

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA VIRUS RNA
DENGAN IMUNITAS DAN PENGOBATAN
STUDI KASUS: SARS-COV-2**

SKRIPSI

**Oleh:
MOHAMAD AFIF ZAKY ZAMZAMI
NIM. 200601110044**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA VIRUS RNA
DENGAN IMUNITAS DAN PENGOBATAN
STUDI KASUS: SARS-COV-2**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Mohamad Afif Zaky Zamzami
NIM. 200601110044**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2025**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA VIRUS RNA
DENGAN IMUNITAS DAN PENGOBATAN
STUDI KASUS: SARS-COV-2**

SKRIPSI

OLEH
Mohamad Afif Zaky Zamzami
NIM. 200601110044

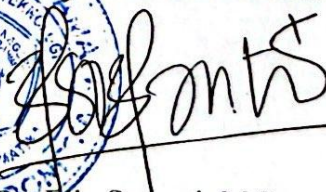
Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 18 Februari 2025

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II


Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001


Achmad Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA VIRUS RNA
DENGAN IMUNITAS DAN PENGobatan
STUDI KASUS: SARS-COV-2**

SKRIPSI

OLEH
Mohamad Afif Zaky Zamzami
NIM. 200601110044

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Malang, 25 Februari 2025

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Achmad Nashichuddin, M.A.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mohamad Afif Zaky Zamzami
NIM : 200601110044
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Virus RNA dengan
Imunitas dan Pengobatan Studi Kasus *SARS-COV-2*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Februari 2025



Mohamad Afif Zaky Zamzami

NIM. 200601110044

MOTTO

“Sebaik-baiknya manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahim

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa memberikan pertolongan dan kemudahan kepada penulis dalam melewati segala proses penyelesaian skripsi ini.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, mama tersayang Binti Rosidatul Bariyah dan Papa tercinta Ahmad Basori yang selalu membuatku termotivasi dan selalu menyirami kasih sayang, selalu mendoakanku, selalu menasehatiku menjadi lebih baik. Terima kasih Mama. Terimah kasih Papa atas semua yang telah engkau berikan semoga diberi kesehatan dan panjang umur agar dapat menemani langkah kecilku bersama adik-adikku tercinta Kulsum Bunga Laswarti dan Mohamad Rafli Khoirul Ibad menuju kesuksesan.

Untuk diri saya sendiri, Mohamad Afif Zaky Zamzami, atas segala kerja keras dan semangatnya hingga tidak pernah menyerah untuk menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih telah bertahan sejauh ini dan percaya atas rencana Allah SWT yang lebih indah.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi dengan judul "Analisis Dinamik Model Matematika Virus RNA dengan Imunitas dan Pengobatan, Studi Kasus: SARS-CoV-2" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana di bidang Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing umat manusia dari kegelapan menuju cahaya Isl`am.

Dalam penyusunan proposal ini tidak terlepas dari dukungan, bimbingan, serta bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay M.Si., selaku dosen pembimbing I, atas segala ilmu, bimbingan, dan motivasinya.
5. Achamd Nashichuddin M.A., selaku dosen pembimbing II, atas arahan dan dukungannya.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Teruntuk kedua orang tua saya. Saya berterima kasih setinggi-tingginya kepada kedua orang tua tercinta atas doa, dukungan, dan cinta kasih yang selalu diberikan. Terima kasih atas pengorbanan, kerja keras, dan waktu yang telah diberikan. Semoga Allah SWT membalas segala kebaikan dan memudahkan jalan menuju kebahagiaan dunia dan akhirat.

8. Teruntuk pemilik NIM 200202110111, terimakasih atas kesabaran yang telah mendukung serta menemani penulis kurang lebih selama 5 tahun dan masa-masa kedepannya. Terimakasih telah menjadi tempat cerita suka dan duka penulis, dan menemani dalam proses penyusunan skripsi ini hingga selesai.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu baik secara moril maupun materiil.
10. Seluruh mahasiswa “MAHATMA” Program Studi Matematika angkatan 2020.

Semoga Allah *subhanahu wa ta'ala* membalas kebaikan semua pihak yang telah membantu penulis. Penulis berharap, karya ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan keilmuan terutama dalam bidang matematika terapan.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 25 Februari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN TEORI	7
2.1 Teori Pendukung	7
2.1.1 Persamaan Differensial	7
2.1.1.1 Persamaan Differensial Biasa Linier dan Non Linier	7
2.1.1.2 Sistem Persamaan Differensial	8
2.1.1.3 Sistem Autonomous	9
2.1.2 Titik Keseimbangan	12
2.1.3 Kestabilan Titik Keseimbangan	12
2.1.4 Matriks Jacobian	12
2.1.5 Nilai Eigen	14
2.1.6 Angka Reproduksi Dasar	15
2.1.7 Metode Runge Kutta Orde-4	16
2.2 Pengobatan Penyakit Menurut Islam	17
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung	20
BAB III METODE PENELITIAN	21
3.1 Jenis Penelitian	21
3.2 Data dan Sumber Penelitian	21
3.3 Tahapan Penelitian	22
BAB IV PEMBAHASAN	24
4.1 Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-CoV-2	24
4.1.1 Alur Pembentukan Model	24
4.1.1.1 Laju Perubahan Sel Sehat	25
4.1.1.2 Laju Perubahan Sel Terinfeksi Laten	26
4.1.1.3 Laju Perubahan Sel Terinfeksi Produktif	26

4.1.1.4 Laju Perubahan Virus.....	26
4.1.1.5 Laju Perubahan Sel Imun	26
4.1.1.6 Estimasi Parameter.....	27
4.1.2 Titik Keseimbangan	30
4.1.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	31
4.1.2.2 Titik Keseimbangan Endemik.....	33
4.1.3 Angka Reproduksi Dasar	41
4.1.4 Kestabilan Titik Keseimbangan	44
4.1.4.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	45
4.1.4.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik.....	47
4.2 Simulasi Numerik	51
4.2.1 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 < 1$	51
4.2.2 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 > 1$	59
4.2.3 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$	65
4.2.4 Hubungan Antar Parameter	72
4.2.5 Verifikasi Solusi Numerik.....	75
4.3 Model Matematika Virus RNA dalam Pandangan Islam	76
BAB V PENUTUP	78
5.1 Kesimpulan	78
5.2 Saran	79
DAFTAR PUSTAKA	80
LAMPIRAN.....	83
RIWAYAT HIDUP	100

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model Dinamika Populasi Sel, Virus dan Antibodi	9
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Matematika Virus SARS-Cov-2 dengan Imunitas dan Pengobatan	25
Gambar 4.2	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=0.9209<1$	52
Gambar 4.3	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=0.9209<1$	53
Gambar 4.4	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=0.9209<1$	54
Gambar 4.5	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=0.9209<1$	56
Gambar 4.6	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=0.9209<1$	57
Gambar 4.7	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	60
Gambar 4.8	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	61
Gambar 4.9	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	62
Gambar 4.10	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	63
Gambar 4.11	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	64
Gambar 4.12	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	66
Gambar 4.13	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	67
Gambar 4.14	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	68
Gambar 4.15	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	69
Gambar 4.16	Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0=2.6009>1$	71
Gambar 4.17	Hubungan Nilai Parameter μ, β_1, ϵ terhadap Nilai $\mathcal{R}_0$	73

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Nilai Awal Model Virus SARS-CoV-2 dengan Imunitas dan Pengobatan	29
Tabel 4.2 Nilai Parameter Model Virus SARS-CoV-2 dengan Imunitas dan Pengobatan	29
Tabel 4.3 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2.....	58
Tabel 4.4 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2.....	65
Tabel 4.5 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2.....	71
Tabel 4.6 Nilai Hubungan antara Variabel μ, β, ϵ dan Angka Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$)	74
Tabel 4.7 Perbandingan nilai titik kesetimbangan secara analitik dan Numerik ketika $t = 10000$	75

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan pada skripsi yang mempunyai arti sebagai berikut:

$S(t)$	: Banyak sel sehat atau tidak terinfeksi pada waktu t
$L(t)$	: Banyak sel yang terinfeksi laten pada waktu t
$I(t)$	: Banyak sel yang terinfeksi produktif pada waktu t
$V(t)$	: Banyak virus pada waktu t
$W(t)$	: Banyak respon sel imun pada waktu t
β_1	: Laju sel terinfeksi melalui partikel virus
β_2	: Laju sel terinfeksi melalui sel yang telah terinfeksi
μ_1	: Laju kematian sel yang tidak terinfeksi
μ_2	: Laju kematian sel yang terinfeksi laten
μ_3	: Laju kematian sel terinfeksi
μ_4	: Laju penghapusan virus bebas secara alami
μ_5	: Laju penurunan sel imun
σ	: Laju produksi sel yang tidak terinfeksi
μ	: Laju kematian sel
q	: Laju respon sel imun dalam menghambat infeksi
ρ	: Laju penyembuhan sel laten
δ	: Laju aktivasi sel laten menjadi sel terinfeksi produktif
k	: Laju produksi virus bebas oleh sel terinfeksi produktif
ϵ	: Efektivitas pengobatan antivirus
p	: Laju netralisasi virus oleh sel imun
r	: Laju produksi sel imun

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Konstruksi Model dan Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran <i>SARS-CoV-2</i> dengan Bantuan <i>Software</i> MAPLE ..	83
Lampiran 2	Script Simulasi Numerik Penyebaran <i>SARS-COV-2</i> dengan $\mathcal{R}_0 < 1$ Menggunakan <i>Software</i> MATLAB	85
Lampiran 3	Script Simulasi Numerik Penyebaran <i>SARS-COV-2</i> dengan $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W = 0$ Menggunakan <i>Software</i> MATLAB	90
Lampiran 4	Script Simulasi Numerik Penyebaran <i>SARS-COV-2</i> dengan $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$ Menggunakan <i>Software</i> MATLAB	95

ABSTRAK

Zamzami, Mohamad Afif Zaky. 2025. **Analisis Dinamik Model Matematika Virus RNA dengan Imunitas dan Pengobatan Studi Kasus: SARS-COV-2.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Analisis Dinamik, Angka Reproduksi Dasar, Model Virus SARS-CoV-2, Simulasi Numerik.

Penelitian ini mengkaji tentang analisis dinamika model penyebaran virus SARS-CoV-2 pada tubuh manusia menggunakan lima variabel yaitu, populasi sel sehat (S), populasi sel terinfeksi laten (L), populasi sel terinfeksi produktif (I), populasi virus (V), dan populasi sel imun (W). Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penyebaran virus SARS-CoV-2 sehingga dapat membantu merumuskan strategi yang dapat memutus penyebaran virus. Langkah penelitian yang dilakukan pertama kali yaitu mengonstruksi model kemudian menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Angka reproduksi dasar juga dicari yang berfungsi untuk mengetahui tingkat penyebaran virus SARS-CoV-2. Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan software MATLAB untuk lebih mudah dalam memahami. Dari hasil penelitian, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, kedua titik kesetimbangan tersebut bersifat stabil asimtotik. Angka reproduksi yang diperoleh menghasilkan nilai yang kurang dari 1, sehingga hal itu menunjukkan bahwa penyebaran virus akan terhenti. Selain itu, hasil simulasi menunjukkan bahwa jumlah sel yang terinfeksi virus secara laten maupun produktif pada mulanya akan naik, namun pada $t = 3$ akan mulai menurun dan akan menuju nol, yang artinya sel tidak ada yang terinfeksi virus. Begitu juga dengan sel virus yang akan hilang seiring berjalannya waktu.

ABSTRACT

Zamzami, Mohamad Afif Zaky. 2025. **Dynamic Analysis of Mathematical Model of RNA Virus with Immunity and Treatment Case Study: SARS-COV-2.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: Dynamic Analysis, Basic Reproduction Rate, SARS-CoV-2 Virus Model, Numerical Simulation.

This study examines the analysis of the dynamics of the SARS-CoV-2 virus spread model in the human body using five variables, namely, healthy cell population (S), latent infected cell population (L), productive infected cell population (I), virus population (V), and immune cell population (W). The purpose of this study is to determine the spread of the SARS-CoV-2 virus so that it can help formulate strategies that can stop the spread of the virus. The first research step is to construct the model, then determine the equilibrium points and analyze its stability. Basic reproductive numbers are also determined which serve to determine the level of spread of the SARS-CoV-2 virus. Then a numerical simulation was carried out using MATLAB software to make it easier to understand. From the results of the study, two equilibrium points were obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Based on the Routh-Hurwitz criterion, the two equilibrium points are unstable. The reproduction number obtained yields a value of less than 1, indicating that the spread of the virus will stop. In addition, the simulation results show that the number of cells infected with the virus latently or productively will initially increase, but at $t = 3$ it will begin to decrease and will go to zero, which means that no cells are infected with the virus. Likewise, viral cells will disappear over time.

مستخلص البحث

زمزمي، محمد عفيف زكي. ٢٠٢٥. تحليل الديناميكي للنماذج الرياضية لفيروسات الحمض النووي الريبي ذات المناعة والعلاج دراسة الحالة: *SARS-COV-2*. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (I) د. عثمان باجالاي، الماجستير. (II) أحمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: تحليل الديناميكي، رقم التكاثر الأساسي، نموذج فيروس *SARS-CoV-2*، المحاكاة العددية.

يتناول هذا البحث تحليل ديناميكيات نموذج انتشار فيروس *SARS-CoV-2* في جسم الإنسان باستخدام خمسة متغيرات، وهي مجموعة الخلايا السليمة (S)، مجموعة الخلايا المصابة الكامنة (L)، الخلية المصابة المنتجة السكان (I)، السكان الفيروس (V)، السكان الخلايا المناعية (W). الهدف من هذا البحث هو تحديد مدى انتشار فيروس *SARS-CoV-2* حتى يتمكن من المساعدة في صياغة استراتيجيات يمكن أن توقف انتشار الفيروس. وكانت الخطوة البحثية الأولى التي تم تنفيذها هي بناء نموذج ومن ثم تحديد نقطة التوازن وتحليل ثباته. ويتم البحث أيضاً عن رقم التكاثر الأساسي الذي يعمل على تحديد مستوى انتشار فيروس *SARS-CoV-2*. ثم تم إجراء محاكاة عددية باستخدام برنامج *MATLAB* لتسهيل الفهم. ومن نتائج البحث تم الحصول على نقطتي توازن، وهما نقطة التوازن الخالية من الأمراض ونقطة التوازن المستوطنة. استناداً إلى معيار روث-هرويتز، فإن كلا نقطتي التوازن غير مستقرتين. وينتج رقم التكاثر الذي تم الحصول عليه قيمة أقل من 1، وهذا يشير إلى أن انتشار الفيروس سيتوقف. عدا عن ذلك، فإن نتائج المحاكاة تظهر أن عدد الخلايا المصابة بالفيروس بشكل خفي أو منتج سيزداد في البداية، ولكن عند $t = 3$ سيبدأ في الانخفاض ويصل إلى الصفر، مما يعني عدم إصابة أي خلايا بالفيروس. وبالمثل، ستختفي خلايا الفيروس بمرور الوقت.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Virus RNA adalah salah satu penyebab utama penyakit menular pada manusia dan terus menjadi masalah kesehatan masyarakat yang signifikan di seluruh dunia, terutama setelah munculnya jenis-jenis virus baru tersebut. Sebagai contoh, penyakit coronavirus adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus corona baru yang dinamakan *severe acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-CoV-2) (Gorbalenya dkk., 2020). Sejak kasus pertama muncul di Wuhan, Tiongkok pada akhir 2019, penyakit ini menyebar dengan cepat dari satu negara ke negara lain dan menyebabkan kerusakan ekonomi yang besar dan banyak kematian di seluruh dunia. Menurut *World Health Organization* (WHO) per 18 September 2022, virus SARS-CoV-2 telah menginfeksi lebih dari 609 juta orang di seluruh dunia dan menyebabkan lebih dari 6.5 juta kematian.

Meskipun telah diambil langkah-langkah pencegahan dan vaksinasi telah diberikan di beberapa negara, SARS-CoV-2 terus menyebar. Hal ini mendorong para peneliti untuk mengembangkan perawatan atau vaksin untuk mencegah atau menghentikan perkembangan penyakit ini. Pengobatan antivirus untuk SARS-CoV-2 tetap menjadi tantangan. Beberapa obat telah menunjukkan aktivitas antivirus yang menjanjikan. Paxlovid misalnya, terbukti sangat efektif melawan SARS-CoV-2 dengan tingkat efektivitas sebesar 89% pada pasien beresiko tinggi. Selain dengan pengobatan, tubuh juga memiliki perlindungan diri alami dalam melawan virus SARS-CoV-2. Diantara antibodi yang dimiliki manusia, antibodi

IgM, IgA, dan igG adalah antibodi yang paling sering dijelaskan dalam infeksi SARS-CoV-2.

Dari pernyataan di atas, dapat dilihat bahwa sesungguhnya Allah juga menurunkan penyakit sekaligus menyertakan penawarnya. Hal itu telah tercantum dalam firman Allah SWT. pada Al-Qur'an surat Asy-Syu'ara ayat 80:

وَإِذَا مَرَضْتُ فَهُوَ يَشْفِينِي

Artinya: *“Dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku.”*

Kementrian agama RI menafsirkan Surat Asy-Syuara ayat 80:

“Apabila aku sakit, dialah pada hakikatnya yang menyembuhkan aku, baik melalui sebab atau tidak”.

Ayat diatas dan juga ayat sebelum dan sesudahnya menceritakan tentang sikap penyerahan diri serta kepasrahan diri Nabi Ibrahim kepada Allah swt. Ibnu Katsir menjelaskan ayat tersebut sebagai sikap Nabi Ibrahim dengan perkataan itu selain menunjukkan bentuk kepasrahan namun juga menunjukkan bentuk tata krama terhadap Allah SWT yang juga menunjukkan kalimat akhlak baik kepada-Nya serta menganggap bahwa hal tersebut adalah bentuk pengabdian kepada sang Khalik dan juga marah atas suatu penyakit yang diderita adalah suatu tindakan yang menggugurkan nilai akhlak kepada Allah SWT. Bukan berarti hanya pasrah, namun upaya haruslah dilakukan untuk menuju kesembuhan (Rozi & Arif, 2023).

Vaksin tidak berfungsi sebagai obat penyembuh, melainkan sebagai perlindungan bagi manusia agar tidak tertular virus menular. Secara logis, tindakan ini adalah upaya untuk menghilangkan penyakit menular dari populasi manusia, dengan mengurangi tempat bagi virus untuk berkembang biak. Selain itu, kesembuhan sejati dari penyakit tetap berada di tangan Allah SWT. Manusia

hanya berusaha atau ikhtiar dengan melakukan pengobatan (Andi Mujahidil Ilman & Andi Muhammad Ali Amiruddin, 2022).

Karena penyebaran *SARS-CoV-2* yang cepat, maka diperlukan adanya model matematika yang dapat memprediksi penyebaran virus *SARS-CoV-2* sehingga dengan adanya model tersebut dapat membantu merumuskan strategi yang paling efektif untuk mengendalikan penyebaran virus (Hattaf, 2020). Akhir-akhir ini, pemodelan penyebaran *SARS-CoV-2* telah menarik perhatian beberapa peneliti. Namun, terdapat sedikit model yang menggambarkan dinamika virus ini di dalam tubuh manusia dengan keberadaan kekebalan. Untuk alasan ini, Hattaf (2020) mengusulkan model matematika pada tubuh manusia yang menggambarkan interaksi antara *SARS-CoV-2*, sel epitel paru-paru inang, dan sel *Cytotoxic T Lymphocytes* (CTL) menggunakan empat subpopulasi yaitu sel epitel sehat (S), sel epitel terinfeksi (I), virus *SARS-CoV-2* (V) dan sel CTL (W). Model yang dibuat oleh Hattaf tersebut hanya melibatkan penyembuhan internal atau dari dalam diri manusia dan tidak menyertakan adanya penyembuhan dengan pengobatan. Kemudian Chatterjee (2021) mempelajari model matematika infeksi *SARS-CoV-2* dengan pengobatan antivirus dan respon kekebalan CTL yang menggabungkan efek respon imun litik dan non-litik. Hattaf (2023) melakukan penelitian dengan model matematika yang menggabungkan dua mode dasar penularan virus, yaitu penularan langsung antar sel dan infeksi virus ke sel melalui lingkungan eksternal dengan menambahkan subpopulasi sel yang terinfeksi laten (L). Namun, pada penelitian tersebut tidak dijelaskan pengaruh pengobatan dan laju antibodi pada tubuh manusia berdampak pada laju virus *SARS-CoV-2*. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dianalisis pengaruh dari laju antibodi terhadap

laju virus *SARS-CoV-2* pada tubuh manusia dengan dua cara penularan yaitu penularan secara langsung antar sel dan penularan virus ke sel melalui lingkungan eksternal.

Penelitian ini dilakukan mengingat pentingnya mengatasi penyakit menular yang disebabkan oleh virus *SARS-CoV-2*. Dengan adanya model tersebut dapat membantu pemahaman mengenai hubungan antara antibodi yang ada pada tubuh dengan virus *SARS-CoV-2* dan juga dapat melihat efek yang ditimbulkan oleh antibodi terhadap jumlah *SARS-CoV-2*. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi dalam pengembangan obat yang lebih efektif melawan virus *SARS-CoV-2* dibandingkan dengan pengobatan yang tersedia saat ini. Lebih lanjut, untuk menganalisis pengaruh antibodi terhadap virus *SARS-CoV-2* akan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Metode tersebut dipilih karena akurasi yang diperoleh cukup tinggi dibandingkan dengan metode lain seperti metode euler dan metode heun (Hurit dan Sudi, 2021).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis dinamik model matematika virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan pengobatan?
2. Bagaimana simulasi numerik model matematika virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan pengobatan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disusun, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis dan memberikan jawaban mengenai dinamika model matematika virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan penyembuhan.
2. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model matematika virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan penyembuhan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini dijelaskan sebagai berikut:

1. Model penyebaran virus *SARS-CoV-2* yang telah dianalisis dapat dijadikan sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya.
2. Memberikan wawasan mengenai pentingnya sel imun dan pengobatan dalam menanggulangi penyebaran virus *SARS-CoV-2* pada manusia.
3. Hasil dari penelitian ini dapat berkontribusi dalam pengembangan obat yang lebih efektif melawan virus *SARS-CoV-2* dibandingkan dengan pengobatan yang tersedia saat ini.

1.5 Batasan Masalah

Agar pembahasan yang dipaparkan lebih terarah, maka dibuat batasan masalah sebagai berikut:

1. Model dan Parameter yang digunakan pada skripsi ini merujuk pada artikel (Hattaf, 2023).

2. Simulasi ini dijalankan untuk melihat pergerakan virus *SARS-CoV-2* dengan adanya sel imun dan pengobatan.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Persamaan Differensial

Persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas, terhadap satu atau lebih variabel bebas dinamakan persamaan differensial (Zill, 2009). Persamaan diferensial dibagi menjadi dua jenis, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang hanya memiliki satu variabel bebas, dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial yang mencakup variabel tak bebas y dan variabel bebas t biasanya dinotasikan dengan $\frac{dy}{dt}$ atau $y'(t)$ atau y' .

Secara umum persamaan differensial yang melibatkan variabel-variabel ini dapat dinyatakan dalam bentuk

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Dengan $y^{(n)}$ merupakan turunan ke- n dari y terhadap t .

2.1.1.1 Persamaan Differensial Biasa Linier dan Non Linier

Suatu persamaan diferensial disebut linear jika tidak terdapat perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya. Bentuk umumnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = F(t) \quad (2.2)$$

dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan F merupakan fungsi-fungsi dari t saja dan $a_0(t) \neq 0$. Persamaan differensial yang tidak bisa ditulis dalam bentuk (2.2) dinamakan persamaan differensial nonlinier (Ross, 2010).

Persamaan diferensial dikategorikan sebagai nonlinier jika memenuhi setidaknya satu dari kriteria berikut:

1. Mengandung variabel tak bebas atau turunannya dengan pangkat selain satu.
2. Terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan/atau turunannya.
3. Memuat fungsi transenden dari variabel tak bebas dan turunannya.

Berikut ini merupakan contoh persamaan differensial non linier

$$\frac{dy}{dt} = ty \left(1 - \frac{t}{y} \right) + y^2 \quad (2.3)$$

Contoh pada Persamaan 2.3 merupakan contoh dari persamaan differensial biasa non linier karena terdapat perkalian antara variabel tak bebas yaitu y^2 .

2.1.1.2 Sistem Persamaan Differensial

Kumpulan dari n persamaan differensial yang melibatkan n fungsi, dengan $n \geq 2$ dinamakan sistem persamaan differensial (Ross, 2010). Secara umum, bentuk dari sistem persamaan differensial adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$\vdots$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Turunan $\frac{dy_n}{dt}$ mewakili turunan fungsi y_n terhadap t , sedangkan f_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan t .

2.1.1.3 Sistem Autonomous

Sistem dinamik adalah sistem di mana kondisi masa depannya dapat diprediksi berdasarkan kondisi saat ini atau masa lalu (Boyce dkk, 2017). Sistem dinamik dibagi menjadi dua jenis, yaitu sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskrit. Sistem dinamik diskret dinyatakan dalam bentuk persamaan beda, dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$\vec{y}_{t+1} = \vec{f}(\vec{y}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ dan } \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

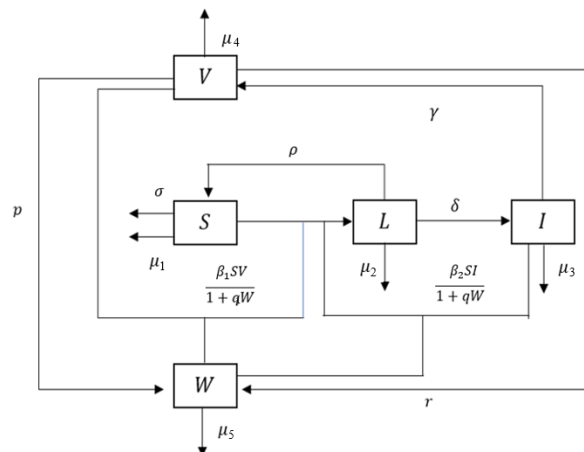
sedangkan bentuk umum dari sistem dinamik kontinu dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Bentuk dari sistem dinamik kontinu salah satunya yaitu sistem autonomous dengan bentuk umum

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}), \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

dengan $\vec{f}(\vec{y})$ merupakan fungsi kontinu yang tidak bergantung terhadap variabel bebas t . Berikut ini merupakan contoh dari sistem autonomous nonlinier yang juga akan dibahas pada skripsi ini.



