, $\emptyset \cap X = \emptyset$, dan $\{a\} \cap \emptyset = \emptyset$. Maka terbukti $A_i \in \tau, \bigcup_i^u A_i \in \tau$

ketiga aksioma terpenuhi, sehingga τ adalah topologi di X .

Karena semua syarat topologi terpenuhi, (X, τ) adalah ruang topologi.

2.1.8 Himpunan Buka pada Ruang Topologi-Tri

Definisi 2.14 (Palaniammal S., 2014)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah sebuah ruang topologi-tri. Misalkan $A \subset X$. A disebut sebuah himpunan terbuka-tri di X jika A terbuka di dalam topologi yang diinduksikan sehingga $A \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_3$

Teorema 2.4 (Palaniammal S., 2014)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah sebuah ruang topologi-tri. A adalah terbuka-tri jika dan hanya jika $A \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A))$.

Bukti:

(→) Jika A adalah tri-terbuka, maka $A \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A))$.

Jika A adalah terbuka-tri, maka A adalah terbuka terhadap setiap topologi. Oleh karena itu $A = \tau_i\ int\ A$ untuk $i = 1, 2, 3$.

$$\tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A)) = \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ A) = \tau_1\ int\ A = A$$

Maka $A \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A))$

(←) Jika $A \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A))$, maka A adalah tri-terbuka.

misalkan dimiliki $A \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A))$. Akan ditunjukkan bahwa A terbuka dalam setiap topologi τ_1, τ_2, τ_3

Sekarang $\tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ (\tau_3\ int\ A)) \subset \tau_1\ int\ (\tau_2\ int\ A) \subset \tau_1\ int\ A \subset A$

ini mengimplikasikan $A = \tau_i\ int\ A$ untuk $i = 1, 2, 3$ dan oleh karena itu A adalah terbuka-tri.

2.1.9 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi-Tri

Definisi 2.15 (Palaniammal S., 2014)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah sebuah ruang topologi-tri. Misalkan $A \subset X$. A disebut sebuah himpunan tertutup-tri di X jika A tertutup dalam topologi yang diinduksi.

Teorema 2.5 (Palaniammal S., 2014)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah sebuah ruang topologi-tri. A adalah tertutup-tri jika $A \supset \tau_1\ cl\ (\tau_2\ cl\ (\tau_3\ cl\ A))$.

2.1.10 *Closure* dan Interior pada Ruang Topologi-Tri

Definisi 2.16 (Jeyasudha & Arasi, 2023)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ adalah sebuah ruang topologi-tri dan $A \subseteq X$. Gabungan dari semua himpunan terbuka-tri berada di A dikatakan sebagai tri-interior dari A (tri-*int* A). Irisan dari semua himpunan tertutup-tri yang berada di A dikatakan tri-*closure* di A (tri-cl A).

2.1.11 Kontinu

Sub bab ini akan membahas mengenai kekontinuan pada bilangan riil dan ruang topologi

1. Kontinu di $\mathbb{R}$

Secara umum kekontinuan pada bilangan riil didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.17 (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $f: A \to \mathbb{R}$, dan misalkan $c \in A$. Dikatakan bahwa f kontinu pada c jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x adalah titik dari A yang memenuhi $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Contoh 2.8

Misalkan terdapat fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 5x + 6$. Buktikan bahwa f kontinu pada $c = 2$.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ maka berdasarkan Definisi 2.11

$$|x - 2| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

diperoleh

$5|x - 2| < \varepsilon$

$|5(x - 2)| < \varepsilon$

$|5x - 10| < \varepsilon$

$|5x + 6 - 16| < \varepsilon$

di mana

$f(2) = 5(2) + 6 = 16$

sehingga $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$

Jadi, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ sedemikian sehingga $|x - 2| < \delta$ maka $|f(x) - f(2)| = 5|x - 2| < 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon$. Terbukti bahwa f kontinu pada $c = 2$.

Teorema 2.6 (Bartle & Sherbert, 2011)

Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ ontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika diberikan sebarang persekitaran-ε dari $f(c)$ atau $V_\varepsilon(f(c))$ terdapat persekitaran$-\delta$ dari c atau $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga jika x adalah sebarang titik dari $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ memenuhi $V_\varepsilon(f(c))$, sehingga

$$f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$$

Bukti:

Misalkan $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan misalkan $c \in A$.

($\to$) Akan dibuktikan bahwa kondisi $f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$ terpenuhi. Asumsikan bahwa f kontinu pada titik c dan misalkan $V_\delta(c) = \{x \in A||x - c| < \delta\}$ berdasarkan Definisi 2.8, untuk setiap $x \in A$ berlaku bahwa $|f(x) - c| < \varepsilon$

Misalkan $x \in A \cap V_\delta(c)$, maka $x \in A$ dan $x \in V_\delta(c)$. Sehingga diperoleh

$x \in A$ dan $|x - c| < \delta$

Oleh karena itu, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, yaitu $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon))$ yang berarti bahwa $f(x) \in V_\varepsilon (f(c))$. Kemudian, untuk setiap persekitaran-ε dari $f(c)$ atau $V_\varepsilon (f(c))$ terdapat persekitaran-δ dari c atau $V_\delta (c)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ dengan $x \in A$ berlaku bahwa

$f(x) \in V_\varepsilon\big(f(c)\big)$ atau $f\big(A \cap V_\delta (c)\big) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$

(⟵) Akan dibuktikan bahwa f kontinu di c.

Asumsikan bahwa untuk setiap persekitaran-ε dari $f(c)$ atau $V_\varepsilon(f(c))$ terdapat persekitaran-δ dari c atau $V_\delta (c)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ dengan $x \in A$ berlaku bahwa

$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in A$ dengan $V_\delta(c) = \{x \in A | |x - c| < \delta\}$ berlaku bahwa

$$|x - c| < \delta$$

$$-\delta < x - c < \delta$$

$c - \delta < x < c + \delta$ yang berakibat bahwa $x \in V_\delta (c)$ sehingga

$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

maka $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$

Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku bahwa $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

2. Kontinu di Ruang Topologi

Definisi 2.17 (Singh, 2019)

Misalkan (X, τ_x) dan (Y, τ_Y) adalah ruang topologi, Suatu fungsi f dari $X \to Y$ atau $f: (X, \tau_x) \to (Y, \tau_Y)$ dikatakan kontinu jika untuk semua himpunan buka $H \in \tau_Y$ berlaku $f^{-1}(H) \in \tau$ di mana $f^{-1}(H) = \{x \in X, f(x) \in H\}$.

Contoh 2.9

Misalkan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $Y = \{w, x, y, z\}$

$\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ merupakan topologi pada X

$\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{w, x, z\}\}$ merupakan topologi pada Y

Diberikan dua fungsi $f: X \to Y$, Apakah f kontinu

Bukti

$X = \{a, b, c, d\}, \tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

$Y = \{w, x, y, z\}, \tau_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{w, x, z\}\}$

Himpunan buka di Y

$$Y \in \tau_Y \to f^{-1}(Y) = Y \in \tau_X$$

$$\emptyset \in \tau_Y \to f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$$

$$\{x\} \in \tau_Y \to f^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \tau_X$$

$$\{y\} \in \tau_Y \to f^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \tau_X$$

$$\{x, y\} \in \tau_Y \to f^{-1}(\{x, y\}) = \{a\} \in \tau_X$$

$$\{w, x, y\} \in \tau_Y \to f^{-1}(\{w, x, y\}) = X \in \tau_X$$

Jadi, terbukti f kontinu karena himpunan buka $Y \in \tau_Y$ berlaku $f^{-1}(Y) \in \tau_X$ di mana $f^{-1}(Y) = \{x \in X, f(x) \in Y\}$.

