SIFAT- SIFAT FUNGSI PRIMITIF PADA INTEGRAL DUNFORD

SKRIPSI

OLEH
MUHAMAD MEHDI MAHDAVIKIA
NIM. 19610072

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT- SIFAT FUNGSI PRIMITIF PADA INTEGRAL DUNFORD

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhamad Mehdi Mahdavikia
NIM. 19610072

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT-SIFAT FUNGSI PRIMITIF PADA INTEGRAL DUNFORD

SKRIPSI

Oleh
Muhamad Mehdi Mahdavikia
NIM. 19610072

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 9 Desember 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc.	Juhari, M.Si.
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT FUNGSI PRIMITIF PADA INTEGRAL DUNFORD

SKRIPSI

Oleh
Muhamad Mehdi Mahdavikia
NIM. 19610072

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 23 Desember 2024

Ketua Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Juhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhamad Mehdi Mahdavikia
NIM	: 19610072
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2024

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

F142AKX062723043

Muhamad Mehdi Mahdavikia

NIM. 19610072

MOTO

"Hidup harus berguna. Walau tak sempurna."

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Bapak Bahrul Ulum, Ibu Tri Ismawati, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta untuk adik Dinara Savina Nurulillah yang selalu menantikan kelulusan S1 penulis.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, yang memberikan rahmat, taufik dan hidayat-Nya, sehingga peneliti berkesempatan menyelesaikan skripsi dengan judul "Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford", sebagai syarat memperoleh gelar Program Strata-1 bidang matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Salawat dan salam tentunya selalu peneliti curahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membawa kita ke *addinul islam.*

Proses penyusunan penelitian ini tidak terlepas dari masukan serta arahan dari beberapa pihak. Atas dasar hal tersebut peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika sekaligus Dosen Pembimbing I, yang selalu membimbing dan mengarahkan serta senantiasa mendukung peneliti sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Juhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, ilmu, serta arahan kepada peneliti.
5. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Orang tua peneliti dan seluruh keluarga yang tidak lelah memberikan dukungan, mendoakan, semangat serta kasih sayang sehingga peneliti selalu bersemangat dalam mengerjakan penelitian ini.
7. Seluruh mahasiswa Matematika angkatan 2019 yang telah memberikan bantuan dan mendukung dalam berbagai keadaan.
8. Serta seluruh pihak yang tidak bisa peneliti sebutkan satu persatu yang telah berkontribusi dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Peneliti menyadari bahwasanya penelitian ini banyak kekurangan, maka dari itu peneliti berharap adanya saran serta kritik yang membangun agar penelitian selanjutnya dapat semakin baik. Peneliti berharap penelitian yang dihasilkan nantinya bermanfaat bagi para pembaca.

Malang, 23 Desember 2024

Peneliti

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Mahdavikia, Muhamad Mehdi. 2024. **Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M. Sc. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Ruang Banach, Fungsi Primitif, Integral Dunford.

Penelitian ini membahas sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford dalam konteks ruang Banach dan ruang dual. Integral Dunford merupakan bentuk generalisasi integral Lebesgue yang digunakan dalam analisis fungsional, khususnya dalam operator linier. Fungsi f terhadap ruang Banach X dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$, $x^*(f)$ terintegral Lebesgue. Penelitian ini menggunakan pendekatan studi pustaka untuk menganalisis definisi, sifat, dan teorema-teorema terkait fungsi primitif pada integral Dunford. Beberapa teorema terkait sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford, menjadi dasar utama dalam pembahasan ini. Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi primitif pada integral Dunford memiliki sifat aditif, kontinu, serta memenuhi syarat variasi terbatas dan kontinu mutlak dan generalisasinya.

ABSTRACT

Mahdavikia, Muhamad Mehdi. 2024. **Properties of Primitive Functions on Dunford Integral**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Elly Susanti, M. Sc. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Banach Space, Primitive Function, Dunford Integral

This research discusses the properties of primitive functions on Dunford integral in the context of Banach space and dual space. Dunford integral is a generalized form of Lebesgue integral used in functional analysis, especially in linier operators. A function f on Banach space X is said to be Dunford integrable on $[a, b]$ if for every $x^* \in X^*$, $x^*(f)$ is Lebesgue integrable. This research using a literature study approach to analyze definitions, properties, and, theorems related to primitive functions on Dunford integral. Some theorems related to the properties of primitif functions on Dunford integral, become the main basis in this discussion. The result show that primitive functions on Dunford integral are additive, continuous, and satisfy the conditions of bounded variation, absolute continuous and generalization.

مستخلص البحث

مهدافيكيا، محمد مهدي. ٢٠٢٤. **خصائص وظائف بدائية على دانفورد إنسترال.** البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة موالنا مالك إبراهيم اإلسالمية الحكومية ماالنج. المشرفة: (١) د ، إ يلي سوسانتي ، الماجستيرة (٢) جوهري, الماجستير

الكلمات المفتاحية: فضاءالباناخ، الدالةالبدائية، دانفوردإنسترال

ناقش هذا البحث خصائص الدوال البدائية على تكامل دنفورد في سياق فضاء الباناخ وفضاء المزدوج. تكامل دنفورد هو شكل معمم لتكامل ليبيج المستخدم في التحليل الوظيفي، وخاصة في المشغالت الخطية. يقال إن الدالة f على فضاء الباناخ X قابلة للتكامل دنفورد عل$[a,b]$ إذا كانت لكل $x^* \in X^*$,$x^*(f)$, قابلة للتكامل ليبيج. إستخدم هذا البحث نهج الدراسة األدبيات لتحليل التعريفات والخصائص والنظرية المتعلقة بالدوال البدائية على تكامل دنفورد. أصبحت بعض النظريات المتعلقة بخصائص الدوال البدائية على تكامل دنفورد األساس الرئيسي في هذه المناقشة. ظهرت النتيجة أن الدوال البدائية على تكامل دنفورد مضافة ومتصلة وتلبي شروط التباين المحدود والمستمر المطلق والتعميم.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada abad ke-17, Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz mengembangkan kalkulus integral dan memberikan dasar untuk menghubungkan integral dengan turunan melalui teorema dasar kalkulus. Kalkulus integral didefinisikan sebagai cara untuk menghitung luas di bawah kurva suatu fungsi. Namun, definisi awal dari integral tidak sepenuhnya ketat dan fungsi matematikawan menghadapi masalah ketika berurusan dengan fungsi-fungsi yang memiliki diskontinu.

Selanjutnya Bernhard Riemann, seorang matematikawan asal Jerman, memberikan definisi formal integral pada tahun 1854. Riemann mendefinisikan integral sebagai limit jumlah Riemann. Ia juga mencetuskan metode yang sederhana untuk mendefinisikan suatu integral yang dikenal sampai saat ini yaitu integral Riemann (Sinay, 2012). Lalu pada tahun 1894, Thomas Joannes Stieltjes memperkenalkan integral yang merupakan generalisasi dari integral Riemann dan dikenal dengan nama integral Riemann-Stieltjes. Dengan mengganti panjang subinterval dengan fungsi pengintegrasi, integral ini memungkinkan integrasi terhadap kelas fungsi yang lebih luas. Integral ini memiliki aplikasi yang luas, terutama dalam teori bilangan, teori probabilitas, dan analisis fungsional (Pirade dkk., 2017). Berjalannya waktu, Riemann memperkenalkan konsep yang dikenal dengan partisi Riemann yang merupakan konsep penting dalam teori integral Riemann yang memartisi atau membagi interval pada sumbu x menjadi bagian-

bagian kecil untuk mendefinisikan integral. Melalui pembagian ini, luas di kurva dapat dihitung sebagai limit dari jumlah total potongan-potongan yang dihitung pada setiap partisi.

Henri Lebesgue pada tahun 1902 memperkenalkan partisi Lebesgue. Konsep ini berbeda secara mendasar dari partisi Riemann karena, alih-alih memartisi interval pada sumbu x, Lebesgue memartisi berdasarkan rentang nilai fungsi pada sumbu y. Pendekatan ini mampu mengatasi berbagai keterbatasan yang ada pada integral Riemann, terutama dalam menangani fungsi-fungsi yang tidak kontinu (Lesnussa dkk., 2012).

Pada tahun 1957, dua matematikawan Jaroslav Kurzweil dan Ralph Henstock memperkenalkan integral Henstock yang juga dikenal sebagai integral Henstock-Kurzweil. Integral Henstock-Kurzweil menjadi generalisasi dari integral Riemann yang lebih kuat, sekaligus menawarkan solusi untuk beberapa fungsi yang tidak bisa diintegralkan menggunakan metode Riemann atau Lebesgue. Ide kunci dari integral Henstock-Kurzweil adalah memperkenalkan partisi yang disesuaikan secara halus yang disebut partisi gauge (Sinay, 2012).

Lalu Edward James Mcshane matematikawan asal Amerika memperkenalkan partisi McShane yang merupakan dasar pengembangan integral McShane. Seperti partisi Riemann dan integral Henstock-Kurzweil, integral McShane didasarkan pada partisi interval yang dipertimbangkan. Namun partisi dalam integral McShane lebih fleksibel dibandingkan partisi yang digunakan Riemann. Seperti integral Riemann, integral McShane mendefinisikan sebagai limit dari jumlah McShane yang ditentukan berdasarkan partisi tertentu dari interval.

Pada paruh pertama abad ke-20, teori operator dan analisis fungsional menjadi bidang yang berkembang pesat, terutama karena pengaruh matematikawan seperti David Hilbert, Stefan Banach, dan John Von Neumann. Teori ini mempelajari operator linier pada ruang-ruang vektor berdimensi tak hingga dan berhubungan erat dengan persamaan diferensial, persamaan integral, serta teori kuantum. Dalam konteks ini muncul kebutuhan untuk mengembangkan teori spektrum dari operator linier, yang melibatkan studi tentang nilai-nilai spektrum. Teori spektrum membutuhkan metode integrasi yang bisa menangani fungsi dari operator dan di sini integral Dunford memerankan perannya (Solikhin & Aziz, 2022).

Nelson Dunford matematikawan Amerika berhasil mengembangkan lebih lanjut teori integral di bidang analisis fungsional dengan menggunakan integral Dunford. Integral Dunford sangat berkontribusi dalam teori operator linier dan teori spektrum dan umumnya dikaitkan dengan integrasi dalam konteks operator dan merupakan alat penting dalam analisis fungsional, terutama dalam kajian operator pada ruang Banach dan Hilbert. Integral Dunford didefinisikan sebagai fungsi terukur lemah $f: [a, b] \to X$ sedemikian sehingga fungsi $x^* f$ terintegral Lebesgue, maka fungsi tersebut dikatakan terintegral Dunford (Solikhin dkk., 2020).

Salah satu konsep yang sangat penting di analisis real adalah fungsi. Dan salah satu dari sekian banyak jenis fungsi adalah fungsi primitif. Konsep fungsi primitif pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman, Gottfriend Leibniz dan Sir Isaac Newton dari Inggris pada awal abad ke-18. Mereka memperkenalkan integral untuk memecahkan masalah berkaitan dengan menghitung luas daerah di bawah kurva tertentu.

Fungsi primitif atau juga dikenal sebagai anti turunan, adalah fungsi yang memiliki turunan sama dengan fungsi yang diberikan. Fungsi primitif didefinisikan sebagai fungsi F dikatakan sebuah fungsi primitif (anti turunan) dari fungsi f pada selang I jika $F'(x) = f(x)$, untuk setiap x pada selang I. Kemudian dinotasikan $F(x) = A_x(f) = \int f(x)dx$ (Toheri, 2008). Pada awalnya, notasi anti turunan dinyatakan dengan A_x. Namun, dengan perkembangan saat ini lebih banyak digunakan notasi "integral" atau "∫" yang dicetuskan oleh Leibniz di atas, yang selanjutnya dikenal sebagai integral tak tentu.

Pada penelitian terdahulu yang dilakukan oleh (Aziz dkk., 2021), dipaparkan bahwa setiap fungsi yang terintegral Dunford, maka fungsi primitifnya kontinu, kontinu mutlak, variasi terbatas, dan generalisasinya. Pada penelitian tersebut juga menunjukkan beberapa sifat lainnya dan syarat-syarat yang juga dipenuhi oleh fungsi primitif tersebut. Sehingga pada penelitian ini, akan dijelaskan lebih dalam lagi dan mengkajinya dengan judul "Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford".

Dalam Al-Qur'an Surat Ali Imron: 102, Allah berfirman:

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوا اتَّقُوا اللّٰهَ حَقَّ تُقٰتِهٖ وَلَا تَمُوْتُنَّ اِلَّا وَاَنْتُمْ مُّسْلِمُوْنَ

Artinya:
"Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dengan sebenar-benar takwa kepada-Nya dan janganlah kamu mati kecuali dalam keadaan muslim." (Q.S. Ali Imron:102)(Kemenag, 2019)

Menurut firman Allah di atas, bahwa manusia dituntut untuk selalu bertakwa kepada Allah. Menurut Ali bin Abi Thalhah meriwayatkan dari Ibnu Abbas ia berkata: “Ayat tersebut tidak dinasakh, tetapi yang dimaksud ‘takwa yang sebesar-besarnya’ adalah berjihad kepada Allah dengan tidak merasa takut terhadap celaan, berlaku adil meskipun terhadap diri mereka sendiri, orang tua dan anak-anak mereka.”. Dalam ayat di atas juga menjelaskan agar untuk tetap memeluk islam semasa masih hidup di dunia dan meninggal dalam keadaan masih memeluk agama islam (Al-Sheikh, 2004).