Gambar 2.1 Model Dinamika Populasi Sel, Virus dan Antibodi

Diagram kompartemen pada Gambar 2.1 merupakan model matematika virus RNA dengan imunitas dan pengobatan. Model ini melibatkan lima variabel yaitu banyak sel sehat (S), banyak sel terinfeksi laten (L), banyak sel terinfeksi produktif (I), banyak virus (V), banyak respon sel imun (W). Laju sel sehat diproduksi dengan laju σ , dan mati dengan laju $\mu_1 S$. Kemudian sel sehat akan terinfeksi oleh partikel virus bebas dengan laju $\beta_1 SV$ atau melalui kontak langsung dengan sel-sel yang terinfeksi dengan laju $\beta_2 SI$. Kedua cara penularan tersebut akan dihambat oleh respon imun non-litik dengan laju $1 + qW$. Selain itu, diasumsikan bahwa sel-sel yang terinfeksi secara laten dapat sembuh dengan laju ρL akibat dari pembersihan virus melalui proses non sitolitik, sehingga diperoleh model dinamika populasi sel darah merah sehat terhadap waktu sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} + \rho L \quad (2.7)$$

Populasi sel yang terinfeksi oleh virus dengan dua cara, akan mati dengan laju $\mu_1 L$ dan menjadi sel yang terinfeksi secara produktif dengan laju δL . Selain itu, sel juga dapat sembuh dengan laju ρL . Berikut ini merupakan laju perubahan sel yang terinfeksi laten.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} - (\mu_2 + \delta + \rho)L \quad (2.8)$$

Populasi sel yang berubah dari terinfeksi laten menjadi terinfeksi produktif δL , beberapa akan mati dengan laju $\mu_3 I$, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{dI}{dt} = \delta L - \mu_3 I \quad (2.9)$$

Virus-virus yang diproduksi oleh sel-sel yang telah terinfeksi pada laju kI , dibersihkan dengan laju $\mu_4 V$, dan dinetralkan oleh antibodi dengan laju pVW . Di sini, parameter ϵ mewakili efektivitas pengobatan antivirus yang menghambat produksi partikel virus dan diperoleh model laju perubahan virus yaitu

$$\frac{dV}{dt} = k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW \quad (2.10)$$

Antibodi akan berkembang pada tubuh sebagai respon terhadap virus-virus yang ada dengan laju rVW dan mengalami peluruhan dengan laju $\mu_5 W$ sehingga diperoleh model laju perubahan sel imun sebagai berikut

$$\frac{dW}{dt} = rVW - \mu_5 W \quad (2.11)$$

Persamaan differensial non linier pada Persamaan 2.7 sampai Persamaan 2.11 merupakan persamaan differensial non linier autonomous karena pada ruas kanan tidak mengandung variabel bebas t . Karena kelima persamaan tersebut saling berhubungan, maka dinamakan sistem persamaan differensial autonomous non linier (Boyce, dkk. 2017). Dari penjelasan di atas, maka didapatkan model kontinu virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan pengobatan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sigma - \mu_1 S - \frac{(\beta_1 SV)}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} + \rho L, \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} - (\mu_2 + \delta + \rho)L, \\ \frac{dI}{dt} &= \delta L - \mu_3 I, \\ \frac{dV}{dt} &= k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{dW}{dt} = rVW - \mu_5 W.$$

2.1.2 Titik Keseimbangan

Titik (S, L, I, V, W) pada sistem (2.12) dikatakan titik kritis apabila memenuhi $\frac{dS}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0$. Titik kritis (S, L, I, V, W) pasti bernilai konstan atau tetap karena $S' = L' = I' = V' = W' = 0$. Kondisi yang menyebabkan $S' = L' = I' = V' = W' = 0$ dinamakan keadaan setimbang, sedangkan titik kritis yang memenuhi kondisi setimbang yang merupakan solusi dari sistem (2.12) disebut sebagai titik keseimbangan (Boyce dkk, 2017).

2.1.3 Kestabilan Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dikatakan stabil atau tidak stabil berdasarkan bagaimana sistem merespon terhadap gangguan kecil (Boyce dkk, 2017). Terdapat tiga sifat kestabilan titik keseimbangan sebagai berikut:

1. Stabil asimtotik jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya merupakan real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
2. Stabil tetapi tidak stabil asimtotik jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya merupakan bilangan imajiner murni.
3. Tidak stabil jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya merupakan bilangan real positif atau mempunyai bagian positif.

2.1.4 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian dapat berbentuk matriks persegi dengan jumlah baris dan kolom yang sama atau matriks persegi panjang dengan jumlah baris dan kolom yang berbeda. Selain itu, matriks Jacobian juga didefinisikan sebagai

matriks yang mengandung turunan parsial orde pertama dari fungsi multivariabel (Boyce dan Diprima, 2000).

Secara umum untuk suatu sistem persamaan differensial non-linier

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= f_1 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= f_2 \\
 \frac{dy_3}{dt} &= f_3 \\
 &\vdots \\
 \frac{dy_n}{dt} &= f_n
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sebagai variabel tak bebas dan $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ sebagai fungsi non-linier yang menggambarkan dinamika sistem. Matriks jacobian $J(x)$ dari sistem ini adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial dari fungsi f_i terhadap variabel y_j , yaitu:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Matriks jacobian ini kemudian dievaluasi pada titik tetap y_0 untuk mendapatkan model linier yang menggambarkan perilaku sistem disekitar y_0

Evaluasi matriks jacobian di sekitar titik tetap atau solusi *steady-state* memungkinkan dilakukannya analisis stabilitas melalui nilai eigen dari matriks tersebut. Nilai eigen dengan bagian riil negatif menunjukkan bahwa sistem

stabil di sekitar titik tetap, sedangkan nilai eigen dengan bagian riil positif mengindikasikan ketidakstabilan.

2.1.5 Nilai Eigen

Nilai eigen diperoleh dari solusi karakteristik matriks yang terkait dengan sistem linier, seperti matriks jacobian. Secara umum, nilai eigen λ dan vektor eigen v didefinisikan melalui persamaan sebagai berikut (Anton dan Rorres, 2004):

$$Av = \lambda v \quad (2.10)$$

dengan A adalah matriks persegi yang menggambarkan sistem, v adalah vektor eigen yang terkait, dan λ adalah nilai eigen. Persamaan ini menyatakan bahwa hasil perkalian matriks A dengan vektor eigen v hanya mengubah skala vektor tersebut tanpa mengubah arahnya, dan faktor skalanya adalah nilai eigen λ .

Nilai eigen dari matriks jacobian $J(y_0)$, yang dievaluasi pada titik tetap y_0 dapat menentukan stabilitas lokal dari sistem tersebut:

1. Nilai eigen dengan bagian riil negatif

Sistem stabil di sekitar titik tetap karena gangguan kecil akan meredam dan sistem akan kembali ke titik tetap.

2. Nilai eigen dengan bagian riil positif

Sistem tidak stabil karena gangguan kecil akan bertambah besar, menyebabkan sistem menjauh dari titik tetapnya.

3. Nilai eigen dengan bagian riil nol

Kondisi ini memerlukan analisis lebih lanjut, karena sistem bisa berada dalam keadaan netral atau dapat mengalami osilasi.

2.1.6 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar atau *basic reproduction number* (R_0) adalah sebuah parameter yang menggambarkan potensi penularan suatu penyakit menular dalam populasi yang sepenuhnya rentan. Nilai R_0 menunjukkan rata-rata jumlah individu yang akan terinfeksi oleh satu individu yang terinfeksi selama masa infeksi dalam kondisi populasi yang rentan secara keseluruhan. Secara sederhana, R_0 digunakan untuk memprediksi apakah suatu penyakit akan menyebar atau menghilang dalam populasi. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit tersebut akan menyebar, sedangkan jika $R_0 < 1$, penyakit tersebut akan berangsur menghilang (Heffermen dkk, 2005).

Angka reproduksi dasar R_0 dapat dihitung menggunakan metode matriks generasi selanjutnya atau *next generation matrix*. Dalam membentuk matriks generasi selanjutnya, sub-populasi yang bertanggung jawab atas penyebaran infeksi turut diperhitungkan. Diberikan $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dengan $y_i \geq 0$ menyatakan kepadatan individu pada kelas ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$ pada saat t . Misalkan proporsi kelas terinfeksi sebesar m dengan $m \leq n$. Didefinisikan F_i merupakan laju terjadinya infeksi baru pada kelas ke- i dan V_i menyatakan selisih laju perpindahan individu dari kelas satu ke kelas lain. F_i merupakan matriks F dengan $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T$ dan V_i merupakan komponen matriks V dengan $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)^T$.

Matriks F dan V merupakan matriks berukuran $m \times m$ yang dinyatakan sebagai

$$F = \frac{\partial F_i(E_0)}{\partial y_j}, V = \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial y_j}, i, j = 1, 2, \dots, m \quad (2.11)$$

dan E_0 adalah titik kesetimbangan bebas infeksi. Matriks generasi selanjutnya dinyatakan sebagai

$$K = FV^{-1}$$

selanjutnya, R_0 diperoleh dari perhitungan

$$R_0 = \rho(K),$$

dengan $\rho(K)$ merupakan radius *spectral* matriks K , yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks K .

2.1.7 Metode Runge Kutta Orde-4

Metode Rungge-Kutta Orde 4 (RK-4) merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa. Metode ini termasuk metode yang populer karena memberikan hasil yang cukup akurat tanpa memerlukan langkah perhitungan yang terlalu banyak. Metode ini merupakan pengembangan dari metode Euler dan metode Runge-Kutta orde lebih rendah yang mempunyai akurasi lebih baik dalam perhitungan numerik karena mempunyai error global berorde 4 $O(h^4)$ (Darmawan dkk., 2024). Untuk menyelesaikan masalah nilai awal

$$x'(t) = f(t, x(t)), t > 0, x(0) = x_0$$

Metode Rungge-Kutta orde 4 memiliki rumus

$$x_{t+h} = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.12)$$

dengan

$$k_1 = f(t, x(t))$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t + h, x(t) + hk_3)$$

(Lenhart dan Workman, 2007)

2.2 Pengobatan Penyakit Menurut Islam

Islam sangat menganjurkan umatnya untuk menjaga kesehatan dan mencari pengobatan ketika sakit. Dalam pandangan Islam, penyakit adalah ujian dari Allah SWT yang harus dihadapi dengan kesabaran dan ikhtiar. Pengobatan tidak hanya terbatas pada upaya medis, namun juga mencakup aspek spiritual seperti berdoa, bersabar, dan bertawakal kepada Allah. Al-Qur'an dan hadis banyak memberikan petunjuk tentang pentingnya menjaga kesehatan dan mencari pengobatan yang halal dan baik. Dalam Hadist Riwayat Abu Daud telah tertulis sebagai mana berikut:

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ عَبْدِ الْوَاسِطِيِّ حَدَّثَنَا يَزِيدُ بْنُ هَارُونَ أَخْبَرَنَا إِسْمَاعِيلُ بْنُ عَيَّاشٍ عَنْ ثَعْلَبَةَ بْنِ مُسْلِمٍ عَنْ أَبِي عِمْرَانَ الْأَنْصَارِيِّ عَنْ أُمِّ الدَّرْدَاءِ عَنْ أَبِي الدَّرْدَاءِ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ إِنَّ اللَّهَ أَنْزَلَ الدَّاءَ وَالذَّوَاءَ وَجَعَلَ لِكُلِّ دَاءٍ دَوَاءً فَتَدَاوَوْا وَلَا تَدَاوَوْا بِحَرَامٍ

Telah menceritakan kepada kami [Muhammad bin 'Ubadah Al Wasithi] telah menceritakan kepada kami [Yazid bin Harun] telah mengabarkan kepada kami [Isma'il bin 'Ayyasy] dari [Tsa'labah bin Muslim] dari [Abu Imran Al Anshari] dari [Ummu Ad Darda] dari [Abu Ad Darda] ia berkata, "Rasulullah shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: "Sesungguhnya Allah menurunkan penyakit dan obat, dan Allah menjadikan setiap penyakit terdapat obatnya, maka berobatlah kalian dan jangan berobat dengan sesuatu yang haram!" (HR. Abu Daud, no. 3376)

Menurut penjelasan HR. Abu Daud, no. 3376 terdapat pada kitab Faidul Qadir Syarah Al-Jami' Ash-shaghir dijelaskan sebagai berikut (Al-Munawi, 1994):

"Sesungguhnya Allah menurunkan penyakit dan obat." Artinya, tidak ada seseorang yang tertimpa penyakit kecuali Allah telah menetapkan baginya obat penyembuhnya. Al-Harali berkata: "Penyakit adalah sesuatu yang melemahkan kekuatan dan mengubah tindakan alami dari tabiat dan pilihan, sementara kesembuhan adalah bentuk terbebasnya secara sempurna dari penyakit itu." Dan yang dimaksud dengan "menurunkan" adalah menurunkan malaikat yang diberi tugas untuk menangani makhluk-makhluk di bumi dalam hal penyakit dan obat.

"Dan Allah menjadikan setiap penyakit ada obatnya." Artinya, Allah menciptakan dan menetapkan obat yang menyembuhkan penyakit itu sebagai

bagian dari hikmah-Nya dalam mengaitkan sebab dengan akibat. Hakikat dari hubungan ini hanya diketahui oleh Yang Maha Mengetahui perkara-perkara tersembunyi.

"Maka berobatlah kalian." Ini adalah anjuran untuk berobat bagi siapa yang terkena penyakit, sedangkan orang yang sehat tidak perlu berobat. Karena obat, jika tidak digunakan untuk penyakit yang tepat, justru akan menimbulkan bahaya. Al-Thibi berkata, "Perintah 'maka berobatlah' ini bersifat umum, oleh karena itu, Rasulullah SAW bersabda: 'Jangan berobat dengan sesuatu yang haram.'"

Artinya, Allah menciptakan obat untuk setiap penyakit, baik obat itu halal atau haram, namun kalian diharamkan untuk berobat dengan sesuatu yang haram.

Hadits ini menekankan bahwa Allah telah menciptakan penyakit sekaligus obatnya, dan manusia diwajibkan untuk berusaha menemukan serta menggunakan pengobatan yang sesuai dengan ketentuan syariat. Pengobatan adalah bagian dari ikhtiar, tetapi seorang muslim harus selalu menghindari cara-cara yang haram dalam berusaha sembuh. Islam mendorong keseimbangan antara usaha mencari pengobatan dan tawakal kepada Allah, sambil selalu berpegang pada prinsip-prinsip halal dalam mencari kesembuhan.

Islam juga mengajarkan keseimbangan antara sabar dan ikhtiar. Ikhtiar berasal dari bahasa Arab yang berarti mencari hasil yang lebih baik (Saffan dalam Azizah, 2022). Menurut Ibnu Qayyim al-Jauziyah, secara etimologi, ikhtiar bermakna “memilih pilihan yang terbaik” (Khumaidi dalam Azizah, 2022). Dalam konteks yang lebih luas, ikhtiar adalah upaya sungguh-sungguh seseorang dalam mencapai tujuannya. Dengan kata lain, ikhtiar adalah usaha aktif untuk meraih impian, bukanlah berdiam diri atau menghindari realitas. Ikhtiar adalah usaha yang harus diperjuangkan oleh manusia untuk memenuhi semua aspek kehidupannya, termasuk kebutuhan material, emosional, spiritual, kesehatan, seksual, dan masa depan, sehingga tujuan keberhasilan baik di dunia maupun akhirat dapat tercapai (Mu’ammam, 2011).

Sebagai makhluk ciptaan Allah SWT, manusia tidak dapat lepas dari penyakit. Baik penyakit jasmani maupun rohani. Baik berat maupun ringan. Ketika Allah telah menakdirkan hambanya jatuh sakit, maka orang tersebut pasti akan sakit. Hal ini dikarenakan penyakit adalah bagian dari sunnatullah dalam kehidupan makhluk ciptaanNya (Dwijayanti dalam Rahim, 2015). Meskipun demikian, kita tidak boleh berputus asa dan tetap berusaha (berikhtiar) hingga mencapai kesembuhan. Adapun salah satu bentuk usaha (ikhtiar) yang dapat dilakukan demi mendapatkan kesembuhan adalah berobat. Oleh karena itu, konsep ikhtiar dan berobat dalam ajaran Islam saling berkaitan. Konsep Ikhtiar dalam Berobat sesuai Ajaran Islam mencakup penggunaan obat yang halal dan baik, penolakan terhadap sihir, menghindari tindakan yang menimbulkan mudharat, ketekunan dan kesabaran dalam berobat, serta senantiasa berdoa kepada Allah SWT. (Long dalam Wahyuna dan Fitriana, 2020).

Kita tidak boleh hanya mengandalkan do'a atau berserah diri tanpa berusaha. Sebaliknya, kita juga tidak boleh terlalu mengandalkan usaha tanpa melibatkan Allah dalam proses penyembuhan. Doa, zikir, dan tawakal adalah bagian penting dari proses pengobatan dalam Islam. Banyak sekali doa yang diajarkan Nabi Muhammad SAW untuk memohon kesembuhan, seperti doa ruqyah yang melibatkan pembacaan ayat-ayat Al-Qur'an untuk meminta perlindungan dan kesembuhan dari Allah. Kombinasi antara ikhtiar medis dan spiritual inilah yang menjadi inti dari cara Islam menghadapi penyakit.

Pada akhirnya, seorang muslim yang sedang sakit harus terus berusaha, baik dengan pengobatan medis maupun spiritual, dan tetap bersabar serta bertawakal kepada Allah SWT. Sakit adalah ujian yang sementara, tetapi kesabaran dan

ikhtiar yang dilakukan dengan baik akan mendatangkan pahala, pengampunan dosa, dan dengan izin Allah SWT.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Penelitian ini membutuhkan teori-teori pendukung untuk mengkaji topik yang diangkat. Fokus penelitian ini adalah mengidentifikasi perilaku dinamik serta melakukan simulasi numerik pada model matematika populasi virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan pengobatan. Model ini berfungsi sebagai model epidemik untuk menggambarkan penyebaran virus *SARS-CoV-2* dalam tubuh manusia dalam rentang waktu tertentu dan diformulasikan sebagai sistem persamaan differensial biasa non linier yang bergantung pada waktu. Dengan demikian teori-teori pendukung diperlukan untuk membantu analisis perilaku dinamik dari model matematika tersebut.

Pada penelitian ini, teori-teori yang mendukung analisis dinamik mencakup titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, linierisasi, nilai eigen, mencari angka reproduksi dasar, kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, kestabilan titik kesetimbangan endemik, serta kriteria Routh-Horwitz (Boyce, 2017). Setelah menganalisis perilaku dinamik, dilakukan simulasi numerik dengan bantuan *software* MATLAB untuk melihat pergerakan dari setiap variabel dan mencocokkan perhitungan secara analitik dan secara numerik.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif sebagai metode penelitiannya. Dalam penelitian ini, pendekatan yang digunakan adalah model matematika, dengan melakukan studi literatur untuk menggali topik dan konsep yang menjadi fokus penelitian. Studi literatur ini mencakup penelusuran berbagai sumber, seperti buku, jurnal, artikel, serta referensi lain yang relevan dengan topik penelitian. Setelah topik penelitian ditentukan, akan didalami masalah yang terkait dan mencari literatur yang berhubungan dengan pemodelan serta teori-teori yang akan diterapkan pada penelitian ini.

3.2 Data dan Sumber Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang mencakup nilai parameter dan nilai variabel yang merujuk pada penelitian yang telah dilakukan oleh Hattaf (2023), Vidya (2020), Goncalves (2021), Heitzman (2022), dan Wang (2020).

Variabel dalam penelitian ini menampilkan lima variabel yang terdiri dari banyak sel sehat (S), banyak sel terinfeksi laten (L), banyak sel terinfeksi produktif (I), banyak virus (V), banyak respon sel imun (W) dengan masing-masing variabel memiliki empat nilai awal yang merujuk pada Hattaf (2023). Karena nilai parameter yang dilakukan pada penelitian sebelumnya dalam bentuk

interval, maka akan diambil satu nilai parameter yang terdapat pada interval tersebut dengan merujuk pada Hattaf (2023).

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut adalah langkah-langkah yang diikuti dalam penelitian ini:

1. Mengkonstruksi dan menjelaskan diagram kompartemen dari model matematika virus RNA dengan imunitas dan pengobatan yang telah diteliti oleh Hattaf (2023) yang terbagi menjadi lima variabel yaitu sel sehat (S), sel terinfeksi laten (L), sel terinfeksi produktif (I), virus SARS-CoV-2 (V), dan antibodi (W).
2. Mencari titik kesetimbangan model dengan menggunakan definisi titik kesetimbangan dengan cara mengubah turunan dari setiap variabel menjadi nol $\left(\frac{dS}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0\right)$ kemudian mencari nilai pada setiap variabel.
3. Menentukan angka reproduksi dasar (R_0) dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya yaitu $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ dengan ρ merupakan nilai eigen absolut terbesar dari FV^{-1} . Jika $R_0 < 1$ maka penyebaran penyakit dapat terhenti, jika $R_0 > 1$ maka penyakit tidak akan pernah berhenti.
4. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model menggunakan matriks jacob. Kemudian dicari nilai eigen dari matriks yang diperoleh sehingga didapat jenis kestabilan dengan melihat kriteria kestabilan yang terpenuhi.
5. Melakukan simulasi numerik menggunakan metode runge-kutta orde 4 dengan bantuan *software matlab* dan menampilkan grafik dari model serta melakukan analisis dari grafik yang diperoleh.

6. Melakukan verifikasi solusi numerik yang telah diperoleh dengan cara membandingkannya dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Hattaf (2023) dan mencocokkan nilai titik kesetimbangan yang diperoleh antara metode numerik dan metode analitik.

BAB IV

PEMBAHASAN

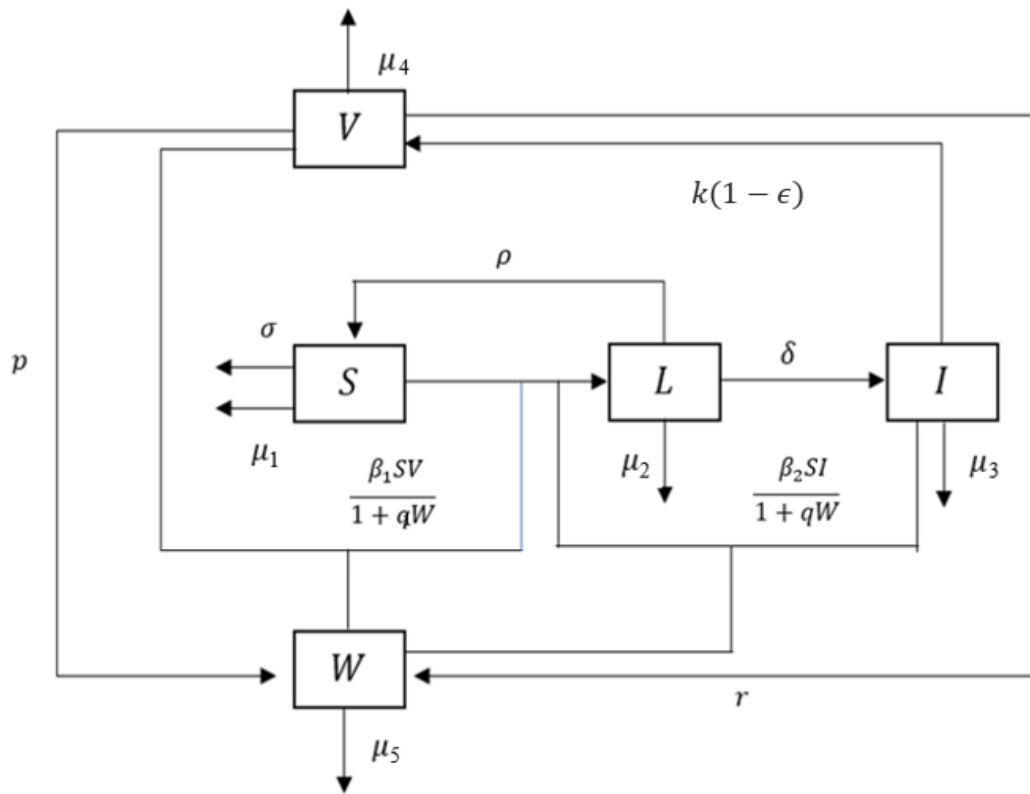
4.1 Analisis Dinamik Penyebaran Virus SARS-CoV-2

Pada subbab kali ini dibahas mengenai bagaimana analisis dinamik dari model matematika virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan penyembuhan. Mulai dari alur pembentukan model, mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, angka reproduksi dasar, dan juga kestabilan dari titik kesetimbangan dengan memanfaatkan matriks jacobian untuk mencari nilai eigen.

4.1.1 Alur Pembentukan Model

Model dan diagram kompartemen pada skripsi ini merujuk pada penelitian yang telah dilakukan oleh Hattaf (2023). Pada penelitian ini terdapat lima variabel atau subpopulasi yang dibahas diantaranya subpopulasi sel sehat (S), subpopulasi sel terinfeksi laten (L), subpopulasi sel terinfeksi produktif (I), subpopulasi virus (V), dan subpopulasi antibodi (W). Model yang akan dibahas hampir sama dengan model pada sistem (2.12). Perbedaannya terletak pada adanya pengobatan (ϵ) yang terlibat dalam model yang terdapat pada laju subpopulasi antibodi.