2.1.12 Topologi Fuzzy

Definisi 3.18 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Sebuah koleksi himpunan fuzzy $\delta \subseteq I^X$ disebut topologi fuzzy pada X jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

i. $\tilde{0} \in \delta, \tilde{1} \in \delta$.

ii. $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \delta \Rightarrow \tilde{A} \wedge \tilde{B} \in \delta$.

iii. $\forall \{\tilde{A}_j\} \subseteq \delta \Rightarrow \vee_j \tilde{A}_j \in \delta$

Pasangan berurutan (X, δ) disebut ruang topologi fuzzy.

Definisi 3.19 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Jika δ adalah suatu topologi fuzzy pada X , maka anggota-anggota dari δ disebut himpunan fuzzy buka.

Definisi 3.20 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Himpunan fuzzy $\widetilde{K}$ dikatakan tertutup jika $\widetilde{K} \in \delta$. Dinotasikan dengan δ^c untuk semua koleksi himpunan fuzzy tutup di ruang topologi fuzzy δ.

Definisi 2.21 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Interior dari himpunan fuzzy A pada X adalah himpunan fuzzy pada X dengan derajat keanggotaan $\mu_{int(\tilde{A})}(x) = \sup \{\mu_{\tilde{E}}\ (x): \tilde{E} \subset \tilde{A}\ , \tilde{E} \in \delta\}$ Interior dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ pada X dinotasikan dengan $int(\tilde{A})$ atau $A°$.

Definisi 2.22 (Oktaviana & Juniati, 2014)

Closure (tutupan) dari himpunan fuzzy pada X adalah himpunan fuzzy pada X dengan derajat keanggotaan $\mu_{cl(\tilde{A})}(x) = \inf \{\mu_{\tilde{B}}\ (x): \tilde{A} \subset \tilde{B}\ , \tilde{B}^C \in \delta\}$ *Closure* (tutupan) dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $cl(\tilde{A})$ atau $\tilde{A}$.

Definisi 2.23 (Oktaviana & Juniati, 2013)

Diberikan X dan Y adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f : X \to Y$ dikatakan buka fuzzy jika untuk setiap himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang buka di X, $f(\tilde{A})$ adalah himpunan fuzzy buka di Y.

Definisi 2.24 (Satria & Aini, 2023)

Misalkan (X, τ) dan (Y, σ) adalah ruang topologi fuzzy. Fungsi $f : X \to Y$ disebut fuzzy terbuka jika untuk setiap himpunan fuzzy terbuka $\tilde{A}$ di X, prapeta $f(\tilde{A})$ adalah himpunan fuzzy terbuka di Y.

Definisi 2.25 (Satria & Aini, 2023)

Sebuah fungsi $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ antara ruang topologi fuzzy disebut fuzzy kontinu jika prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka di Y adalah himpunan fuzzy terbuka di X.

Teorema 2.7

Misalkan $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ adalah pemetaan antara ruang topologi fuzzy. Maka f bersifat fuzzy kontinu jika dan hanya jika prapeta dari setiap himpunan fuzzy tertutup di Y adalah himpunan fuzzy tertutup di X.

Bukti

($\rightarrow$) Misalkan f adalah fuzzy kontinu. Berdasarkan definisi, prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka di Y adalah fuzzy terbuka di X. Menggunakan sifat komplemen dalam topologi fuzzy, ini juga berarti bahwa prapeta dari setiap himpunan fuzzy tertutup di Y adalah fuzzy tertutup di X.

($\leftarrow$) Misalkan prapeta dari setiap himpunan fuzzy tertutup di Y adalah fuzzy tertutup di X. Karena himpunan fuzzy terbuka adalah komplemen dari himpunan fuzzy tertutup, maka prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka di Y juga akan fuzzy terbuka di X. Oleh karena itu, f adalah fuzzy kontinu.

2.1.13 Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy

Untuk membuktikan bahwa (X, τ) dan (Y, τ') adalah ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy, perlu menunjukkan bahwa ketiga koleksi τ_1, τ_2 dan τ_3 pada X dan τ_1', τ_2', dan τ_3' pada Y masing-masing memenuhi sifat-sifat dasar dari ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy.

Definisi 2.26 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan X adalah sebuah himpunan, dan misalkan τ_1, τ_2, dan τ_3 adalah tiga koleksi himpunan fuzzy pada X. Pasangan (X, τ) disebut ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy jika:

1. $0_X \in \tau_i$ dan $1_X \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3,$
2. Jika $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$
3. Jika $A \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3,$ maka $1_X \backslash A \in \tau_i$.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Pada bab 1 telah dijelaskan mengenai perintah Allah kepada manusia untuk merenungi ciptaan-Nya sebagaimana terdapat dalam QS. Al-‘Alaq (96:1-5) dan QS. Al-Mulk (67:3-4). Ayat-ayat tersebut menekankan pentingnya pembelajaran dan pengamatan terhadap alam semesta sebagai sarana untuk mengenali kebesaran Allah SWT. Pada subbab ini, akan dibahas lebih lanjut mengenai perintah untuk melakukan eksplorasi ilmiah dan pengamatan terhadap alam, serta relevansinya dengan pengembangan ilmu pengetahuan dan penemuan baru dalam kehidupan manusia. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Ankabut:20

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانْظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ۚ ثُمَّ اللَّهُ يُنْشِئُ النَّشْأَةَ الْآخِرَةَ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ
(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Katakanlah: Jelajahi bumi, kemudian lihatlah bagaimana Allah memulai penciptaan, kemudian Allah akan mengulangi penciptaan itu. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.''*

Menurut Ibnu Katsir, ayat ini mendorong manusia untuk berjalan di muka bumi, melihat tanda-tanda penciptaan Allah, dan merenungi bagaimana Dia memulai penciptaan makhluk dari yang tidak ada menjadi ada. Allah menegaskan bahwa penciptaan bisa diulang, mengingat kekuasaan-Nya yang tanpa batas. Al-Qurtubi menambahkan bahwa ayat ini merupakan seruan kepada manusia untuk berpikir, mengamati, dan belajar dari fenomena alam sebagai bukti kebesaran dan kekuasaan Allah. Dengan melakukan perjalanan dan pengamatan, manusia dapat memahami proses penciptaan dan pembaruan, yang mencerminkan siklus kehidupan yang terus berlangsung.

Ayat ini juga bisa dihubungkan dengan konsep ijtihad dalam Islam, yang mendorong upaya keras untuk menemukan solusi baru bagi tantangan yang dihadapi umat manusia. Dalam konteks ilmu pengetahuan modern, ijtihad berarti berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan pengetahuan dan menciptakan inovasi, termasuk dalam ilmu matematika dan topologi. Proses pengembangan teori-teori baru di bidang ini bisa dipahami sebagai bentuk ijtihad ilmiah. Surah Al-Ankabut (29:20) memotivasi kita untuk mengeksplorasi bagaimana sistem-sistem baru bisa dikembangkan dan diterapkan, khususnya di bidang matematika.

Teori fuzzy yang dikembangkan oleh Lotfi Zadeh pada pertengahan abad ke-20 adalah contoh hasil dari ijtihad intelektual yang mendobrak batasan-batasan pengetahuan tradisional. Dalam ruang topologi-tri, yang merupakan ruang matematika yang lebih kompleks, konsep kekontinuan fungsi fuzzy menjadi krusial untuk menjelaskan bagaimana informasi yang tidak pasti atau ambigu dapat dimodelkan secara logis. Surah ini bisa dianggap sebagai pendorong untuk terus melakukan eksplorasi dalam ilmu matematika, tidak hanya untuk memahami ciptaan Allah dalam bentuk fisik, tetapi juga dalam struktur-struktur abstrak yang berperan penting dalam kehidupan modern dan pengambilan keputusan berbasis logika fuzzy.