Integral Dunford sebagai konsep matematis, mengharuskan adanya batasan-batasan tertentu pada fungsi yang akan diintegralkan agar hasil integralnya terdefinisi dengan baik. Batasan-batasan ini mirip dengan batasan-batasan moral yang terdapat dalam konsep ketakwaan. Al-Qur’an memberikan batasan-batasan yang jelas tentang perilaku dan sikap seseorang yang bertakwa. Sama seperti integral Dunford yang hanya dapat dihitung jika memenuhi syarat-syarat tertentu, seseorang hanya dapat dikatakan bertakwa jika seluruh tindakan dan perilakunya berada dalam batasan nilai-nilai ketakwaan yang telah ditetapkan oleh Allah. Baik integral Dunford maupun ketakwaan, keduanya menekankan pentingnya adanya batasan dan kriteria yang jelas untuk mencapai suatu tujuan, yaitu mendapatkan hasil yang valid dalam perhitungan integralnya dan mencapai kesempurnaan moral dalam kehidupan.

Takwa sendiri memiliki arti selalu tunduk akan perintah-perintah Allah dan menjauhi segala larangan-larangan Allah. Dalam kaitan ini Allah berfirman pada Surah Al-Baqarah ayat 3:

الَّذِيْنَ يُؤْمِنُوْنَ بِالْغَيْبِ وَيُقِيْمُوْنَ الصَّلٰوةَ وَمِمَّا رَزَقْنٰهُمْ يُنْفِقُوْنَ

Artinya:

“(yaitu) orang-orang yang beriman pada yang gaib, menegakkan salat, dan menginfakkan sebagian rezeki yang Kami anugerahkan kepada mereka.”(Q.S. Al-Baqarah:3)(Kemenag, 2019)

Menurut Kitab Tafsir Ibnu Katsir (2004), orang beriman atau bertakwa adalah mereka yang mempercayai dan yakin dalam hati mereka kepada hal-hal yang gaib, seperti Allah, surga, neraka, malaikat. Pada waktu yang sama, mereka beribadah kepada Allah dengan melakukan salat, dan mereka juga menginfakkan sebagian rezeki mereka yang bermanfaat yang telah dianugerahkan oleh Allah kepada mereka hanya untuk beribadah kepada Allah dan mencari ridho-Nya.

Sangat jelas bahwa ayat di atas menjelaskan bahwa bertakwa memiliki batasan-batasan atau syarat-syarat tertentu agar seseorang bisa dikatakan orang yang bertakwa, sebagaimana suatu fungsi dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ memiliki batasan tertentu untuk dapat dinyatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian pada bagian latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford.

1.3 Tujuan Penelitian

Dari uraian pada bagian rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari uraian tujuan penelitian di atas maka setelah melakukan penelitian diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Menambah wawasan serta menerapkan ilmu yang diperoleh mengenai sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini dapat dijadikan tambahan ilmu dan bahan materi tentang sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford untuk mempelajari matematika, terutama dibidang analisis.

3. Bagi Universitas

   Penelitian ini dapat menjadi referensi tambahan untuk Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama pada bidang matematika.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak keluar dari topik pembahasan serta menghindari pembahasan secara luas maka diperlukan batasan masalah yang dibatasi pada berikut:

1. Masalah yang dikaji yakni pembuktian sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford.
2. Sifat-sifat fungsi primitif yang dikaji yakni fungsi primitif kontinu, kontinu mutlak, variasi terbatas, dan generalisasinya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

Pada bab ini akan menjelaskan terkait dasar-dasar teori untuk pembahasan selanjutnya, yang meliputi seminorm, ruang bernorma, ruang banach, ruang dual, fungsi kontinu, fungsi variasi terbatas, fungsi primitif, fungsi terukur, partisi Perron, integral Lebesgue, integral McShane dan integral Dunford.

2.1.1 Seminorm

Seminorm merupakan konsep dalam analisis fungsional, yang merupakan cabang matematika yang mempelajari ruang-ruang vektor topologi. Seminorm merupakan generalisasi dari konsep norm, akan tetapi memiliki sedikit perbedaan penting. Berikut akan dijelaskan definisi seminorm.

Definisi 2.1 (Vasile I. Istratescu, 1981)

Sebuah seminorm pada suatu ruang linier L merupakan sembarang fungsi $p: L \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

(i). $p(x) \geq 0$

(ii). $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (pertidaksamaan segitiga)

(iii). $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

untuk semua $x, y \in L$ dan $\alpha \in K$. Seminorm merupakan norma jika $p(x) = 0$ dan hanya jika $x = 0$.

Definisi 2.2 (Rynne & Youngson, 2001)

Misalkan X merupakan ruang vektor. Fungsi $p: X \to \mathbb{R}$ dikatakan seminorm pada X jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

(i). $p(x + y) \leq p(x) + p(y), x, y \in X$ (pertidaksamaan segitiga)

(ii). $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x), x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$.

2.1.2 Ruang Bernorma

Dalam matematika, ruang bernorma merupakan ruang vektor yang terdiri dengan fungsi norma. Norma adalah fungsi yang memetakan setiap elemen dalam ruang vektor ke bilangan real non-negatif, dan memiliki sifat-sifat tertentu yang membuatnya berguna untuk mengukur panjang dan ukuran elemen-elemen tersebut. Berikut akan dijelaskan terkait ruang bernorma.

Definisi 2.3 (Rynne & Youngson, 2001)

Sebuah ruang vektor V dikatakan sebagai ruang bernorma apabila terdapat pemetaan fungsi norm V ke bilangan riil tak negatif, ditulis $\|v\|$ untuk setiap $v \in V$ dan memenuhi aksioma berikut

(i). $\|v\| \geq 0$, untuk setiap $v \in V$

(ii). $\|v\| = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$,

(iii). $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, untuk setiap $v \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,

(iv). $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, untuk setiap $u, v \in V$.

Ruang vektor yang terdiri suatu norm disebut ruang bernorma (dinotasikan $\|\cdot\|$).

Contoh 2.1

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Buktikan bahwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian:

Diambil $x, y \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i). Akan ditunjukkan $\|x\| \geq 0$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq 0.$$

Jadi, aksioma (i) terpenuhi.

(ii). Akan ditunjukkan $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

$\Rightarrow$ jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0$.

Diketahui $\|x\| = 0$ artinya,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 0$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$$x = 0.$$

$\Leftarrow$ jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

Diketahui $x = 0$, artinya $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,0, \dots ,0)$.

Sehingga dapat dituliskan

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = |0| + |0| + \cdots + |0| = 0.$$

Dengan demikian, aksioma (ii) terpenuhi.

(iii). Akan ditunjukkan $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

$$\|\alpha x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = |\alpha|\|x\|.$$

Jadi, aksioma (iii) terpenuhi.

(iv). Akan ditunjukkan $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\|x+y\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n|$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n|$$

$$= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_1| = \|x\| + \|y\|.$$

Jadi, aksioma (iv) terpenuhi.

Karena dari ke-4 aksioma terpenuhi, maka $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Definisi 2.4 (Solikhin & Aziz, 2022)

Diberikan dua ruang bernorma X dan Y. Fungsi $f: X \to Y$ dikatakan kontinu di $x \in X$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan ada bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $y \in X$ dan $\|x - y\|_X < \delta$ berakibat

$$\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Selanjutnya fungsi f dikatakan kontinu pada $A \in X$ jika f kontinu di setiap $x \in A$.

Setiap barisan konvergen di dalam ruang bernorma merupakan barisan Cauchy. Akan tetapi setiap barisan Cauchy di dalam ruang bernorma harus konvergen. Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang benorma adalah konvergen, maka ruang bernorma tersebut dikatakan lengkap.

Definisi 2.5 (Christensen, 2010)

Sebuah barisan $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ pada ruang bernorma X konvergen ke $v \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k \geq N$

$$\|v - v_k\| \leq \varepsilon$$

yang artinya

$$\|v_k - v\| \to 0 \text{ untuk } k \to \infty$$

atau bisa ditulis

$$v_k \to v \text{ untuk } k \to \infty$$

atau

$$v = \lim_{k \to \infty} v_k.$$

Definisi 2.6 (Christensen, 2010)

Misalkan X merupakan ruang bernorma. Barisan $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan elemen dari X disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga diperoleh

$$\|v_k - v_\ell\| \leq \varepsilon, \text{ di mana } k, \ell \geq N.$$

Teorema 2.1 (Solikhin & Aziz, 2022)

Setiap barisan konvergen pada ruang bernorma X merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Diambil barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$. Berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Berakibat untuk setiap bilangan asli $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\|$$

$$\leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \varepsilon.$$

Jadi, barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan Cauchy.

Definisi 2.7 (Solikhin & Aziz, 2022)

Ruang bernorma X dikatakan lengkap jika barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

2.1.3 Ruang Banach

Ruang Banach dinamai dari matematikawan bernama Stefan Banach asal Polandia. Ruang Banach merupakan salah satu struktur dalam analisis fungsional. Berdasarkan penjelasan pada bab ruang bernorma dijelaskan bahwa ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Ini berarti bahwa setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Berikut akan dijelaskan ruang Banach.

Definisi 2.8 (Zakir, 2015)

Andaikan X adalah ruang bernorma pada lapangan F. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.

Definisi 2.9 (Christensen, 2010)

Ruang bernorma X dengan anggota setiap barisan Cauchy $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ di X konvergen ke setiap $v \in X$, disebut ruang Banach.

Dari *Definisi 2.9,* maka ada dua persyaratan agar dapat disebut ruang Banach:

(i). Setiap barisan Cauchy elemen di V harus konvergen;

(ii). Batas barisan Cauchy harus elemen di X.

2.1.4 Ruang Dual

Dalam matematika, ruang dual juga disebut ruang konjugat atau ruang transposan dari ruang Banach X, dilambangkan dengan X^*, adalah ruang semua fungsional linier kontinu pada X. Fungsional linier pada X adalah fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ yang bersifat linier dan kontinu. Berikut akan dibahas definisi ruang dual.

Definisi 2.10 (Solikhin & Aziz, 2022)

Diketahui X merupakan ruang benorma. Dual dari ruang bernorma X, ditulis dengan X^* dengan $\mathbb{R}$ sebagai lapangan dari ruang linier X. Jadi X^* merupakan koleksi semua fungsional linier dan kontinu di X.

Definisi 2.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X ruang bernorma. Maka terdapat fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ yang merupakan himpunan semua fungsional linier terbatas pada X, yang memenuhi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|.$$

Teorema 2.2 (Kreyszig, 1978)

Ruang dual X^* pada ruang bernorma X merupakan ruang Banach

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa X^* lengkap. Misalkan ℓ_m adalah barisan Cauchy. Maka untuk setiap $x \in X$ diperoleh

$$|\ell_n(x) - \ell_m(x)| \leq \|\ell_n - \ell_m\| \|x\|.$$

Jadi $\ell_n(x)$ merupakan barisan Cauchy. Misalkan

$$\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \ell_n(x), \forall x \in X.$$

Maka ℓ linier. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ℓ terbatas. Karena $|\|\ell_n\| - \|\ell_m\|| \leq \|\ell_n - \ell_m\|$, dan diketahui bahwa $\|\ell_n\|$ merupakan barisan Cauchy, sehingga

$$|\ell(x)| \leq \sup_n \|\ell_n\|\|x\|$$

Dan ℓ terbatas. Demikian pula,

$$|\ell_n(x) - \ell(x)| \leq \sup_{m\geq n} \|\ell_n - \ell_m\|\|x\|$$

Jadi,

$$\|\ell_n - \ell\| \leq \sup_{m\geq n} \|\ell_n - \ell_m\|$$

dan menunjukkan bahwa $\ell_n \to \ell$.

Contoh 2.2

Jika diberikan ruang Banach $X = L_1$. Tunjukkan bahwa dualnya $X^* = (L_1)^* = L_\infty$.

Penyelesaian:

Dual dari $X = L_1$ adalah $X^* = (L_1)^* = L_\infty$, yaitu $L_\infty^* = L_\infty$.

Untuk setiap $y = \{y_n\} \in L_\infty$ dibentuk fungsional f_y pada L_1 oleh

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Diperoleh bahwa f_y linier dan kontinu yaitu untuk sebarang $x = \{x_n\}, z = \{z_n\} \in L_1$ dan sebarang $x \in R$ berlaku

$$f_y(x+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + z_n)y_n = f_y(x) + f_y(z)$$

dan

$$f_y(cx) = \sum_{n=1}^{\infty}(cx_n)y_n = cf_y(x).$$

Selanjutnya untuk setiap $x = \{x_n\} \in L_1$ berlaku

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Jadi setiap $y = \{y_n\} \in L_1$ menentukan dengan tunggal fungsional linier kontinu f_y pada L_1 atau $L_\infty \subset L_1^*$.

2.1.5 Fungsi Kontinu

Dalam bidang matematika, dijelaskan bahwa fungsi kontinu adalah fungsi yang perubahan secara kontinu pada variabel fungsi yang mengakibatkan perubahan kontinu pada nilai keluaran fungsi. Berikut ini akan dibahas fungsi kontinu.

Definisi 2.12 (Susila, 2008)

Misalkan f didefinisikan pada suatu interval terbuka yang terdapat c. Fungsi f dikatakan kontinu di c, jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Contoh 2.3 (Susila, 2008)

Buktikan bahwa $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1$, kontinu di titik $x = 3$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 3} x + 1 = 4.$$

Di sisi lain,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$f(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Jadi, terbukti bahwa f kontinu di $x = 3$.

Teorema 2.3 (Susila, 2008)

Misalkan f dan g kontinu di c, maka begitu juga $kf, f + g, f - g, f.g, f/g$ (asalkan $g(c) \neq 0$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap).

Bukti:

Telah diketahui fungsi f dan g kontinu di c, maka $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ sehingga

(i). $\lim_{x \to c} \big(kf(x)\big) = k \lim_{x \to c} f(x) = k.f(c)$, k sebagai konstanta.