Model matematika virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan penyembuhan ditampilkan dalam bentuk diagram kompartemen seperti yang terdapat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Matematika Virus SARS-Cov-2 dengan Imunitas dan Pengobatan

4.1.1.1 Laju Perubahan Sel Sehat

Sel sehat diproduksi dengan laju σ , dan akan mati dengan laju $\mu_1 S$. Kemudian sel sehat akan terinfeksi oleh partikel virus bebas dengan laju $\beta_1 S V$ atau melalui kontak langsung dengan sel-sel yang terinfeksi dengan laju $\beta_2 S I$. Kedua metode penularan tersebut akan dihambat oleh sel imun yang merespon secara non-litik dengan laju $1 + qW$. Selain itu, diasumsikan bahwa sel-sel yang terinfeksi secara laten dapat sembuh dengan laju ρL akibat dari pembersihan virus melalui proses non sitolitik, sehingga diperoleh model dinamika populasi sel sehat terhadap waktu sebagai berikut (Hattaf, 2023).

$$\frac{dS(t)}{dt} = \sigma - \mu_1 S(t) - \frac{(\beta_1 S(t)V(t))}{1 + qW(t)} - \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{1 + qW(t)} + \rho L(t) \quad (4.1)$$

4.1.1.2 Laju Perubahan Sel Terinfeksi Laten

Populasi sel yang terinfeksi oleh virus dengan dua cara, akan mati dengan laju $\mu_2 L$ dan beberapa akan menjadi sel yang terinfeksi secara produktif dengan laju δL . Selain itu, sel juga dapat sembuh dengan laju ρL . Berikut ini merupakan laju perubahan sel yang terinfeksi laten (Hattaf, 2023).

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{\beta_1 S(t)V(t)}{1 + qW(t)} + \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{1 + qW(t)} - (\mu_2 + \delta + \rho)L(t) \quad (4.2)$$

4.1.1.3 Laju Perubahan Sel Terinfeksi Produktif

Setelah itu, sel yang telah terinfeksi laten dapat berubah menjadi sel yang terinfeksi produktif dengan laju δL dan beberapa akan mati dengan laju $\mu_3 I$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut (Hattaf, 2023).

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta L(t) - \mu_3 I(t) \quad (4.3)$$

4.1.1.4 Laju Perubahan Virus

Lebih lanjut, kI merupakan laju virus-virus yang terdapat pada sel-sel yang telah terinfeksi produktif. Sel virus tersebut akan mati secara alami dengan laju $\mu_4 V$, atau mati karena dinetralkan oleh antibodi dengan laju pVW . Di sini, parameter ϵ mewakili efektivitas pengobatan antivirus yang dapat menghambat produksi partikel virus dan diperoleh model laju perubahan partikel virus sebagai berikut (Hattaf, 2023).

$$\frac{dV(t)}{dt} = k(1 - \epsilon)I(t) - \mu_4 V(t) - pV(t)W(t) \quad (4.4)$$

4.1.1.5 Laju Perubahan Sel Imun

Karena terdapat partikel virus pada tubuh, maka tubuh akan memproduksi antibodi sebagai respon untuk mempertahankan diri. Laju dari produksi antibodi disimbolkan rVW . Beberapa antibodi akan mati atau

mengalami peluruhan dengan laju $\mu_5 W$. Oleh karena itu diperoleh persamaan laju perubahan dari sel imun sebagai berikut (Hattaf, 2023).

$$\frac{dW(t)}{dt} = rV(t)W(t) - \mu_5 W(t) \quad (4.5)$$

Dari konstruksi model yang telah dipaparkan, maka diperoleh sistem persamaan differensial autonomous non-linier yang menggambarkan model kontinu penyebaran virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan pengobatan sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \sigma - \mu_1 S(t) - \frac{\beta_1 S(t)V(t)}{1 + qW(t)} - \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{1 + qW(t)} + \rho L(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} &= \frac{\beta_1 S(t)V(t)}{1 + qW(t)} + \frac{\beta_2 S(t)I(t)}{1 + qW(t)} - (\mu_2 + \delta + \rho)L(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \delta L(t) - \mu_3 I(t) \\ \frac{dV(t)}{dt} &= k(1 - \epsilon)I(t) - \mu_4 V(t) - pV(t)W(t) \\ \frac{dW(t)}{dt} &= rV(t)W(t) - \mu_5 W(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

4.1.1.6 Estimasi Parameter

Nilai awal dari variabel dan nilai parameter yang dipilih pada penelitian ini merujuk pada Hattaf (2023) dan beberapa penelitian lainnya yang akan dijelaskan secara rinci. Hattaf (2020) melakukan penelitian model infeksi SARS-CoV-2 dengan dua metode penularan dan respon imun dengan mengestimasi jumlah total sel epitel paru-paru yang sehat $\left(\frac{\sigma}{\mu_1}\right)$ dengan nilai antara 5.7757×10^4 dan 1.2×10^7 sel/mL dan laju kematian sel yang tidak terinfeksi yaitu $\mu_1 = 10^3$ per hari. Dengan demikian diperoleh nilai dari

σ yaitu antara $\sigma = \frac{5.7757 \times 10^4}{10^3} = 57.757$ dan $\sigma = \frac{1.2 \times 10^7}{10^3} = 1.2 \times 10^4$ sel/mL per hari. Laju aktivasi sel laten menjadi sel terinfeksi produktif (δ) diasumsikan oleh (Goncalves, 2020) dengan nilai antara 1 sampai 5 per hari. Lebih jauh, (Vaidya, 2021) mengestimasi nilai dari parameter δ yaitu 7.88 per hari yang menyiratkan bahwa sel yang terinfeksi secara laten mulai memproduksi virus sekitar 3 hingga 24 jam setelah terinfeksi.

Laju sel terinfeksi virus (β_1) telah diestimasi oleh beberapa peneliti dengan nilai antara 4.8×10^{-8} dan 4.5×10^{-5} sel/mL/hari oleh Wang (2020), 3.2×10^{-8} sel/mL/hari oleh Ke (2021), dan 5×10^{-6} sel/mL/hari oleh Heitzman (2022). Dengan demikian, dari beberapa penelitian sebelumnya, parameter β_1 diestimasi dengan nilai antara 3.2×10^{-8} dan 4.5×10^{-5} sel/mL/hari. Laju produksi virus bebas oleh sel terinfeksi produktif (k) telah diestimasi dengan nilai antara 88 sampai 580 virion/sel/hari oleh Hattaf (2020) dan nilai antara 27.71 sampai 59.94 virion/sel/hari oleh Vaidya (2020), sehingga diperoleh nilai estimasi parameter k antara 22.71 sampai 580 virion/sel/hari.

Dari beberapa nilai estimasi yang telah dijabarkan, pada penelitian ini akan diambil 4 nilai awal dan satu nilai pada setiap parameter yang merujuk pada penelitian Hattaf (2023) dengan mempertimbangkan penelitian sebelumnya. Nilai awal variabel dan parameter dapat dilihat pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 sebagai berikut.

Tabel 4.1 Nilai Awal Model Virus SARS-CoV-2 dengan Imunitas dan Pengobatan

No	Variabel	Keterangan	Nilai awal	Satuan
1.	$S(t)$	Jumlah populasi sel sehat	2×10^4 $- 5 \times 10^4$	Sel/ml
2.	$L(t)$	Jumlah populasi sel yang terinfeksi laten	20 – 80	Sel/ml
3.	$I(t)$	Jumlah populasi sel yang terinfeksi produktif	10 – 40	Sel/ml
4.	$V(t)$	Jumlah virus SARS-CoV-2	3 – 9	Virion/ml/hari
5.	$W(t)$	Jumlah populasi sel imun	100 – 400	Virion/ml/hari

Tabel 4.2 Nilai Parameter Model Virus SARS-CoV-2 dengan Imunitas dan Pengobatan

No	Parameter	Keterangan	Nilai Parameter	Satuan
1.	β_1	Laju sel terinfeksi melalui partikel virus	4.6×10^{-6}	Sel/ml/hari
2.	σ	Laju produksi sel yang tidak terinfeksi	60	Sel/ml/hari
3.	μ_1	Laju kematian sel yang tidak terinfeksi	0.001	Sel/ml/hari
4.	q	Laju respon sel imun dalam menghambat infeksi melalui virus bebas	0.01	Copy/ml/hari
5.	ρ	Laju penyembuhan sel laten	0.01	Sel/ml/hari
6.	δ	Laju aktivasi sel laten menjadi sel terinfeksi produktif	1.5	Sel/ml/hari
7.	k	Laju produksi virus bebas oleh sel terinfeksi produktif	50	Copy/ml/hari
8.	ϵ	Efektivitas pengobatan antivirus	0.2	
9.	p	Laju netralisasi virus oleh sel imun	0.5	Virion/ml/hari
10.	r	Laju produksi sel imun	2.4×10^{-3}	Copy/ml/hari
11.	β_2	Laju sel terinfeksi melalui sel yang telah terinfeksi	1.2×10^{-8}	Sel/ml/hari
12.	μ_2	Laju kematian sel yang tidak terinfeksi laten	0.09	Sel/ml/hari
13.	μ_3	Laju kematian sel terinfeksi	0.75	Sel/ml/hari
14.	μ_4	Laju penghapusan virus bebas secara alami	15	Copy/ml/hari
15.	μ_5	Laju penurunan sel imun	0.3	ml/hari

4.1.2 Titik Keseimbangan

Terdapat dua jenis titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit yang artinya tidak ada virus yang terdapat dalam tubuh, dan titik keseimbangan endemik yang mengartikan bahwa terdapat virus pada tubuh. Titik keseimbangan pada sistem persamaan (4.6) diperoleh jika memenuhi kondisi setimbang yaitu ketika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dL}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0, \frac{dW}{dt} = 0$. Oleh karena itu, sistem persamaan (4.6) dapat diubah menjadi

$$\sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} + \rho L = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} - (\mu_2 + \delta + \rho)L = 0 \quad (4.8)$$

$$\delta L - \mu_3 I = 0 \quad (4.9)$$

$$k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW = 0 \quad (4.10)$$

$$rVW - \mu_5 W = 0 \quad (4.11)$$

Pada Persamaan (4.11) diperoleh persamaan sebagai berikut

$$rVW - \mu_5 W = 0$$

$$W(rV - \mu_5) = 0 \quad (4.12)$$

Berdasarkan Persamaan (4.12) terdapat dua nilai W , yaitu ketika tidak ada sel imun dalam tubuh atau $W = 0$ dan ketika terdapat sel imun dalam tubuh atau $W \neq 0$. Oleh karena itu, terdapat dua nilai W yang dibahas pada penelitian ini.

1. Ketika $W = 0$

Dari Persamaan (4.9) diperoleh

$$\delta L - \mu_3 I = 0$$

$$L = \frac{\mu_3 I}{\delta} \quad (4.13)$$

Dari Persamaan (4.10) diperoleh

$$k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW = 0$$

$$k(1 - \epsilon)I = \mu_4 V - pVW$$

$$k(1 - \epsilon)I = \mu_4 V - pV(0)$$

$$k(1 - \epsilon)I = \mu_4 V$$

$$V = \frac{k(1-\epsilon)I}{\mu_4} \quad (4.14)$$

Setelah itu, substitusi persamaan (4.13), persamaan (4.14), dan $W = 0$ ke dalam persamaan (4.8) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} - (\mu_2 + \delta + \rho)L &= 0 \\ \frac{\beta_1 S \left(\frac{k(1-\epsilon)I}{\mu_4} \right)}{1 + q(0)} + \frac{\beta_2 SI}{1 + q(0)} - (\mu_2 + \delta + \rho) \left(\frac{\mu_3 I}{\delta} \right) &= 0 \\ I \left(\beta_1 S \left(\frac{k(1-\epsilon)}{\mu_4} \right) + \beta_2 S - (\mu_2 + \delta + \rho) \left(\frac{\mu_3}{\delta} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dari persamaan tersebut diperoleh dua nilai dari variabel I yaitu ketika $I = 0$ atau $I \neq 0$. Ketika $I = 0$ menandakan bahwa di dalam sel tidak terdapat virus yang menginfeksi secara produktif. Dengan kata lain $I = 0$ merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit.

4.1.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana tidak ada populasi sel yang terinfeksi oleh virus SARS-CoV-2 secara produktif pada tubuh atau ketika $I = 0$.

Substitusi $I = 0$ dan $W = 0$ ke dalam persamaan (4.9) dan persamaan (4.10) sehingga diperoleh

$$\delta L - \mu_3 I = 0$$

$$\delta L - \mu_3(0) = 0$$

$$\delta L = 0$$

$$L = \frac{0}{\delta}$$

$$L = 0 \quad (4.16)$$

$$k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW = 0$$

$$k(1 - \epsilon)(0) - \mu_4 V - pV(0) = 0$$

$$0 - \mu_4 V - 0 = 0$$

$$-\mu_4 V = 0$$

$$V = \frac{0}{-\mu_4}$$

$$V = 0 \quad (4.17)$$

Langkah selanjutnya, substitusi persamaan (4.16) dan persamaan (4.17) ke dalam persamaan (4.7) dan didapatkan

$$\sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 S V}{1 + qW} - \frac{\beta_2 S I}{1 + qW} + \rho L = 0$$

$$\sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 S(0)}{1 + q(0)} - \frac{\beta_2 S(0)}{1 + q(0)} + \rho(0) = 0$$

$$\sigma = \mu_1 S$$

$$S = \frac{\sigma}{\mu_1}$$

Dari penjabaran yang telah dilakukan, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari model matematika virus SARS-CoV-2 sebagai berikut

$$E_0 = (S, L, I, V, W) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan E_0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Hal itu dikarenakan tidak ada virus yang terdapat di dalam tubuh, sehingga mengakibatkan tidak ada sel yang terinfeksi virus secara produktif (Hattaf, 2023).

4.1.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik Kesetimbangan endemik merupakan kondisi dimana pada populasi sel terdapat virus, sehingga mengakibatkan ada sel yang terinfeksi virus secara produktif. Titik tersebut akan terjadi ketika $I \neq 0$. Berikut ini merupakan langkah-langkah mencari titik kesetimbangan endemik

Diketahui $W = 0$ dan $I \neq 0$, substitusikan ke dalam persamaan (4.15) maka akan diperoleh

$$I \left(\beta_1 S \left(\frac{k(1-\epsilon)}{\mu_4} \right) + \beta_2 SI - (\mu_2 + \delta + \rho) \left(\frac{\mu_3}{\delta} \right) \right) = 0$$

karena $I \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} \beta_1 S \left(\frac{k(1-\epsilon)}{\mu_4} \right) + \beta_2 S - (\mu_2 + \delta + \rho) \left(\frac{\mu_3}{\delta} \right) &= 0 \\ S \left(\frac{\beta_1 k(1-\epsilon) + \mu_4 \beta_2}{\mu_4} \right) &= \frac{(\mu_2 + \delta + \rho) \mu_3}{\delta} \\ S &= \frac{(\mu_2 + \delta + \rho) \mu_3 \mu_4}{\delta(\beta_1 k(1-\epsilon) + \beta_2 \mu_4)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Perhatikan Persamaan (4.7) dan Persamaan (4.8), karena kedua persamaan tersebut sama dengan nol dan terdapat komponen $\frac{\beta_1 SV}{1+qW}$ dan $\frac{\beta_2 SI}{1+qW}$ yang berlainan tanda, maka substitusikan Persamaan (4.7) ke persamaan (4.8) agar komponen tersebut hilang untuk mencari nilai dari variabel L , dari persamaan (4.7) diperoleh

$$\sigma - \mu_1 S - \left(\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} \right) + \rho L = 0$$

$$\left(\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} \right) = \sigma - \mu_1 S + \rho L$$

Kemudian substitusikan ke dalam Persamaan (4.8) sebagai berikut

$$\left(\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} \right) - (\mu_2 + \delta + \rho)L = 0$$

$$\sigma - \mu_1 S + \rho L - (\mu_2 + \delta + \rho)L = 0$$

$$\sigma - \mu_1 S = (\mu_2 + \delta)L$$

$$L = \frac{\sigma - \mu_1 S}{\mu_2 + \delta} \quad (4.19)$$

Substitusikan Persamaan (4.18) ke dalam persamaan (4.19), sehingga diperoleh

$$L = \frac{\sigma - \mu_1 \left(\frac{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3\mu_4}{\delta(\beta_1 k(1 - \epsilon) + \beta_2 \mu_4)} \right)}{\mu_2 + \delta}$$

$$L = \frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)} \quad (4.20)$$

Substitusikan persamaan (4.20) ke dalam persamaan (4.9) maka akan diperoleh

$$\delta L - \mu_3 I = 0$$

$$\delta \left(\frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)} \right) - \mu_3 I = 0$$

$$I = \frac{\left(\frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)} \right) \delta}{\mu_3} \quad (4.21)$$

Setelah itu substitusikan persamaan (4.21) ke dalam persamaan (4.10) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW = 0 \\
& k(1 - \epsilon) \left(\frac{\left(\frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \right) \delta}{\mu_3} \right) - \mu_4 V - pV(0) = 0 \\
& k(1 - \epsilon) \left(\frac{\left(\frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \right) \delta}{\mu_3} \right) - \mu_4 V = 0 \\
& V = k(1 - \epsilon) \left(\frac{\left(\frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \right) \delta}{\mu_3 \mu_4} \right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.18) sampai dengan persamaan (4.22) merupakan titik kesetimbangan endemik dari model yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$E_1 = (S, L, I, V, W)$$

dengan

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(\mu_2 + \delta + \rho) \mu_3 \mu_4}{\delta (\beta_1 k(1 - \epsilon) + \beta_2 \mu_4)} \\
L &= \frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \\
I &= \frac{\left(\frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \right) \delta}{\mu_3} \\
V &= k(1 - \epsilon) \left(\frac{\left(\frac{\sigma \delta (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2) - \mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta (\mu_2 + \delta) (k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4 \beta_2)} \right) \delta}{\mu_3 \mu_4} \right) \\
W &= 0
\end{aligned}$$

Apabila nilai parameter pada Tabel 4.2 disubstitusikan ke dalam titik kesetimbangan endemik yang telah diperoleh dan dengan mengganti nilai dari parameter β_1 dengan 1.3×10^{-5} , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{(0.09 + 1.5 + 0.01)(0.75)(15)}{(1.5)((1.3 \times 10^{-5})(50)(1 - 0.2) + (1.2 \times 10^{-8})(15))} \\
 &= 23068.9377 \\
 L &= \frac{(90)((50)(1.3 \times 10^{-5})(1 - 0.2) + (15)(1.2 \times 10^{-8})) - 0.018}{2.385(0.00052 + 18 \times 10^{-8})} \\
 &= 23.2271 \\
 I &= \frac{(23.2271)(1.5)}{0.75} \\
 &= 46.4542 \\
 V &= (50)(1 - 0.2) \left(\frac{46.4542}{15} \right) \\
 &= 123.8778 \\
 W &= 0
 \end{aligned}$$

Atau bisa ditulis menjadi

$$E_1 = (S, L, I, V, W) = (23068.9377, 23.2271, 46.4542, 123.8778, 0).$$

Perhitungan tersebut merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik ketika $W = 0$ atau ketika sel imun pada tubuh akan habis seiring berjalannya waktu (Hattaf, 2023). Selanjutnya dicari titik kesetimbangan ketika sel imun masih terdapat dalam tubuh seiring waktu atau ketika $W \neq 0$.

2. Ketika $W \neq 0$

Dari Persamaan (4.12) diketahui bahwa

$$W(rV - \mu_5) = 0$$

Karena $W \neq 0$, maka $rV - \mu_5 = 0$

$$rV - \mu_5 = 0$$

$$V = \frac{\mu_5}{r} \quad (4.23)$$

dari persamaan (4.7) diperoleh

$$\sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} + \rho L = 0$$

$$\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} = \sigma - \mu_1 S + \rho L$$

Kemudian substitusikan ke dalam Persamaan (4.8) sebagai berikut

$$\left(\frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} \right) - (\mu_2 + \delta + \rho)L = 0$$

$$\sigma - \mu_1 S + \rho L - (\mu_2 + \delta + \rho)L = 0$$

$$\sigma - \mu_1 S = (\mu_2 + \delta)L$$

$$L = \frac{\sigma - \mu_1 S}{\mu_2 + \delta} \quad (4.24)$$

Setelah itu pada Persamaan (4.9) diketahui

$$\delta L - \mu_3 I = 0$$

$$I = \frac{\delta L}{\mu_3}$$

$$I = \frac{\delta \left(\frac{\sigma - \mu_1 S}{\mu_2 + \delta} \right)}{\mu_3}$$

$$I = \frac{\delta(\sigma - \mu_1 S)}{\mu_3(\mu_2 + \delta)} \quad (4.25)$$

Dari Persamaan (4.10) diketahui

$$k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW = 0$$

$$W = \frac{k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V}{pV}$$

$$W = \frac{k(1-\epsilon) \left(\frac{\delta(\sigma - \mu_1 S)}{\mu_3(\mu_2 + \delta)} \right) - \mu_4 \left(\frac{\mu_5}{r} \right)}{p \left(\frac{\mu_5}{r} \right)}$$

$$W = \frac{rk(1-\epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 S) - \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{p\mu_3\mu_5(\mu_2 + \delta)} \quad (4.26)$$

Perhatikan bahwa nilai dari variabel L, I , dan W pada Persamaan (4.24), (4.25) dan (4.26) masih mengandung variabel S . Oleh karena itu, Perlu dicari nilai dari variabel S terlebih dahulu.

Perlu diketahui bahwa ketika $W \neq 0$ hal itu juga menandakan bahwa $W > 0$, hal itu dikarenakan sel imun pada tubuh tidak mungkin bernilai negatif. Dari pernyataan tersebut maka Persamaan (4.26) dapat diubah menjadi

$$W > 0$$

$$\frac{rk(1-\epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 S) - \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{p\mu_3\mu_5(\mu_2 + \delta)} > 0$$

Penyebut pada pertidaksamaan diatas pasti lebih dari nol karena nilai dari parameter bernilai positif. Oleh karena itu, pembilangnya juga lebih dari nol, maka diperoleh

$$rk(1-\epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 S) - \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta) > 0$$

$$rk(1-\epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 S) > \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)$$

$$\sigma - \mu_1 S > \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{rk(1-\epsilon)\delta}$$

$$-S > \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{\mu_1 rk(1-\epsilon)\delta} - \frac{\sigma}{\mu_1}$$

$$S < \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{\mu_1 rk(1-\epsilon)\delta}$$

Karena dalam tubuh pasti terdapat sel darah merah yang sehat, maka nilai dari variabel S pasti lebih dari 0. Oleh karena itu diperoleh nilai dari variabel S dalam bentuk interval terbuka sebagai berikut

$$0 < S < \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_1 + \delta)}{\mu_1rk(1 - \epsilon)\delta}$$

Lebih lanjut, titik kesetimbangan variabel S ketika $W \neq 0$ dimisalkan s^* dengan

$$s^* = \left(0, \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_1 + \delta)}{\mu_1rk(1 - \epsilon)\delta}\right) \quad (4.27)$$

Selanjutnya untuk mencari titik kesetimbangan dari variabel L , I , dan W , substitusikan Persamaan (4.27) ke dalam Persamaan (4.24), Persamaan (4.25), dan Persamaan (4.26) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sigma - \mu_1 S}{\mu_2 + \delta} = \frac{\sigma - \mu_1 s^*}{\mu_2 + \delta} \\ I &= \frac{\delta(\sigma - \mu_1 S)}{\mu_3(\mu_2 + \delta)} = \frac{\delta(\sigma - \mu_1 s^*)}{\mu_3(\mu_2 + \delta)} \\ W &= \frac{rk(1 - \epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 S) - \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{p\mu_3\mu_5(\mu_2 + \delta)} \\ &= \frac{rk(1 - \epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 s^*) - \mu_3\mu_4\mu_5(\mu_2 + \delta)}{p\mu_3\mu_5(\mu_2 + \delta)} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik dari model ketika $W \neq 0$ yaitu

$$\begin{aligned} S &= s^* = \left(0, \frac{\sigma}{\mu_1} - \frac{\mu_3\mu_4\mu_5(\mu_1 + \delta)}{\mu_1rk(1 - \epsilon)\delta}\right) \\ L &= \frac{\sigma - \mu_1 s^*}{\mu_2 + \delta} \\ I &= \frac{\delta(\sigma - \mu_1 s^*)}{\mu_3(\mu_2 + \delta)} \end{aligned}$$

$$V = \frac{\mu_5}{r}$$

$$W = \frac{rk(1 - \epsilon)\delta(\sigma - \mu_1 s^*) - \mu_3 \mu_4 \mu_5 (\mu_2 + \delta)}{p \mu_3 \mu_5 (\mu_2 + \delta)}$$

Langkah selanjutnya, untuk melihat nilai dari titik kesetimbangan ketika $W \neq 0$, substitusikan nilai parameter pada Tabel 4.2 ke dalam titik kesetimbangan yang telah diperoleh dan mengganti nilai β_1 dengan 1.3×10^{-5} dan r dengan 4×10^{-3} , maka diperoleh

$$\begin{aligned} S = s^* &= \left(0, \frac{60}{0.001} - \frac{3.375(1.501)}{0.0002(1 - 0.2)1.5} \right) \\ &= (0, 38892.1875) \\ L &= \frac{60 - ((0.001)(38892.1875))}{0.09 + 1.5} = 13.27535377 \end{aligned}$$

dan

$$L = \frac{60}{0.09 + 1.5} = 37.73584906$$

Sehingga diperoleh nilai dalam interval yaitu

$$\begin{aligned} L &= (13.27535377, 37.73584906) \\ I &= \frac{1.5(60 - (0.001)(24820.31250))}{0.75(0.09 + 1.5)} = 26.55070755 \end{aligned}$$

dan

$$I = \frac{1.5(60 - (0.001)(0))}{0.75(0.09 + 1.5)} = 75.47169811$$

Diperoleh nilai dalam bentuk interval yaitu

$$I = (26.55070755, 75.47169811)$$

$$V = 75$$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{(0.24)(60 - 0.001(24820.31250)) - 3.375(1.59)}{0.1125(1.59)} \\
&= 1.679245283 \\
W &= \frac{(0.24)(60 - 0.001(0)) - 3.375(1.59)}{0.1125(1.59)} \\
&= 50.50314465
\end{aligned}$$

diperoleh nilai dalam bentuk interval yaitu

$$W = (-1.679245283, 50.50314465)$$

Karena sel imun di dalam tubuh tidak mungkin negatif, maka nilai dari W yaitu

$$W = (0, 50.50314465)$$

Dari perhitungan di atas diperoleh

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{S, L, I, V, W\} \\
&= \{(0, 38892.1875), (13.2754, 37.7358), (26.5507, 75.4717), 75, (0, 50.50314465)\}
\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan E_2 merupakan titik kesetimbangan endemik ketika masih terdapat sel imun di dalam tubuh atau ketika $W \neq 0$ (Hattaf, 2023).