Jadi, ayat ini relevan dengan pengembangan konsep baru seperti fungsi fuzzy di ruang topologi-tri, karena mendorong manusia untuk melakukan penelitian dan mengamati alam serta konsep-konsep yang ada. Dengan menggunakan ijtihad, manusia dapat menciptakan solusi inovatif untuk menghadapi tantangan ilmiah dan praktis. Berpijak pada observasi dan pemikiran kritis, penelitian ini berpotensi menghasilkan penemuan yang bermanfaat bagi banyak orang.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada bab ini akan membahas tentang teori pendukung untuk membuktikan kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri.

Definisi 2.3.1 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan τ_1, τ_2, τ_3 adalah tiga topologi di X. Himpunan X dilengkapi dengan tiga topologi disebut ruang topologi-tri dan dilambangkan dengan $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Definisi 2.3.2 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Pertimbangkan dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy $(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3), (Y,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$. Sebuah fungsi fuzzy $f: I^x \rightarrow I^y$ dikatakan fungsi fuzzy tri kontinu jika χ_λ adalah fuzzy terbuka-tri di X, Untuk setiap himpunan terbuka tri χ_λ di Y.

Teorema 2.3.1 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Sebuah fungsi $f: (X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3), \rightarrow (Y,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika bayangan invers dari setiap fuzzy terbuka-tri diset Y adalah fuzzy terbuka-tri X.

Teorema 2.3.2 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$ dan $(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,}\ \tau'_3)$ dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow\ I^Y$ adalah fungsi kontinu fuzzy tri jika dan hanya jika $f^{-1}(\chi_\lambda)$ adalah fuzzy tertutup-tri di X setiap χ_λ adalah fuzzy tertutup-tri di Y.

Teorema 2.3.3 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$ dan $(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,}\ \tau'_3)$ dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow\ I^Y$ adalah fungsi kontinu fuzzy tri jika dan hanya jika $f(cl(\chi_\lambda)) \prec cl(f(\chi_\lambda)) \forall \chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$

Teorema 2.3.4 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$ dan $(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,}\ \tau'_3)$ dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow\ I^Y$ adalah fungsi kontinu fuzzy tri jika dan hanya jika $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \tilde{1}_Y$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah studi kualitatif dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan (library research). Studi kualitatif ini didasarkan pada analisis literatur. Data dari berbagai sumber perpustakaan dikumpulkan, dibaca, dianalisis, dan dikelola. Objek penelitian ini adalah Ruang Topologi-tri yang digunakan untuk menguji sifat kekontinuannya.

3.2 Pra Penelitian

Penulis menyusun daftar referensi dan penelitian sebelumnya sebagai bagian dari penyelidikan awal. Penelitian yang digunakan berkaitan dengan penelitian yang diberikan. Sumber informasi utama bersumber dari jurnal Ranu Sharma dkk. (2018), dan objek penelitiannya adalah Ruang topologi-tri.

3.3 Tahapan Penelitian

Ruang Topologi-tri merupakan Ruang Topologi yang mengacu pada ruang yang dilengkapi dengan tiga topologi yang berbeda pada himpunan yang sama dan salah satu sifat penting dalam Ruang Topologi-tri adalah sifat kekontinuan. Masalah kekontinuan pada Topologi-tri berkaitan dengan apakah Ruang tersebut memuat semua fungsi yang kontinu di dalamnya. Dalam hal ini, memuat berarti kondisi yang cukup dan perlu agar fuzzy tertentu termasuk dalam ruang tersebut.

Maka dari itu, untuk membuktikan sifat kekontinuannya pada Ruang Topologi, penulis melakukan beberapa tahapan. Antara lain:

1. Mengidentifikasi Ruang Topologi-tri sebagai objek penelitian.
2. Mengumpulkan dan menganalisis teori pendukung yang berhubungan dengan penelitian tersebut.
3. Memahami definisi dan sifat-sifat Fungsi fuzzy tri kontinu yang relevan dengan teorema yang dibuktikan.
4. Melakukan pengecekan terhadap syarat-syarat yang terdapat dalam masing-masing teorema.
5. Menyusun bukti teorema secara formal setelah verifikasi dilakukan.
6. Membuat kesimpulan dari hasil pembahasan dan pembuktian yang telah dilakukan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan dibuktikan mengenai kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri

4.1 Fungsi Kontinu Fuzzy di Ruang Topologi-Tri

Pada sub bab ini akan dibahas tentang fungsi kontinu fuzzy di ruang topologi-tri. Secara umum, topologi pada himpunan fuzzy mengembangkan konsep ruang topologi pada himpunan biasa dengan memodifikasi beberapa aturan. Berikut penjelasan tentang definisi dan contoh serta teorema yang akan dibuktikan.

Definisi 4.1 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Diberikan X, Y himpunan fuzzy tak kosong dan $(X, \tau_1, \tau_{2,} \tau_3), (Y, \tau_1', \tau_2', \tau_3')$ adalah dua ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy. Diketahui I^x dan I^y koleksi himpunan fuzzy terbuka-tri pada X dan Y. Didefinisikan fungsi fuzzy $f: I^x \rightarrow I^y$ dikatakan fungsi fuzzy tri kontinu X apabila χ_λ adalah fungsi karakteristik dari himpunan fuzzy terbuka-tri di X, untuk setiap fungsi karakteristik dari himpunan fuzzy terbuka-tri χ_λ di Y.

Contoh 4.1 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Diberikan $X = \{p, q, r\}$, dan $Y = \{u, v, w\}$ adalah himpunan fuzzy tri. Misalkan ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy pada X

$$\tau_1 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{p\}}\}$$

$$\tau_2 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{p,q\}}\}$$

$$\tau_3 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{q\}}\}$$

Dan ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy pada Y

$$\tau_1' = \{\tilde{1}_Y, \tilde{0}_Y, \chi_{\{u\}}\}$$

$$\tau_2' = \{\tilde{1}_Y, \tilde{0}_Y, \chi_{\{v\}}\}$$

$$\tau_3' = \{\tilde{1}_Y, \tilde{0}_Y, \chi_{\{u\},}\ \chi_{\{u,v\}}\}$$

Himpunan fuzzy terbuka-tri pada ruang topologi-tri adalah gabungan dari semua topologi-tri. Akibatnya $\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{p\}}, \chi_{\{q\}}, \chi_{\{p,q\}}\}$ adalah himpunan fuzzy terbuka-tri pada X dan $\tau_{1'} \cup \tau_{2'} \cup \tau_{3'} = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{u\}}, \chi_{\{v\}}, \chi_{\{u,v\}}\}$ adalah himpunan fuzzy terbuka-tri pada Y. Didefinisikan fungsi $f: I^X \to I^Y$, di mana I^X adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X dan I^Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di Y.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa (X, τ) dan (Y, τ') adalah ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy.