(ii). $\lim_{x \to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c)$.

(iii). $\lim_{x \to c} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = f(c) - g(c)$.

(iv). $\lim_{x \to c} \big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x) = f(c).g(c)$.

(v). $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$, syarat $g(x) \neq 0$.

(vi). $\lim_{x \to c} \big(f(x)\big)^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n = \{f(c)\}^n$.

(vii). $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, dengan $f(x) > 0$.

Teorema 2.4 (Susila, 2008)

Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L).$$

Fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c, apabila fungsi f kontinu ke $g(c)$ dan g kontinu ke c.

Bukti:

Misalkan diketahui $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu pada L, maka terdapat $\delta_1 > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga

$$|t - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(L)| < \varepsilon$$

Sehingga

$$|g(x) - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(g)x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Tetapi karena $\lim_{x\to c} g(x) = L$, untuk $\delta_1 > 0$ yang diketahui, terdapat $\delta_2 > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_1$$

Jika digabungkan dua fakta di atas, maka diperoleh

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f(L).$$

Definisi 2.13 (Susila, 2008)

Fungsi f kontinu kanan ke a jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan kontinu kiri ke b jika $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. fungsi f dikatakan kontinu jika f kontinu pada setiap titik dari interval. Fungsi f kontinu pada $[a, b]$ jika kontinu pada (a, b), kontinu kanan dan kontinu kiri masing-masing pada a dan pada b.

Berikut ini akan dibahas fungsi kontinu mutlak (AC), fungsi kontinu mutlak kuat (AC^*) dan generalisasinya.

Definisi 2.14 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan fungsi $F: [a, b] \to X$ dengan ruang Banach X dan $A \subset [a, b]$. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak pada A, yang dilambangkan $F \in AC(A)$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $\{(x_i, y_i)\}$ merupakan barisan yang saling lepas pada interval $[a, b], x_i, y_i \in A$ dan $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i) < \delta$, maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F(x_i, y_i)\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|F(y_i) - F(x_i)\|_X < \varepsilon.$$

Definisi 2.15 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan X merupakan ruang Banach dan fungsi $F: [a, b] \to X$. Sebuah fungsi F dikatakan kontinu mutlak generalisasi pada $A \subset [a, b]$, dilambakan dengan $F \in ACG(A)$, jika terdapat barisan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in AC(a_n), \forall n.$$

2.1.6 Fungsi Variasi Terbatas

Fungsi variasi terbatas merupakan fungsi bernilai real yang didefinisikan pada suatu interval dan memiliki total variasi yang terikat. Berikut ini akan dibahas fungsi variasi terbatas dan generalisasinya.

Definisi 2.16 (Protter, 1998)

Misalkan $A = \{x: a \leq x \leq b\}$ menjadi interval dan $f: A \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi yang diberikan. Variasi f atas A, dilambangkan dengan $V_a^b f$, adalah kuantitas

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

di mana $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ pada A. Jika V_a^b terbatas, maka dapat dikatakan f adalah variasi terbatas pada A. Jika f bukan variasi terbatas, maka ditulis $V_a^b f = +\infty$.

Contoh 2.4

Diberikan fungsi $f: [a, b] \to A$ di mana $A = \{x: a \leq x \leq b\}$. Tunjukkan bahwa $V_a^x f = f(x) - f(a)$ untuk semua $x \in A$.

Penyelesaian:

Misalkan $x \in A$ dan misalkan Δ merupakan anggota bagian $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$. Maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= f(x) - f(a).$$

Karena hal di atas berlaku kesetaraan untuk setiap anggota bagian, maka berlaku juga supremum. Oleh karena itu $V_a^x f = f(x) - f(a)$.

Definisi 2.17 (Aziz dkk., 2021)

Sebuah fungsi F dikatakan variasi terbatas pada $A \subset [a, b]$, dilambangkan bahwa $F \in BV(A)$, jika terdapat $M \geq 0$ sehingga untuk setiap barisan yang saling lepas pada interval $\{(a_j, b_j)\}, \forall\, a_j, b_j \in A$ diperoleh

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| F(b_j) - F(a_j) \right\|_X \leq M.$$

Definisi 2.18 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan X merupakan ruang Banach dan fungsi $F: [a, b] \to X$. Sebuah fungsi F dikatakan variasi terbatas generalisasi pada $A \subset [a, b]$, dilambakan dengan $F \in BVG(A)$, jika terdapat barisan $\{a_n\}$ sehingga

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dan } F \in BV(a_n), \forall n.$$

2.1.7 Fungsi Primitif

Fungsi primitif dalam kalkulus, menurut Newton dan Leibniz merupakan konsep yang merujuk pada antiturunan atau integral tak tentu dari suatu fungsi. Secara sederhana, fungsi primitif adalah fungsi yang turunan pertamanya sama dengan fungsi yang sedang dicari antiturunannya. Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus secara independen tetapi pendekatan mereka pada fungsi primitif yang berhubungan dengan teori integral.

Definisi 2.19 (Toheri, 2008)

Fungsi F dikatakan antiturunan dari f pada selang $A \subset [a,b]$ jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x pada A.

Pada awalnya, notasi antiturunan dinyatakan dengan A_x, di mana $A_x[2x] = x^2 + C, A_x[x^2 - 2x] = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$. Akan tetapi, perkembangan saat ini lebih banyak menggunakan notasi integral atau '$\int$ ' yang dicetuskan oleh Newton dan Leibniz. Notasi ini dapat dituliskan menjadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

di mana

$$F'(x) = f(x).$$

Antiturunan di atas selanjutnya dikenal atau disebut sebagai integral tak tentu.

Definisi 2.20 (Lee, 2011)

Suatu fungsi bernilai riil f dikatakan terintegral Newton pada $[a,b]$, jika terdapat fungsi F yang terdefinisi pada $[a,b]$ sehingga turunannya $F'(x) = f(x)$, untuk setiap x di $[a,b]$. Fungsi F disebut fungsi primitif f pada $[a,b]$ sehingga $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Definisi 2.21 (Lee, 2011)

Suatu fungsi bernilai riil $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann ke R_R jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P lalu diberikan

$\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ dan $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, memenuhi $x_{i-1} \leq t_1 \leq x_i$ dan $x_i - x_{i-1} < \delta$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - R_R\right| < \varepsilon.$$

Integral dari f pada $[a, b]$ diberikan oleh R_R.

Dari sifat integral Riemann, dijelaskan bahwa F pada $[a, b]$ sehingga $F(x) = (R_R)\int_{\alpha}^{x} f(\alpha)d\alpha$ dan jika f kontinu, maka F merupakan fungsi primitif.

2.1.8 Fungsi Terukur

Pada subbab ini akan dipaparkan definisi fungsi terukur dan teorema-teorema yang terkait.

Definisi 2.22 (Russell A. Gordon, 1994)

Sebuah fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terukur jika $A \subset [a, b]$ merupakan himpunan terukur dan untuk setiap bilangan real r, maka himpunan $\{x \in A: f(x) > r\}$ terukur.

Berdasarkan definisi, domain dari suatu fungsi terukur harus merupakan sebuah himpunan terukur. Dan berdasarkan definisi di atas jelas bahwa fungsi kontinu dan fungsi monoton merupakan fungsi terukur.

Teorema 2.5 (Solikhin & Aziz, 2022)

Misalkan $A \subset [a, b]$ merupakan himpunan terukur dan misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Maka pernyataan di bawah ini ekuivalen:

(i). Untuk setiap bilangan real r, maka $\{x \in A: f(x) > r\}$ terukur.

(ii). Untuk setiap bilangan real r, maka $\{x \in A: f(x) \geq r\}$ terukur.

(iii). Untuk setiap bilangan real r, maka $\{x \in A: f(x) < r\}$ terukur.

(iv). Untuk setiap bilangan real r, maka $\{x \in A: f(x) \leq r\}$ terukur.

Bukti:

Diketahui fungsi f terukur, maka

$$\{x \in A: f(x) \geq r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{x \in A: f(x) < r + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

adalah terukur untuk setiap bilangan asli n. Sehingga $(i) \rightarrow (ii)$.

Karena $\{x \in A: f(x) \geq r\}$ terukur, maka komplemennya adalah

$$\{x \in A: f(x) < r\}$$

juga terukur, sehingga $(ii) \rightarrow (iii)$.

Karena diketahui fungsi f terukur, maka

$$\{x \in A: f(x) \leq r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left\{x \in A: f(x) > r + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

adalah terukur untuk setiap bilangan asli n. Sehingga $(iii) \rightarrow (iv)$.

Karena $\{x \in A: f(x) \geq r\}$ terukur, maka komplemennya adalah

$$\{x \in A: f(x) < r\}$$

juga terukur, sehingga $(iv) \rightarrow (i)$.

Definisi 2.23 (Schwabik & Guoju, 2005)

Sebuah fungsi $f: [a, b] \rightarrow X$ dikatakan sederhana jika terdapat sebuah himpunan terukur $A_m \subset [a, b], m = 1, \ldots, p$ sehingga

$$A_m \cap A_l = \emptyset \text{ untuk } m \neq l$$

dan

$$[a,b] = \bigcup_{m=1}^{p} A_m$$

Di mana $f(t) = y_m \in X$ untuk $t \in A_m, m = 1, \dots, p$,

yang berarti f konstan pada himpunan terukur E_m.

Dinotasikan $\mathcal{J}(\mu, X)$ merupakan koleksi semua fungsi sederhana pada I. Dan jelas bahwa $\mathcal{J}$ merupakan ruang linier dan jika f fungsi sederhana maka $\|f\|: [a,b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi sederhana.

Definisi 2.24 (Schwabik & Guoju, 2005)

Diberikan $f: [a,b] \to X$ dikatakan terukur jika terdapat sebuah himpunan $(f_n), f_n \in \mathcal{J}, n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0$$

untuk semua $t \in [a,b]$.

Definisi 2.25 (Schwabik & Guoju, 2005)

Fungsi $f: [a,b] \to X$ dikatakan terukur lemah jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi real $x^*(f): [a,b] \to \mathbb{R}$ terukur.

2.1.9 Partisi Perron

Partisi Perron adalah konsep dalam teori integral yang digunakan dalam proses penyempurnaan partisi untuk menghitung integral secara lebih tepat, terutama dalam integral Riemann dan generalisasinya seperti integral Riemann-Stieltjes atau integral Lebesgue. Sebelum diuraikan partisi Perron terlebih dahulu dibahas $\delta - fine$.

Diketahui fungsi positif $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$. Diberikan sebuah partisi $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; t_1, t_2, \dots, t_n\}$ pada $[a, b]$ yang memenuhi

$$t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq \delta_i \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i),$$

untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ dinamakan selang $\delta - fine$ pada $[a, b]$.

Definisi 2.26 (Solikhin & Aziz, 2022)

Diberikan $D_1, D_2, \dots, D_n$ interval yang saling lepas di dalam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ di dalam $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Himpunan interval titik dilambangkan dengan $\mathfrak{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ disebut partisi McShane pada $[a, b] \subset \mathbb{R}$ jika $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n = [a, b]$.

(i). Jika terdapat fungsi positif δ pada $[a, b], \mathfrak{D} = \{(D, x)\}$ partisi McShane pada $[a, b]$ sehingga $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ untuk setiap i, disebut partisi McShane dengan $\delta > 0$ pada $[a, b]$.

(ii). Jika $\mathfrak{D} = \{(D, x)\}$ partisi McShane dengan $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan $x_i \in D_i$ untuk setiap i, maka $\mathfrak{D}$ disebut partisi Perron pada $[a, b]$.

Berdasarkan *Definisi 2.30*, pada partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D, x)\}, x_i$ tak perlu anggota D_i untuk setiap i, sedangkan pada partisi Perron haruslah $x_i \in D_i, \forall i$. Hal ini berarti bahwa setiap partisi Perron merupakan partisi McShane.

Dapat dikatakan juga bahwa himpunan interval $\mathfrak{D} = \{(D, x)\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ disebut

(i). Partisi Perron dengan $\delta > 0$ pada $[a, b]$ jika $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ dan $x_i \in D_i, \forall i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ dengan $D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset$ dimana $i \neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = [a, b]$.

(ii). Partisi Perron dengan $\delta > 0$ pada $[a, b]$ jika $D_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ dan $x_i \in D_i, \forall i \ (i = 1,2, \dots, n)$ dengan $D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset$ dimana $i \neq j$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} D_i \subset [a, b]$.

Selanjutnya titik x dengan $(D, x) \in \mathfrak{D}$ dinamakan titik terkait partisi δ-fine. Jika syarat $x_i \in D_i$ diabaikan, partisinya dikenal sebagai partisi Mcshane. Teorema berikut menyatakan eksistensi partisi Perron pada $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.6 (Solikhin & Aziz, 2022)

Untuk setiap fungsi positif $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$ terdapat partisi Perron pada $[a, b]$.

Bukti:

Diberikan $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan fungsi positif δ pada $[a, b]$.

Selanjutnya dibentuk $G = \{D - \delta(x), D + \delta(x)\}$ dengan $x \in [a, b]$. Karena $[a, b]$ tertutup dan terbatas maka $[a, b]$ kompak sehingga G mempunyai himpunan bagian hingga, katakan $\{D_k - \delta(D_k), D_k + \delta(D_k)\}$, dengan $k = 1,2, \dots, n$.

Diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$

$x \in (D_i - \delta(D_i), D_i + \delta(D_i) \cap (D_i - \delta(D_i), D_i + \delta(D_i))$, dengan $D_i \leq x_i \leq D_{i+1}$ dan $i = 1,2, \dots, n - 1$.