4.1.3 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar yang dilambangkan $\mathcal{R}_0$ adalah ukuran yang menunjukkan potensi penyebaran penyakit dalam suatu pouplasi. Nilai ini merepresentasikan rata-rata jumlah individu rentan yang akan terinfeksi selama periode infeksi. Untuk menentukan $\mathcal{R}_0$ akan digunakan metode matriks generasi selanjutnya (*next generation matrix*).

Adapun langkah-langkah untuk menentukan angka reproduksi dasar pada sistem (4.6) sebagai berikut.

1. Tentukan persamaan yang mengakibatkan terjadinya sel terinfeksi baik laten maupun produktif serta perubahan dalam populasi sel yang terinfeksi. Pada model ini, variabel yang mengakibatkan sel terinfeksi baik laten maupun produktif yaitu variabel L, I dan V .
2. Melakukan linierisasi terhadap sistem yang direpresentasikan ke dalam matriks jacobian serta mengevaluasinya di titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} \\ \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial V} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu_2 + \delta + \rho) & \frac{\beta_1 S}{1 + qW} & \frac{\beta_2 S}{1 + qW} \\ \delta & -\mu_3 & 0 \\ 0 & k(1 - \epsilon) & -\mu_4 - pW \end{bmatrix}$$

3. Mendekomposisi matriks jacobian (J) menjadi $J = F - V$, dimana F merupakan matriks transmisi yang mencerminkan laju penambahan kasus akibat interaksi antara populasi rentan dan populasi terinfeksi, sedangkan V adalah matriks transisi yang menggambarkan laju perpindahan masuk dan keluar dari populasi terinfeksi. Setelah itu, substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit ke dalam matriks F dan V , sehingga diperoleh

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_2 S}{1 + qW} & \frac{\beta_1 S}{1 + qW} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_2 \left(\frac{\sigma}{\mu_1}\right)}{1 + q(0)} & \frac{\beta_1 \left(\frac{\sigma}{\mu_1}\right)}{1 + q(0)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} (\mu_2 + \delta + \rho) & 0 & 0 \\ -\delta & \mu_3 & 0 \\ 0 & -k(1 - \epsilon) & \mu_4 + p(0) \end{pmatrix}$$

4. Mencari V^{-1} , sehingga diperoleh

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu_2 + \delta + \rho)} & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3} & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ -\frac{\delta k(-1 + \epsilon)}{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3\mu_4} & -\frac{k(-1 + \epsilon)}{\mu_3\mu_4} & \frac{1}{\mu_4} \end{pmatrix}$$

5. Setelah itu, angka reproduksi dasar $\mathcal{R}_0$ dapat dicari menggunakan rumus

$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$, dengan $\rho(FV^{-1})$ merupakan radius spectral atau nilai eigen absolut dominan dari K , yang mana K merupakan matriks generasi selanjutnya, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K &= (FV^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \left(\frac{\sigma}{\mu_1} \right) & \beta_2 \left(\frac{\sigma}{\mu_1} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3} & \frac{1}{\mu_3} & 0 \\ -\frac{\delta k(-1 + \epsilon)}{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3\mu_4} & -\frac{k(-1 + \epsilon)}{\mu_3\mu_4} & \frac{1}{\mu_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_2 \sigma \delta}{\mu_1 \mu_3 (\mu_2 + \delta + \rho)} & -\frac{\beta_1 \sigma \delta k(-1 + \epsilon)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)} & \frac{\beta_2 \sigma}{\mu_3 \mu_4} & -\frac{\beta_1 \sigma k(-1 + \epsilon)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4} & \frac{\beta_1 \sigma}{\mu_1 \mu_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maka diperoleh angka reproduksi dasar $\mathcal{R}_0$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \rho(K) \\ &= \rho \begin{pmatrix} \frac{\beta_2 \sigma \delta}{\mu_1 \mu_3 (\mu_2 + \delta + \rho)} & -\frac{\beta_1 \sigma \delta k(-1 + \epsilon)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)} & \frac{\beta_2 \sigma}{\mu_3 \mu_4} & -\frac{\beta_1 \sigma k(-1 + \epsilon)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4} & \frac{\beta_1 \sigma}{\mu_1 \mu_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\sigma \delta (k(-1 + \epsilon) \beta_1 - \mu_4 \beta_2)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)} \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk melihat nilai dari $\mathcal{R}_0$, substitusikan nilai parameter pada Tabel 4.2 sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = - \frac{\sigma \delta (k(-1 + \epsilon) \beta_1 - \mu_4 \beta_2)}{\mu_1 \mu_3 \mu_4 (\mu_2 + \delta + \rho)}$$

$$\mathcal{R}_0 = - \frac{60(1.5) \left((4.6 \times 10^{-6}) (50(-1 + 0.2)) - 15(1.2 \times 10^{-8}) \right)}{(0.001)(0.75)(15)(0.09 + 1.5 + 0.01)}$$

$$\mathcal{R}_0 = 0.9209$$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa $\mathcal{R}_0 < 1$. Berdasarkan (Heffermen dkk, 2005) ini berarti angka reproduksi dasar mencapai stabilitas asimtotik lokal pada titik kesetimbangan tanpa kecanduan. Akibatnya, jumlah virus SARS-CoV-2 pada sel akan menurun secara bertahap seiring waktu, dan penyakit akan hilang dengan sendirinya.

Jika nilai pada parameter β_1 diganti menjadi $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, maka diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = - \frac{60(1.5) \left((1.3 \times 10^{-5}) (50(-1 + 0.2)) - 15(1.2 \times 10^{-8}) \right)}{(0.001)(0.75)(15)(0.09 + 1.5 + 0.01)}$$

$$\mathcal{R}_0 = 2.6009$$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa $\mathcal{R}_0 > 1$. Berdasarkan (Heffermen dkk, 2005) ini berarti jumlah virus SARS-CoV-2 pada sel akan terus ada di dalam tubuh.

4.1.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Persamaan yang terdapat dalam (4.6) merupakan sistem persamaan differensial nonlinier. Oleh karena itu, untuk melakukan analisis kestabilan, perlu membentuk matriks jacobian untuk mencari nilai eigen. Berdasarkan persamaan-persamaan dalam (4.6)

$$f_1(S, L, I, V, W) = \sigma - \mu_1 S - \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} - \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} + \rho L$$

$$f_2(S, L, I, V, W) = \frac{\beta_1 SV}{1 + qW} + \frac{\beta_2 SI}{1 + qW} - (\mu_2 + \delta + \rho)L$$

$$f_3(S, L, I, V, W) = \delta L - \mu_3 I$$

$$f_4(S, L, I, V, W) = k(1 - \epsilon)I - \mu_4 V - pVW$$

$$f_5(S, L, I, V, W) = rVW - \mu_5 W$$

Langkah berikutnya adalah mencari nilai eigen dari matriks jacobian untuk menentukan kestabilan model. Berikut ini adalah matriks jacobian yang diperoleh pada seistem persamaan (4.6)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial W} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial W} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} & \frac{\partial f_3}{\partial W} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial V} & \frac{\partial f_4}{\partial W} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial L} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial V} & \frac{\partial f_5}{\partial W} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_1 - \frac{\beta_1 V}{1 + qW} - \frac{\beta_2 I}{1 + qW} & \rho & -\frac{\beta_2 S}{1 + qW} & -\frac{\beta_1 S}{1 + qW} & \frac{\beta_1 SVq}{(1 + qW)^2} + \frac{\beta_2 SIq}{(1 + qW)^2} \\ \frac{\beta_1 V}{1 + qW} + \frac{\beta_2 I}{1 + qW} & -(\mu_2 + \delta + \rho) & \frac{\beta_2 S}{1 + qW} & \frac{\beta_1 S}{1 + qW} & -\frac{\beta_1 SVq}{(1 + qW)^2} - \frac{\beta_2 SIq}{(1 + qW)^2} \\ 0 & \delta & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k(1 - \epsilon) & -\mu_4 - pW & -pV \\ 0 & 0 & 0 & rW & rV - \mu_5 \end{bmatrix}$$

4.1.4.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Dengan menggunakan titik keseimbangan yang telah didapatkan yaitu $E_0 = (S, L, I, V, W) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0\right)$, langkah selanjutnya substitusikan titik keseimbangan bebas penyakit ke dalam matriks Jacobian yang

didapatkan dari linierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit, sehingga diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \rho & -\frac{\beta_2\sigma}{\mu_1} & -\frac{\beta_1\sigma}{\mu_1} & 0 \\ 0 & -(\mu_2 + \delta + \rho) & \frac{\beta_2\sigma}{\mu_1} & \frac{\beta_1\sigma}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \delta & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(1-\epsilon) & -\mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_5 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks $J(E_0)$, maka akan dicari menggunakan persamaan $|J(E_0) - \lambda I| = 0$

$$0 = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \lambda & \rho & -\frac{\beta_2\sigma}{\mu_1} & -\frac{\beta_1\sigma}{\mu_1} & 0 \\ 0 & -(\mu_2 + \delta + \rho) - \lambda & \frac{\beta_2\sigma}{\mu_1} & \frac{\beta_1\sigma}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \delta & -\mu_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(1-\epsilon) - \lambda & -\mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_5 - \lambda \end{bmatrix}$$

Setelah itu, substitusikan nilai parameter pada Tabel 4.2 ke dalam matriks, maka akan didapat

$$0 = \begin{bmatrix} -0.001 - \lambda & 0.01 & -0.00072 & -0.276 & 0 \\ 0 & -1.6 - \lambda & 0.00072 & 0.276 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.75 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -15 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam mencari determinan matriks di atas, digunakan aplikasi maple untuk membantu memecahkannya, sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\lambda^5 + 17.651\lambda^4 + 41.671570\lambda^3 + 12.40012992\lambda^2 + 0.4394984760\lambda + 0.00042714 = 0$$

Setelah persamaan karakteristik diperoleh, langkah selanjutnya adalah menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dengan melihat nilai

eigen dari persamaan tersebut seperti pada Lampiran 1 dan dihasilkan lima nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -0.001$$

$$\lambda_2 = -0.3$$

$$\lambda_3 = -0.03981576836$$

$$\lambda_4 = -2.398022688$$

$$\lambda_5 = -14.91216154$$

Sebuah sistem dikatakan stabil jika seluruh nilai eigen di atas memiliki tanda yang konsisten, yaitu semuanya negatif. Berdasarkan hasil perhitungan sebelumnya, menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dalam model penyebaran SARS-CoV-2 bersifat stabil asimtotik karena semua nilai eigen merupakan bilangan real dan negatif.

4.1.4.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Dengan menggunakan titik kesetimbangan yang telah didapatkan yaitu $E_1 = (S, L, I, V, W)$

dengan

$$S = \frac{(\mu_2 + \delta + \rho)\mu_3\mu_4}{\delta(\beta_1 k(1 - \epsilon) + \beta_2 \mu_4)}$$

$$L = \frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)}$$

$$I = \frac{\left(\frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)} \right) \delta}{\mu_3}$$

$$V = k(1 - \epsilon) \left(\frac{\left(\frac{\sigma\delta(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2) - \mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}{\delta(\mu_2 + \delta)(k\beta_1(1 - \epsilon) + \mu_4\beta_2)} \right) \delta}{\mu_3\mu_4} \right)$$

$$W = 0$$

Langkah selanjutnya substitusikan titik kesetimbangan endemik ke dalam matriks Jacobian yang didapatkan dari linierisasi di sekitar titik kesetimbangan endemik, sehingga diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial L} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial W} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial L} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial W} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial L} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial V} & \frac{\partial f_3}{\partial W} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial L} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial V} & \frac{\partial f_4}{\partial W} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial L} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial V} & \frac{\partial f_5}{\partial W} \end{bmatrix}$$

$$J(E_1)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_1 - \frac{\beta_1 V}{1+qW} - \frac{\beta_2 I}{1+qW} & \rho & -\frac{\beta_2 S}{1+qW} & -\frac{\beta_1 S}{1+qW} & \frac{\beta_1 SVq}{(1+qW)^2} + \frac{\beta_2 SIq}{(1+qW)^2} \\ \frac{\beta_1 V}{1+qW} + \frac{\beta_2 I}{1+qW} & -(\mu_2 + \delta + \rho) & \frac{\beta_2 S}{1+qW} & \frac{\beta_1 S}{1+qW} & -\frac{\beta_1 SVq}{(1+qW)^2} - \frac{\beta_2 SIq}{(1+qW)^2} \\ 0 & \delta & -\mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k(1-\epsilon) & -\mu_4 - pW & -pV \\ 0 & 0 & 0 & rW & rV - \mu_5 \end{bmatrix}$$

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -\mu_1 - \frac{\beta_1 V}{1+qW} - \frac{\beta_2 I}{1+qW}$$

$$a_{12} = \rho$$

$$a_{13} = -\frac{\beta_2 S}{1+qW}$$

$$a_{14} = -\frac{\beta_1 S}{1+qW}$$

$$a_{15} = \frac{\beta_1 SVq}{(1 + qW)^2} + \frac{\beta_2 SIq}{(1 + qW)^2}$$

$$a_{21} = \frac{\beta_1 V}{1 + qW} + \frac{\beta_2 I}{1 + qW}$$

$$a_{22} = -(\mu_2 + \delta + \rho)$$

$$a_{23} = \frac{\beta_2 S}{1 + qW}$$

$$a_{24} = \frac{\beta_1 S}{1 + qW}$$

$$a_{25} = -\frac{\beta_1 SVq}{(1 + qW)^2} - \frac{\beta_2 SIq}{(1 + qW)^2}$$

$$a_{32} = \delta$$

$$a_{33} = -\mu_3$$

$$a_{43} = k(1 - \epsilon)$$

$$a_{44} = -\mu_4 - pW$$

$$a_{45} = -pV$$

$$a_{54} = rW$$

$$a_{55} = rV - \mu_5$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks $J(E_1)$, maka akan dicari menggunakan persamaan $|J(E_1) - \lambda I| = 0$

$$0 = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} - \lambda & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} - \lambda \end{bmatrix}$$

Setelah itu, substitusikan nilai parameter pada Tabel 4.2 dan mengganti nilai parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$ ke dalam matriks (Hattaf, 2023), maka akan didapat

0

$$= \begin{bmatrix} -0.00261 - \lambda & 0.01 & -0.0002768272 & -0.299896189 & 0.37163333 \\ 0.00161096 & -1.6 - \lambda & 0.00027682725 & 0.2998961898 & -0.3716333 \\ 0 & 1.5 & -0.75 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & -15 - \lambda & -61.9388886 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00269333 - \lambda \end{bmatrix}$$

Dalam mencari determinan matriks tersebut, digunakan aplikasi maple untuk membantu memecahkannya seperti pada Lampiran 1, sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$-\lambda^5 - 17.355304\lambda^4 - 36.54160535\lambda^3 - 0.1932085665\lambda^2 - 0.02907183964\lambda - 0.00007761 = 0$$

Setelah persamaan karakteristik diperoleh, langkah selanjutnya adalah menentukan titik kesetimbangan endemik dengan melihat nilai eigen dari persamaan tersebut seperti pada Lampiran 1 dan dihasilkan lima nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = -0.0011137 + 0.02809i$$

$$\lambda_2 = -0.002693334703$$

$$\lambda_3 = -2.445944614$$

$$\lambda_4 = -14.90443895$$

$$\lambda_5 = -0.00111370312 - 0.02809287747i$$

Sebuah sistem dikatakan stabil asimtotik jika seluruh nilai eigen di atas memiliki bagian riil negatif semua. Jadi meskipun terdapat bilangan imajiner(i), kestabilan titik kesetimbangan tetap stabil asimtotik. Berdasarkan hasil perhitungan sebelumnya, maka titik kesetimbangan endemik dalam model penyebaran SARS-CoV-2 bersifat stabil asimtotik.

4.2 Simulasi Numerik

Setelah analisis dinamik yang meliputi mencari titik kesetimbangan penyakit, titik kesetimbangan endemik, angka reproduksi dasar, kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, dan kestabilan titik kesetimbangan endemik, langkah selanjutnya yaitu memverifikasi hasil analisis yang diperoleh dengan cara menyimulasikan hasil tersebut. Simulasi numerik pada penelitian ini menggunakan bantuan *software* MATLAB menggunakan metode runge-kutta orde 4. Nilai variabel awal dan parameter merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh (Hattaf, 2023) seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2. Simulasi numerik akan dibedakan menjadi tiga kasus, yaitu ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W = 0$, dan ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$.

4.2.1 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 < 1$

Untuk simulasi numerik ketika kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$, diambil nilai parameter yang merujuk pada Tabel 4.2 sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = -\frac{\sigma\delta(k(-1+\epsilon)\beta_1 - \mu_4\beta_2)}{\mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}$$

$$\mathcal{R}_0 = -\frac{60(1.5)\left((4.6 \times 10^{-6})(50(-1+0.2)) - 15(1.2 \times 10^{-8})\right)}{(0.001)(0.75)(15)(0.09 + 1.5 + 0.01)}$$

$$\mathcal{R}_0 = 0.9209$$

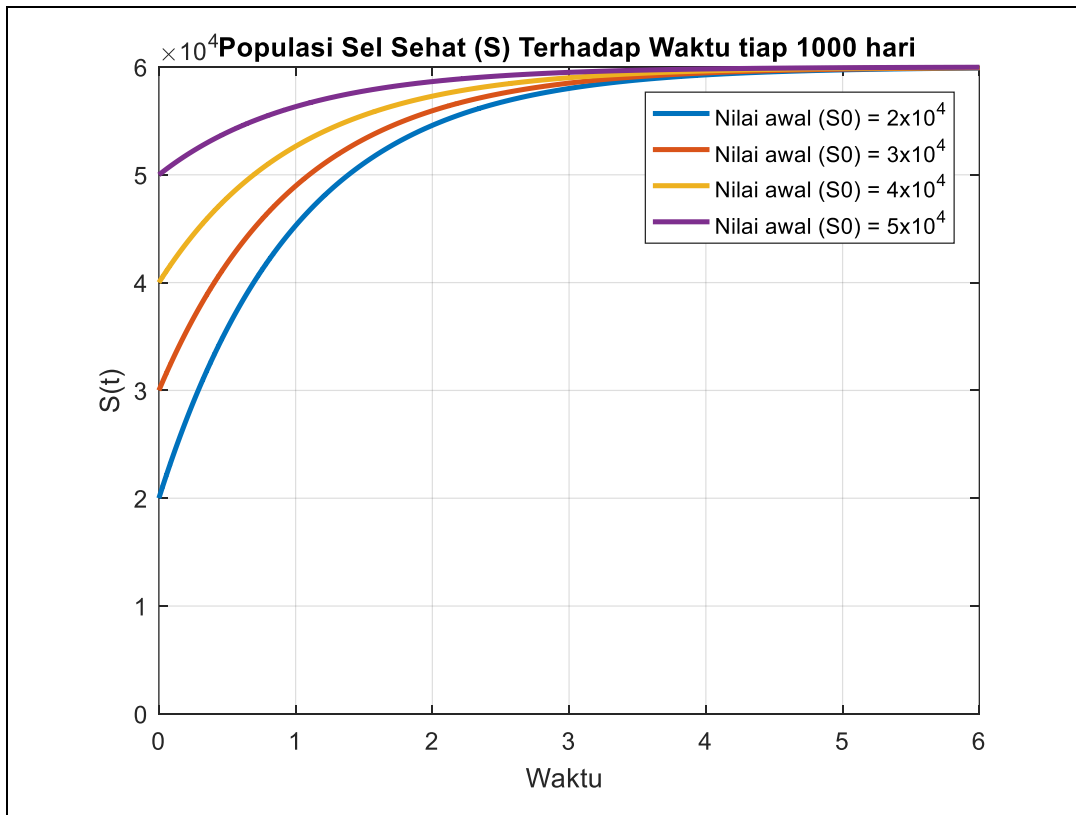
Selain itu, titik kesetimbangan bebas penyakit yang telah diperoleh dari perhitunagn sebelumnya yaitu $E_0 = (S, L, I, V, W) = (6 \times 10^4, 0, 0, 0, 0)$.

Simulasi numerik akan menggunakan beberapa nilai awal sebagai berikut:

$$S = \{2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4, 5 \times 10^4\}; L = \{20, 40, 60, 80\};$$

$$I = \{10, 20, 30, 40\}; V = \{3, 5, 7, 9\}; W = \{100, 200, 300, 400\}$$

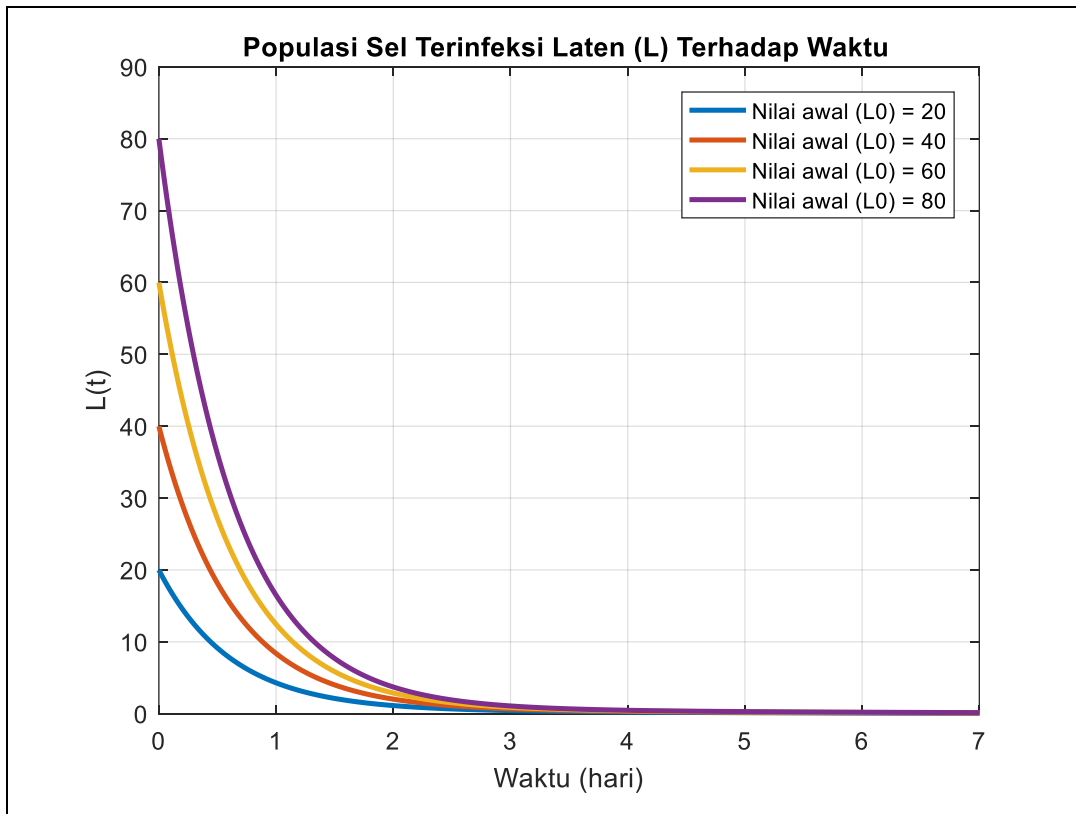
Berikut ini merupakan grafik penyebaran virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan pengobatan dengan $\mathcal{R}_0 < 1$



Gambar 4.2 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 0.9209 < 1$ dengan Nilai Awal $S = 2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4, 5 \times 10^4$ dan Parameter $\beta_1 = 4.6 \times 10^{-6}, \beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}, \sigma = 60, \mu = 0.001, q = 0.01, \rho = 0.01, \delta = 1.5, k = \epsilon = 0.2, p = 0.5, r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.2 merupakan grafik dari populasi sel sehat (S) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing $2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4$, dan 5×10^4 . Penelitian diamati selama 6000 hari dikarenakan untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel sehat untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin lama, maka grafik akan menuju titik setimbang dengan nilai 6×10^4 yang mana sama dengan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1.2.1. selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda

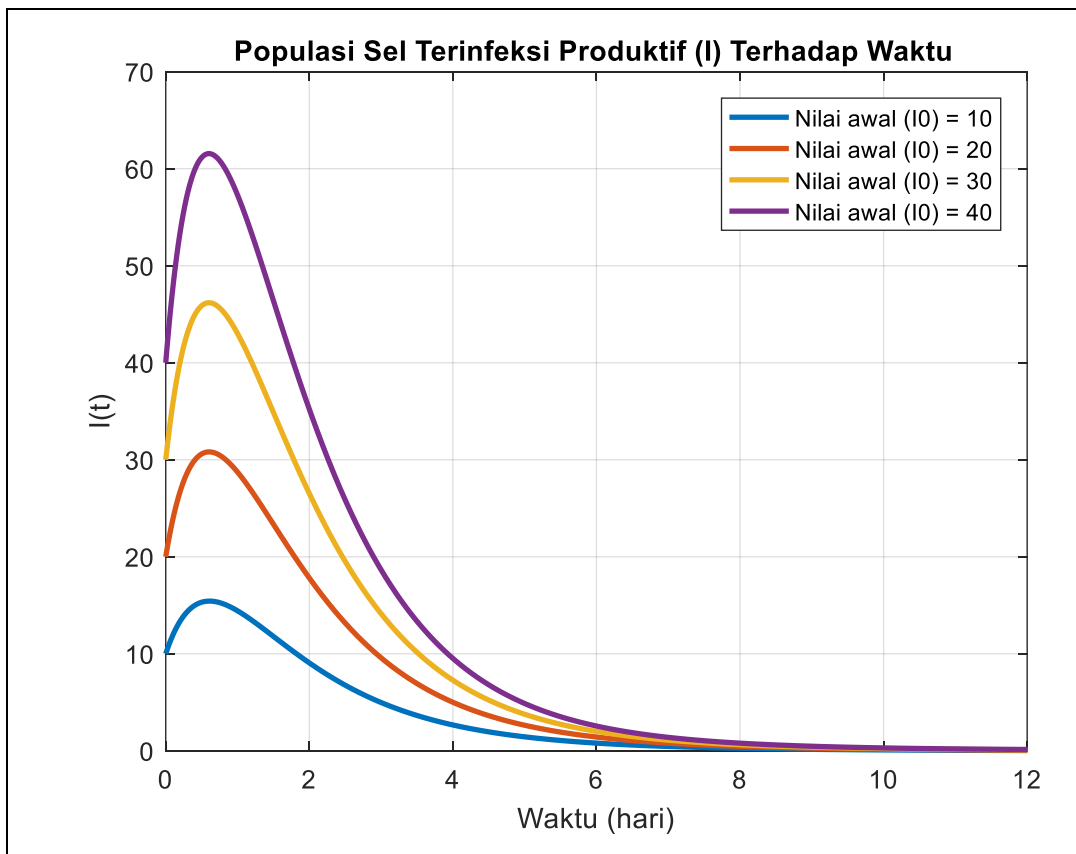
nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Naiknya grafik pada variabel S atau sel sehat dikarenakan seiring berjalannya waktu virus yang terdapat pada tubuh akan menghilang dikarenakan nilai dari angka reproduksi dasar kurang dari satu yang mengartikan penyebaran virus SARS-CoV-2 akan berhenti seiring berjalannya waktu.