Pembuktian pada (X, τ)

Diberikan bahwa $X = \{p, q, r\}$ dan ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy pada X adalah:

$$\tau_1 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{p\}}\}$$

$$\tau_2 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{p,q\}}\}$$

$$\tau_3 = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_X, \chi_{\{q\}}\}$$

Akan diperiksa sifat ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy untuk (X, τ)

Aksioma 1

$\tilde{0}_X$ dan $\tilde{1}_X \in \tau_1, \tau_2, \tau_3$ jadi, terbukti $\tilde{0}_X \in \tau_i$ dan $\tilde{1}_X \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Aksioma 2

Pada τ_1, $\tilde{1}_X \cap \chi_{\{p\}} = \chi_{\{p\}}$, $\tilde{0}_X \cap \chi_{\{p\}} = \tilde{0}_X$ dan $\chi_{\{p\}} \cap \chi_{\{p\}} = \chi_{\{p\}}$. Jadi, terbukti $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$

Pada τ_2, $\tilde{1}_X \cap \chi_{\{p,q\}} = \chi_{\{p,q\}}$, $\tilde{0}_X \cap \chi_{\{p,q\}} = \tilde{0}_X$ dan $\chi_{\{p,q\}} \cap \chi_{\{p,q\}} = \chi_{\{p,q\}}$. Jadi, terbukti $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$

Pada τ_3: $\tilde{1}_X \cap \chi_{\{q\}} = \chi_{\{q\}}$, $\tilde{0}_X \cap \chi_{\{q\}} = \tilde{0}_X$ dan $\chi_{\{q\}} \cap \chi_{\{q\}} = \chi_{\{q\}}$. Jadi, terbukti $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$

Jadi, terbukti apabila $A, B \in \tau_i$, maka $A \cap B \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Aksioma 3

Jika $A \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$, maka $1_X \backslash A \in \tau_i$.

Pada τ_1: $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{p\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain p, yang sesuai dengan definisi dari elemen dalam τ_1. Jadi, terpenuhi.

Pada τ_2: $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{p,q\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain p dan q, yang juga berada dalam τ_2. Jadi, terpenuhi.

Pada τ_3: $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{q\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain q, yang sesuai dengan definisi dari elemen dalam τ_3. Jadi, terpenuhi.

Karena ketiga kondisi terpenuhi untuk (X, τ), maka (X, τ) adalah ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy.

Pembuktian pada (Y, τ')

Diberikan bahwa $Y = \{u, v, w\}$ dan ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy pada Y adalah:

$$\tau_1' = \{\tilde{1}_Y, \tilde{0}_Y, \chi_{\{u\}}\},$$

$$\tau_2' = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_Y, \chi_{\{v\}}\}$$

$$\tau_3' = \{\tilde{1}_X, \tilde{0}_Y, \chi_{\{u\},}\chi_{\{u,v\}}\}$$

Akan dibuktikan (Y, τ') adalah ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy

Aksioma 1

$\tilde{1}_Y$ dan $\tilde{0}_Y \in \tau_1',\ \tau_2',\ \tau_3'$. Jadi, terbukti $\tilde{0}_X \in \tau_i$ dan $\tilde{1}_X \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Aksioma 2

Jika $A, B \in \tau_i'$, maka $A \cap B \in \tau_i'$ untuk $i\ =\ 1, 2, 3$.

Pada τ_1': Gabungan yang mungkin adalah $\tilde{1}_Y \cap \chi_{\{u\}} = \chi_{\{u\}}, \tilde{0}_Y \cap \chi_{\{u\}} = \tilde{0}_Y$, dan $\chi_{\{u\}} \cap \chi_{\{u\}} = \chi_{\{u\}}$. Semua hasil ini berada dalam τ_1', jadi kondisi ini terpenuhi.

Pada τ_2': Gabungan yang mungkin adalah $\tilde{1}_Y \cap \chi_{\{v\}} = \chi_{\{v\}}$, $\tilde{0}_Y \cap \chi_{\{v\}} = \tilde{0}_Y$, dan $\chi_{\{v\}} \cap \chi_{\{v\}} = \chi_{\{v\}}$. Semua hasil ini berada dalam τ_2', jadi kondisi ini terpenuhi.

Pada τ_3': Gabungan yang mungkin adalah $\tilde{1}_Y \cap \chi_{\{u\}} = \chi_{\{u\}}, \tilde{0}_Y \cap \chi_{\{u\}} = \tilde{0}_Y, \chi_{\{u\}} \cap \chi_{\{u\}} = \chi_{\{u\}}$, $\tilde{1}_Y \cap \chi_{\{u,v\}} = \chi_{\{u,v\}}, \tilde{0}_Y \cap \chi_{\{u,v\}} = \tilde{0}_Y$, $\chi_{\{u,v\}} \cap \chi_{\{u,v\}} = \chi_{\{u,v\}}$ dan $\chi_{\{u\}} \cap \chi_{\{u,v\}} = \tilde{1}_Y$.

Aksioma 3

Jika $A \in \tau_i$ untuk $i = 1, 2, 3$, maka $1_X \backslash A \in \tau_i$.

Pada τ_1': $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{u\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain u, yang sesuai dengan definisi dari elemen dalam $\tau_{1'}$. Jadi, kondisi ini terpenuhi.

Pada τ_2': $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{v\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain v, yang juga berada dalam $\tau_{2'}$. Jadi, kondisi ini terpenuhi.

Pada τ_3': $\tilde{1}_X \setminus \chi_{\{u,v\}}$ adalah himpunan fuzzy yang hanya memiliki keanggotaan di elemen selain u dan v, yang sesuai dengan definisi dari elemen dalam $\tau_{3'}$. Jadi, kondisi ini terpenuhi.

Karena ketiga kondisi terpenuhi untuk (X, τ'), maka (X, τ') adalah ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy.

Untuk $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in I^X$ dan $\tau_{1'}, \tau_{2'}, \tau_{3'} \in I^Y$ fungsi $f: I^X \to I^Y$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f^{-1}(\chi_{\{u\}}) = \chi_{\{p\}}$$

$$f^{-1}(\chi_{\{v\}}) = \chi_{\{q\}}$$

$$f^{-1}(\chi_{\{u,v\}}) = \chi_{\{p,q\}}$$

$$f^{-1}(\tilde{0}_Y) = \tilde{0}_X$$

$$f^{-1}(\tilde{1}_Y) = \tilde{1}_X$$

Akan diperiksa prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri pada Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri pada X:

Prapeta $\chi_{\{u\}}$

$f^{-1}\left(\chi_{\{u\}}\right) = \chi_{\{p\}}$ yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Prapeta $\chi_{\{v\}}$

$f^{-1}\left(\chi_{\{v\}}\right) = \chi_{\{q\}}$ yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Prapeta $\chi_{\{u,v\}}$

$f^{-1}\left(\chi_{\{u,v\}}\right) = \chi_{\{p,q\}}$ yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Prapeta $\tilde{0}_Y$

$f^{-1}\left(\tilde{0}_Y\right) = \tilde{0}_X$ yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Prapeta $\tilde{1}_Y$

$f^{-1}\left(\tilde{1}_Y\right) = \tilde{1}_X$ yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Karena prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri pada Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri pada X, maka fungsi f terbukti sebagai fungsi fuzzy tri kontinu.

Dengan demikian, fungsi f adalah fungsi fuzzy tri kontinu karena setiap prapeta dari himpunan fuzzy terbuka-tri pada Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri pada X.

Teorema 4.1 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Diberikan Fungsi $f\colon \big(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3\big), \to (Y,\ \tau_1',\ \tau_2', \tau_3{}')$ adalah dua ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy, dan $f\colon I^x\ \to I^y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri X.

Bukti:

(→) Jika f fungsi fuzzy tri kontinu, maka akan dibuktikan prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X.

Karena f fungsi fuzzy tri kontinu berdasarkan definisi $\tilde{1}_Y - \chi_\lambda$ himpunan fuzzy tertutup-tri di Y, karena fungsi fuzzy tri kontinu di X maka

$$f^{-1}\,(\tilde{1}_Y - \chi_\lambda) = \tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\lambda)$$

$\tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\lambda)$ merupakan himpunan fuzzy tertutup-tri di X, sehingga $f^{-1}(\chi_\lambda)$ himpunan fuzzy terbuka-tri. Jadi terdapat $f^{-1}\colon Y \to X$ sedemikian sehingga untuk setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y. Memiliki pasangan dari f^{-1} yang merupakan himpunan fuzzy terbuka-tri di X.