Dari sini diperoleh $D_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (D_i + \delta(D_i), D_i + \delta(D_i))$ yang berarti bahwa $\mathfrak{D} = \{([x_{i+1}, x_i], D_i) | i = 1,2, \dots, n\}$ partisi Perron.

Contoh 2.5

Misalkan $f(x) = x^2$ didefinisikan pada interval $[0,4]$. Diberikan fungsi gauge $\delta(x) = x + 1$. Tentukan partisi Perron pada interval [0,4] untuk fungsi $f(x)$ dengan gauge $\delta(x)$.

Penyelesaian:

Fungsi gauge diberikan sebagai $\delta(x) = x + 1$. Artinya, panjang subinterval $\{[x_{i-1}, x_i]\}$, di mana setiap titik x_i dipilih sedemikian rupa sehingga $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta(t_i)$ untuk $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

(i). Misalkan mulai dengan $x_0 = 0$.

(ii). Pilih x_1 sehingga $|x_1 - x_0| < \delta(t_1) = t_1 + 1$, dengan $t_1 \in [x_0, x_1]$. Karena $t_1 \in [0, x_1]$, maka $\delta(t_1) \leq x_1 + 1$. Untuk kesederhanaan, ambil $x_1 = 1$.

(iii). Pilih x_2 sehingga $|x_2 - x_1| < \delta(t_2) = t_2 + 1$, dengan $t_2 \in [x_1, x_2]$. Karena $t_2 \in [1, x_2]$, maka $\delta(t_2) \leq x_2 + 1$. Untuk kesederhanaan, ambil $x_2 - x_1 = 2$. Jadi $x_2 = 3$.

(iv). Pilih x_3 sehingga $|x_3 - x_2| < \delta(t_3) = t_3 + 1$, dengan $t_3 \in [x_2, x_3]$. Karena $t_3 \in [3, x_3]$, maka $\delta(t_3) \leq x_3 + 1$. Untuk kesederhanaan, ambil $x_3 - x_2 = 1$. Jadi $x_2 = 4$.

Jadi, partisi Perron untuk $f(x) = x^2$ pada interval [0,4] dengan fungsi gauge $\delta(x) = x + 1$ adalah $\{[0,1], [1,3], [3,4]\}$.

2.1.10 Integral Lebesgue

Ukuran Lebesgue menjadi dasar untuk membangun integral Lebesgue, yang merupakan generalisasi dari integral Riemann. Integral Lebesgue memungkinkan kita mengintegralkan kelas fungsi yang jauh lebih luas dibandingkan dengan integral Riemann (Russell A. Gordon, 1994).

Diberikan sebuah himpunan bilangan real A dan ukuran Lebesgue dinotasikan $\mu(A)$. Sebelum menjelaskan definisi ukuran, akan dijelaskan beberapa sifat.

(i). Jika diberikan interval A, maka $\mu(A) = \ell(A)$.

(ii). Jika diberikan interval berturut-turut P dan Q, di mana $P \subset Q$, maka $\mu(P) \leq \mu(Q)$.

(iii). Diberikan $P \subseteq \mathbb{R}$ dan $x_0 \in \mathbb{R}$, didefinisikan $P + x_0 = \{x + x_0 : x \in P\}$. Maka $\mu(P + x_0) = \mu(P)$.

(iv). Jika P dan Q merupakan himpunan tak tumpang tindih, maka $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$.

Definisi 2.27 (Russell A. Gordon, 1994)

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$. Ukuran luar Lebesgue pada A dinotasikan dengan $\mu^*(A)$ yang berlaku

$$inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(A_k)\right\}$$

di mana $\{I_k\}$ merupakan barisan pada interval terbuka sehingga $A \subset \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Jadi, jelas bahwa $0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$.

Definisi 2.28 (Hong dkk., 2004)

Misalkan f merupakan fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur A. Jika f tak negatif dan (F_k) merupakan penutup ukuran terbatas monoton pada

A, maka f dikatakan terintegral Lebesgue jika $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{F_N} [f(x)]_N dx$ terbatas. Dituliskan

$$\int_E f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{F_N} [f(x)]_N dx.$$

Lemma 2.1 (Hong dkk., 2004)

Misalkan f merupakan fungsi terukur yang didefinisikan pada himpunan terukur A. Jika f tak negatif dan $(F_k), (E_k)$ merupakan dua penutup ukuran terbatas monoton pada A, maka

$$\lim_{k\to\infty} \int_{F_k} [f(x)]_k dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} [f(x)]_n dx$$

di mana satu dari dua limit tersebut terbatas.

Bukti:

Misalkan $\ell_k = \int_{E_k} [f(x)]_k dx$ dan $r_n = \int_{F_n} [f(x)]_n dx.$ Maka kedua (ℓ_k) dan (r_n) bukan barisan bilangan real menurun. Jika $\ell = \lim\limits_{k\to\infty} \ell_k$ ada, maka diperoleh $\ell_k \leq \ell$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

Sekarang untuk setiap $N, F_N \subset A$ dengan $m(F_N) < \infty$. Maka $F_N \backslash E_k$ merupakan barisan yang menurun pada himpunan terukur. Maka $\lim\limits_{k\to\infty} m(F_N \backslash E_k) = 0.$ oleh karena itu, diambil limit dengan $k \to \infty$ dari pertidaksamaan

$$\int_{F_N} [f]_N dx = \int_{F_N \cap E_k} [f]_N dx + \int_{F_N \backslash E_k} [f]_N dx$$

$$\leq \int_{E_k} [f]_N dx + Nm(F_N \backslash E_k)$$

$$\leq \ell + Nm(F_N \backslash E_k),$$

Lalu diperoleh

$$r_N = \int_{F_N} [f]_N dx \leq \ell.$$

Definisi 2.29 (Hong dkk., 2004)

Misalkan f fungsi terukur pada himpunan terukur A dan f^+ dan f^- keduanya terintegral Lebesgue, maka f dikatakan terintegral Lebesgue. $\int_A f\, dx$ didefinisikan dengan $\int_A f\, dx = \int_A f^+\, dx - \int_A f^-\, dx$.

Lemma 2.2 (Hong dkk., 2004)

Andaikan $f \in L(A)$ dan A terukur. Misalkan fungsi terukur g pada A. Jika $|g| \leq f$, maka g juga di $L(A)$.

Bukti:

Karena $|g| \leq f$, maka diperoleh $g^+ \leq f$ dan $g^- \leq f$. Untuk penutup ukuran terbatas monoton (F_k) pada A dan bilangan positif k, diperoleh

$$0 \leq \int_{F_k} [g^+]_k\, dx \leq \int_{F_k} [f]_k\, dx \leq \int_A f\, dx < \infty.$$

Oleh karena itu, g^+ terintegral. Demikian pula, g^- terintegral dan g juga terintegral.

Teorema 2.7 (Solikhin & Aziz, 2022)

Misalkan r dan s terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan $P, Q \subset [a, b]$ masing-masing himpunan terukur, sehingga berlaku

(i). Untuk setiap c bilangan real, maka $\int_a^b cf = c \int_a^b f$;

(ii). $\int_a^b (r + s) = \int_a^b r + \int_a^b s$;

(iii). Jika $r \leq s$ hampir di mana-mana pada $[a, b]$, maka $\int_a^b r \leq \int_a^b s$;

(iv). Jika $r = s$ hampir di mana-mana pada $[a, b]$, maka $\int_a^b r = \int_a^b s$;

(v). $\left|\int_a^b s\right| \leq \int_a^b |s|$;

(vi). Apabila $P \cap Q = \emptyset$, maka $\int_{P \cup Q} s = \int_P s + \int_Q s$;

(vii). Apabila $s \geq 0$ dan $P \subseteq Q$, maka $\int_P f \leq \int_Q f$.

Definisi 2. 30 (Solikhin & Aziz, 2022)

Diberikan $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \ldots, [u_i, v_i]$ interval-interval yang saling lepas di dalam interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan $x_1, x_2, \ldots, x_i$ di dalam $[a, b] \in \mathbb{R}$. Koleksi pasangan interval titik $\mathfrak{D} = \{[u, v], x\} = \{([u_i, v_i], x_i); i = 1,2, \ldots, n\}$ disebut

(i). Partisi Lebesgue pada $[a, b]$ jika $\bigcup_{i=1}^{n} [u_i, v_i] = [a, b]$

(ii). Partisi parsial Lebesgue di dalam $[a, b]$ jika $\bigcup_{i=1}^{n} [u_i, v_i] \subset [a, b]$.

Contoh 2.6

Misalkan diberikan fungsi $f(x) = x^2$ yang didefinisikan pada interval $[0,4]$. Tentukan partisi Lebesgue untuk fungsi $f(x)$ dengan membagi rentang nilai $f(x)$ ke dalam subinterval $[0,4], [4,10], [10,20], [20,30]$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x^2$ memiliki domain $[0,4]$. Maka, nilai $f(x)$ pada domain ini berkisar dari 0 (ketika $x = 0$) hingga 16 (ketika $x = 4$).

Untuk setiap subinterval nilai $f(x)$, cari interval x pada domain $[0,4]$ yang menghasilkan nilai-nilai dalam subinterval tersebut:

(i). Subinterval $[0,4]$:

$x^2 \in [0,4]$ berarti $x = [0,2]$.

(ii). Subinterval $[4,10]$:

$x^2 \in [4,10]$ berarti $x = \left[2, \sqrt{10}\right]$.

Dengan pendekatan, $\sqrt{10} \approx 3.16$, sehingga $x \in [2,3.16]$.

(iii). Subinterval $\{10,20]$:

$x^2 \in [10,20]$ berarti $x = \left[\sqrt{10}, \sqrt{20}\right]$.

Dengan pendekatan, $\sqrt{20} \approx 4.47$, sehingga $x \in [3.16,4]$.

(iv). Subinterval $[20,30]$:

Tidak memiliki nilai x^2 dalam interval $[20,30]$, karena x^2 maksimum adalah 16 pada $x = 4$.

2.1.11 Integral McShane

Sebelum mendefinisikan suatu fungsi terintegral McShane, akan didefinisikan dulu apa yang dimaksud dengan partisi McShane.

Jika $A = [a, b]$ adalah interval tertutup dan terbatas di $[a, b]$, maka partisi dari A adalah berhingga. Misalkan $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di mana $x_i \in I, i = 1,2, \dots, n$ sedemikian sehingga

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Titik-titik di D digunakan untuk membagi interval $i = [a, b]$ menjadi subinterval yang saling lepas. Selanjutnya, akan dinotasikan partisi $D = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i-1}^{n}$ dan definisikan norm D, yakni $\|D\| = maks\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i-1}^{n}$.

Jika titik t_i diambil sebarang dari setiap interval $A_i = [x_{i-1}, x_i], i \leq n$ atau dengan kata lain $t_i \in A_i = [x_{i-1}, x_i], i \leq n$, maka t_i disebut label dari subinterval A_i dan himpunan $D = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i-1}^{n}$ disebut partisi McShane dari interval tertutup $[a, b]$.

Definisi 2.31 (Solikhin & Aziz, 2022)

Partisi McShane dari interval $[a, b]$ adalah koleksi berhingga $D = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i-1}^{n}$ sedemikian sehingga $\{[x_{i-1}, x_i], i \leq n\}$ sehingga koleksi subinterval dari interval $[a, b]$ yang menutupi $[a, b]$ dan $t_i \in [a, b], i \leq n$.

Jika $D = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i-1}^{n}$ adalah partisi McShane dari interval $[a, b]$, maka didefinisikan $f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(d_i - c_i)$.

Definisi 2.32 (Solikhin & Aziz, 2022)

Diberikan fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terintegral McShane pada $[a, b]$ jika terdapat bilangan real L, sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi δ positif sedemikian sehingga untuk setiap partisi yang subordinat ke δ dikatakan partisi Lebegue/McShane pada $[a, b]$ yaitu $D = \{([x_{i-1}, x_i], t_i): i = 1,2, \dots, n\}$, memenuhi

$$|f(D) - L| < \varepsilon$$

di mana $f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i)$ merupakan jumlahan Riemann atas partisi D. Dan selanjutnya, L dikatakan integral dari fungsi f pada interval $[a, b]$ atau ditulis $L = (M) \int_a^b f$ dan $M[a, b]$ menyatakan himpunan dari fungsi-fungsi yang terintegral McShane pada interval tertutup $[a, b]$.

Definisi 2.33 (Solikhin & Aziz, 2022)

Didefinisikan fungsi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan rumus $F(a) = 0$ dan $F(x) = (M) \int_a^x f(t)dt$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka fungsi F ini disebut fungsi primitif f pada $[a, b]$.

Berdasarkan fungsi primitif ini, untuk $f \in M[a, b]$ di mana $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ diperoleh $F(a, b) = F(b) - F(a) = (M) \int_a^b f(t)dt$.

Seperti hasil di atas maka untuk $f \in M[x_{i-1}, x_i]$ dengan $i = 1,2, \dots, n$ berlaku

$$F(x_{i-1}, x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$$

Karena $\bigcup [x_{i-1}, x_i] = [a, b]$ dengan kata lain

$$F(a, b) = (M) \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1}, x_i).$$

Contoh 2.7

Misalkan $f(x) = e^x$ didefinisikan pada interval $[0,3]$. Diberikan fungsi gauge $\delta(x) = \frac{1}{x+3}$. Tentukan partisi McShane pada interval $[0,3]$ menggunakan fungsi gauge tersebut.

Penyelesaian:

Fungsi gauge diberikan sebagai $\delta(x) = \frac{1}{x+3}$. Maka, panjang setiap subinterval $|x_i - x_{i-1}|$ harus kurang dari $\frac{1}{t_i+3}$, dengan $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

(i). Misalkan mulai dengan $x_0 = 0$.