Gambar 4.3 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 0.9209 < 1$ dengan Nilai Awal $L = \{20, 40, 60, 80\}$ dan Parameter $\beta_1 = 4.6 \times 10^{-6}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.3 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi laten (L) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 20, 40, 60, dan 80. Penelitian diamati selama 7 hari untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi laten untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut

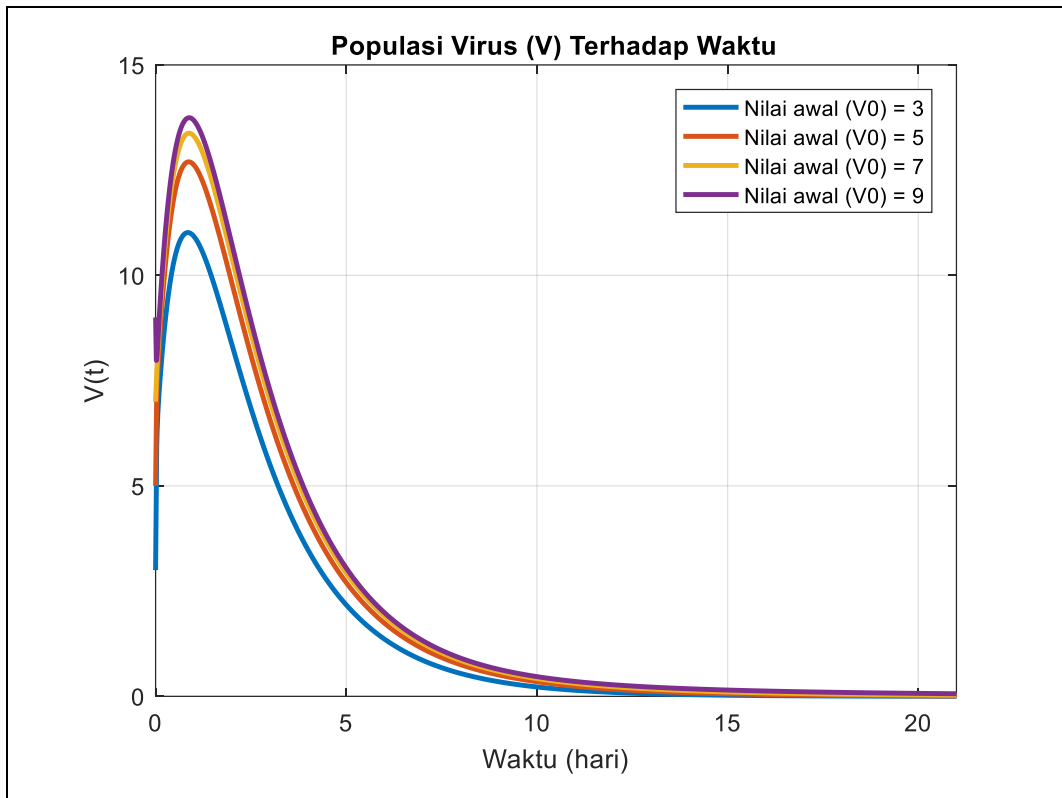
dapat dilihat bahwa semakin lama maka grafik akan menuju titik setimbang yaitu nol ketika $t = 5$ yang mana sama dengan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1.2.1. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Turunnya grafik pada variabel L atau sel terinfeksi laten dikarenakan seiring berjalannya waktu virus yang terdapat pada tubuh akan menghilang dikarenakan nilai dari angka reproduksi dasar kurang dari satu yang mengartikan penyebaran virus *SARS-CoV-2* akan berhenti seiring berjalannya waktu sehingga tidak ada virus yang menginfeksi sel dalam keadaan laten.



Gambar 4.4 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 0.9209 < 1$ dengan Nilai Awal $I = \{10, 20, 30, 40\}$ dan Parameter $\beta_1 = 4.6 \times 10^{-6}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.4 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi produktif (I) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilai masing-masing 10, 20, 30, dan 40.

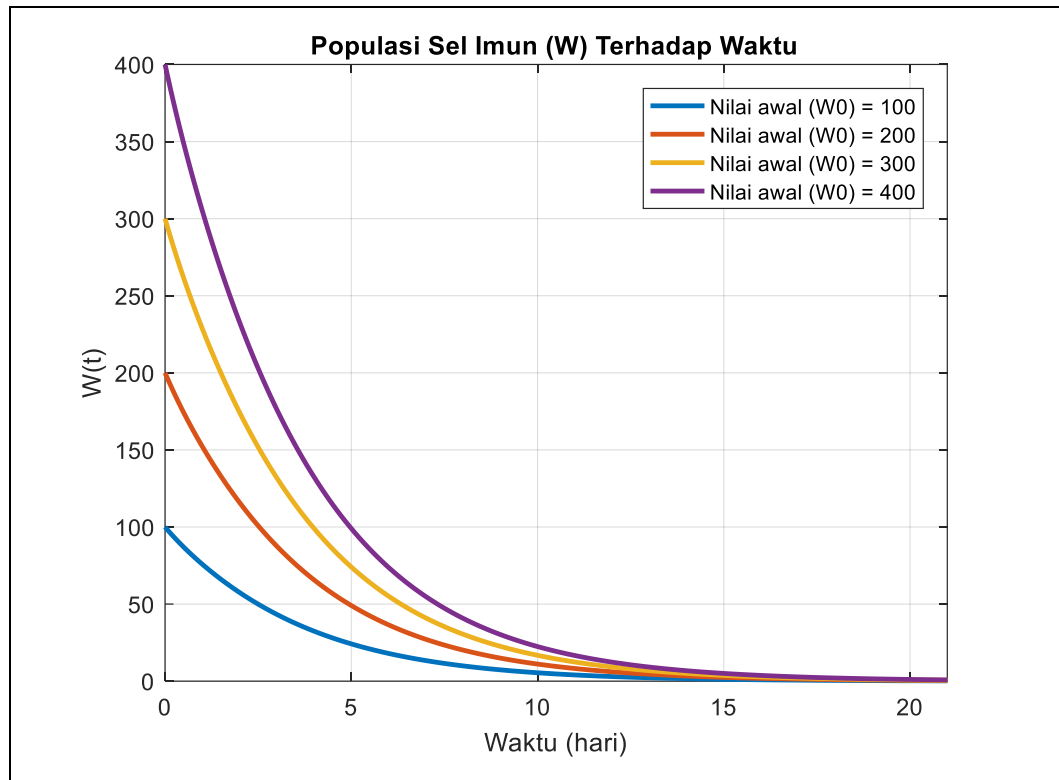
Penelitian diamati selama 12 hari untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi produktif untuk menuju titik setimbang. Grafik mencapai titik maksimumnya ketika $t = 0.6$ dengan nilai yang berbeda tergantung berapa nilai awal yang diberikan. Semakin besar nilai awal, maka semakin besar nilai maksimumnya. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika $t = 10$ maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu nol yang mana sama dengan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1.2.1. hal itu mengartikan bahwa pada hari ke-10 sel yang terinfeksi produktif sudah hilang pada tubuh manusia. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Turunnya grafik pada variabel I dikarenakan seiring berjalannya waktu virus yang terdapat pada tubuh akan menghilang dikarenakan nilai dari angka reproduksi dasar kurang dari satu yang mengartikan penyebaran virus SARS-CoV-2 akan berhenti seiring berjalannya waktu sehingga tidak ada virus yang menginfeksi sel dalam keadaan produktif.



Gambar 4.5 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 0.9209 < 1$ dengan Nilai Awal $V = \{3, 5, 7, 9\}$ dan Parameter $\beta_1 = 4.6 \times 10^{-6}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.5 merupakan grafik dari populasi virus (V) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 3, 5, 7, dan 9. Penelitian diamati selama 20 hari untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel virus untuk menuju titik setimbang. Grafik mencapai titik maksimumnya ketika $t = 0.87$ hari dengan nilai yang berbeda tergantung berapa nilai awal yang diberikan. Semakin besar nilai awal, maka semakin besar nilai maksimumnya. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika $t = 15$ maka terdapat grafik yang telah menuju titik setimbang yaitu nol namun ada grafik yang belum menuju titik setimbang. Hal itu dikarenakan perbedaan nilai awal yang diberikan. Meskipun demikian, semua nilai awal yang diberikan akan tetap menuju titik setimbang

ketika $t = 20$. Turunnya grafik pada variabel V dikarenakan nilai dari angka reproduksi dasar kurang dari satu yang mengartikan penyebaran virus SARS-CoV-2 akan berhenti seiring berjalannya waktu sehingga tidak ada virus yang menginfeksi sel.



Gambar 4.6 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 0.9209 < 1$ dengan Nilai Awal $W = \{100, 200, 300, 400\}$ dan Parameter $\beta_1 = 4.6 \times 10^{-6}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.6 merupakan grafik dari populasi sel imun (W) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 100, 200, 300, dan 400. Penelitian diamati selama 20 hari untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel imun untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika $t = 20$ maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu nol. Hal itu mengartikan bahwa pada hari ke-20 sel imun pada tubuh manusia telah hilang.

Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama.

Berikut ini ditampilkan solusi numerik dari penyebaran virus SARS-CoV-2 seperti pada Tabel 4.3

Tabel 4.3 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2

$t(\text{hari})$	$S(t)$	$L(t)$	$I(t)$	$V(t)$	$W(t)$
0	50000	80	40	9	400
1	50009.7645	16.3559	57.2072	13.6651	305.0748
2	50019.053	3.5338	34.9997	10.6826	232.8140
3	50028.3703	0.9097	18.3687	7.1573	176.1794
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	56319.7379	0	0	0	0
1001	56323.4163	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9998	59999.5449	0	0	0	0
9999	59999.5449	0	0	0	0
10000	59999.5458	0	0	0	0

Tabel 4.3 menampilkan hasil numerik dari setiap variabel (S, L, I, V, W) . Pada tabel tersebut nilai dari S ketika $t = 1000$ yaitu $S = 56319.7379$. Namun ketika $t = 10000$, maka populasi sel sehat akan stabil dan menuju titik setimbang dengan nilai $S \cong 6 \times 10^4$. Hal itu juga menandakan bahwa walaupun populasi dari sel yang terinfeksi laten, sel yang terinfeksi produktif, sel virus, dan sel imun sudah habis dan menuju titik setimbang, populasi sel sehat akan terus memproduksi sel sehat dan pada akhirnya juga akan stabil menuju titik kesetimbangan bebas penyakit.

4.2.2 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 > 1$

Untuk simulasi numerik ketika kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$, diambil nilai parameter yang merujuk pada Tabel 4.2. Namun pada parameter β_1 nilainya diubah menjadi $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$ supaya nilai dari angka reproduksi dasar lebih dari 1 sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = -\frac{\sigma\delta(k(-1+\epsilon)\beta_1 - \mu_4\beta_2)}{\mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}$$

$$\mathcal{R}_0 = -\frac{60(1.5)\left((1.3 \times 10^{-5})(50(-1+0.2)) - 15(1.2 \times 10^{-8})\right)}{(0.001)(0.75)(15)(0.09 + 1.5 + 0.01)}$$

$$\mathcal{R}_0 = 2.6009$$

Selain itu, titik kesetimbangan bebas endemik yang telah diperoleh dari perhitungannya sebelumnya yaitu

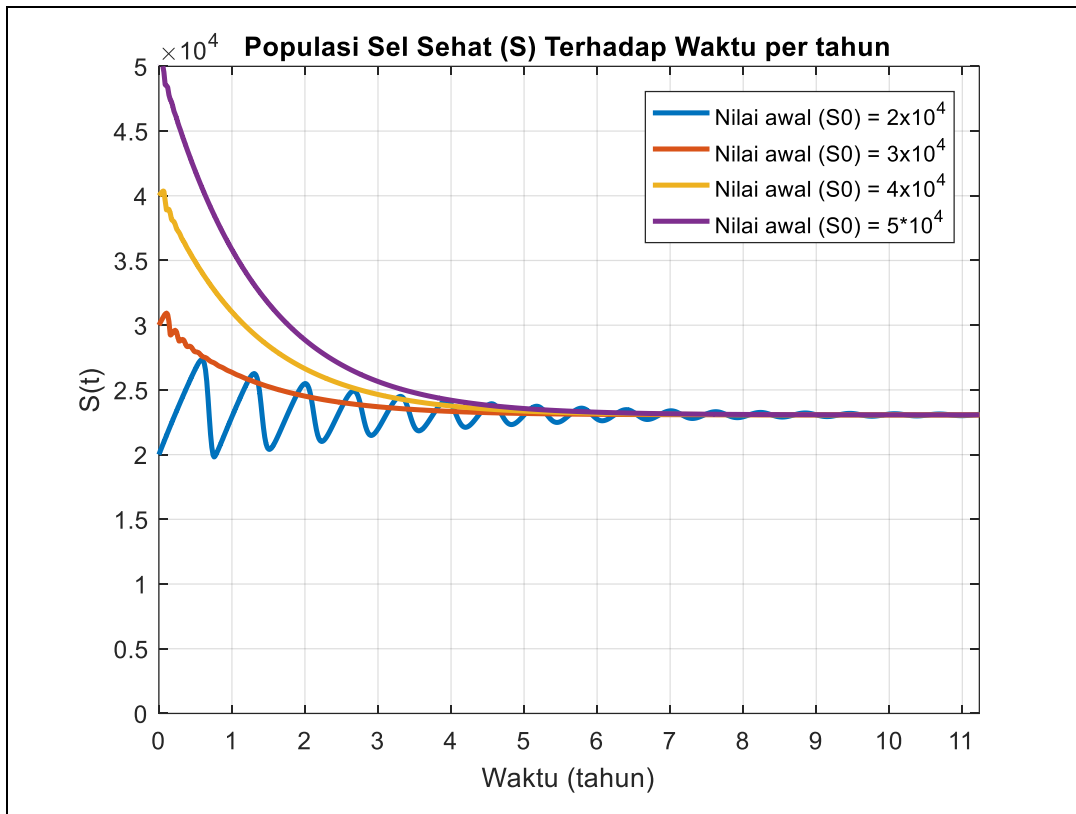
$$E_1 = (S, L, I, V, W) = (23068.9377, 23.2271, 46.4542, 123.8778, 0)$$

Simulasi numerik akan menggunakan beberapa nilai awal sebagai berikut

$$S = \{2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4, 5 \times 10^4\}; L = \{20, 40, 60, 80\};$$

$$I = \{10, 20, 30, 40\}; V = \{3, 5, 7, 9\}; W = \{100, 200, 300, 400\}$$

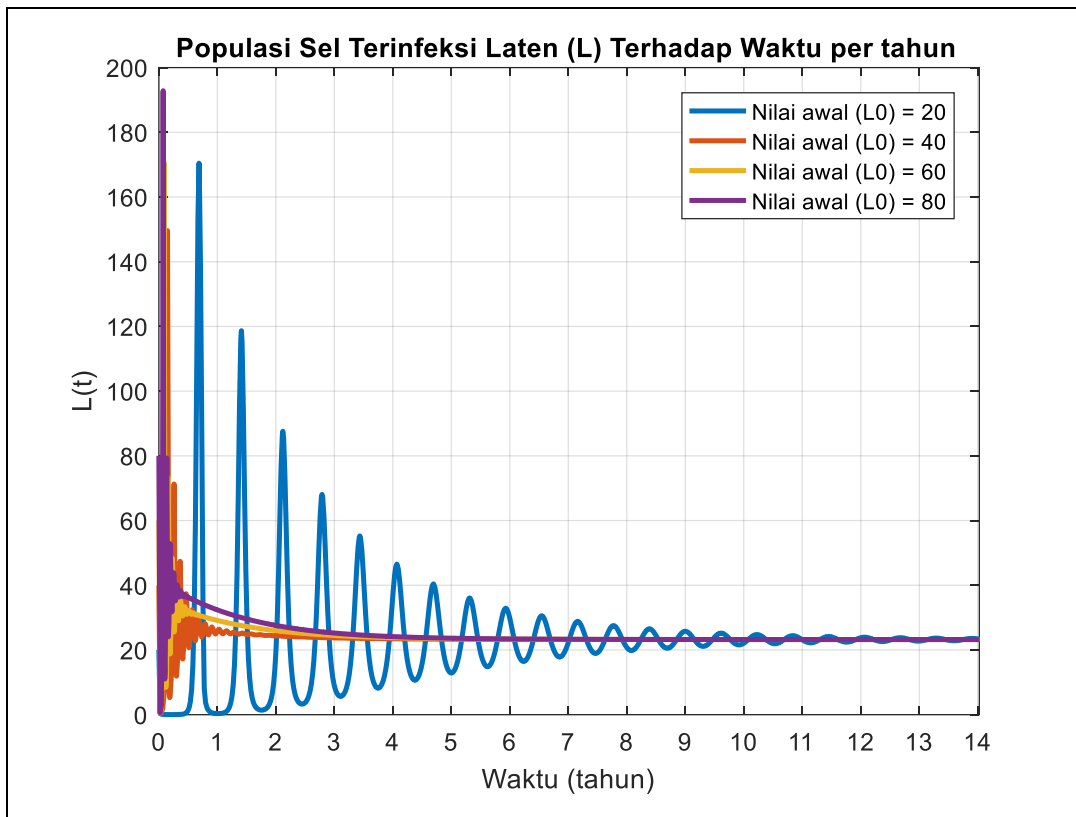
Berikut ini merupakan grafik penyebaran virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan pengobatan dengan $\mathcal{R}_0 > 1$.



Gambar 4.7 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $S = 2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4, 5 \times 10^4$ dan Parameter $\beta = 1.3 \times 10^{-5}, \beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}, \sigma = 60, \mu = 0.001, q = 0.01, \rho = 0.01, \delta = 1.5, k = \epsilon = 0.2, p = 0.5, r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.7 merupakan grafik dari populasi sel sehat (S) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing $2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4$ dan 5×10^4 . Penelitian diamati selama 11 tahun dikarenakan untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel sehat untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin lama maka grafik akan menuju titik setimbang dengan nilai 2.4×10^4 . Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Turunnya grafik pada variabel S atau sel sehat dikarenakan seiring berjalannya waktu virus yang terdapat pada tubuh tidak akan menghilang dan akan tetap ada dalam tubuh dengan jumlah tertentu dikarenakan nilai dari angka

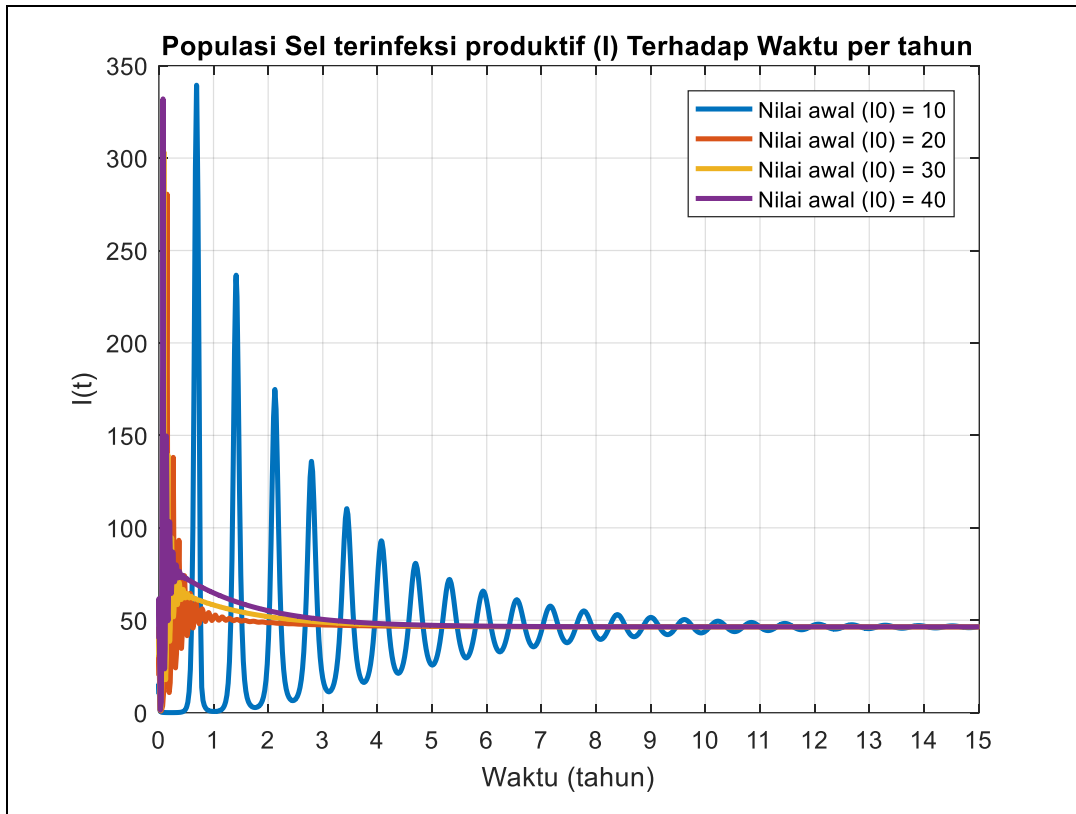
reproduksi dasar lebih dari satu yang mengartikan penyebaran virus SARS-CoV-2 tidak akan berhenti seiring berjalannya waktu.



Gambar 4.8 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $L = \{20, 40, 60, 80\}$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.8 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi laten (L) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 20, 40, 60 dan 80. Penelitian diamati selama 14 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi laten untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin lama maka grafik akan menuju titik setimbang dengan nilai 23.2771 setelah 14 tahun. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Meskipun grafik yang ditampilkan cenderung turun,

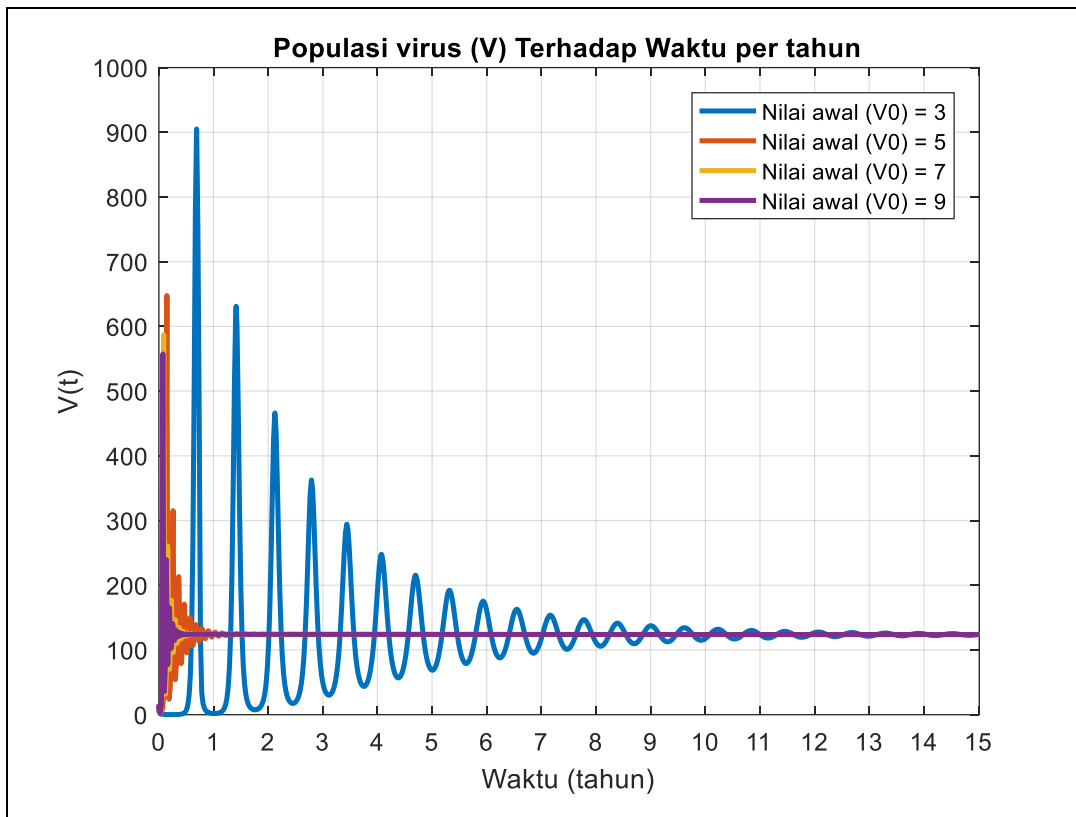
namun sel yang terinfeksi laten (L) akan tetap ada dan tidak akan habis seiring berjalannya waktu. Hal itu dikarenakan sel virus masih terdapat dalam tubuh karena angka reproduksi dasar yang diteliti lebih dari satu.