Jadi, terbukti jika f fungsi fuzzy tri kontinu, maka prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X

(←) Jika prapeta dari himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri X maka akan dibuktikan f fungsi fuzzy tri kontinu

Asumsikan $f^{-1}(\chi_\alpha)$ himpunan fuzzy terbuka-tri di X untuk setiap himpunan fuzzy terbuka-tri χ_α di Y, Misalkan χ_α himpunan fuzzy terbuka-tri di Y maka $\tilde{1}_Y - \chi_\alpha$ Komplemen dari χ_α himpunan fuzzy terbuka-tri di Y.

Berdasarkan asumsi, maka berlaku bahwa

$$f^{-1}\left(\tilde{1}_Y - \chi_\alpha\right) = \tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\alpha)$$

$\tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\alpha)$ himpunan fuzzy terbuka-tri di X dan komplemennya $f^{-1}(\chi_\alpha)$ juga himpunan fuzzy terbuka-tri di X.

Dengan demikian terbukti jika $f: I^x \to I^y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri X.

Teorema 4.2 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_{2,} \tau_3)$ dan $(Y, \tau'_1, \tau'_{2,} \tau'_3)$ dua ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy. Maka, $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y.

Bukti:

(→) Jika f fungsi fuzzy tri kontinu maka akan dibuktikan $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y.

Misalkan f fungsi fuzzy tri kontinu, dan χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y. Berdasarkan definisi fungsi fuzzy tri kontinu, prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X karena χ_α himpunan fuzzy tertutup-tri, maka komplemennya $1 - \chi_\alpha$ adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di Y. Berdasarkan definisi, sehingga

$$(f^{-1}(\tilde{1}_Y - \chi_\alpha) = \tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\alpha)$$

adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X. Oleh karena itu, $\tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah komplemen dari $f^{-1}(\chi_\alpha)$, yang berarti bahwa $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X.

Sehingga, terbukti bahwa jika f fungsi fuzzy tri kontinu maka $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y.

(←) Jika $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y maka akan dibuktikan f fungsi fuzzy tri kontinu

Diasumsikan bahwa prapeta dari setiap himpunan fuzzy tertutup-tri di Y adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X. Akan dibuktikan f adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Misalkan χ_α adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di Y. Komplemen dari χ_α, yaitu $\tilde{1}_Y - \chi_\alpha$ adalah himpunan tertutup fuzzy tri di Y. Dengan asumsi, prapeta dari $\tilde{1}_Y - \chi_\alpha$, yaitu $f^{-1}(\tilde{1}_Y - \chi_\alpha) = \tilde{1}_X - f^{-1}(\chi_\alpha)$, adalah himpunan tertutup fuzzy tri di X, yang berarti bahwa $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy terbuka-tri di X.

Sehingga, f adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Dengan demikian, terbukti jika f fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\chi_\alpha)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_α adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y.

Teorema 4.3 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,}\ \tau_3)$ dan $(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,}\ \tau'_3)$ dua ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy. Maka, $f\colon I^X \to\ I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl\big(f(\chi_\lambda)\big), \forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$

Bukti:

($\rightarrow$) Jika $f\colon I^X \to\ I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu maka $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl\big(f(\chi_\lambda)\big), \forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$

Misalkan $f\colon I^X \to\ I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu. Berdasarkan sifat fungsi fuzzy tri kontinu, apabila $\chi_\lambda \subseteq X$, maka $f(\chi_\lambda) \subseteq Y$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri. Berdasarkan teorema 4.2 pra peta f^{-1} dari tri-closure suatu himpunan fuzzy, yaitu

$$tri - cl(A) = cl_1(A) \cap cl_2(A) \cap cl_3(A)$$

dengan $cl_i(A)$menyatakan closure dari A dalam topologi τ_i untuk $i\ =\ 1,2,3$ juga merupakan himpunan fuzzy tri-tertutup di X. Oleh karena itu, hubungan antara prapeta dan kontinuitas adalah

$$f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right) \supseteq tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)$$

Untuk setiap $f(\chi_\lambda) \subseteq X$, maka $f^{-1}\big(f(\chi_\lambda)\big) \supseteq \chi_\lambda$, yang memberikan hubungan antara $tri - cl$ dari $f(\chi_\lambda)$ dan prapetanya. Karena $\chi_\lambda \subseteq f^{-1}\big(f(\chi_\lambda)\big)$ maka didapatkan:

$$tri - cl\left(f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right)\right) = f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right) \quad \ldots (1)$$

Diketahui bahwa relasi fuzzy antara $f(\chi_\lambda)$ dan tutupannya adalah

$$f(\chi_\lambda) \prec tri - cl(f(\chi_\lambda))$$

Karena $\chi_\lambda \prec f^{-1}\big(f(\chi_\lambda)\big)$ maka juga berlaku $\chi_\lambda \prec f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right)$

Dengan menggunaka persamaan 1, diperoleh bahwa

$$tri - cl(f(\chi_\lambda)) \prec tri - cl\left(f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right)\right) = f^{-1}\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right)$$

Dari persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa

$$f\left(tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)\right) \prec tri - cl\big(f(\chi_\lambda)\big)$$

Karena fungsi f tetap dalam urutan fuzzy pada tutupan dari setiap himpunan χ_λ, maka dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Jadi, terbukti jika $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu maka $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl\big(f(\chi_\lambda)\big), \forall \chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$

($\leftarrow$) Jika $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl(f(\chi_\lambda)) \forall \chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$ maka $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu

Asumsikan χ_δ merupakan himpunan fuzzy tertutup-tri di Y, sehingga $tri - cl(\chi_\delta) = \chi_\delta$. Artinya, tutupan fuzzy tri dari χ_δ adalah dirinya sendiri yang merupakan sifat dasar dari himpunan tertutup.

Pra peta dari χ_δ di X, yaitu $f^{-1}(\chi_\delta) \prec \tilde{1}_X$ berdasarkan asumsi

$$f(tri - cl\big(f^{-1}(\chi_\delta)\big) \prec tri - cl\left(f\big(f^{-1}(\chi_\delta)\big)\right) \prec tri - cl(\chi_\delta) = \chi_\delta.$$

Dari sifat $f^{-1}(\chi_\delta)$ yang diberikan oleh tutupan fuzzy disimpulkan

$$tri - cl\big(f^{-1}(\chi_\delta)\big) \prec f^{-1}(\chi_\delta)$$

Karena relasi antara tutupan fuzzy dan himpunan itu tetap berlaku sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$tri - cl\big(f^{-1}(\chi_\delta)\big) = f^{-1}(\chi_\delta)$$

dan $f^{-1}(\chi_\delta)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X.

Berdasarkan teorema 4.2, karena $f^{-1}(\chi_\delta)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri maka f adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Jadi, terbukti jika $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi kontinu fuzzy tri maka $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl(f(\chi_\lambda))\forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$.

Dengan demikian, terbukti jika $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f\big(cl(\chi_\lambda)\big) \prec cl\big(f(\chi_\lambda)\big), \forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_X$.