(ii). Pilih x_1 sedemikian sehingga $|x_1 - x_0| \leq \delta(t_1) = \frac{1}{t_1+3}$, dengan $t_1 \in [x_0, x_1]$.

Ambil $t_1 = x_0 = 0$, sehingga $|x_1 - x_0| \leq \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3}$. Maka, $x_1 = x_0 + \frac{1}{3} = 0.33$.

(iii). Pilih x_2 sedemikian sehingga $|x_2 - x_1| \leq \delta(t_2) = \frac{1}{t_2+3}$, dengan $t_2 \in [x_1, x_2]$.

Ambil $t_2 = x_1 = 0.33$, sehingga $|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{0.33+3} = \frac{1}{3.33} \approx 0.3$. Maka, $x_2 = x_1 + 0.3 = 0.63$.

(iv). Pilih x_3 sedemikian sehingga $|x_3 - x_2| \leq \frac{1}{t_3+3}$, dengan $t_3 \in [x_2, x_3]$.

Ambil $t_3 = x_2 = 0.63$, sehingga $|x_3 - x_2| \leq \frac{1}{0.63+3} = \frac{1}{3.63} \approx 0.275$. Maka, $x_3 = x_2 + 0.275 = 0.905$.

(v). Dengan menggunakan proses di atas hingga mencapai $x_n = 3$.

Partisi McShane untuk $f(x) = e^x$ pada interval [0,3] dengan gauge $\delta(x) = \frac{1}{x+3}$ adalah koleksi subinterval dengan panjang bervariasi, seperti:

$$\{[0,0.33], [0.33,0.63], [0.63,0.905], \ldots, [x_n, 3]\}.$$

2.1.12 Integral Dunford

Integral Dunford merupakan jenis integral yang lebih umum daripada integral Riemann dan memiliki hubungan dengan integral Lebesgue. Dibandingkan dengan integral Riemann yang mensyaratkan fungsi kontinu, integral Dunford dapat diterapkan pada fungsi yang lebih luas, meskipun masih lebih terbatas dibandingkan integral Lebesgue. Berikut akan dibahas definisi integral Dunford yang akan dipakai di bagian pembahasan.

Definisi 2.34 (Schwabik & Guoju, 2005)

Misalkan $f: [a, b] \to X$ terukur lemah dan sehingga fungsi $x^*(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue untuk setiap $x^* \in X^*$ maka f dikatakan terintegral Dunford.

Definisi 2.35 (Solikhin dkk., 2021)

Misalkan f merupakan fungsi terukur lemah. Jika $x^*(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue untuk setiap $x^* \in X^*$, oleh karena itu fungsi f disebut terintegral Dunford. Integral Dunford $(D_L) \int_A f$ pada fungsi f atas himpunan terukur $A \subset [a, b]$ didefinisikan oleh vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$, yakni

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f),$$

untuk semua $x^* \in X^*$.

Himpunan semua fungsi f terintegral Dunford dilambangkan dengan $D_L[a, b]$, dan telah ditunjukkan bahwa $D_L[a, b]$ memiliki sifat aditif dan sifat homogen.

Teorema 2.8 (Solikhin dkk., 2019)

Jika fungsi f adalah fungsi yang terintegral Dunford pada $[a, b]$, maka untuk setiap himpunan terukur $A \subset [a, b]$ vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ adalah tunggal (Solikhin dkk., 2019).

Bukti:

Ambil sebarang himpunan $A \subset [a, b]$. Misalkan terdapat vektor $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ dan $z^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ maka

$$x^{**}_{(f,A)} \in X^{**} = (D_L) \int_A x^*(f) \text{ dan } z^{**}_{(f,A)} \in X^{**} = (D_L) \int_A x^*(f).$$

Lebih lanjut

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) - z^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f) - (D_L) \int_A x^*(f) = 0, \forall x^* \in X^*.$$

Selanjutnya diperlihatkan bahwa koleksi dari semua fungsi yang terintegral Dunford, merupakan ruang linier.

Teorema 2.9

Jika fungsi-fungsi f dan g masing-masing terintegral Dunford pada $[a, b]$ dengan demikian maka $f + g$ dan cf untuk c bilangan riil juga terintegral Dunford pada $[a, b]$ dan berlaku

(i). $(D_L) \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big) dx = (D_L) \int_a^b f(x) dx + (D_L) \int_a^b g(x) dx$

(ii). $(D_L) \int_a^b cf(x) dx = c(D_L) \int_a^b cf(x) dx$

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

(i). Misalkan

$(D_L) \int_a^b f(x) dx = A$ dan $(D_L) \int_a^b g(x) dx = B$

Terdapat fungsi $\delta_1(x) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi $\mathfrak{D}_1 = \{[u, v], x\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left|\sum f(x)(v - u) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan juga terdapat fungsi $\delta_2(x) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi $\mathfrak{D}_2 = \{[u, v], x\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left|\sum f(x)(v-u) - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi $\delta: [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}, x \in [a, b].$$

Maka berlaku

$$\left|\sum (f+g)(x)(v-u) - (A+B)\right|$$

$$= \left|\sum ((f)(x) + g(x))(v-u) - (A+B)\right|$$

$$= \left|\sum ((f)(x)(v-u) + ((g)(x)(v-u)) - (A+B)\right|$$

$$= \left|\sum (f)(x)(v-u) + \sum (g)(x)(v-u) - (A+B)\right|$$

$$= \left|\sum (f)(x)(v-u) - A + \sum (g)(x)(v-u) - B\right|$$

$$= \left|\sum f(x)(v-u) - A\right| + \left|\sum g(x)(v-u) - B\right|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sehingga $f + g$ terintegral Dunford pada $[a, b]$, ini berarti $f + g$ terintegral Dunford ke $A + B$ dengan

$$(D_L)\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = A + B$$

$$= (D_L)\int_a^b f(x)dx + (D_L)\int_a^b g(x)dx$$

(ii). Jika $c = 0$ maka jelas cf terintegral Dunford ke 0.

Untuk $c \neq 0$.

Pilih fungsi $\delta_3(x) > 0$ pada $[a, b]$, Sehingga untuk setiap partisi $\mathfrak{D}_3 = \{[u,v],x\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\sum f(x)(v-u) - A\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Misalkan $\mathfrak{D} = \{[u,v],x\}$ maka berlaku

$$\left|\sum cf(x)(v-u) - cA\right|$$

$$= \left|c\left(\sum f(x)(v-u)\right) - cA\right|$$

$$= \left|c\left(\sum f(x)(v-u) - A\right)\right|$$

$$= |c|\left|\sum f(x)(v-u) - A\right|$$

$$< |c|.\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

Sehingga cf terintegral Dunford ke cA dengan

$$(D_L)\int_a^b cf(x)dx = c(D_L)\int_a^b cf(x)dx.$$

2.2 Kajian Integrasi Topik Dalam Islam

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai perintah untuk selalu bertakwa kepada Allah dengan mengikuti perintah Allah dan menjauhi larangan Allah. Selanjutnya akan membahas mengenai karakteristik bertakwa, sebagaimana firman Allah dalam Q.S. Al-Ahzab ayat 70 yang berbunyi:

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوا اتَّقُوا اللّٰهَ وَقُوْلُوْا قَوْلًا سَدِيْدًاۙ

Artinya:
"Wahai orang-orang yang beriman, bertakwalah kamu kepada Allah dan ucapkanlah perkataan yang benar."(Kemenag, 2019)

Menurut kitab tafsir Ibnu Katsir (2004), Allah telah memberi perintah kepada hambanya untuk bertakwa dan beribadah kepada Allah, serta diikuti dengan perintah untuk berbicara dengan baik dan benar. Karena semua perkataan akan dicatat oleh Raqib dan Atid dan akan dipertanggung jawabkan di hadapan Allah kelak.

Ayat di atas menjelaskan batasan bahwa bertakwa adalah mereka yang berbicara baik dan benar atau dengan kata lain penting untuk menjaga adab dan akhlak dalam kehidupan. Berhubungan dengan hadist Nabi Muhammad yang berbunyi:

مَنْ كَانَ يُؤْمِنُ بِاللَّهِ وَالْيَوْمِ الْآخِرِ فَلْيَقُلْ خَيْرًا أَوْ لِيَصْمُتْ

Artinya:
"Barangsiapa yang beriman kepada Allah dan hari akhir, hendaklah ia berkata baik atau diam.". (HR. Bukhari dan Muslim)(Baqi, 1959)

Hadist ini memberikan landasan bahwa salah satu ciri keimanan seseorang adalah menjaga lisannya. Berbicara dengan kebenaran merupakan cerminan dari kualitas keimanan dan ketakwaan seorang muslim. Orang beriman diharapkan selalu berkata benar dan menjaga ucapan mereka agar tidak membawa mudarat.

Dalam Q.S. An-Nahl ayat 128, Allah berfirman:

اِنَّ اللّٰهَ مَعَ الَّذِيْنَ اتَّقَوْا وَّالَّذِيْنَ هُمْ مُّحْسِنُوْنَ

Artinya:
"Sesungguhnya Allah bersama orang-orang yang bertakwa dan yang berbuat kebaikan."(Kemenag, 2019)

Pada ayat di atas, Allah memberikan penjelasan alasan mengapa Nabi diperintahkan untuk selalu sabar dan dilarang untuk sedih dan cemas karena Allah senantiasa bersama orang-orang bertakwa dan orang yang berbuat kebaikan. Karena orang bertakwa selalu mendekatkan diri kepada-Nya dan mereka tidak kecewa jika kehilangan kesempatan. Demikian pula dengan orang yang senantiasa melakukan kebaikan, karena orang-orang tersebut selalu melakukan kebaikan selama hidup dan melaksanakan kewajiban sebagai seorang hamba, dan selalu menaati perintah dan menjauhi larangan dari Allah.

Menurut ayat dan hadist di atas, dapat disimpulkan bahwa takwa memiliki batasan-batasan tertentu yaitu mereka yang mampu menjaga lisannya agar selalu berbicara dengan perkataan yang baik dan orang-orang yang senantiasa melakukan kebaikan semasa hidup di dunia. Apabila batasan-batasan tersebut terpenuhi maka orang tersebut bisa dikatakan bertakwa sesuai firman Allah. Sebagaimana batasan-batasan dari fungsi yang dikatakan terintegral Dunford yaitu jika untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x^*f: [a,b] \to R$ terintegral Lebesgue dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ maka diperoleh $x^{**}_{(f,A)}(x^*) = \int_A x^*(f)$, untuk setiap $x^* \in X^*$.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Penelitian ini berdasarkan beberapa teori pendukung, yaitu fungsi primitif pada fungsi terintegral Dunford. Terdapat beberapa penelitian yang membahas mengenai fungsi primitif pada integral Dunford, di antaranya oleh (Aziz dkk., 2021) yang telah membuktikan bahwa setiap fungsi yang terintegral Dunford, maka fungsi primitif harus kontinu, kontinu mutlak, variasi terbatas, dan generalisasinya.

Untuk pembahasan yang pertama adalah menjelaskan tentang terkait fungsi kontinu mutlak, fungsi variasi terbatas, dan generalisasinya. Pada bab ini akan dijelaskan terkait hubungan sifat sifat-sifat fungsi primitif di atas, dengan menggunakan definisi-definisi pada bab sebelumnya.

Definisi 2.36 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan X merupakan ruang Banach dan X^* merupakan ruang dual pada X. Sebuah fungsi $f: [a, b] \to X$ terintegral Dunford pada $[a, b]$, maka diberikan $f \in D_L[a, b]$, jika untuk setiap $x^* \in X^*, x^*(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue dan untuk setiap $A \subset [a, b]$ himpunan terbatas terdapat $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ maka diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L)\int_A x^*(f),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Diberikan $D_L[a, b]$ merupakan himpunan semua fungsi yang terintegral Dunford.

Teorema 2.10 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi f dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$, $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Definisi 2.37 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan $\mathcal{J}[a, b]$ merupakan koleksi untuk semua interval tertutup di $[a, b]$ dan $f: [a, b] \to X$. Jika $f \in D_L[a, b]$ maka $F: \mathcal{J}[a, b] \to X$ dengan

$$F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (D_L)\int_A f$$

dan $F(\emptyset) = 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{J}[a, b]$ dikatakan fungsi primitif Dunford dari f pada $[a, b]$.

Definisi 2.38 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi $F = \mathcal{J}[a, b] \to X$ dikatakan aditif, jika

$$F(P \cup Q) = F(P) + F(Q)$$

Untuk setiap $P, Q \in \mathcal{J}[a,b]$ dimana $P \cup Q \in \mathcal{J}[a,b]$ dan $P \cap Q = \emptyset$.

Teorema 2.11 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dengan primitif F, maka F aditif pada $[a,b]$.

Bukti:

Diberikan $A \subset [a,b]$ dan $B \subset [a,b]$ masing-masing setiap interval tertutup, $A \cup B \subset [a,b]$ dan saling lepas, maka untuk setiap $x^* \in X^*$, x^*f terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan terdapat $x^{**}_{(f,A)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{(f,B)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)} \in X^{**} = (D_L)\int_A x^*f \text{ dan}$$

$$x^{**}_{(f,B)} \in X^{**} = (D_L)\int_B x^*f.$$

Oleh karena itu, terdapat $x^{**}_{(f,A\cup B)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) + x^{**}_{(f,B)}(x^*) = (D_L)\int_A x^*(f) + (D_L)\int_B x^*(f)$$

$$= (D_L)\int_{A\cup B} x^*(f) = x^{**}_{(f,A\cup B)}(x^*)$$

Jadi,

$x^{**}_{(f,A\cup B)} = x^{**}_{(f,A)} + x^{**}_{(f,B)}$ atau $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$.