Gambar 4.9 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $I = 10, 20, 30, 40$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

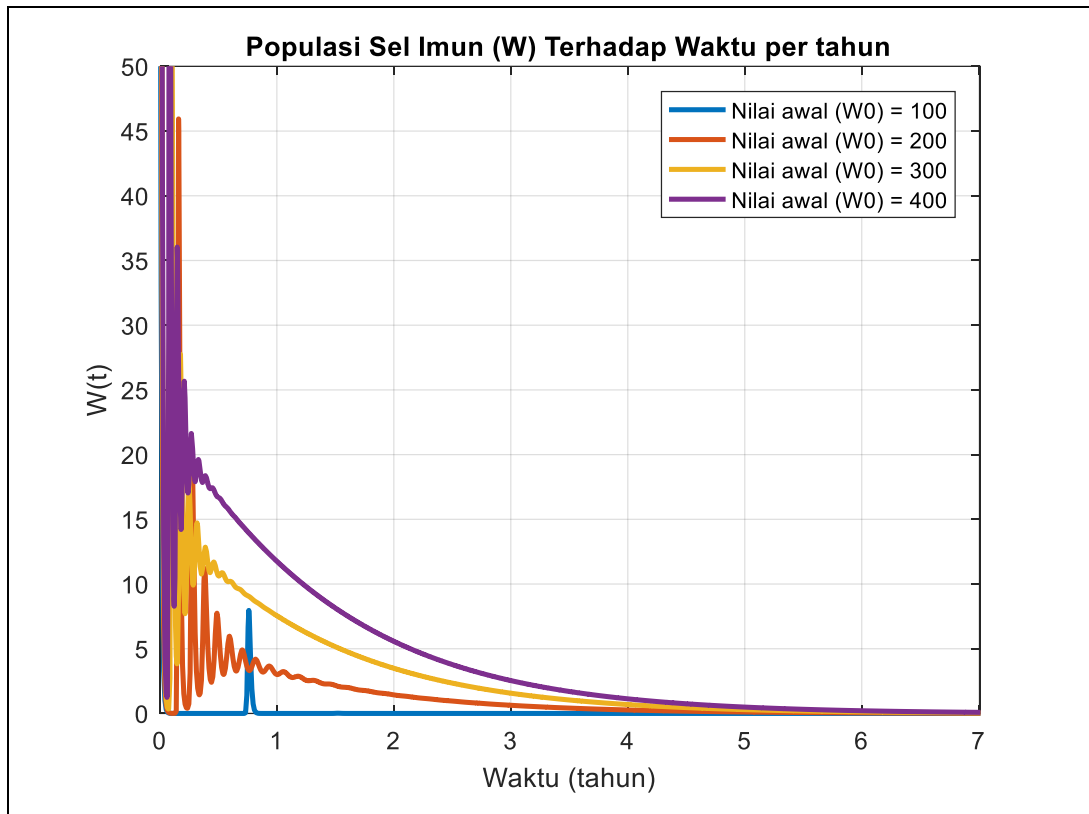
Gambar 4.9 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi produktif (I) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 10, 20, 30 dan 40. Penelitian diamati selama 15 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi produktif untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu mencapai 15 tahun maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu 46.452. Hal itu mengartikan bahwa pada tahun ke 15 sel yang terinfeksi produktif akan tetap ada pada tubuh manusia. Selain itu,

walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama.



Gambar 4.10 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $V = 3, 5, 7, 9$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}, \beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}, \sigma = 60, \mu = 0.001, q = 0.01, \rho = 0.01, \delta = 1.5, k = \epsilon = 0.2, p = 0.5, r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.10 merupakan grafik dari populasi virus (V) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 3, 5, 7 dan 9. Penelitian diamati selama 15 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel virus untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu mencapai 14 tahun maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu 123.8778. Hal itu dikarenakan angka reproduksi dasar yang diambil lebih dari satu, sehingga penyebaran virus akan terus berlangsung.



Gambar 4.11 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $W = 100, 200, 300, 400$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 2.4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.11 merupakan grafik dari populasi sel imun (W) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 100, 200, 300 dan 400. Penelitian diamati selama 7 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel imun untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu mencapai 6 tahun maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu nol. Hal itu mengartikan bahwa pada tahun ke 6 sel imun pada tubuh manusia telah hilang. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Berikut ini ditampilkan solusi numerik dari penyebaran virus SARS-CoV-2 seperti pada Tabel 4.4

Tabel 4.4 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2

$t(hari)$	$S(t)$	$L(t)$	$I(t)$	$V(t)$	$W(t)$
0	50000	80	40	9	400
1	50008.6186	17.1133	57.6834	13.7760	305.09732
2	50016.4627	4.5650	36.2271	11.0474	232.97259
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	41200.6454	35.7982	71.6042	124.1425	16.141932
201	41162.5450	35.7980	71.6	124.2207	16.11027
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	26256.6545	25.6844	51.3828	124.0947	3.12492934
1001	26249.5726	25.6791	51.3727	124.0946	3.11814659
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9999	23068.9377	23.2271	46.4542	123.8778	0
10000	23068.9377	23.2271	46.4542	123.8778	0

Tabel 4.4 menampilkan hasil numerik dari setiap variabel (S, L, I, V, W). Pada tabel tersebut nilai dari S ketika $t = 1000$ yaitu $S = 26256.6545$. Namun ketika $t = 10000$, maka populasi sel sehat akan stabil dan menuju titik setimbang dengan nilai $S = 23068.9377$. Selain itu, nilai sel yang terinfeksi secara laten dan sel imun akan turun seiring berjalannya waktu. Sebaliknya, nilai dari sel yang terinfeksi produktif dan sel virus akan mengalami peningkatan. Hal itu dikarenakan virus akan menyebar karena nilai dari $\mathcal{R}_0 > 1$. Meski begitu, kelima variabel akan menuju titik setimbang ketika $t = 10000$.

4.2.3 Simulasi Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$

Untuk simulasi numerik ketika kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$, diambil nilai parameter yang merujuk pada Tabel 4.2. Namun pada parameter β_1 nilainya diubah menjadi $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$ supaya nilai dari angka reproduksi dasar lebih

dari 1 dan parameter r nilainya diubah menjadi $r = 4 \times 10^{-3}$ sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma\delta(k(1-\epsilon)\beta_1 + \mu_4\beta_2)}{\mu_1\mu_3\mu_4(\mu_2 + \delta + \rho)}$$

$$\mathcal{R}_0 = - \frac{60(1.5) \left((1.3 \times 10^{-5})(50(-1 + 0.2)) - 15(1.2 \times 10^{-8}) \right)}{(0.001)(0.75)(15)(0.09 + 1.5 + 0.01)}$$

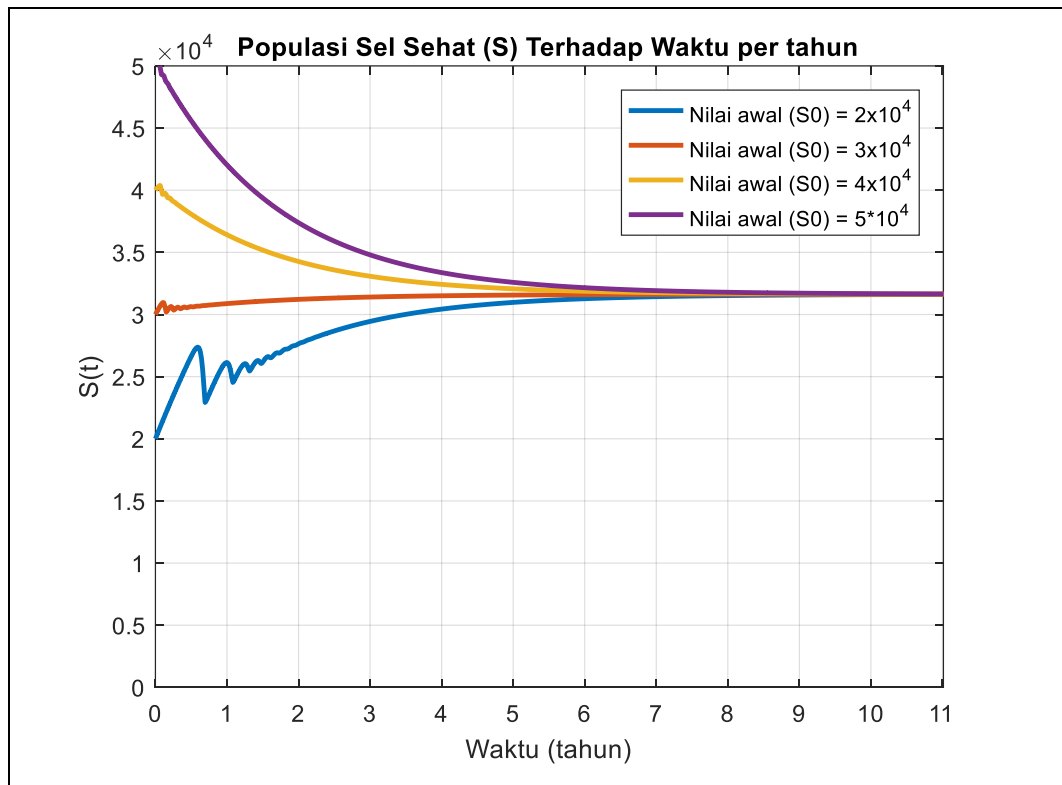
$$\mathcal{R}_0 = 2.6009$$

Simulasi numerik akan menggunakan beberapa nilai awal sebagai berikut

$$S = \{4 \times 10^4, 6 \times 10^4, 8 \times 10^4, 10 \times 10^4\}; L = \{20, 40, 60, 80\};$$

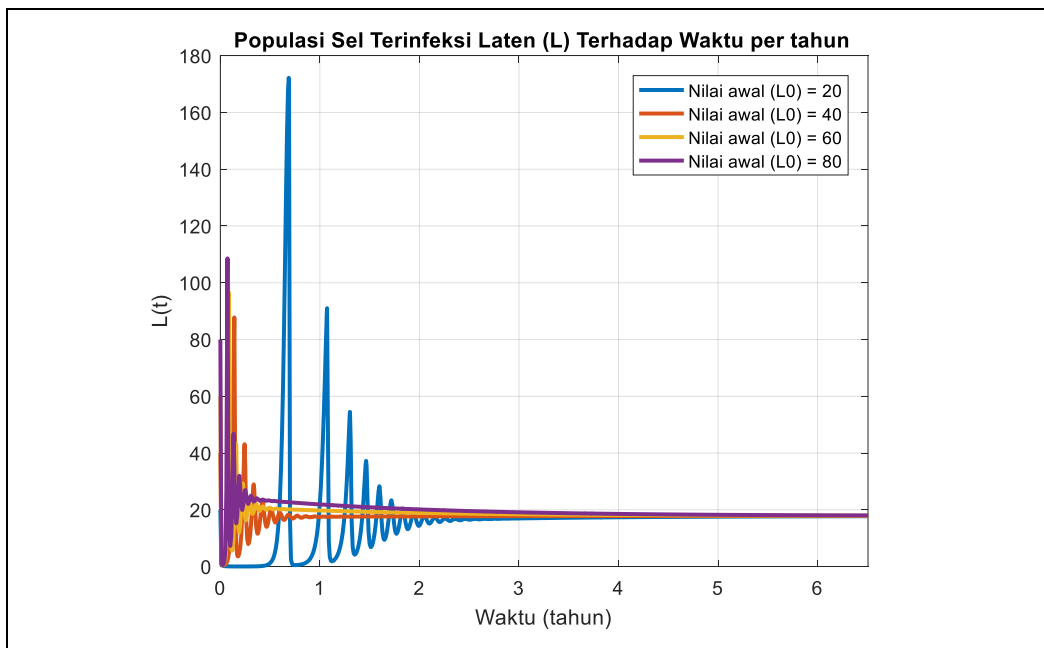
$$I = \{50, 100, 150, 200\}; V = \{100, 200, 300, 400\}; W = \{30, 70, 110, 150\}$$

Berikut ini merupakan grafik penyebaran virus SARS-CoV-2 dengan imunitas dan pengobatan dengan $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$.



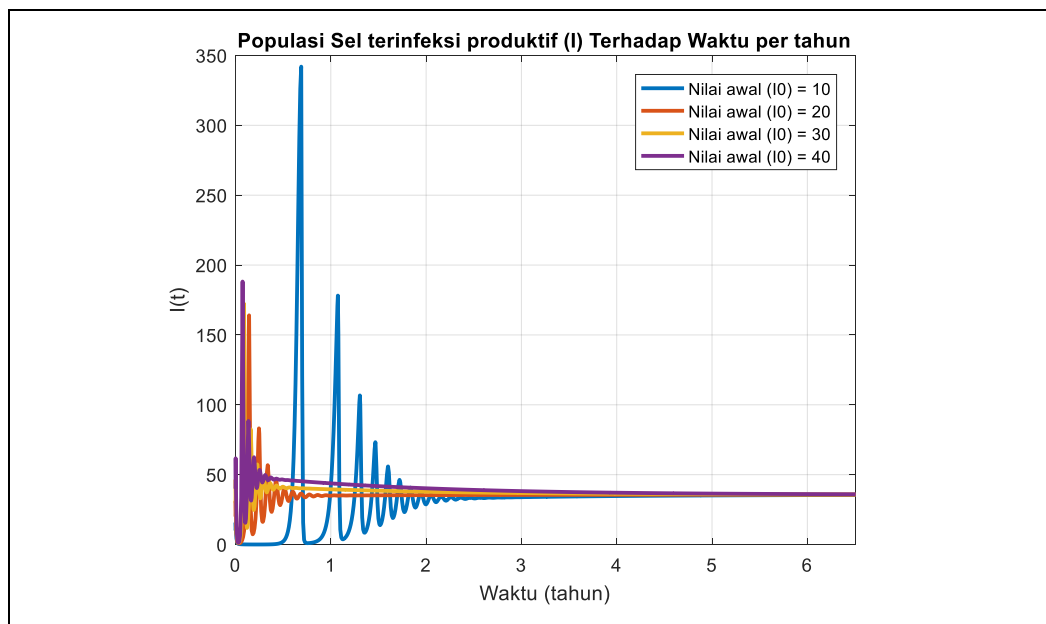
Gambar 4.12 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $S = 2 \times 10^4, 3 \times 10^4, 4 \times 10^4, 5 \times 10^4$ dan Parameter $\beta = 1.3 \times 10^{-5}, \beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}, \sigma = 60, \mu = 0.001, q = 0.01, \rho = 0.01, \delta = 1.5, k = \epsilon = 0.2, p = 0.5, r = 4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.12 merupakan grafik dari populasi sel sehat (S) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 2×10^4 , 3×10^4 , 4×10^4 dan 5×10^4 . Penelitian diamati selama 11 tahun dikarenakan untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel sehat untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin lama maka grafik akan menuju titik setimbang dengan nilai 3.1629×10^4 . Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Turunnya grafik pada variabel S atau sel sehat dikarenakan seiring berjalannya waktu virus yang terdapat pada tubuh tidak akan menghilang dan akan tetap ada dalam tubuh dengan jumlah tertentu dikarenakan nilai dari angka reproduksi dasar lebih dari satu yang mengartikan penyebaran virus SARS-CoV-2 tidak akan berhenti seiring berjalannya waktu.



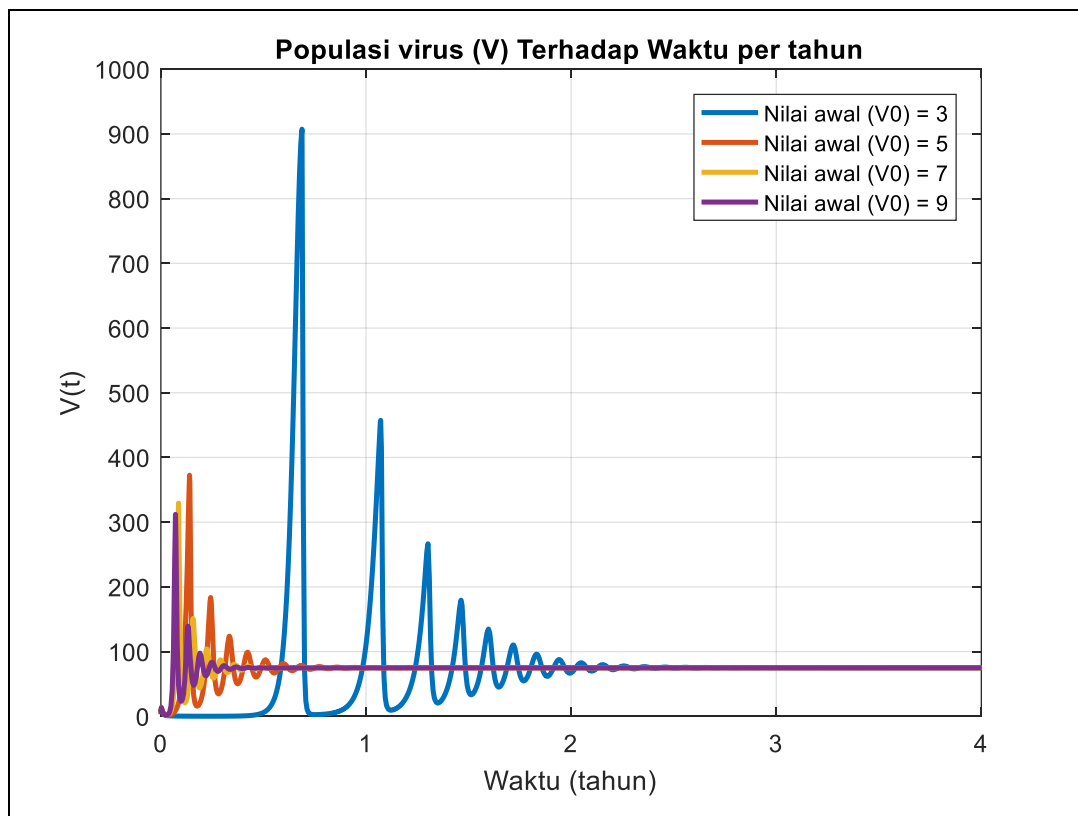
Gambar 4.13 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $L = 20, 40, 60, 80$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.13 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi laten (L) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 20, 40, 60 dan 80. Penelitian diamati selama 6 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi laten untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin lama maka grafik akan menuju titik setimbang dengan nilai 17.8431 ketika waktu mencapai 6 tahun. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Meskipun grafik yang ditampilkan cenderung turun, namun sel yang terinfeksi laten (L) akan tetap ada dan tidak akan habis seiring berjalannya waktu. Hal itu dikarenakan sel virus masih terdapat dalam tubuh karena angka reproduksi dasar yang diteliti lebih dari satu.



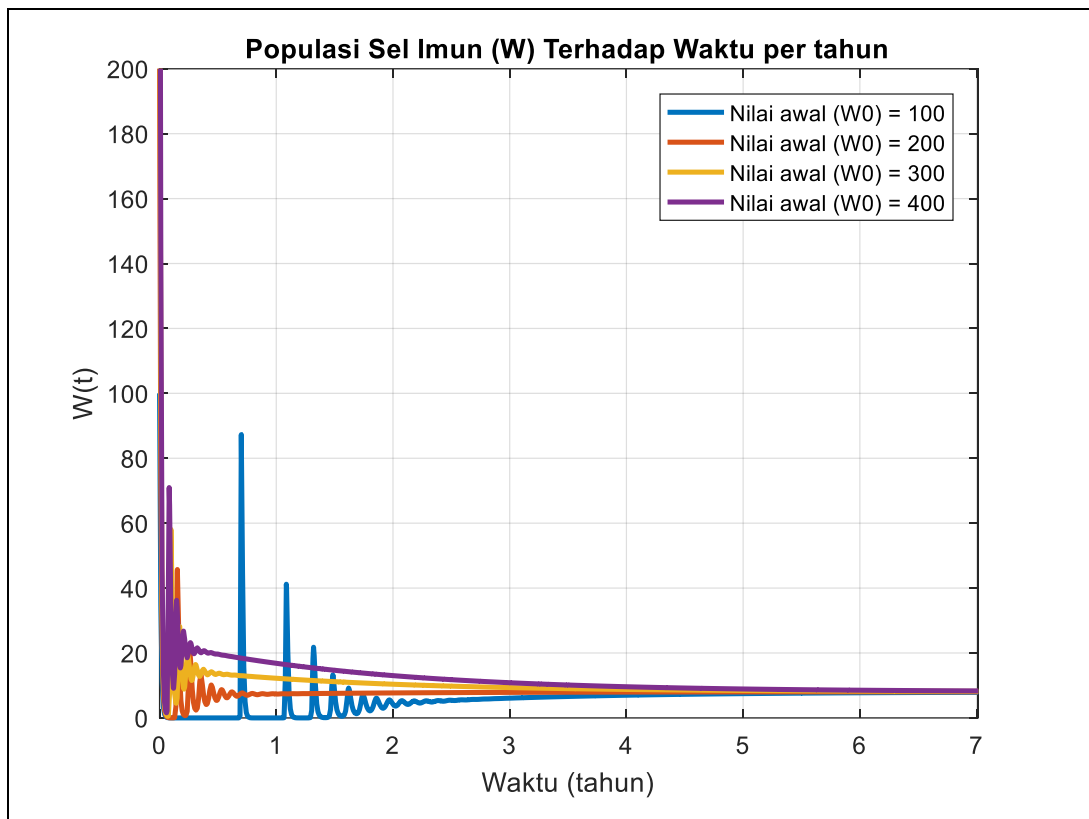
Gambar 4.14 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $I = 50, 100, 150, 200$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.14 merupakan grafik dari populasi sel yang terinfeksi produktif (I) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 10,20,30 dan 40. Penelitian diamati selama 6 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel terinfeksi produktif untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika $t = 6$ maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu 35.6861. Hal itu mengartikan bahwa pada tahun ke 6 sel yang terinfeksi produktif akan tetap ada pada tubuh manusia. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama.



Gambar 4.15 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $V = 100, 200, 300, 400$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.15 merupakan grafik dari populasi virus (V) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai awal dengan nilainya masing-masing 3, 5, 7, dan 9. Penelitian diamati selama 4 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel virus untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu mencapai 3 tahun maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu 75. Hal itu dikarenakan angka reproduksi dasar yang diambil lebih dari satu, sehingga penyebaran virus akan terus berlangsung.