Teorema 4.4 (Ranu Sharma, dkk, 2018)

Misalkan $(X, \tau_1, \tau_{2,} \tau_3)$ dan $(Y, \tau'_1, \tau'_{2,} \tau'_3)$ dua ruang topologi-tri pada himpunan fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\big(tri - cl(\chi_\lambda)\big), \forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_Y$

Bukti:

($\rightarrow$) Jika $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu maka akan dibuktikan $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\big(tri - cl(\chi_\lambda)\big), \forall\chi_\lambda \prec \tilde{1}_Y$

Misalkan $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu. Berdasarkan definisi fungsi fuzzy tri kontinu jika χ_λ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di Y, maka prapetanya yaitu $f^{-1}(\chi_\lambda)$ juga himpunan fuzzy tertutup-tri di Y. Berdasarkan teorema 4.2 prapeta $f^{-1}\big(tri - cl(\chi_\lambda)\big)$ adalah himpunan fuzzy tertutup-tri di X berlaku persamaan

$$tri - cl(f^{-1}(tri - cl(\chi_\lambda))) = f^{-1}\big(tri - cl(\chi_\lambda)\big) \ldots (1)$$

karena $tri - cl(\chi_\lambda) \prec \forall\chi_\lambda$ maka prapeta dari tutupan memenuhi

$$f^{-1}(tri - cl(\chi_\lambda)) \prec f^{-1}(\chi_\lambda)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (1)

$$tri - cl(f^{-1}(tri - cl(\chi_\lambda)) \prec tri - cl(f^{-1}((\chi_\lambda)))$$

yang menunjukkan bahwa relasi urutan fuzzy tri tutupan berlaku antara prapeta dari tri tutupan dan tutupan langsung dari prapeta.

Jadi, terbukti jika $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu maka $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_Y$

($\leftarrow$) Jika $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_Y$ maka akan dibuktikan $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Asumsikan jika $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_Y$ maka $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu. dan misalkan χ_δ adalah sembarang himpunan fuzzy tertutup-tri di Y sehingga $tri - cl(\chi_\delta) = \chi_\delta$ di mana χ_δ himpunan fuzzy tertutup-tri di Y. Berdasarkan asumsi berlaku

$$f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\delta)\right) \prec tri - cl(f^{-1}(\chi_\delta))$$

Karena $tri - cl(\chi_\delta) = \chi_\delta$, maka

$$f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\delta)\right) = f^{-1}(\chi_\delta)$$

Oleh karena itu, didapatkan

$$f^{-1}((\chi_\delta) \prec tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\delta)\right)$$

Namun, dalam fuzzy selalu berlaku $cl\left(f^{-1}(\chi_\delta)\right) \prec f^{-1}(\chi_\delta)$ maka disimpulkan

$$tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\delta)\right) = f^{-1}(\chi_\delta)\ .$$

karena $f^{-1}(\chi_\delta)$ adalah fuzzy tertutup-tri di X. Akibatnya, berdasarkan Teorema 4.1, f adalah fungsi fuzzy tri kontinu.

Jadi, terbukti jika $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu maka $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_Y$

Dengan demikian terbukti, jika $f: I^X \to I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $tri - cl\left(f^{-1}(\chi_\lambda)\right) \prec f^{-1}\left(tri - cl(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_Y$

4.2 Integrasi Ijtihad dengan Topik

Manusia diberi anugerah akal untuk terus mencari ilmu, memahami fenomena alam, dan berinovasi sebagai bentuk tanggung jawab terhadap potensi intelektual yang telah diberikan oleh Sang Pencipta. Dalam Al-Qur'an, upaya untuk terus belajar dan memahami kehidupan dianjurkan sebagai cara untuk mengenal kebesaran Tuhan, sebagaimana tercermin dalam alam semesta dan keteraturannya. Penelitian, eksplorasi ilmiah, dan inovasi adalah bagian dari tugas manusia untuk menggali hikmah di balik penciptaan, tidak hanya untuk memenuhi kebutuhan hidup, tetapi juga untuk menemukan jawaban dari persoalan yang kompleks.

Pencarian ilmu dan pemahaman mendorong manusia untuk memperkaya wawasan, meningkatkan kemampuan adaptasi terhadap perubahan, dan memberikan kontribusi bagi kemajuan umat. Sebagai khalifah di bumi, manusia dituntut untuk mengembangkan ilmu pengetahuan yang dapat membawa manfaat, baik dalam kehidupan sosial maupun teknologi, sebagai wujud syukur atas potensi yang dimiliki dan sebagai cara untuk terus mendekatkan diri kepada-Nya melalui ilmu yang benar dan bermanfaat. Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai konsep ijtihad.

Pada bab ini akan dibahas lebih lanjut tentang konsep ijtihad menemukan pengetahuan baru. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Ankabut:20

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانْظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ۚ ثُمَّ اللَّهُ يُنْشِئُ النَّشْأَةَ الْآخِرَةَ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ
(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Katakanlah: Jelajahi bumi, kemudian lihatlah bagaimana Allah memulai penciptaan, kemudian Allah akan mengulangi penciptaan itu. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."*

Menurut Iman Al-Qurtubi tafsir al-quran tersebut berbunyi, Katakanlah, wahai Rasul, kepada orang-orang yang mendustakan itu, "Berjalanlah kalian di muka bumi, dan perhatikanlah bermacam-macam makhluk ciptaan Allah yang ada di dalamnya. Dan lihatlah bekas orang-orang sebelum kalian yang ada di sana, setelah mereka mati dan rumah-rumah mereka kosong dari mereka. Ketahuilah bahwa Allah akan mengembalikan itu semua dengan kekuasaan-Nya di akhirat nanti dengan kebangkitan, yaitu penciptaan kembali. Begitu pula keadaan kalian. Sesungguhnya Allah sangat sempurna kekuasaan-Nya atas segala sesuatu. Ayat suci ini memerintahkan para ilmuwan untuk berjalan di muka bumi guna menyingkap proses awal penciptaan segala sesuatu, seperti hewan, tumbuhan dan benda-benda mati. Sesungguhnya bekas-bekas penciptaan pertama terlihat di antara lapisan-lapisan bumi dan permukaannya. Maka dari itu, bumi merupakan catatan yang penuh dengan sejarah penciptaan, mulai dari permulaannya sampai sekarang.

Dalam konteks ini, tafsir yang diberikan oleh Al-Qurtubi dapat diintegrasikan dengan konsep-konsep ilmiah yang sedang berkembang, seperti dalam kajian matematika dan topologi, yang membahas hubungan antar ruang dalam konteks kekontinuan dan perubahan. Sebagai contoh, konsep ruang topologi yang digunakan dalam matematika dapat dianalogikan dengan pemahaman terhadap keberadaan dan keterkaitan antar makhluk yang ada di bumi. Seperti halnya dalam teori ruang topologi, segala elemen di dalamnya (baik itu titik, himpunan, maupun fungsi) saling terkait dan berinteraksi dalam sebuah struktur yang koheren. Begitu pula, penciptaan dan kehidupan makhluk Allah di bumi ini tidaklah terlepas dari hubungan dan interaksi yang terus berlangsung, baik dalam dunia fisik maupun spiritual.

Dalam kajian matematika modern, teori himpunan fuzzy yang diterapkan dalam ruang topologi-tri yakni ruang yang terdiri dari tiga elemen atau lebih—dapat mengilustrasikan dinamika ini. Himpunan fuzzy ini memungkinkan penilaian terhadap objek yang tidak pasti, atau memiliki banyak kemungkinan status dalam satu waktu yang bersamaan, mencerminkan keadaan yang berlapis-lapis dan tidak dapat dipisahkan. Konsep ini sangat relevan dengan pemahaman bahwa penciptaan dunia ini dan kebangkitan kembali adalah proses yang tidak selalu linier dan penuh dengan ketidakpastian, sebagaimana yang bisa dipahami dalam berbagai penafsiran terhadap fenomena alam yang ada. Oleh karena itu, dalam mempelajari fenomena kebangkitan ini, tidak hanya dibutuhkan kajian tentang perubahan dalam dimensi fisik, tetapi juga pemahaman tentang dimensi kontemplatif yang lebih dalam, yang mampu menjelaskan transisi dari satu keadaan ke keadaan lainnya dalam ruang dan waktu.