Teorema 2.12 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi $f \in D_L[a,b]$ jika terdapat fungsi aditif F pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk semua $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i))\right| < \varepsilon$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \varepsilon.$$

Teorema 2.13 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi $f \in D_L[a,b]$ dan F merupakan fungsi primitif sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk semua $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D,x)\}$ maka diperoleh

$$\left|\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon$$

Maka untuk semua jumlah bagian $\sum_1$ pada $\sum$ diperoleh

$$\left|\sum\nolimits_1 x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

Teorema 2.14 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dengan primitif F, maka F kontinu pada $[a,b]$.

Teorema 2.15 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dengan primitif F, maka $F \in BVG[a,b]$.

Bukti:

Dibentuk himpunan A_{ni} yang merupakan koleksi himpunan $x \in \left[a + \frac{i+1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a,b]$ dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$, maka diperoleh $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Diberikan himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_k, b_k]\}, a_k, b_k \in A_{ni}$ untuk semua k. Maka diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ pada $[a,b]$.

Sehingga diperoleh

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\right\| \leq 1 + n(b - a).$$

Maka diketahui bahwa $F \in BV(A_{ni})$. Jadi, $F \in BVG[a, b]$.

Teorema 2.16 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F, maka $F \in BV[a, b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in D_L[a, b]$ dengan primitif F, terdapat barisan pada himpunan $\{A_{ni}\}$ sehingga $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni} = [a, b]$ dan $F \in BV[a, b](A_{ni})$. $F \in BV[a, b], \forall n, i$ dan $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$, maka diperoleh $F \in BV[a, b]$.

Teorema 2.17 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dan F merupakan fungsi primitif, maka $F \in ACG[a, b]$.

Bukti:

Dibentuk himpunan A_{ni} yang merupakan koleksi himpunan $x \in \left[a + \frac{i+1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a, b]$ dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$, maka diperoleh $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Diberikan himpunan pada interval tertutup saling lepas $\{[a_j, b_j]\}, a_j, b_j \in A_{ni}$ untuk semua j. Maka diperoleh $\{(a_j, [a_j, b_j])\}$ pada $[a, b]$.

Sehingga diperoleh

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_{j} (b_j - a_j).$$

Maka diketahui bahwa $F \in AC(A_{ni})$. Jadi, $F \in BVG[a,b]$.

Teorema 2.18 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dan F merupakan fungsi primitif, maka $F \in AC[a,b]$.

Bukti:

$f \in D[a,b]$ dan F merupakan fungsi primitif, terdapat barisan $\{A_{ni}\}$ pada himpunan sehingga $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$ dan $F \in AC(A_{ni}), \forall n, i$. Jadi, $F \in AC[a,b]$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Metode kualitatif dilakukan dengan mengumpulkan informasi yang berhubungan dengan topik penelitian. Hal itu dilakukan di antaranya dengan mengumpulkan artikel, jurnal, serta buku agar informasi yang didapatkan semakin lengkap dan relevan.

3.2 Pra Penelitian

Berikut tahapan sebelum melakukan penelitian:

1. Mengumpulkan sumber-sumber berupa buku, artikel, jurnal, dan *paper-paper* yang relevan terkait topik yang akan dibahas sebagai acuan penelitian.
2. Membuat rumusan masalah, tujuan, dan manfaat dari penelitian.
3. Membuat latar belakang serta memahami konsep dasar pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian dalam menentukan sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford, yaitu:

1. Mendefinisikan integral Dunford dan membuktikan teorema terkait integral Dunford.
2. Mendefinisikan fungsi primitif integral Dunford pada interval $[a, b]$ dan memberikan contoh terkait fungsi primitif integral Dunford pada interval $[a, b]$.

3. Mendefinisikan fungsi primitif integral Dunford bersifat aditif yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian selanjutnya.
4. Membuktikan fungsi primitif pada integral Dunford adalah kontinu pada $[a, b]$.
5. Membuktikan hubungan fungsi variasi terbatas dan generalisasinya (BVG) dengan fungsi primitif pada integral Dunford di $[a, b]$.
6. Membuktikan hubungan fungsi kontinu mutlak (AC) dan generalisasinya (ACG) dengan fungsi primitif pada integral Dunford di $[a, b]$.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini, akan dibuktikan sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford.

4.1 Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford

Pada bab ini akan menjelaskan fungsi primitif pada integral Dunford dan sifat-sifat sederhana dari fungsi primitifnya. Selanjutnya akan dijelaskan sifat-sifat terkait fungsi kontinu mutlak (AC) dan generalisasinya (ACG). Dan sifat-sifat terkait fungsi variasi terbatas (BV) dan generalisasinya (BVG). Berikut akan dijelaskan definisi dari integral Dunford.

Definisi 4.1 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan X merupakan ruang Banach dan X^* merupakan ruang dual dari X. Diberikan sebuah fungsi $f: [a, b] \to X$ dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ yang dinotasikan dengan $D_L[a, b]$, apabila untuk setiap $x^* \in X^*$, dan $x^*(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat $x^{**} \in X^{**}$ maka memenuhi

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f),$$

untuk setiap $x^* \in X^*$.

Teorema 4.1 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi f dikatakan terintegral Dunford pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$, dan $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Bukti:

($\rightarrow$) Diketahui f terintegral Dunford pada $[a, b]$.

Berdasarkan *Definisi 4.1*, karena f terintegral Dunford maka untuk setiap $x^* \in X^*$, dan $x^*(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue.

($\leftarrow$) Diketahui $x^*(f)$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$.

Berdasarkan *Definisi 4.1*, jelas bahwa untuk setiap $x^* \in X^*$, dan $x^*(f): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ ada $x^{**} \in X^{**}$ maka diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f).$$

Jadi, f terintegral Dunford pada $[a. b]$.

Definisi 4.2 (Aziz dkk., 2021)

Diberikan X merupakan ruang Banach dan diberikan $\mathcal{J}[a, b]$ merupakan koleksi semua interval tertutup di $[a, b]$ dan $f: [a, b] \rightarrow X$. Apabila f terintegral Dunford pada $[a, b]$, maka $F: \mathcal{J}[a, b] \rightarrow X$ dengan

$$F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (D_L) \int_A f$$

di mana $F(\emptyset) = 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{J}[a, b]$ maka F dikatakan primitif Dunford dari f di $[a, b]$.

Contoh 4.1 (Aziz dkk., 2021)

Didefinisikan fungsi $f: [a, b] \rightarrow X$ oleh $f(x) = c$.

Untuk setiap $x \in [a, b]$ dan konstanta $c \in X$. Maka untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$, fungsi primitif Dunfordnya adalah $F(A) = c\alpha(A)$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $F(A) = c\alpha(A)$. Diketahui $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan konstanta $c \in X$. Jika f terintegral Dunford maka untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x^*(f)$ terintegral Lebesgue maka $x^*(c)$ juga terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat $x^{**} \in X^{**}$ sehingga menurut *Definisi 4.1* diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f)$$

$$= (D_L) \int_A x^*(c)$$

$$= x^* c\alpha(A)$$

Notasi $(L) \int_A f$ merupakan terintegral Lebesgue. Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$ dan untuk setiap $A \subset [a, b]$ berlaku

$$x^{**}_{(f,A)} = c\alpha(A)$$

Jadi, $F(A) = x^{**}_{(f,A)} = (D_L) \int_A f = c\alpha(A)$.

Definisi 4.3

Fungsi $F: \mathcal{J}[a, b] \to X$ dikatakan aditif jika

$$F(P \cup Q) = F(P) + F(Q),$$

untuk setiap $P, Q \in \mathcal{J}[a, b]$ di mana $P \cup Q \in \mathcal{J}[a, b]$ dan $P \cap Q = \emptyset$.

Teorema 4.2 (Aziz dkk., 2021)

Misalkan diberikan $f \in D_L[a, b]$ dengan F sebagai primitifnya, maka F merupakan fungsi aditif pada $[a, b]$.

Bukti:

Diketahui f merupakan fungsi terintegral Dunford dan primitif F. Akan dibuktikan bahwa F merupakan fungsi aditif pada $[a,b]$.

Berdasarkan *Definisi 4.3*, diambil sebarang $P \subset [a,b]$ dan $Q \subset [a,b]$ dengan $P \cap Q = \emptyset$, Maka $P \cup Q \subset [a,b]$. Berdasarkan hipotesis teorema bahwa $f \in D_L[a,b]$, maka menurut *Definisi 4.1*, untuk setiap $x^* \in X^*$ dengan $x^*(f):[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap $P \subset [a,b]$ dan $Q \subset [a,b]$ terdapat $x^{**}_{(f,P)} \in X^{**}$ dan $x^{**}_{(f,Q)} \in X^{**}$ sedemikian sehingga memenuhi

$$x^{**}_{(f,P)}(x^*) = (D_L)\int_P x^*(f) \qquad (1)$$

dan

$$x^{**}_{(f,Q)}(x^*) = (D_L)\int_Q x^*(f)\,. \qquad (2)$$

Karena $P \cup Q \subset [a,b]$, maka terdapat $x^{**}_{(f,P\cup Q)} \in X^{**}$. Perhatikan bahwa

$$x^{**}_{(f,P)}(x^*) + x^{**}_{(f,Q)}(x^*) = (D_L)\int\limits_P x^*f + (D_L)\int\limits_Q x^*f \qquad (berdasarkan\ (1) dan\ (2))$$

Berdasarkan sifat integral Lebesgue pada *Teorema 2.7*, maka

$$\begin{aligned} x^{**}_{(f,P)}(x^*) + x^{**}_{(f,Q)}(x^*) &= (D_L)\int\limits_P x^*f + (D_L)\int\limits_Q x^*f \\ &= (D_L)\int\limits_{P\cup Q} x^*f \\ &= x^{**}_{(f,P\cup Q)}(x^*), \qquad \text{karena } f \in D_L\{P \cup Q\} \end{aligned}$$

Jadi,

$$x^{**}_{(f,P\cup Q)}(x^*) = x^{**}_{(f,P)}(x^*) + x^{**}_{(f,Q)}(x^*)$$

$$F(P \cup Q) = F(P) + F(Q)$$

Sehingga terbukti bahwa F merupakan fungsi aditif pada $[a, b]$.

Akibat 4.1 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dengan F sebagai primitifnya maka $A_1, A_2, \dots, A_n$ merupakan interval tertutup pada $[a, b]$ yang saling lepas dengan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = [a, b]$, maka

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} F(A_i) = \sum_{i=1}^{n} x_{(f,A_i)}^{**}.$$

Bukti:

Diketahui f terintegral Dunford dan F merupakan fungsi primitifnya.

Diambil sebarang interval tertutup $A_1, A_2, \dots, A_n$ pada $[a, b]$ di mana $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset [a, b]$ dengan $\mu_\alpha(A_i \cap A_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$. Berdasarkan hipotesis bahwa $F \in D_L[a, b]$, maka menurut *Definisi 4.1*, untuk setiap $x^* \in X^*$ dengan $x^*(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Lebesgue pada $[a, b]$ dan untuk setiap $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset [a, b]$ terdapat $x_{(f,A_1)}^{**}, x_{(f,A_2)}^{**}, \dots, x_{(f,A_n)}^{**} \in X^{**}$ sedemikian sehingga memenuhi

$$\begin{gathered} x_{(f,A_1)}^{**}(x^*) = (D_L) \int_{A_1} x^* f \\ x_{(f,A_2)}^{**}(x^*) = (D_L) \int_{A_2} x^* f \\ \vdots \\ x_{(f,A_n)}^{**}(x^*) = (D_L) \int_{A_n} x^* f \end{gathered}$$

Karena $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset [a, b]$ terdapat $x_{(f,\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}^{**} \in X^{**}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & x_{(f,A_1)}^{**}(x^*) + x_{(f,A_2)}^{**}(x^*) + \cdots + x_{(f,A_n)}^{**}(x^*) \\ & \qquad = (D_L) \int_{A_1} x^* f + (D_L) \int_{A_2} x^* f + \cdots + (D_L) \int_{A_n} x^* f \end{aligned}$$

Berdasarkan *Teorema 2.7* maka

$$\begin{aligned} & x_{(f,A_1)}^{**}(x^*) + x_{(f,A_2)}^{**}(x^*) + \cdots + x_{(f,A_n)}^{**}(x^*) \\ & \qquad = (D_L) \int_{A_1} x^* f + (D_L) \int_{A_2} x^* f + \cdots + (D_L) \int_{A_n} x^* f \end{aligned}$$

$$= (D_L) \int_{A_i} x^* f$$

$$= x^{**}_{(f, \cup_{i=1}^{n} A_i)}(x^*), \text{ karena } f = D_L\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

Jadi,

$$x^{**}_{(f, \cup_{i=1}^{n} A_i)}(x^*) = x^{**}_{(f, A_1)}(x^*) + x^{**}_{(f, A_2)}(x^*) + \cdots + x^{**}_{(f, A_n)}(x^*)$$

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = F(A_1) + F(A_2) + \cdots + F(A_n) = \sum_{i=1}^{n} F(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^{**}_{(f, A_i)}.$$

Sehingga terbukti bahwa $F(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} F(A_i) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}_{(f, A_i)}$.

Teorema 4.3 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi $f \in D_L[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi aditif F pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan jika interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ merupakan partisi McShane pada A berlaku

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big) \right| < \varepsilon$$

atau

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A) \right| < \varepsilon$$

Bukti:

(→) Diketahui $f \in D_L[a, b]$.