Gambar 4.16 Grafik Kontinu Penyebaran SARS-CoV-2 ketika $\mathcal{R}_0 = 2.6609 > 1$ dengan Nilai Awal $W = 100, 200, 300, 400$ dan Parameter $\beta_1 = 1.3 \times 10^{-5}$, $\beta_2 = 1.2 \times 10^{-8}$, $\sigma = 60$, $\mu = 0.001$, $q = 0.01$, $\rho = 0.01$, $\delta = 1.5$, $k = \epsilon = 0.2$, $p = 0.5$, $r = 4 \times 10^{-3}$

Gambar 4.16 merupakan grafik dari populasi sel imun (W) terhadap waktu (t). Nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini berjumlah empat nilai

awal dengan nilainya masing-masing 100, 200, 300 dan 400. Penelitian diamati selama 7 tahun untuk melihat berapa lama waktu yang dibutuhkan populasi sel imun untuk menuju titik setimbang. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu mencapai 6 tahun maka grafik telah menuju titik setimbang yaitu 8.0651887. Hal itu mengartikan bahwa pada tahun ke 6 sel imun pada tubuh manusia akan tetap sama. Selain itu, walaupun setiap nilai awal yang diteliti berbeda nilainya, namun semua nilai awal akan menuju titik setimbang yang sama. Berikut ini ditampilkan solusi numerik dari penyebaran virus SARS-CoV-2 seperti pada Tabel 4.5

Tabel 4.5 Nilai dari Variabel (S, L, I, V, W) terhadap Waktu antara $t = [0, 10^4]$ pada Model Penyebaran SARS-CoV-2

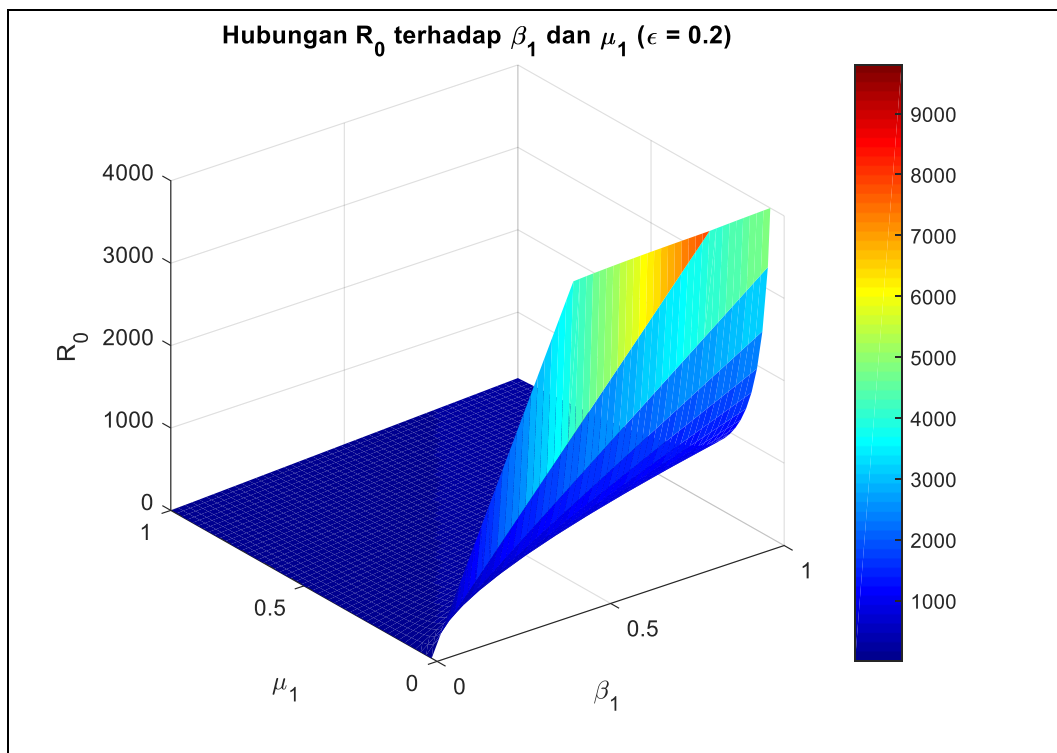
$t(hari)$	$S(t)$	$L(t)$	$I(t)$	$V(t)$	$W(t)$
0	50000	80	40	9	400
1	50008.6477	17.094	57.6756	13.5388	310.95667
2	50016.5947	4.5058	36.1789	10.6679	241.9749
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	35331.6364	19.3252	38.6567	74.8855	11.29686
1001	35325.585	19.3228	38.6519	74.8856	11.29169
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1999	32348.0877	18.1344	36.27	74.97	8.703509
2000	32346.9074	18.1339	36.2691	74.97	8.702465
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9999	31629.5440	17.8431	35.6861	75	8.0651851
10000	31629.5440	17.8431	35.6861	75	8.0651851

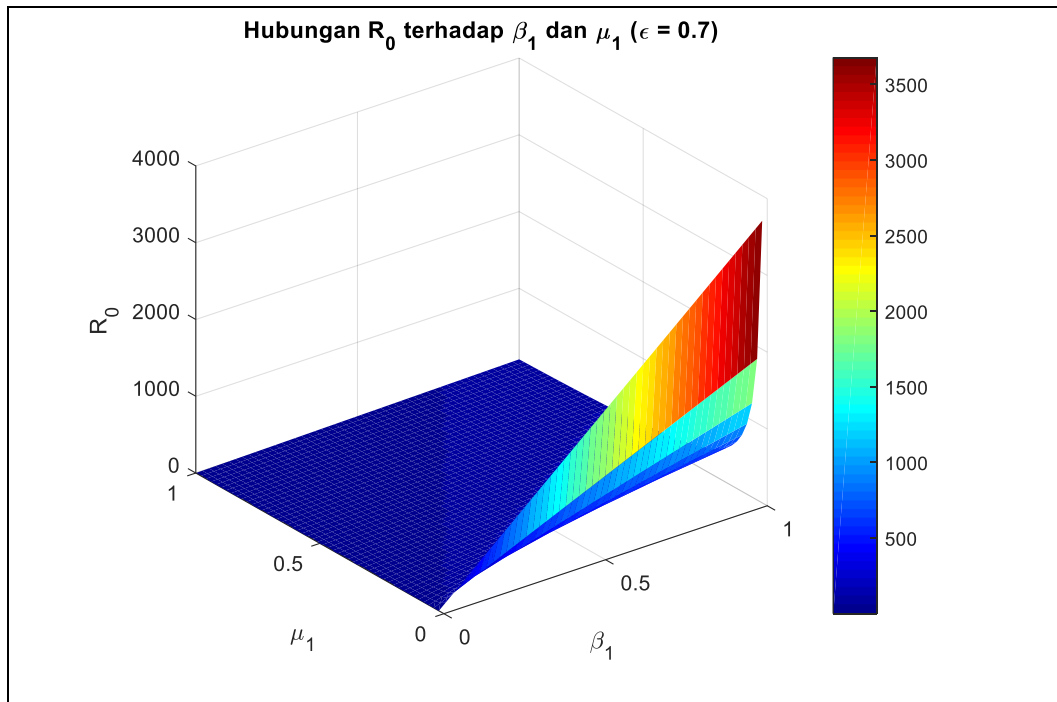
Tabel 4.5 menampilkan hasil numerik dari setiap variabel (S, L, I, V, W). Pada tabel tersebut nilai dari S ketika $t = 1000$ yaitu $S = 35331.6364$. Namun ketika $t = 10000$, maka populasi sel sehat akan stabil dan menuju titik setimbang

dengan nilai $S = 31629.5440$. Selain itu, nilai sel yang terinfeksi secara laten, sel terinfeksi produktif dan sel imun akan turun seiring berjalannya waktu. Sebaliknya, nilai dari sel virus akan mengalami peningkatan. Hal itu dikarenakan virus akan menyebar karena nilai dari $\mathcal{R}_0 > 1$. Walaupun demikian, kelima variabel akan menuju titik setimbang ketika $t = 10000$.

4.2.4 Hubungan Antar Parameter

Pada model penyebaran virus SARS-CoV-2, terdapat beberapa parameter yang berperan aktif dalam mempengaruhi penyebaran virus SARS-CoV-2. Dengan kata lain, apabila nilai parameter diubah hal itu akan menyebabkan grafik pada Gambar 4.2 sampai Gambar 4.16 juga berubah. Oleh karena itu, akan ditampilkan bagaimana hubungan parameter dalam hal ini pengaruh perubahan nilai laju kematian sel (μ_1), nilai laju sel terinfeksi melalui partikel virus (β_1), dan efektivitas pengobatan (ϵ) dalam mempengaruhi nilai dari angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) sebagai berikut.





Gambar 4.17 Hubungan Nilai Parameter μ, β_1, ϵ terhadap Nilai R_0

Pada Gambar 4.17 ditampilkan dua simulasi hubungan antara nilai parameter μ, β_1, ϵ terhadap nilai angka reproduksi dasar R_0 . Simulasi pertama menampilkan grafik ketika nilai $\epsilon = 0.2$ dan simulasi kedua menampilkan grafik ketika nilai $\epsilon = 0.7$. Parameter ϵ merupakan parameter yang menunjukkan tingkat keefektifan pengobatan terhadap penyebaran virus SARS-CoV-2 dengan nilai antara 0 sampai 1. Pada Gambar 4.17 terlihat bahwa perbedaan utama kedua grafik tersebut yaitu ketika nilai $\epsilon = 0.2$, nilai angka reproduksi dasar sudah tinggi walaupun nilai dari laju sel terinfeksi dan laju sel mati rendah. Sebaliknya, ketika nilai $\epsilon = 0.7$, nilai angka reproduksi dasar akan bernilai tinggi apabila laju sel yang terinfeksi tinggi dan laju sel mati juga tinggi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa pengobatan pada tubuh manusia sangat diperlukan untuk memperlambat penyebaran virus SARS-CoV-2. Untuk lebih jelasnya, berikut ini ditampilkan nilai pada setiap parameter seperti pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Nilai Hubungan antar Parameter μ, β_1 dan Angka Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$)

Laju sel terinfeksi (β_1)	Laju kematian sel (μ)	Angka reproduksi ($\mathcal{R}_0$)
0	0.1	0.00009
	0.2	0.0000045
	0.3	0.0000030
	0.4	0.0000022
	0.5	0.0000018
0.01	0.1	7.500009
	0.2	3.7500045
	0.3	2.5000030
	0.4	1.8750022
	0.5	1.5000018
0.1	0.1	75.00009
	0.2	37.5000045
	0.3	25.000003
	0.4	18.75000022
	0.5	15.0000018

Tabel 4.6 menunjukkan pengaruh parameter laju sel terinfeksi (β_1) dan laju kematian sel (μ_1) terhadap angka reproduksi dasar. Dapat dilihat bahwasanya semakin besar nilai dari parameter β_1 maka angka reproduksi dasar akan semakin besar. Sebaliknya apabila nilai parameter dari laju sel yang terinfeksi sama, sedangkan laju kematian sel berbeda akan menyebabkan penurunan nilai dari angka reproduksi dasar.

4.2.5 Verifikasi Solusi Numerik

Setelah memperoleh titik kesetimbangan dan analisis kestabilan secara analitik serta melakukan simulasi numerik, langkah selanjutnya adalah melakukan verifikasi hasil numerik terhadap hasil analitik. Verifikasi ini bertujuan untuk memastikan konsistensi antara pendekatan teoritis dan simulasi numerik yang telah dilakukan. Hasil numerik yang diperoleh melalui metode numerik dibandingkan dengan hasil analitik untuk mengonfirmasi apakah keduanya menunjukkan kecocokan dalam memprediksi dinamika sistem

Dalam skripsi ini, cara untuk memverifikasi hasil numerik terhadap analitik yaitu dengan membandingkan titik kesetimbangan yang telah diperoleh sebelumnya sebagai berikut.

Tabel 4.7 Perbandingan nilai titik kesetimbangan secara analitik dan numerik ketika $t = 10000$

Titik kesetimbangan	Analitik	Numerik
Bebas penyakit ketika $\mathcal{R}_0 < 1$	$S = 6 \times 10^4$ $L = 0$ $I = 0$ $V = 0$ $W = 0$	$S = 59999.5458$ $L = 0$ $I = 0$ $V = 0$ $W = 0$
Endemik ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W = 0$	$S = 23068.9377$ $L = 23.2271$ $I = 46.4542$ $V = 123.8778$ $W = 0$	$S = 23068.9377$ $L = 23.2271$ $I = 46.4542$ $V = 123.8778$ $W = 0$
Endemik ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$	$S = (0, 38892.1875)$ $L = (13.2753, 37.7358)$ $I = (26.55069, 75.471698)$ $V = 75$ $W = (1.67926, 50.50314)$	$S = 31629.5440$ $L = 17.8431$ $I = 35.6861$ $V = 75$ $W = 8.0651851$

Tabel 4.7 menampilkan nilai titik kesetimbangan yang diperoleh dengan cara analitik dan numerik ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, $\mathcal{R}_0 > 1$, $W = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1, W \neq 0$ ketika t telah mencapai 10.000. Pada tabel dapat dilihat bahwa nilai titik kesetimbangan yang dihasilkan dengan cara numerik sama dengan nilai yang dihasilkan dengan cara analitik. Hal itu menunjukkan bahwa simulasi yang dilakukan secara numerik menggunakan metode runge-kutta orde 4 telah sesuai.

4.3 Model Matematika Virus RNA dalam Pandangan Islam

Segala peristiwa dalam kehidupan makhluk telah ditentukan oleh Yang Maha Kuasa. Segala sesuatu diciptakan dengan tata cara yang telah diatur secara sempurna. Allah SWT menciptakan anggota tubuh manusia bekerja harmonis dan seimbang, menjadikan manusia sebagai makhluk terbaik.

Model matematika virus RNA, seperti yang digunakan untuk mempelajari penyebaran penyakit menular, dapat dipandang sebagai salah satu bentuk ikhtiar ilmiah dalam Islam. Islam memandang ilmu pengetahuan sebagai karunia yang harus dimanfaatkan demi kebaikan bersama. Model matematika ini membantu untuk memahami dinamika penyebaran virus, merumuskan langkah pencegahan, dan melindungi dari dampak buruk wabah. Dalam Islam, ada konsep ikhtiar usaha manusia untuk mencapai tujuan baik yang mengajarkan bahwa manusia wajib berusaha sebaik mungkin dalam menjaga kesehatan dan kesejahteraan. Dalam berikhtiar bisa dilakukan secara kuratif dan preventif. Secara kuratif dengan melakukan pengobatan terhadap penyakit yang diderita, sedangkan secara preventif dengan melakukan pencegahan agar penyakit tidak menular luas.

Model matematika yang digunakan dalam konteks vaksinasi dapat dikategorikan sebagai bentuk ikhtiar preventif karena berperan dalam memprediksi dan mengendalikan penyebaran penyakit menular. Dengan langkah ini, kita bisa mengurangi risiko terjadinya wabah atau penyebaran penyakit yang lebih luas. Ikhtiar ini bersifat preventif karena berfokus pada pencegahan agar penyakit tidak meluas atau mempengaruhi populasi yang lebih besar, bukan menunggu sampai banyak orang terinfeksi baru mengambil tindakan.

Dengan memahami penyebaran virus RNA melalui model matematika, kita berupaya melindungi nyawa dan mencegah penyebaran penyakit sesuai dengan anjuran Islam. Sementara itu, sikap sabar dan tawakal tetap menjadi panduan ketika menghadapi hasil dari upaya manusia ini, mengingat segala sesuatu terjadi atas kehendak Allah SWT.

Mekanisme kerja sistem kekebalan tubuh manusia adalah anugerah luar biasa dari Allah SWT untuk kehidupan manusia. Meskipun ukurannya sangat kecil, sel-sel imun diberi kemampuan istimewa untuk memperkuat pertahanan tubuh dari berbagai virus dan penyakit. Efisiensi kinerja sel imun, yang bekerja seperti pasukan terorganisir menghadapi beragam ancaman, menunjukkan kebesaran kuasa Allah SWT. Tidak mungkin sistem yang begitu teratur ini dapat berfungsi tanpa pengaturan yang sempurna, terutama karena sel-sel tersebut tidak memiliki kecerdasan, sehingga hal ini semakin menegaskan keagungan Allah SWT.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV, terdapat beberapa kesimpulan yang diperoleh diantaranya:

1. Hasil analisis dinamik model penyebaran virus *SARS-CoV-2* dengan imunitas dan pengobatan diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik ketika sel imun tidak ada dalam tubuh, dan titik kesetimbangan endemik ketika sel imun berada dalam tubuh. Eksistensi dari ketiga titik kesetimbangan tersebut dipengaruhi oleh angka reproduksi dasar $\mathcal{R}_0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik bersifat stabil asimtotik.
2. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka populasi sel sehat akan meningkat dan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Sebaliknya, populasi sel yang terinfeksi laten, sel yang terinfeksi produktif, sel virus, dan sel imun akan menurun dan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit atau akan habis seiring berjalannya waktu. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka populasi sel sehat, sel terinfeksi laten, sel terinfeksi produktif, dan sel imun akan menurun dan akan mencapai titik kesetimbangan endemik. Berbeda dengan populasi virus yang mana populasinya akan mengalami kenaikan dan penurunan secara tidak beraturan, namun seiring waktu juga akan stabil menuju titik kesetimbangan endemik.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini terdapat beberapa saran yang akan membantu dalam penelitian selanjutnya yaitu:

1. Model yang telah dibahas dapat diperluas lagi dengan menambahkan variabel baru atau parameter baru untuk melihat bagaimana pergerakan dari model.
2. Selain untuk memodelkan virus *SARS-CoV-2*, model dapat dikembangkan untuk memodelkan virus yang berbeda menggunakan metode yang sama.
3. Dapat dilakukan metode kontrol optimal pada model tersebut yang bertujuan untuk melihat dan mengetahui metode atau penanganan apa yang paling efektif untuk dilakukan untuk menghambat penyebaran virus *SARS-CoV-2* dalam tubuh.

DAFTAR PUSTAKA

- Alligod, K. T., T. D. Sauer, dan J.A. Yorke. 2000. *Chaos: An Introduction to Dynamical System*. Sringer-Verlag. New York.
- Andi Mujahidil Ilman, & Andi Muhammad Ali Amiruddin. (2022). PENGOBATAN COVID-19 DALAM PERSFEKTIF HADIS. Tahdis: Jurnal Kajian Ilmu Al-Hadis, 13(2), 121–135. <https://doi.org/10.24252/tahdis.v13i2.34560>
- Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta; Erlangga.
- Azizah, Ilda. 2022. *Penafsiran Muhammad Quraish Shihab Terhadap Ayat-Ayat Tentang Doa, Ikhtiar, Dan Tawakal Dalam Tafsir Al-Mishbâh*. Other Thesis, Institut Agama Islam Negeri Palopo.
- Boyce, W. E., R. C. DiPrima, dan D. B. Meade. 2017. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. Eleventh Edition*. Jhon Wiley and Sons, Inc. New York.
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C..2000. *ODE Archiect Companion*. New York: John Willy and sons, Inc.
- Chatterjee, A. Nath, F. Almuqrin, J. Khan dan Ilyas. 2021. *SARS-CoV-2 infection with lytic and non-lytic immune responses: A fractional order optimal control theoretical study*. Result in physics. 26. 104260.
- Darmawan, M. A., P. H. Gunawan, dan A. Atiqi. 2024. *Simulation of COVID-19 Spread in Jakarta Using Fourth-Order Runge-Kutta in SIR Model*. International Conference on Data Science and Its Applications (ICoDSA). 551-555
- Goncalves. A., B. Julie, K. Ruian, C. Emmanuelle, D. L. Xavier dan M. Denis. (2020). Timing of antiviral treatment initiation is critical to reduce SARS-CoV-2 viral load. *CPT: pharmacometrics & systems pharmacology*. 9(9). 509-514.
- Gorbalenya, A. E., S. C. Baker, R. S. Baric, R. J. Baric dan C. Drosten. 2020. *The species Severe acute respiratory syndrome-related coronavirus: classifying 2019-nCoV and naming it SARS-CoV-2*. Nature microbiology. 5(4). 536-544
- Hakim, Abdurrahman, Fairuza Muthia dan Nadya Azra. 2023. *Konsep Ikhtiar dalam Berobat sesuai Ajaran Islam*. Universitas Lambung Mangkurat: Jurnal Religion, vol.1 No.4
- Hattaf, K., M. I. Karimi, A. A. Mohsen, Z. Hajihouji, M. Younoussi, dan N. Yousfi. 2023. *Mathematical Modeling and Analysis of the Dynamics of RNA Viruses in Presence of Immunity and Treatment: A Case Study of SARS-CoV-2*. Vaccines. 11(2). 201-218.

- Hefferman, J. M., R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. *Perspectives on the Basic Reproduction Ratio*. Journal of the Royal Society Interface. 2: 281-293.
- Heitzman, B. N. & C. M. Stanca. 2022. Modeling within-host and aerosol dynamics of SARS-CoV-2: The relationship with infectiousness. *PLoS computational biology*. 18(8).
- Hurit, R. U. dan S. Mungkasi. 2021. *The euler, Heun, and Fourth Order Runge-Kutta Solutions to SEIR Model for the Spread of Meningitis Disease*. Mathline: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika. 6(2). 140-153
- Ke, R., Z. Carolin, D. D. Ho, & R.M. Ribeiro. (2021). In vivo kinetics of SARS-CoV-2 infection and its relationship with a person's infectiousness. *Proceedings of the national academy of sciences*. 118(49).
- Kemenag RI. (2024). Qur'an Kemenag. Jakarta Timur : Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an. Diambil kembali dari <https://quran.kemenag.co.id>
- Kesehatan, K. (2022). Ayo Sehat Kemkes. Kementerian Kesehatan. <https://ayosehat.kemkes.go.id/topik/covid-19>. (diakses tanggal 13 Oktober 2024)
- Khoiriyah, S. H. (2024). *Analisis dinamik model penyebaran perilaku merokok dengan adanya individu kambuh tipe SCRQ*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang.
- Kim, K. I., Z. Lin, dan Q. Zhang. 2013. *An SIR Epidemic Model with Free Boundary. Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 14(5): 1992-2001.
- Khaerunnisa, Arini dan Dimas Danang Indriatmoko. (2023). *Ilmu Kefarmasian Dalam Dunia Islam*. International Journal Mathla'ul Anwar Of Halal Issues Vol.3 No. 1(2023): 44.
- Lenhart, S. & J.T. Workman. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models*. CRC Press. London.
- Nagle, R. K., E. B. Staff, dan A. D. Snider. 2017. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. Addison-Wesley. Florida
- Ross. (2010). *Differential Equations*. Delhi: Rajv Book Binding House.
- Rouf al-Munawi, Abdur. 1415H/1994M. *Faidhul Qadir syarah al-jami' ash-shagir*: Dar al-Kitab al-Ilmiyah beirut-lebanon.
- Rozi, F. F., & Arif, S. (2023). Konsep Shifa' dalam Alquran (Perspektif M. Quraish Shihab dalam Tafsir Al-Mishbah). *Pedagogika: Jurnal Ilmu-Ilmu Kependidikan*, 3(1), 69–75. <https://doi.org/10.57251/ped.v3i1.954>.
- Vaidya, N. K., B. Angelica & P. S. Alan. (2021). Modeling within-host dynamics of SARS-COV-2 infection: A case study in ferrets. *Viruses*. 13(8). 1635.

Yu, Z., A. Sohail, A. Nutini, dan R. Arif. (2021). *Delayed Modeling Approach to Forecast the Periodic Behavior of SARS-CoV-2*. *Frontiers in Molecular Biosciences*. 7:585245.

Zill, D. G., & Michael, R. C. (2009). *Differential Equations*. Brooks cole.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Konstruksi Model dan Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran SARS-CoV-2 dengan Bantuan *Software* MAPLE

```

> restart;
> with(linalg) :
> with(DEtools) : with(plots) :
> dS := s - ms·S -  $\frac{bs·S·V}{1+q·W} - \frac{bd·S·II}{1+q·W} + rh·L$ ;
dL :=  $\frac{bs·S·V}{1+q·W} + \frac{bd·S·II}{1+q·W} - (md+d+rh)·L$ ;
dII := d·L - mt·II;
dV := k·(1 - ep)·II - me·V - p·V·W;
dW := r·V·W - ml·W;

dS := s - ms·S -  $\frac{bs·S·V}{W·q+1} - \frac{bd·S·II}{W·q+1} + rh·L$ 
dL :=  $\frac{bs·S·V}{W·q+1} + \frac{bd·S·II}{W·q+1} - (md+d+rh)·L$ 
dII := -II·mt + L·d
dV := k·(1 - ep)·II - me·V - p·V·W
dW := V·W·r - W·ml
(1)

> bebas_penyakit := solve({dS, dL, dII, dV, dW}, {S, L, II, V, W}) :
> DFE := bebas_penyakit[1];

DFE :=  $\left\{ II=0, L=0, S=-\frac{s}{ms}, V=0, W=0 \right\}$ 
(2)

> #titik kesetimbangan endemik
> endemik := solve([dS, dL, dII, dV, dW], [S, L, II, V, W]) :
> DFE := bebas_penyakit[2];

DFE :=  $\left\{ II=-\frac{bs·d·ep·k·s+bd·d·me·s+bs·d·k·s-d·me·ms·mt-md·me·ms·mt-me·ms·mt·rh}{(-bs·d·ep·k-bd·d·me+bd·md·me+bs·d·k+bs·k·md)·mt}, L=-\frac{bs·d·ep·k·s+bd·d·me·s+bs·d·k·s-d·me·ms·mt-md·me·ms·mt-me·ms·mt·rh}{d·(-bs·d·ep·k-bd·d·me+bd·md·me+bs·d·k+bs·k·md)}, S=-\frac{me·mt·(md+d+rh)}{d·(-bs·ep·k+bd·me+bs·k)}, V=-\frac{1}{me·mt·(-bs·d·ep·k-bd·d·me+bd·md·me+bs·d·k+bs·k·md)}\left(k·(-bs·d·ep^2·k·s+bd·d·ep·me·s+2·bs·d·ep·k·s-d·ep·me·ms·mt-ep·md·me·ms·mt-bd·d·me·s-bd·d·k·s+d·me·ms·mt+md·me·ms·mt+me·ms·mt·rh)\right), W=0 \right\}$ 
(3)

> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]) :
> #Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit
bs := 4.6·10-6; s := 60; ms := 0.001; q := 0.01; rh := 0.01; d := 1.5; k := 50; ep := 0.2; p := 0.5; r := 2.4·10-3; bd := 1.2·10-8; md := 0.09; mt := 0.75; me := 15; ml := 0.3;

A :=  $\begin{bmatrix} -ms & rh & -\frac{s·bd}{ms} & -\frac{bs·s}{ms} & 0 \\ 0 & -(md+d+rh) & \frac{bd·s}{ms} & \frac{bs·s}{ms} & 0 \\ 0 & d & -mt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k·(1-ep) & me & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ml \end{bmatrix}$ ;

bs := 0.000004600000000
s := 60
ms := 0.001
q := 0.01
rh := 0.01
d := 1.5
k := 50
ep := 0.2
p := 0.5
r := 0.002400000000
bd := 1.200000000 10-8
md := 0.09
mt := 0.75
me := 15
ml := 0.3

A :=  $\begin{bmatrix} -0.001 & 0.01 & -0.0007200000000 & -0.2760000000 & 0 \\ 0 & -1.60 & 0.0007200000000 & 0.2760000000 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$ 
(1)

> B := A - λ·I

B :=  $\begin{bmatrix} -0.001-\lambda & 0.01 & -0.0007200000000 & -0.2760000000 & 0 \\ 0 & -1.60-\lambda & 0.0007200000000 & 0.2760000000 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.75-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.0 & -15-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3-\lambda \end{bmatrix}$ 
(2)

> det_B := Determinant(B)

det_B :=  $(-0.001-\lambda) (0.427140000 + 12.35847600\lambda + 41.65392000\lambda^2 + 17.65\lambda^3 + \lambda^4)$ 
(3)

> hasil := solve(det_B)

hasil :=  $-0.001000000000, -0.3000000000, -0.03981576836, -2.398022688, -14.91216154$ 
(4)