Ketika diterapkan pada skripsi yang membahas kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri, hal ini membuka wawasan tentang bagaimana matematika dapat digunakan untuk menggambarkan perubahan yang tidak terhingga atau yang lebih kompleks dalam penciptaan dan kehidupan. Ruang topologi-tri yang dipadukan dengan konsep fuzzy, berfokus pada ketidakpastian dan variasi dalam elemen-elemen ruang yang berinteraksi. Dalam hal ini, kita bisa melihat adanya persamaan antara ketidakpastian dalam kehidupan manusia, penciptaan yang terjadi dengan penuh rahasia, dan kebangkitan kembali yang dijanjikan oleh Allah di akhirat. Fungsi fuzzy dalam konteks ini dapat menjadi alat yang sangat efektif untuk memodelkan ketidakpastian yang ada dalam ruang waktu baik dalam sains, maupun dalam dimensi spiritual yang lebih luas, sesuai dengan perspektif tafsir Al-Qurtubi.

Selain itu, QS. Al-Baqarah (2): 269, yang menyatakan,

يُؤْتِى ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِىَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ
(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Dia memberikan hikmah kepada siapa yang Dia kehendaki. Barangsiapa yang diberikan hikmah, sungguh ia telah diberi kebaikan yang banyak."*

Menurut Ibnu Katsir, Allah memberikan hikmah kepada siapa pun yang dikehendaki-Nya. Hikmah di sini merujuk pada kebijaksanaan dan pengetahuan yang diberikan Allah kepada hamba-hamba-Nya, yang dengan hikmah tersebut mereka mampu membedakan antara yang benar dan yang salah, serta mampu membedakan antara bisikan setan dan ilham dari Allah. Alat untuk mencapai hikmah ini adalah akal yang sehat dan cerdas, yang digunakan untuk memahami sesuatu berdasarkan bukti dan dalil, serta mampu melihat kebenaran dari suatu hal.

Orang yang telah mendapatkan hikmah seperti itu memiliki kemampuan untuk membedakan mana janji Allah dan mana godaan setan. Mereka mempercayai janji Allah dan menjauhi godaan setan. Allah menegaskan bahwa orang yang memperoleh hikmah dan pengetahuan ini telah mendapatkan kebaikan yang sangat besar, baik di dunia maupun di akhirat. Orang-orang seperti ini tidak terpengaruh oleh bisikan setan dan menggunakan seluruh potensi indra, akal, serta pengetahuannya untuk mengenali mana yang baik dan mana yang buruk, membedakan petunjuk dari Allah dan bujukan setan, lalu berserah diri sepenuhnya kepada Allah. Di akhir ayat, Allah memuji orang-orang yang mau berpikir dan menggunakan akal sehat. Mereka selalu waspada, memahami apa yang bermanfaat, dan mampu membawa mereka menuju kebahagiaan di dunia dan akhirat.

Ayat ini memberi dorongan bahwa ilmu merupakan anugerah yang mengandung hikmah bagi kehidupan. Penelitian fungsi kontinu fuzzy ini, melalui pendekatan ijtihad, adalah bentuk pencarian hikmah untuk mengembangkan pemahaman yang lebih dalam.

Ayat ini mengajarkan bahwa ilmu yang benar adalah ilmu yang mengandung kebaikan. Melalui penelitian pada fungsi kontinu fuzzy di ruang topologi-tri, peneliti berusaha menemukan hikmah dalam matematika, yang bisa menjadi landasan bagi aplikasi-aplikasi lain dalam kehidupan. Hal ini menunjukkan bagaimana setiap penemuan baru dalam ilmu dapat membawa kebaikan yang luas, sesuai makna QS. Al-Baqarah (2): 269. Semangat mencari ilmu ini menjadi motivasi besar bagi peneliti untuk terus menggali dan menginterpretasikan data serta menemukan konsep-konsep baru yang aplikatif dan mendalam.

Dalam QS. Al-Kahfi (18): 109 disebutkan:

قُل لَّوْ كَانَ ٱلْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّى لَنَفِدَ ٱلْبَحْرُ قَبْلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّى وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِۦ مَدَدًا

(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Katakanlah: Seandainya lautan menjadi tinta untuk menuliskan kalimat-kalimat Tuhanku, maka akan habislah lautan itu sebelum kalimat-kalimat Tuhanku habis ditulis, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu pula."*

Ibnu Katsir menjelaskan QS Al-Kahfi ayat 109 dengan menekankan keagungan dan keluasan ilmu Allah yang tidak terbatas. Ayat ini menggambarkan bahwa meskipun seluruh lautan di bumi dijadikan tinta untuk menuliskan kalimat-kalimat Allah yang mencakup hikmah, pengetahuan, dan tanda-tanda kekuasaan-Nya semua tinta itu tidak akan pernah cukup. Bahkan jika lautan tersebut ditambah sebanyak itu pula, tetap saja tidak akan mampu memuat seluruh ilmu Allah. Dalam tafsirnya, Ibnu Katsir menekankan bahwa ilmu Allah melampaui batas kemampuan manusia untuk memahami atau mengukurnya. Melalui ayat ini, manusia diingatkan akan keterbatasan mereka dan diajak untuk merenungi kebesaran Allah yang tak terhingga. Tafsir ini mengajak umat untuk menyadari bahwa ilmu yang mereka miliki hanyalah setitik kecil dari ilmu Allah yang tak terbatas, mendorong manusia untuk tetap rendah hati dan bersyukur atas pengetahuan yang diberikan-Nya.

Ayat ini menandakan bahwa ilmu Allah sangatlah luas, dan manusia terus dituntut untuk menggali ilmu sebanyak-banyaknya. Dengan inspirasi dari QS. Al-Kahfi (18): 109, peneliti menyadari bahwa pengetahuan yang ia gali dalam fungsi kontinu fuzzy hanyalah setitik dari luasnya ilmu Tuhan. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan dengan kesadaran bahwa matematika hanyalah salah satu jalan kecil menuju pemahaman atas keteraturan alam yang diciptakan-Nya.

Melalui ayat ini pula, kita belajar bahwa keterbatasan ilmu manusia tak harus menghentikan upaya pencarian ilmu. Dalam penelitian ini, keterbatasan teori yang ada justru menjadi motivasi untuk melakukan ijtihad dan menghasilkan gagasan baru yang lebih relevan dengan konsep ruang topologi-tri.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada Bab IV, dapat disimpulkan kekontinuan fungsi fuzzy di ruang topologi-tri sebagai berikut.

1. Pada suatu $f: \left(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,} \tau_3\right), \rightarrow (Y,\ \tau_1',\ \tau_2', {\tau_3}')$ adalah dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy, dan $f: I^x\ \rightarrow I^y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika prapeta dari setiap himpunan fuzzy terbuka-tri di Y adalah fuzzy terbuka-tri X.
2. Pada suatu $\left(X, \tau_1,\ \tau_{2,} \tau_3\right)$ dan $\left(Y, \tau'_1,\ \tau'_{2,} \tau'_3\right)$ dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f^{-1}(\chi_\lambda)$ adalah fuzzy tertutup-tri di X, di mana χ_λ adalah fuzzy tertutup-tri di Y.
3. Pada suatu $\left(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,} \tau_3\right)$ dan $\left(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,} \tau'_3\right)$ menjadi dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow\ I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f\left(cl(\chi_\lambda)\right) \prec cl\left(f(\chi_\lambda)\right), \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_X$
4. Pada suatu $\left(X,\ \tau_1,\ \tau_{2,} \tau_3\right)$ dan $\left(Y,\ \tau'_1,\ \tau'_{2,} \tau'_3\right)$ menjadi dua Ruang Topologi-Tri pada Himpunan Fuzzy. Maka, $f: I^X \rightarrow\ I^Y$ adalah fungsi fuzzy tri kontinu jika dan hanya jika $f(tri - cl(\chi_\lambda)) \prec cl(f(\chi_\lambda)) \forall \chi_\lambda \prec \widetilde{1}_X$