Berdasarkan Teorema 4.1, berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x^*(f)$ terintegral Lebesgue. Karena $x^*(f)$ terintegral Lebesgue, menurut *Definisi 2.34* artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ positif sedemikian sehingga untuk $A \subset [a, b]$ dengan partisi

$$\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$$

pada $A \subset [a, b]$ dengan

$$D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n = [a, b]$$

dan

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n = \emptyset,$$

berdasarkan *Definisi 4.3*, maka F aditif pada $[a, b]$. Sehingga memenuhi

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x^*(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)) \right| < \varepsilon$$

atau

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A) \right| < \varepsilon.$$

(←)Diketahui F aditif pada $[a, b]$.

Berdasarkan *Teorema 4.2*, bahwa F aditif pada f di mana $f \in D_L[a, b]$. Berdasarkan *Definisi 4.1* untuk setiap $x^* \in X^*$ ada $x^* f$ terintegral Lebesgue. Menurut *Teorema 4.1* untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ ada $x^{**} \in X^{**}$ maka diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L) \int_A x^*(f).$$

Jadi, f terintegral Dunford pada $[a. b]$.

Teorema 4.4 (Aziz dkk., 2021)

Fungsi $f \in D_L[a, b]$ dan F merupakan fungsi primitif sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk semua $A \subset [a, b]$ merupakan interval tertutup dan $\mathfrak{D} = \{(D, x)\}$ merupakan partisi McShane pada A maka diperoleh

$$\left|\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon$$

Maka untuk semua jumlah bagian $\sum_1$ pada $\mathcal{D} \sum$ diperoleh

$$\left|\sum\nolimits_1 x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

Bukti:

(→) Diketahui $f \in D_L[a, b]$.

Berdasarkan *Teorema 4.1*, berarti untuk setiap $x^* \in X^*$ dan $x^*(f)$ terintegral Lebesgue. Karena $x^*(f)$ terintegral Lebesgue, menurut *Definisi 2.34* artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat δ positif sedemikian sehingga untuk semua $A \subset [a, b]$ dengan partisi $\mathfrak{D} = \{D, x\}$ pada $A \subset [a, b]$ dengan

$$D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n = [a, b]$$

dan

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n = \emptyset,$$

berdasarkan *Definisi 4.3*, maka F aditif pada $[a, b]$. Sehingga memenuhi

$$\left|\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

Maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ atau $\mathfrak{D} \sum$ sehingga diperoleh

$$\left|\sum\nolimits_1 x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

(←)Diketahui F aditif pada $[a, b]$.

Berdasarkan *Teorema 4.2*, bahwa F aditif di mana $f \in D_L[a, b]$. Berdasarkan *Definisi 4.1* untuk setiap $x^* \in X^*$ ada $x^* f$ terintegral Lebesgue. Menurut *Teorema 4.1* untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ ada $x^{**} \in X^{**}$ maka diperoleh

$$x^{**}_{(f,A)}(x^*) = (D_L)\int_A x^*(f).$$

Jadi, f terintegral Dunford pada $[a.b]$.

Teorema 4.5 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dengan primitif Dunford F, maka F kontinu pada $[a,b]$.

Bukti:

Berdasarkan *Teorema 4.4*, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ ada $\delta > 0$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga untuk suatu interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D,x)\}$, pada A diperoleh

$$\left|\sum x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

Maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ atau $\mathfrak{D}\sum$ sehingga diperoleh

$$\left|\sum\nolimits_1 x^* f(x)\alpha(D) - x^* F(D)\right| < \varepsilon.$$

Berdasarkan *Definisi 2.4*, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sehingga diberikan $x, y \in X$ dan $\|x - y\|_X < \delta$ mengakibatkan

$$\begin{aligned}\|F(x) + F(y)\|_X &< \|F(x) + F(y) - f(y)(x-y) + f(y)(x-y)\|_X \\ &< \|F(x) + F(y) - f(y)(x-y))\|_X + \|f(y)\|_X |x-y| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Jadi, fungsi F dikatakan kontinu pada $A \subset X$ jika F kontinu di setiap $x \in A$. Hal ini menunjukkan bahwa F kontinu di $[a,b]$.

Berikut ini akan dijelaskan terkait fungsi primitif pada integral Dunford pada $[a,b]$ kaitannya dengan fungsi variasi terbatas (BV)dan generalisasinya (BVG).

Teorema 4.6 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dan F adalah primitif Dunfordnya, maka $F \in BVG[a,b]$

Bukti:

Diketahui $f \in D_L[a,b]$ dan fungsi primitif F.

Berdasarkan *Teorema 4.3*, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk semua interval tertutup $A \subset [a,b]$ dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1,x_1),(D_2,x_2),\dots,(D_n,x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \varepsilon$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^*F(A)\right| < \varepsilon.$$

Diberikan $\varepsilon = 1, \delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Diberikan himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a,b]$, maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty-1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$. Diperoleh $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.19*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_k, b_k]\}$, dengan $a_k, b_k \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ merupakan partisi Perron di $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\| \leq \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) \right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) + f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) \right\|_X + \|x^*\|_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k) \right\|$$

$$< 1 + n(b - a)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in BV(A_{ni})$. Karena $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$, maka $F \in BV[a, b]$.

Menurut *Definisi 2.21* , jika terdapat barisan $\{A_{ni}\}$ sehingga

$$[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$$

dan $F \in BV(A_{ni})$. Jadi, hal ini menunjukkan bahwa $F \in BVG[a, b]$.

Akibat 4.2 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dan F adalah primitif Dunford, maka terdapat $\{A_{ni}\}$ merupakan barisan himpunan sehingga

$$[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$$

dan

$$F \in BV(A_{ni}), \forall\, n, i.$$

Bukti:

Berdasarkan *Teorema 4.6*, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan untuk semua interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \varepsilon$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \varepsilon.$$

Diberikan $\varepsilon = 1, \delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Diberikan himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a, b]$, maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty-1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$. Diperoleh $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.19*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_k, b_k]\}$, dengan $a_k, b_k \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ merupakan partisi Perron di $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\right\| \leq \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) + f(a_k)(b_k - a_k)\right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k)\right\|$$

$$< 1 + n(b - a)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in BV(A_{ni})$.

Teorema 4.7 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dan F merupakan primitif Dunfordnya, maka $F \in BV[a, b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in D_L[a, b]$ dan fungsi primitif F.

Berdasarkan *Akibat 4.2*, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan untuk semua interval tertutup $A \subset [a, b]$ dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \varepsilon$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \varepsilon.$$

Diberikan $\varepsilon = 1, \delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Diberikan himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a, b]$, maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty - 1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$. Diperoleh $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.19*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_k, b_k]\}$, dengan $a_k, b_k \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_k, [a_k, b_k])\}$ merupakan partisi Perron di $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\right\| \leq \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k])\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k) + f(a_k)(b_k - a_k)\right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} F([a_k, b_k]) - f(a_k)(b_k - a_k)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(b_k - a_k)\right\|$$

$$< 1 + n(b - a).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in BV(A_{ni})$. Karena $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$, maka $F \in BV[a, b]$.

Berikut ini akan dijelaskan terkait fungsi primitif pada integral Dunford pada $[a, b]$ kaitannya dengan fungsi kontinu mutlak dan generalisasinya.

Teorema 4.8 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a, b]$ dan F merupakan primitif Dunfordnya, maka $F \in ACG[a, b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in D_L[a, b]$ dan fungsi primitif F.

Berdasarkan *Teorema 4.3* untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan untuk semua $A \subset [a, b]$ interval tertutup dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Misalkan $\delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Dibentuk himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a, b]$ maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty - 1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$.

Diperoleh $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.14*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_j, b_j]\}$, dengan $a_j, b_j \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_j, [a_j, b_j])\}$ merupakan partisi Perron di $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| \leq \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j) + f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x^* F([a_j, b_j]) - x^* f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_{j} (b_j - a_j).$$

Ambil $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ dan $\sum_j (b_j - a_j) < \eta$, diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + n(b - a)\eta$$

$$\leq \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in AC(A_{ni})$. Karena $[a, b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$, maka $F \in AC[a, b]$.

Menurut *Definisi 2.16*, jika terdapat barisan $\{A_{ni}\}$ sehingga

$$[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$$

dan $F \in AC(A_{ni})$. Jadi, hal ini menunjukkan bahwa $F \in ACG[a,b]$.

Akibat 4.3 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dan F adalah primitif Dunfordnya, maka terdapat $\{A_{ni}\}$ merupakan barisan himpunan sehingga

$$[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$$

dan

$$F \in AC(A_{ni}), \forall\, n, i.$$

Bukti:

Berdasarkan *Teorema 4.8*, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk semua $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Misalkan $\delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Diberikan himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a,b]$ maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty-1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \le n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \le \frac{1}{n-1}$. Diperoleh $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.14*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_j, b_j]\}$, dengan $a_j, b_j \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_j, [a_j, b_j])\}$ merupakan partisi Perron di $[a, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| \le \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j) + f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x^* F([a_j, b_j]) - x^* f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_j (b_j - a_j).$$

Ambil $\eta \le \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ dan $\sum_j (b_j - a_j) < \eta$, diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + n(b-a)\eta$$

$$\leq \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in AC(A_{ni})$.

Teorema 4.9 (Aziz dkk., 2021)

Jika $f \in D_L[a,b]$ dan F merupakan primitif Dunfordnya, maka $F \in AC[a,b]$.

Bukti:

Diketahui $f \in D_L[a,b]$ dan fungsi primitif F.

Berdasarkan *Akibat 4.3*, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapat $\delta > 0$ pada $[a,b]$ dan untuk semua $A \subset [a,b]$ interval tertutup dan partisi McShane $\mathfrak{D} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \dots, (D_n, x_n)\}$ pada A maka diperoleh

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^*\big(f(x_i)\alpha(D_i) - F(D_i)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^* f(x_i)\alpha(D_i) - x^* F(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Misalkan $\delta(x) \leq 1$ dengan $\|x^*\|_X \leq 1$.

Diberikan himpunan A_{ni} dengan $n, i \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan semua $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right] \cap [a,b]$ maka diperoleh

$$A_{n1} = [a, a + \tfrac{1}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{1}{n}$$

$$A_{n2} = [a + \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{2}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{2}{n}$$

$$\vdots$$

$$A_{n\infty} = [a + \tfrac{\infty - 1}{n}, a + \tfrac{\infty}{n}] \text{ di mana } x \in a + \tfrac{\infty}{n}$$

dengan $\|f(x)\|_X \leq n$ dan $\frac{1}{n} < \delta(x) \leq \frac{1}{n-1}$. Diperoleh $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$.

Menurut *Definisi 2.14*, diberikan sebarang himpunan pada interval tertutup yang saling lepas $\{[a_j, b_j]\}$, dengan $a_j, b_j \in A_{ni}$.

Maka diperoleh $\{(a_j, [a_j, b_j])\}$ merupakan partisi Perron di $[a,b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| \leq \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|_X$$

Dengan memanipulasi $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\|$ maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j) + f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X$$

Lalu menggunakan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$= \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j]) - f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x^* F([a_j, b_j]) - x^* f(a_j)(b_j - a_j)\right\|_X + \|x^*\|_X \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f(a_j)(b_j - a_j)\right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n \sum_{j} (b_j - a_j).$$

Ambil $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ dan $\sum_j (b_j - a_j) < \eta$, diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} F([a_j, b_j])\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + n(b-a)\eta$$

$$\leq \varepsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $F \in AC(A_{ni})$. Karena $[a,b] = \bigcup_{\substack{i=1 \\ n=2}}^{\infty} A_{ni}$, maka $F \in AC[a,b]$.

4.2 Kajian Integrasi Nilai Keagamaan

Untuk membuktikan fungsi yang terintegral Dunford pada $[a, b]$ tentunya ada syarat atau batasan yang harus dipenuhi agar suatu fungsi dapat dikatakan terintegral Dunford. Sama halnya dengan bertakwa yang ada batasan-batasan tertentu agar seseorang dapat dikatakan bertakwa di mana Al-Quran memberikan batasan dan aturan untuk perilaku seseorang yang bertakwa. Baik integral Dunford maupu ketakwaan, terdapat prinsip bahwa hasil yang diinginkan baik dalam matematika maupun dalam kehidupan hanya bisa dicapai jika mengikuti aturan yang telah ditetapkan. Integral Dunford dan ketakwaan menekankan pentingnya kepatuhan pada syarat-syarat tertentu untuk mendapatkan hasil yang benar dan sesuai.