```

```

> restart;
> with(Student[LinearAlgebra]) :
> #Kestabilan titik kesetimbangan endemik
bs := 1.3·10-8; bss := 4.6·10-6; s := 60; ms := 0.001; q := 0.01; rh := 0.01; d := 1.5; k := 50; ep := 0.2; p := 0.5; r := 2.4·10-3; bd := 1.2·10-8; md := 0.09;
mt := 0.75; me := 15; ml := 0.3; S :=  $\frac{(md + d + rh) \cdot mt \cdot me}{d \cdot (bs \cdot k \cdot (1 - ep) + bd \cdot me)}$ ; L :=  $\frac{s - ms \cdot S}{md + d}$ ; II :=  $\frac{d \cdot L}{mt}$ ; V :=  $\frac{k \cdot (1 - ep) \cdot II}{me}$ ; W := 0;
A := 
$$\begin{bmatrix} -ms - \frac{bs \cdot V}{1 + q \cdot W} - \frac{II \cdot bd}{1 + q \cdot W} & rh & -\frac{S \cdot bd}{1 + q \cdot W} - \frac{bs \cdot S}{1 + q \cdot W} - \frac{S \cdot V \cdot q \cdot bs}{(1 + q \cdot W)^2} + \frac{bd \cdot S \cdot II \cdot q}{(1 + q \cdot W)^2} \\ \frac{bs \cdot V}{1 + q \cdot W} + \frac{bd \cdot II}{1 + q \cdot W} & -(md + d + rh) & \frac{bd \cdot S}{1 + q \cdot W} - \frac{bs \cdot S}{1 + q \cdot W} - \frac{bs \cdot S \cdot V \cdot q}{(1 + q \cdot W)^2} - \frac{bd \cdot S \cdot II \cdot q}{(1 + q \cdot W)^2} \\ 0 & d & -mt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \cdot (1 - ep) & -me - p \cdot W & -p \cdot V \\ 0 & 0 & 0 & r \cdot W & r \cdot V - ml \end{bmatrix};$$

bs := 0.00001300000000
bss := 0.000004600000000
s := 60
ms := 0.001
q := 0.01
rh := 0.01
d := 1.5
k := 50
ep := 0.2

```

```

p := 0.5
r := 0.002400000000
bd := 1.200000000 10-8
md := 0.09
mt := 0.75
me := 15
ml := 0.3
S := 23068.93768
L := 23.22708322
II := 46.45416644
V := 123.8777772
W := 0

```

$$A := \begin{bmatrix} -0.002610968554 & 0.01 & -0.0002768272522 & -0.2998961898 & 0.3716333317 \\ 0.001610968554 & -1.60 & 0.0002768272522 & 0.2998961898 & -0.3716333317 \\ 0 & 1.5 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.0 & -15 & -61.93888860 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0026933347 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$B := A - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -0.002610968554 - \lambda & 0.01 & -0.0002768272522 & -0.2998961898 & 0.3716333317 \\ 0.001610968554 & -1.60 - \lambda & 0.0002768272522 & 0.2998961898 & -0.3716333317 \\ 0 & 1.5 & -0.75 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40.0 & -15 - \lambda & -61.93888860 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0026933347 - \lambda \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\det_B := \text{Determinant}(B)$$

$$\det_B := -0.00007761167140 - 0.02907183964 \lambda - 0.1932085665 \lambda^2 - 36.54160535 \lambda^3 - 17.35530430 \lambda^4 - \lambda^5 \quad (3)$$

$$\text{hasil} := \text{solve}(\det_B)$$

$$\text{hasil} := -0.001113703120 + 0.02809287747 I, -0.002693334703, -2.445944614, -14.90443895, -0.001113703120 - 0.02809287747 I \quad (4)$$

Lampiran 2 Script Simulasi Numerik Penyebaran SARS-CoV-2 dengan $\mathcal{R}_0 < 1$
Menggunakan *Software* MATLAB

```

clc; clf; clear;
format long;

dt = 0.01;
t = 0:dt:5000; %Panjang t
n = length(t);

%Nilai parameter
sigma = 60; mu1 = 0.001;
mu2 = 0.09; delta = 1.5;
mu3 = 0.75; mu4 = 15; mu5 = 0.3;
beta2 = 1.2 * 10^(-8); q1 = 0.01; q2 = 0.02;
p = 0.5; ro = 0.01; epsilon = 0.2; k = 50;
r = 2.4 * 10^(-3); beta1 = 4.6 * 10^(-6);

% 4 nilai awal untuk masing-masing variabel
initial_S = [2*10^4, 3*10^4, 4*10^4, 5*10^4];
initial_L = [20, 40, 60, 80];
initial_I = [10, 20, 30, 40];
initial_V = [4, 6, 8, 10];
initial_W = [100, 200, 300, 400];

% Persiapan array untuk menyimpan hasil simulasi
S = zeros(n, 4);
L = zeros(n, 4);
I = zeros(n, 4);
V = zeros(n, 4);
W = zeros(n, 4);

% Inisialisasi nilai awal untuk masing-masing variabel
for j = 1:4
    S(1, j) = initial_S(j);
    L(1, j) = initial_L(j);
    I(1, j) = initial_I(j);
    V(1, j) = initial_V(j);
    W(1, j) = initial_W(j);
end

% Definisi fungsi diferensial
v = @(S, L, I, V, W, t) sigma - mu1 * S - (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) - (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) + ro * L;
w = @(S, L, I, V, W, t) (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) + (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) - (mu2 + delta + ro) * L;
x = @(S, L, I, V, W, t) delta * L - mu3 * I;

```



```

y = @(S, L, I, V, W, t) k * (1 - epsilon) * I - mu4 * V
- p * V * W;
z = @(S, L, I, V, W, t) r * V * W - mu5 * W;

% Metode Runge-Kutta orde 4
for j = 1:4
    for i = 1:n-1
        % Gangguan pada t = 300
        % if t(i) == 300
        %     beta1 = 5*10^7 * beta1; % Infeksi
meningkat
        %     beta2 = 5*10^7 * beta2;
        %     fprintf('Gangguan 1: Laju infeksi
meningkat pada t = 300\n');
        % end

        % Gangguan pada t = 600
        %if t(i) == 600
        %     W(i, j) = 2 * I(i, j); % Imun meningkat
dua kali lipat
        %     fprintf('Gangguan 2: Populasi sel imun
meningkat pada t = 600\n');
        % end

        % Runge-Kutta 4 dengan gangguan
        k1 = dt * v(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        l1 = dt * w(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        m1 = dt * x(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        n1 = dt * y(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        o1 = dt * z(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));

        k2 = dt * v(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l2 = dt * w(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m2 = dt * x(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n2 = dt * y(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));

```

```

        o2 = dt * z(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));

        k3 = dt * v(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l3 = dt * w(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m3 = dt * x(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n3 = dt * y(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        o3 = dt * z(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));

        k4 = dt * v(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        l4 = dt * w(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        m4 = dt * x(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        n4 = dt * y(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        o4 = dt * z(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);

        S(i+1, j) = S(i, j) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) /
6;
        L(i+1, j) = L(i, j) + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4) /
6;
        I(i+1, j) = I(i, j) + (m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4) /
6;
        V(i+1, j) = V(i, j) + (n1 + 2*n2 + 2*n3 + n4) /
6;
        W(i+1, j) = W(i, j) + (o1 + 2*o2 + 2*o3 + o4) /
6;
    end
end

% Menampilkan semua nilai yang diperoleh dan waktu
ketika nilai itu dicapai

fprintf('\n=== Hasil untuk Set Nilai Awal ke-%d
===\n', j);

```

```

fprintf('Waktu\t\tS\t\tL\t\tI\t\tV\t\tW\n');
for i = 1:n
    if mod(i, 100) == 1 || i == n % Menampilkan tiap
1000 langkah atau nilai terakhir

fprintf('%7.2f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\n', t(i), S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j), W(i, j));
    end
end

% Plot untuk S(t)
figure(1)
plot(t, S, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu '); ylabel('S(t)');
title('Populasi Sel Sehat (S) Terhadap Waktu tiap 1000 hari');
grid on;
legend('Nilai awal (S0) = 2x10^4', 'Nilai awal (S0) = 3x10^4', 'Nilai awal (S0) = 4x10^4', 'Nilai awal (S0) = 5x10^4');
xlim([0 4000]);
ylim([0 60000]);
% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:1000:6000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk L(t)
figure(2)
plot(t, L, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('L(t)');
title('Populasi Sel Terinfeksi Laten (L) Terhadap Waktu');
xlim([0 7]);
ylim([0 100]);
grid on;
legend('Nilai awal (L0) = 10', 'Nilai awal (L0) = 20', 'Nilai awal (L0) = 30', 'Nilai awal (L0) = 40');

% Plot untuk I(t)
figure(3)
plot(t, I, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('I(t)');
title('Populasi Sel Terinfeksi Produktif (I) Terhadap Waktu');
xlim([0 12]);
ylim([0 80]);

```

```

grid on;
legend('Nilai awal (I0) = 10', 'Nilai awal (I0) = 20',
'Nilai awal (I0) = 30', 'Nilai awal (I0) = 40');

% Plot untuk V(t)
figure(4)
plot(t, V, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('V(t)');
title('Populasi Virus (V) Terhadap Waktu');
xlim([0 20]);
ylim([0 20]);
grid on;
legend('Nilai awal (V0) = 4', 'Nilai awal (V0) = 6',
'Nilai awal (V0) = 8', 'Nilai awal (V0) = 10');

% Plot untuk W(t)
figure(5)
plot(t, W, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('W(t)');
title('Populasi Sel Imun (W) Terhadap Waktu');
xlim([0 20]);
ylim([0 400]);
grid on;
legend('Nilai awal (W0) = 100', 'Nilai awal (W0) =
200', 'Nilai awal (W0) = 300', 'Nilai awal (W0) =
400');

% Menentukan nilai maksimum dan waktu saat terjadi
fprintf('\n=== Waktu dan Nilai Maksimum ===\n');
fprintf('Variabel\t Waktu Maksimum (t)\t Nilai
Maksimum\n');

for j = 1:4
    % Mencari nilai maksimum dan waktu terjadinya
    [max_S, idx_S] = max(S(:, j));
    [max_L, idx_L] = max(L(:, j));
    [max_I, idx_I] = max(I(:, j));
    [max_V, idx_V] = max(V(:, j));
    [max_W, idx_W] = max(W(:, j));

    % Menampilkan hasil
    fprintf('S%d\t\t %10.4f\t\t %10.4f\n', j, t(idx_S), max_S);
    fprintf('L%d\t\t %10.4f\t\t %10.4f\n', j, t(idx_L), max_L);
    fprintf('I%d\t\t %10.4f\t\t %10.4f\n', j, t(idx_I), max_I);
    fprintf('V%d\t\t %10.4f\t\t %10.4f\n', j, t(idx_V), max_V);
    fprintf('W%d\t\t %10.4f\t\t %10.4f\n', j, t(idx_W), max_W);
end

```

Lampiran 3 Script Simulasi Numerik Penyebaran SARS-CoV-2 dengan $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W = 0$ Menggunakan *Software* MATLAB

```

clc; clf; clear;
format long;

dt = 0.01;
t = 0:dt:10000; %Panjang t
n = length(t);

%Nilai parameter
sigma = 60; mu1 = 0.001;
mu2 = 0.09; delta = 1.5;
mu3 = 0.75; mu4 = 15; mu5 = 0.3;
beta2 = 1.2 * 10^(-8); q1 = 0.01; q2 = 0.02;
p = 0.5; ro = 0.01; epsilon = 0.2; k = 50;
r = 2.4 * 10^(-3); beta1 = 1.3 * 10^(-5);

% 4 nilai awal untuk masing-masing variabel
initial_S = [4*10^4, 6*10^4, 8*10^4, 10*10^4];
initial_L = [20, 40, 60, 80];
initial_I = [50, 100, 150, 200];
initial_V = [100, 200, 300, 400];
initial_W = [10, 30, 50, 70];

% Persiapan array untuk menyimpan hasil simulasi
S = zeros(n, 4);
L = zeros(n, 4);
I = zeros(n, 4);
V = zeros(n, 4);
W = zeros(n, 4);

% Inisialisasi nilai awal untuk masing-masing variabel
for j = 1:4
    S(1, j) = initial_S(j);
    L(1, j) = initial_L(j);
    I(1, j) = initial_I(j);
    V(1, j) = initial_V(j);
    W(1, j) = initial_W(j);
end

% Definisi fungsi diferensial
v = @(S, L, I, V, W, t) sigma - mu1 * S - (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) - (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) + ro * L;
w = @(S, L, I, V, W, t) (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) + (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) - (mu2 + delta + ro) * L;
x = @(S, L, I, V, W, t) delta * L - mu3 * I;

```

```

y = @(S, L, I, V, W, t) k * (1 - epsilon) * I - mu4 * V
- p * V * W;
z = @(S, L, I, V, W, t) r * V * W - mu5 * W;

```

```
% Metode Runge-Kutta orde 4
```

```

for j = 1:4
    for i = 1:n-1
        k1 = dt * v(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        l1 = dt * w(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        m1 = dt * x(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        n1 = dt * y(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        o1 = dt * z(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));

        k2 = dt * v(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l2 = dt * w(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m2 = dt * x(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n2 = dt * y(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        o2 = dt * z(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));

        k3 = dt * v(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l3 = dt * w(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m3 = dt * x(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n3 = dt * y(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        o3 = dt * z(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
    end
end

```

```

        k4 = dt * v(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        l4 = dt * w(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        m4 = dt * x(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        n4 = dt * y(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        o4 = dt * z(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);

```

```

        S(i+1, j) = S(i, j) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) /
6;
        L(i+1, j) = L(i, j) + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4) /
6;
        I(i+1, j) = I(i, j) + (m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4) /
6;
        V(i+1, j) = V(i, j) + (n1 + 2*n2 + 2*n3 + n4) /
6;
        W(i+1, j) = W(i, j) + (o1 + 2*o2 + 2*o3 + o4) /
6;

```

```

    end

```

```

end

```

```

% Menampilkan semua nilai yang diperoleh dan waktu
ketika nilai itu dicapai

```

```

    fprintf('\n=== Hasil untuk Set Nilai Awal ke-%d
===\n', j);

```

```

    fprintf('Waktu\t\tS\t\tL\t\tI\t\tV\t\tW\n');

```

```

    for i = 1:500000

```

```

        if mod(i, 100) == 1 || i == n % Menampilkan
tiap 1000 langkah atau nilai terakhir

```

```

    fprintf('%7.2f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.10f
\n', t(i), S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j), W(i,
j));

```

```

        end

```

```

    end

```

```

% Plot untuk S(t)

```

```

figure(1)

```

```

plot(t, S, 'LineWidth', 2);

```

```

xlabel('Waktu (tahun)'); ylabel('S(t)');

```

```

title('Populasi Sel Sehat (S) Terhadap Waktu per
tahun');

```

```

grid on;

```

```

xlim([0 3000]);

```

```

ylim([0 100000]);

```

```

legend('Nilai awal (S0) = 4x10^4', 'Nilai awal (S0) = 6x10^4', 'Nilai awal (S0) = 8x10^4', 'Nilai awal (S0) = 10^5');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk L(t)
figure(2)
plot(t, L, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (tahun)'); ylabel('L(t)');
title('Populasi Sel Terinfeksi Laten (L) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 3000]);
ylim([0 300]);
legend('Nilai awal (L0) = 20', 'Nilai awal (L0) = 40', 'Nilai awal (L0) = 60', 'Nilai awal (L0) = 80');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25', '26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk I(t)
figure(3)
plot(t, I, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (tahun)'); ylabel('I(t)');
title('Populasi Sel terinfeksi produktif (I) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 3000]);
ylim([0 450]);
legend('Nilai awal (I0) = 50', 'Nilai awal (I0) = 100', 'Nilai awal (I0) = 150', 'Nilai awal (I0) = 200');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25', '26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

```



```

% Plot untuk V(t)
figure(4)
plot(t, V, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (tahun)'); ylabel('V(t)');
title('Populasi virus (V) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 200]);
ylim([0 450]);
legend('Nilai awal (V0) = 10', 'Nilai awal (V0) = 30',
'Nilai awal (V0) = 50', 'Nilai awal (V0) = 70');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
'8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16',
'17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25',
'26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk W(t)
figure(5)
plot(t, W, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (tahun)'); ylabel('W(t)');
title('Populasi Sel Imun (W) Terhadap Waktu per
tahun');
grid on;
xlim([0 3000]);
ylim([0 150]);
legend('Nilai awal (W0) = 10', 'Nilai awal (W0) = 30',
'Nilai awal (W0) = 50', 'Nilai awal (W0) = 70');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
'8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16',
'17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25',
'26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

```

Lampiran 4 Script Simulasi Numerik Penyebaran SARS-CoV-2 dengan $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $W \neq 0$ Menggunakan *Software* MATLAB

```

clc; clf; clear;
format long;

dt = 0.01;
t = 0:dt:10000; %Panjang t
n = length(t);

%Nilai parameter
sigma = 60; mu1 = 0.001;
mu2 = 0.09; delta = 1.5;
mu3 = 0.75; mu4 = 15; mu5 = 0.3;
beta2 = 1.2 * 10^(-8); q1 = 0.01; q2 = 0.02;
p = 0.5; ro = 0.01; epsilon = 0.2; k = 50;
r = 4 * 10^(-3); beta1 = 1.3 * 10^(-5);

% 4 nilai awal untuk masing-masing variabel
initial_S = [4*10^4, 6*10^4, 8*10^4, 10*10^4];
initial_L = [20, 40, 60, 80];
initial_I = [50, 100, 150, 200];
initial_V = [100, 200, 300, 400];
initial_W = [30, 70, 110, 150];

% Persiapan array untuk menyimpan hasil simulasi
S = zeros(n, 4);
L = zeros(n, 4);
I = zeros(n, 4);
V = zeros(n, 4);
W = zeros(n, 4);

% Inisialisasi nilai awal untuk masing-masing variabel
for j = 1:4
    S(1, j) = initial_S(j);
    L(1, j) = initial_L(j);
    I(1, j) = initial_I(j);
    V(1, j) = initial_V(j);
    W(1, j) = initial_W(j);
end

% Definisi fungsi diferensial
v = @(S, L, I, V, W, t) sigma - mu1 * S - (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) - (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) + ro * L;
w = @(S, L, I, V, W, t) (beta1 * S * V) / (1 + q1 * W) + (beta2 * S * I) / (1 + q2 * W) - (mu2 + delta + ro) * L;

```

```

x = @(S, L, I, V, W, t) delta * L - mu3 * I;
y = @(S, L, I, V, W, t) k * (1 - epsilon) * I - mu4 * V
- p * V * W;
z = @(S, L, I, V, W, t) r * V * W - mu5 * W;

% Metode Runge-Kutta orde 4
for j = 1:4
    for i = 1:n-1
        k1 = dt * v(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        l1 = dt * w(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        m1 = dt * x(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        n1 = dt * y(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));
        o1 = dt * z(S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j),
W(i, j), t(i));

        k2 = dt * v(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l2 = dt * w(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m2 = dt * x(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n2 = dt * y(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));
        o2 = dt * z(S(i, j) + (k1 / 2), L(i, j) + (l1 /
2), I(i, j) + (m1 / 2), V(i, j) + (n1 / 2), W(i, j) +
(o1 / 2), t(i) + (dt / 2));

        k3 = dt * v(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        l3 = dt * w(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        m3 = dt * x(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));
        n3 = dt * y(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));

```

```

        o3 = dt * z(S(i, j) + (k2 / 2), L(i, j) + (l2 /
2), I(i, j) + (m2 / 2), V(i, j) + (n2 / 2), W(i, j) +
(o2 / 2), t(i) + (dt / 2));

```

```

        k4 = dt * v(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        l4 = dt * w(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        m4 = dt * x(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        n4 = dt * y(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);
        o4 = dt * z(S(i, j) + k3, L(i, j) + l3, I(i, j)
+ m3, V(i, j) + n3, W(i, j) + o3, t(i) + dt);

```

```

        S(i+1, j) = S(i, j) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) /
6;

```

```

        L(i+1, j) = L(i, j) + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4) /
6;

```

```

        I(i+1, j) = I(i, j) + (m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4) /
6;

```

```

        V(i+1, j) = V(i, j) + (n1 + 2*n2 + 2*n3 + n4) /
6;

```

```

        W(i+1, j) = W(i, j) + (o1 + 2*o2 + 2*o3 + o4) /
6;

```

```

    end

```

```

end

```

```

% Menampilkan semua nilai yang diperoleh dan waktu
ketika nilai itu dicapai

```

```

    fprintf('\n=== Hasil untuk Set Nilai Awal ke-%d
===\n', j);

```

```

    fprintf('Waktu\t\tS\t\tL\t\tI\t\tV\t\tW\n');

```

```

    for i = 1:500000

```

```

        if mod(i, 100) == 1 || i == n % Menampilkan
tiap 1000 langkah atau nilai terakhir

```

```

    fprintf('%7.2f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.4f\t%10.10f
\n', t(i), S(i, j), L(i, j), I(i, j), V(i, j), W(i,
j));

```

```

    end

```

```

end

```

```

% Plot untuk S(t)

```

```

figure(1)

```

```

plot(t, S, 'LineWidth', 2);

```

```

xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('S(t)');

```

```

title('Populasi Sel Sehat (S) Terhadap Waktu per
tahun');

```

```

grid on;
xlim([0 3000]);
ylim([0 100000]);
legend('Nilai awal (S0) =  $4 \times 10^4$ ', 'Nilai awal (S0) =  $6 \times 10^4$ ', 'Nilai awal (S0) =  $8 \times 10^4$ ', 'Nilai awal (S0) =  $10 \times 10^4$ ');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:100000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25', '26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk L(t)
figure(2)
plot(t, L, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('L(t)');
title('Populasi Sel Terinfeksi Laten (L) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 2500]);
ylim([0 200]);
legend('Nilai awal (L0) = 20', 'Nilai awal (L0) = 40', 'Nilai awal (L0) = 60', 'Nilai awal (L0) = 800');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:100000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25', '26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk I(t)
figure(3)
plot(t, I, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('I(t)');
title('Populasi Sel terinfeksi produktif (I) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 2375]);
ylim([0 350]);
legend('Nilai awal (I0) = 50', 'Nilai awal (I0) = 100', 'Nilai awal (I0) = 150', 'Nilai awal (I0) = 200');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;

```

```

%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
'8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16',
'17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25',
'26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk V(t)
figure(4)
plot(t, V, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('V(t)');
title('Populasi virus (V) Terhadap Waktu per tahun');
grid on;
xlim([0 150]);
ylim([0 400]);
legend('Nilai awal (V0) = 100', 'Nilai awal (V0) =
200', 'Nilai awal (V0) = 300', 'Nilai awal (V0) =
400');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
'8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16',
'17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25',
'26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

% Plot untuk W(t)
figure(5)
plot(t, W, 'LineWidth', 2);
xlabel('Waktu (hari)'); ylabel('W(t)');
title('Populasi Sel Imun (W) Terhadap Waktu per
tahun');
grid on;
xlim([0 3000]);
ylim([0 200]);
legend('Nilai awal (W0) = 30', 'Nilai awal (W0) = 70',
'Nilai awal (W0) = 110', 'Nilai awal (W0) = 150');

% Sesuaikan label sumbu x
%ax = gca;
%xticks(0:365:10000); % Titik sumbu x
%xticklabels({'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
'8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16',
'17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25',
'26', '27'}); % Label tanpa "10^3"

```

RIWAYAT HIDUP



Mohamad Afif Zaky Zamzami, biasa dipanggil Zaky, lahir pada tanggal 12 Juli 2002 di Kediri. Penulis tinggal di Desa Tanggul Kulon, Kecamatan Tanggul, Kabupaten Jember, Provinsi Jawa Timur. Penulis adalah anak pertama dari tiga bersaudara, lahir dari pasangan Bapak Ahmad Basori dan Ibu Binti Rosidatul Bariyah.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Tanggul Kulon 01 dari tahun 2008 hingga lulus pada tahun 2014. Kemudian pendidikan menengah pertama di SMP Plus Darus Sholah Jember, lulus tahun 2017. Penulis kemudian menamatkan pendidikan menengah atas di MAN 1 Jember pada tahun 2020. Selanjutnya penulis melanjutkan studi Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Program Studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis turut berkontribusi aktif dalam berbagai kegiatan ataupun organisasi baik internal maupun eksternal kampus dan menjadi Ketua Himpunan Program Studi Matematika tahun 2022 serta menjadi anggota Senat Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2023.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mohamad Afif Zaky Zamzami
NIM : 200601110044
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Virus RNA dengan
Imunitas dan Pengobatan Studi Kasus: SARS-COV-2
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	7 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	2.
3.	9 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	11 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama	4.
5.	14 Oktober 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	14 Oktober 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	15 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal	7.
8.	13 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	14 November 2024	Konsultasi Bab IV	9.
10.	15 November 2024	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	16 November 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	12 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	13 November 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	17 November 2024	ACC Bab IV dan V	14.
15.	17 November 2024	ACC Seminar Hasil	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	9 Desember 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.
17.	16 Desember 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	17.
18.	16 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	23 Januari 2025	Konsultasi Revisi Sidang Skripsi	19.
20	25 Februari 2025	ACC Akhir Keseluruhan	20.

Malang, 25 Februari 2025

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005