5.2 Saran

Penelitian ini membuka kesempatan untuk mengembangkan metode baru dalam analisis ruang topologi-tri fuzzy agar studi dalam bidang matematika topologi semakin bervariasi. Selain itu, konsep fungsi fuzzy kontinu yang telah dibahas bisa digunakan secara praktis, misalnya dalam bidang pengolahan citra, sistem kendali, atau pemodelan data yang memerlukan pendekatan fuzzy untuk menangani data yang tidak pasti. Oleh karena itu, disarankan agar penelitian selanjutnya melibatkan kerja sama dengan bidang ilmu lain sehingga konsep topologi-tri fuzzy ini bisa lebih bermanfaat.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Mahalli, Jalaluddin dan As-Suyuthi, Jalaluddin, Tafsir al-Jalalain, Dar al-Ma'arif, Mesir

Al-Qurtubi, Abu 'Abd Allah Muhammad bin Ahmad. *Al-Jami' li-Ahkam al-Qur'an* (Tafsir Al-Qurtubi). Jilid 10. Dar al-Kutub al-Ilmiyyah, Beirut, 2000.

Anggraini, T., & Pratama, D. M. (2024). Menganalisis Surat Al-Alaq Ayat 1-5 Tentang Belajar Berdasarkan Tafsir Tarbawi. IHSANIKA: Jurnal Pendidikan Agama Islam, 2(3), 183-206. https://doi.org/10.59841/ihsanika.v2i3.1423, diakses pada : 30-09-2024 18.47.

Azad K.K., *On fuzzy semi-continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity*, J. Math., Anal. Appl. 82(1981), 14-32.

Bartle, R.G., & Sherbet, D. R. (2010). *Introduction to real analysis* (4rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Burgin, M., & Duman, O. (2010). *Approximations by linear operators in spaces of fuzzy continuous functions. Positivity*, 15, 57-72.

Change C.L., *Fuzzy topological spaces*, (1968) J. Math. Anal. Appl. 24,182-190.

Chateauneuf, A. (1987). *Continuous representation of a preference relation on a connected topological space*. *Journal of Mathematical Economics*, 16, 139-146.

Hartayati E., & Juniati, D. (2014). *Fuzzy Slightly Precontinuity Pada Topologi Fuzzy.* MATHunesa, Jurnal Matematika, 3(3), 27-35.

Ibnu Katsir. Tafsir Surah Al-Ankabut Ayat 20**.** TafsirWeb. https://tafsirweb.com, diakses pada 1 Oktober 2024.

Ibnu Katsir, Tafsir al-Qur'an al-Azim, Jilid 7, Dar al-Fikr, Beirut.

Jeyasudha, L. (2023). *Tri-Closed Sets In Tri-Topological Spaces*. *Ratio Mathematica*, *45*.

Kementrian Agama. (2022). *Quran kemenag.*

Lee K.H. 2005. *First Course On Fuzzy Theory and Application*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Lowen, R. (1976). *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.

Morris, S. A., (1989). *Topology without tears*. *University of New England*.

Oktaviana, S. D., & Juniati, D. (20 13). Quasi-coincident, Interior Dan Closure pada Topologi Fuzzy. MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 1(5).

Palaniammal S.,(2011). *Study of Tri topological spaces*, Ph.D Thesis.

Satria, H., & Aini, Q. U. (2023). *Definition and basic properties of fuzzy tri-continuous function*.

Sharma, R., Deole, B. A., & Verma, S. (2018). *Fuzzy connectedness in fuzzy tri topological space*. *International Journal of Applied Engineering Research*, *13*(16).

Sharma, R., Deole, B. A., & Verma, S. (2018). *Fuzzy semi–open sets and fuzzy pre–open sets in fuzzy quad topological space*. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, *17*(1), 123-134.

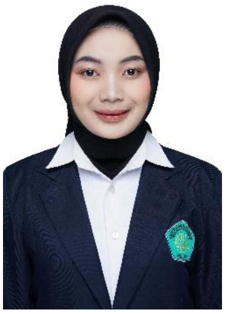
Shi W, Liu K. 2006. *A fuzzy topology for computing the interior,boundary,and exterior of spatial objects quantitatively in GIS*. Hongkong : *The Hongkong Polythechnic University*.

Singh, T. B. (2019). *Introduction to Topology*. Springer Nature Singapore Pte Ltd.

Zadeh L.A., *Fuzzy sets, information and control* (1965) ,8,338-353.

Zimmermann. H. J. 1992. *Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Second, Revised Edition. Massachusetts : Kluwer Academic Publishe*

RIWAYAT HIDUP



Marizcha Lutfiana Putri, lahir di Surabaya pada tanggal 11 Maret 2003. Anak pertama dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Mohamad Hadiyono dan Ibu Mar'atus Sholihah serta kakak dari Adik Ardya Pramesti Regita C. Saat ini penulis tinggal Bersama dengan orang tuanya di Jalan Flamboyan RT 16 RW 05, Kelurahan Sukoanyar, Kecamatan Wajak, Kabupaten Malang. Penulis memulai Pendidikan formal dimulai dari Taman kanak-kanak di Tk Dharma Wanita 02 Wajak lulus pada tahun 2009 lalu Pendidikan sekolah dasar di SDN 1 Sukoanyar dan lulus pada tahun 2015, lalu melanjutkan Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Wajak dan lulus pada tahun 2018. Setelah itu penulis melanjutkan Pendidikan sekolah menengah keatas di SMA Negeri 1 Tumpang dan lulus pada tahun 2021. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikannya di perguruan tinggi pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama berada di bangku kuliah, penulis aktif mengikuti beberapa organisasi yakni menjadi pengurus Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika selama dua periode sebagai anggota divisi Kematematikaan HMPS "Integral" Matematika pada tahun 2022 dan anggota divisi *Internal Public Relation* (IPR) pada tahun 2023, Selain itu, penulis juga berpartisipasi sebagai peserta Riset Kompetitif Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi dan menjadi salah satu presenter *International Conference on Green Technology* (ICGT) pada tahun 2024.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Marizcha Lutfiana Putri
NIM : 210601110097
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Kekontinuan Fungsi Fuzzy di Ruang Topologi-Tri
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	4 Maret 2024	Konsultasi Topik	1.
2.	25 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	1 April 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	22 April 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	25 April 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	29 April 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	2 Mei 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	7.
8.	6 Mei 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	8.
9.	27 Mei 2024	ACC Bab I, II, dan III	9.
10.	23 September 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	26 September 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	11.
12.	3 Oktober 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	12.
13.	10 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal	13.
14.	18 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal.	14.
15.	21 Oktober 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.
16.	25 Oktober 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	28 Oktober 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
18.	30 Oktober 2024	Konsultasi Bab IV dan V	18.
19.	4 November 2024	Konsultasi Bab IV dan V	19.
20.	6 November 2024	ACC Bab IV dan V	20.
21.	8 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	21.
22.	11 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	22.
23.	13 November 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	23.
24.	15 November 2024	ACC Seminar Hasil	24.
25.	27 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	25.
26.	29 November 2024	ACC Sidang Skripsi	26.
27.	5 Februari 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	27.
28.	11 Februari 2025	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	28.
29.	17 Februari 2025	Konsultasi Revisi Kajian Agama Seminar Hasil	29.
30.	15 Mei 2025	ACC Keseluruhan	30.

Malang, 15 Mei 2025
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005