Pada bab sebelumnya telah dipaparkan bahwa bertakwa yaitu mereka yang senantiasa berbicara dengan baik dan benar. Karena semua perkataannya akan dicatat oleh Raqib dan Atid dan akan dipertanggung jawabkan di hadapan Allah kelak dan Allah bersama orang-orang yang bertakwa. Dan bab ini akan dibahas secara rinci batasan atau syarat bertakwa. Menurut Vera Referina Eka Putri (2021), ciri-ciri bertakwa telah dijelaskan oleh Allah dengan jelas dalam Al-Qur’an di Surah Al-Baqarah ayat 177:

لَيْسَ الْبِرَّ اَنْ تُوَلُّوْا وُجُوْهَكُمْ قِبَلَ الْمَشْرِقِ وَالْمَغْرِبِ وَلٰكِنَّ الْبِرَّ مَنْ اٰمَنَ بِاللّٰهِ وَالْيَوْمِ الْاٰخِرِ
وَالْمَلٰۤىِٕكَةِ وَالْكِتٰبِ وَالنَّبِيّٖنَ ۚ وَاٰتَى الْمَالَ عَلٰى حُبِّهٖ ذَوِى الْقُرْبٰى وَالْيَتٰمٰى وَالْمَسٰكِيْنَ وَابْنَ السَّبِيْلِۙ
وَالسَّاۤىِٕلِيْنَ وَفِى الرِّقَابِۚ وَاَقَامَ الصَّلٰوةَ وَاٰتَى الزَّكٰوةَ ۚ وَالْمُوْفُوْنَ بِعَهْدِهِمْ اِذَا عَاهَدُوْا ۚ وَالصّٰبِرِيْنَ فِى
الْبَأْسَاۤءِ وَالضَّرَّاۤءِ وَحِيْنَ الْبَأْسِۗ اُولٰۤىِٕكَ الَّذِيْنَ صَدَقُوْاۗ وَاُولٰۤىِٕكَ هُمُ الْمُتَّقُوْنَ

Artinya:
“Kebajikan itu bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat, melainkan kebajikan itu ialah (kebajikan) orang yang beriman kepada Allah, hari Akhir, malaikat-malaikat, kitab suci, dan nabi-nabi; memberikan harta yang dicintainya kepada kerabat, anak yatim, orang miskin, musafir, peminta-minta, dan (memerdekakan) hamba sahaya; melaksanakan salat; menunaikan zakat; menepati janji apabila berjanji; sabar dalam kemelaratan, penderitaan, dan pada masa

peperangan. Mereka itulah orang-orang yang benar dan mereka itulah orang-orang yang bertakwa."(Kemenag, 2019)

Pada ayat di atas menjelaskan orang yang bertakwa adalah mereka yang mengimani Allah, hari akhir, Malaikat Allah, Kitab Allah, dan seluruh Nabi serta memberikan sebagian rezekinya, melaksanakan sholat, membayar zakat, menepati janji dan sabar. Pada ayat di atas juga dijelaskan bahwa orang yang bertakwa adalah orang yang yakin dan percaya kepada rukun iman yang enam, dermawan, selalu taat mengerjakan sholat 5 waktu, berzakat, selalu menepati janji apabila membuat janji serta sabar.(Al-Sheikh, 2004)

Selain ayat di atas, banyak ayat di dalam Al-Qur'an yang menunjukkan syarat orang yang bertakwa. Salah satu contohnya adalah firman Allah pada Q.S. Ali Imron ayat 133-136 yang artinya:

"Dan bersegeralah kamu kepada ampunan dari Tuhanmu dan kepada surga yang luasnya seluas langit dan bumi yang disediakan untuk orang-orang yang bertaqwa,(yaitu) orang-orang yang menafkahkan (hartanya) baik diwaktu lapang maupun diwaktu sempit, dan orang-orang yang menahan amarahnya dan mema'afkan (kesalahan) orang. Allah menyukai orang-orang yang berbuat kebajikan. Dan (juga) orang-orang yang apabila mengerjakan perbuatan keji atau menganiaya diri sendiri, mereka ingat akan Allah, lalu memohon ampun terhadap dosa-dosa mereka dan siapa lagi yang dapat mengampuni dosa selain darpada Allah? Dan mereka tidak meneruskan perbuatan kejinya itu, sedang mereka mengetahui. Mereka itu balasannya ialah ampunan dari Tuhan mereka dan surga yang didalamnya mengalir sungai-sungai, sedang mereka kekal didalamnya; dan itulah sebaik-baik pahala orang yang beramal."(Kemenag, 2019)

Dari ayat di atas, dapat dipahami bahwa syarat orang yang bertakwa adalah menginfakkan hartanya di jalan kebaikan, mampu menahan amarah atau emosinya, memaafkan kesalahan orang lain, segera ingat Allah dan selalu bertaubat atas segala yang kesalahan yang telah diperbuat. Dan di akhiri dengan penjelasan bahwa orang-orang yang seperti itu akan mendapat ampunan dari Allah dan memasuki surga Allah yang berisi sungai-sungai di dalamnya.(Al-Sheikh, 2004)

Jadi, berdasarkan penjelasan dari Surah Al-Baqarah ayat 177 dan Surah Ali Imron ayat 133-136 di atas, sampai pada kesimpulan bahwa batasan atau syarat yang harus dipenuhi agar orang tersebut dapat dikatakan bertakwa adalah sebagai berikut:

1. Beriman, yaitu orang-orang yang percaya dan yakin terhadap enam rukun iman, yakni Iman kepada Allah, Iman kepada Malaikat Allah, Iman kepada Kitab Allah, Iman kepada Nabi dan Rasul Allah, Iman kepada hari akhir, dan Iman kepada qadha dan qadar.
2. Mengerjakan sholat dan menunaikan zakat, yaitu orang-orang yang senantiasa menjaga dan menjalankan kewajiban sebagai muslim sebagaimana yang tercantum dalam rukun islam.
3. Selalu berderma secara terus menerus, yaitu orang-orang yang mempunyai sifat dermawan kepada sesama manusia terutama kepada orang-orang yang membutuhkan.
4. Memiliki sifat sabar dan ikhlas, yaitu mereka yang dapat menerima segala sesuatu yang telah ditakdirkan oleh Allah dalam hidupnya.
5. Menepati janji jika berjanji, yaitu orang-orang yang menepati janjinya karena janji adalah hutang yang harus dibayar tanpa memandang situasi dan kondisi.
6. Senantiasa selalu ingat Allah, karena manusia diwajibkan untuk selalu mengingat Allah setiap saat, apapun keadaannya. Karena manusia diciptakan untuk beribadah kepada Allah.

Oleh karena itu, orang yang memenuhi batasan-batasan atau syarat-syarat dari orang yang bertakwa akan menerima balasan yang sesuai dengan janji Allah dalam Al-Qur’an dan hadist, serta dapat dikatakan orang tersebut bertakwa sesuai firman Allah tentang batasan atau syarat orang bertakwa dalam Al-Qur’an. Sama halnya dengan integral Dunford, fungsi yang akan diintegralkan harus memenuhi syarat-syarat tertentu agar hasilnya valid. Integral Dunford menjelaskan bahwa syarat fungsi f dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$, apabila untuk setiap $x^* \in X^*$, dan $x^*(f): [a,b] \to R$ terintegral Lebesgue dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a,b]$ terdapat $x^{**} \in X^{**}$ maka diperoleh $x^{**}_{(f,A)}(x^*) = \int_A x^*(f)$ untuk setiap $x^* \in X^*$. Maka fungsi f dikatakan terintegral Dunford pada $[a,b]$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap fungsi yang terintegral Dunford maka fungsi primitifnya akan kontinu, kontinu mutlak, variasi terbatas dan generalisasinya terbukti. Penelitian ini juga mengkaji hubungan antara takwa dan integral Dunford. Ciri-ciri takwa yang mengharuskan mereka beriman, mengerjakan sholat, dermawan, sabar, menepati janji dan selalu ingat Allah memiliki kesamaan dengan kondisi yang harus dipenuhi oleh fungsi primitif yang terintegral Dunford pada $[a, b]$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya berfokus pada sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford pada interval $[a, b]$. Diharapkan pada penelitian selanjutnya sifat-sifat fungsi primitif pada integral Dunford di interval $[a, b]$ dapat diperluas ke dalam ruang dan interval lain.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Sheikh, A. bin M. bin A. B. I. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir*. Pustaka Imam asy-Syafií.

Aziz, A., Solikhin, Sumanto, Y. D., & U, R. H. S. (2021). Primitive Function of the Dunford Integral. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1943/1/012134

Baqi, M. F. A. (1959). Al-Lu'lu wal Marjan. In A. F. B. Taqiy (Ed.), *Kompas Gramedia* (1st ed., Vol. 13, Issue 1). PT Elex Media Komputindo.

Christensen. (2010). *Function, Spaces, and Expansions Mathematics Tools in Physics and Engineering*. Springer Science+Business Media LLC.

Hong, D., Wang, J., & Gardner, R. (2004). *Real Analysis With an Introduction to Wavelets*. Academic Press.

Kemenag, Q. (2019). *Qur'an Kemenag*. Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications* (1st ed.). Library of Congress Cataloging in Publication Data.

Lee, P. Y. (2011). *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. https://doi.org/10.1142/0845

Lesnussa, Y. A., Junus Wattimanela, H., & Talakua, W. (2012). Sifat-Sifat Dasar Perluasan Integral Lebesgue (Basic Properties Of Extended Lebesgue Integral). *Jurnal Barekeng*, *6*(1), 37–44.

Pirade, S., Manurung, T., & Titaley, J. (2017). Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real. *D'CARTESIAN*, *6*(1), 7. https://doi.org/10.35799/dc.6.1.2017.14987

Protter, M. H. (1998). *Basic Elements of Real Analysis* (S. Axler, F. W. Gehring, & K. A. Ribet (eds.)). Springer.

Putri, V. R. E. (2021). *Karakteristik Takwa Dalam Al-Qur'an Surat Al-Baqarah Ayat 2-5 Dan Implikasinya Terhadap Tujuan Pendidikan Islam*. Institut Agama Islam Negeri Curup.

Russell A. Gordon. (1994). *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock* (J. E. Humphreys, R. C. Kirby, & Lance W. Small (eds.)). Library of Congress Cataloging in Publication Data.

Rynne, B. P., & Youngson, M. A. (2001). Linear Function Analysis. In *Springer Undergraduate Mathematics Series*. Springer.

Schwabik, S., & Guoju, Y. (2005). Topics In Banach Space Integration. In *Series In real Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Sinay, L. J. (2012). Sifat-Sifat Dasar Integral Henstock. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *6*(2), 7–15. https://doi.org/10.30598/barekengvol6iss2pp7-15

Solikhin, & Aziz, A. (2022). *Integral Dunford Fungsi Bernilai Banach* (Y. Sumanto, T. S. Hariyoto, & O. W. Arditya (eds.); 1st ed., Vol. 1). Penerbit Fastindo.

Solikhin, Aziz, A., Sumanto, Y. D., & Su, R. H. (2021). A convergence theorem on the dunford integral. *Journal of Physics: Conference Series*, *1943*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1943/1/012124

Solikhin, S., Hariyanto, S., Sumanto, Y. D., & Aziz, A. (2019). Norma Operator Pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*. https://doi.org/10.14710/jfma.v2i2.42

Solikhin, S., Hariyanto, S., Sumanto, Y. D., & Aziz, A. (2020). Operator Adjoint Pada Ruang Fungsi Terintegral Dunford. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*. https://doi.org/10.14710/jfma.v2i2.42

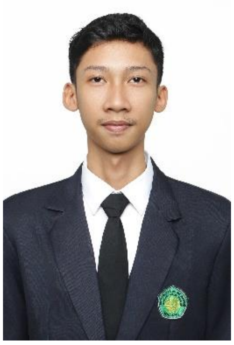
Susila, I. N. (2008). *Kalkulus Terjemahan* (L. Simarmata (ed.); 9 Edition). Penerbit Erlangga.

Toheri. (2008). *Kalkulus Integral*. Eduvision.

Vasile I. Istratescu. (1981). *Introduction to Linier Operator Theory* (E. J. Taft & E. Hewitt (eds.); 1st ed.). Library of Congress Cataloging in Publication Data.

Zakir, M. (2015). Sifat-sifat Ruang Banach Hom(U,V). *Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi*, *11*(2), 115–121.

RIWAYAT HIDUP



Muhamad Mehdi Mahdavikia, lahir di Jombang pada tanggal 25 Maret 2001. Putra pertama dari dua bersaudara dari Bapak Baharul Ulum dan Ibu Tri Ismawati. Ia dilahirkan dan dibesarkan di rumah sederhana yang terletak di Jl. Raya Brantas RT.03 RW.01 Dusun Tapen Desa Tapen Kecamatan Kudu Kabupaten Jombang.

Laki-laki dengan sapaan Mehdi ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari taman kanak-kanak di RA Muslimat Tapen yang lulus pada tahun 2007, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di MI Darul Ulum Tapen. Setelah lulus pada tahun 2013, ia melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Ploso yang lulus pada tahun 2016. Lalu melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 3 Jombang dan lulus pada tahun 2019. Pada tahun yang sama ia tercatat sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Laki-laki asal Jombang ini aktif mengikuti organisasi. Ia mengikuti organisasi di antaranya IPNU Desa Tapen dan menjabat sebagai Bendahara pada Tahun 2018 hingga 2020. GP ANSOR Desa Tapen menjabat sebegai Bendahara pada tahun 2022 hingga 2024. Dan pada tahun 2024 hingga sekarang menjabat sebagai Sekretaris GP ANSOR Desa Tapen.

Mehdi adalah seorang individu yang berdedikasi, adaptif, dan terus berusaha meningkatkan keahliannya melalui berbagai pengalaman kerja dan pelatihan yang ia ikuti. Ia telah mengikuti beberapa pelatihan, di antaranya KKN UIN Malang pada Desember 2021, magang di bidang mutasi di BKPSDM Kota Malang pada tahun 2022, PKD ANSOR pada Desember 2023, dan Pelatihan Konten Kreator Desa Berdaya 2024 di Batu pada tahun 2024, dan ditunjuk sebegai petugas peta oleh BAPENDA Kabupaten Jombang pada tahun 2024.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Muhamad Mehdi Mahdavikia
NIM	:	19610072
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Sifat-Sifat Fungsi Primitif pada Integral Dunford
Pembimbing I	:	Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Pembimbing II	:	Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	9 Mei 2023	Konsultasi Kajian Integrasi	2.
3.	19 Mei 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	3.
4.	23 Mei 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	4.
5.	6 Juni 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	5.
6.	7 Juni 2023	ACC Seminar Proposal	6.
7.	2 April 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	7.
8.	1 September 2024	Konsultasi Bab IV	8.
9.	17 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	9.
10.	27 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	10.
11.	29 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	29 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	12.
13.	30 Oktober 2024	ACC Seminar Hasil	13.
14.	20 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	14.
15.	21 November 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	15.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	9 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	16.
17.	23 Desember 2024	ACC Keseluruhan	17.

Malang, 23 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005