

TEOREMA TITIK TETAP SCHAUDER

SKRIPSI

**OLEH:
MUHAMMAD FITHRULLAH
NIM. 19610102**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

TEOREMA TITIK TETAP SCHAUDER

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
MUHAMMAD FITHRULLAH
NIM. 19610102**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

TEOREMA TITIK TETAP SCHAUDER

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Fithrullah
NIM. 19610102

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 20 November 2024

Dosen Pembimbing I



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dosen Pembimbing II



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NI PPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

TEOREMA TITIK TETAP SCHAUDER

SKRIPSI

Oleh

Muhammad Fithrullah

NIM. 19610102

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 23 Desember 2024

Ketua Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Dian Maharani, M.Si.

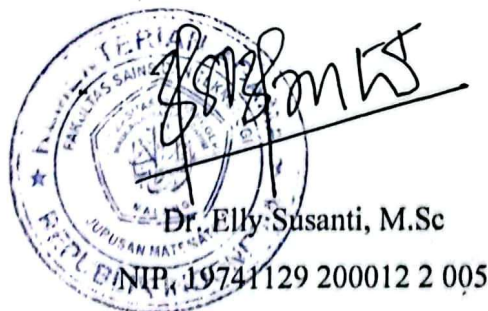
Anggota Penguji 2 : Dr. Elly Susanti, M.Sc.

Anggota Penguji 3 : M. Nafie Jauhari, M.Si.



Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Fithrullah

NIM : 19610102

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Teorema Titik Tetap Schauder

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2024

Yang membuat pernyataan,



Muhammad Fithrullah

NIM. 19610102

MOTO

“Tidak ada yang sempurna, Jadi cukup lakukan yang terbaik”

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Almh. Ibunda tersayang Ibu Efi Susanti yang selalu menjadi sumber penyemangat walau dalam situasi sulit, dan juga untuk ayah tercinta Bapak Syamsudin S,pd., yang selalu dengan Ikhlas mendoakan , memberi nasihat dan selalu menyemangati dengan tulus.

KATA PENGANTAR

Puji syukur selalu terpanjatkan kepada Allah SWT. atas ridho dan rahmat-Nya yang memberikan semangat dan kemudahan sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Rasul Muhammad SAW. yang merupakan teladan penuntun jalan kebaikan.

Tidak bisa dipungkiri bahwa butuh usaha yang keras dalam penyelesaian pengerjaan skripsi ini. Namun karya ini tidak akan selesai tanpa dukungan dan bantuan dari orang-orang tercinta.

1. Terima kasih kepada bapak Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Terima kasih kepada ibu Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Terima kasih kepada ibu Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim sekaligus sebagai dosen pembimbing I yang selalu membimbing dan memberikan pengarahan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Terima kasih kepada bapak M. Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang selalu siap membimbing dan mengarahkan dalam proses penyusunan skripsi ini.
5. Terima kasih kepada bapak Ach. Nasciuddin, M.A., selaku dosen wali yang selalu memberikan saran dan nasihat terkait perkembangan akademik saat masa perkuliahan.
6. Terima kasih kepada Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang memberikan banyak pemahaman dan ilmu baru bagi penulis yang akan berguna di masa yang akan datang.
7. Terima kasih kepada seluruh keluarga tercinta ayah, ibu, adik-adik tercinta yang menjadi sumber penyemangat, seluruh keluarga di kampung yang selalu mendukung.

8. Terima kasih kepada seluruh teman-teman SOULMATH'19 yang selalu menyemangati dan selalu mendukung selama masa perkuliahan.

Semoga skripsi yang penulis selesaikan ini dapat memberikan manfaat dan memberikan inspirasi kepada pembaca *Aamiin Yaa Rabbal 'Alamiin*. Penulis menyadari skripsi ini kurang bahkan jauh dari kata sempurna, oleh sebab itu penulis dengan senang hati menerima saran dan kritik yang bersifat membangun. Demikian yang dapat penulis sampaikan kurang lebihnya mohon maaf. *Wassalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh*

Malang, 23 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO.....	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
ABSTRAK	xi
ABSTRACT	xii
مستخلص البحث	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah	4
BAB II KAJIAN TEORI	5
2.1 Teori Pendukung.....	5
2.1.1 Ruang Metrik.....	5
2.1.2 Himpunan Convex.....	6
2.1.3 Convex Hull	7
2.1.4 Fungsi Convex dan Concave.....	8
2.1.5 Fungsi Quasiconcave dan Quasiconvex.....	11
2.1.6 Vektor dan Ruang Vektor	12
2.1.7 Ruang Topologi.....	14
2.1.8 Ruang Banach	14
2.1.9 Multi-pemetaan(Multimap).....	16
2.1.10 Barisan Cauchy	17
2.1.11 Teorema Titik Tetap.....	19
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits.....	20
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung	22
BAB III METODE PENELITIAN	24
3.1 Jenis Penelitian	24
3.2 Pra Penelitian.....	24
3.3 Tahapan Penelitian.....	24
BAB IV PEMBAHASAN.....	26
4.1 Pembuktian Teorema Titik Tetap Schauder	26
4.2 Kajian Integrasi Nilai Agama	31
BAB V PENUTUP	35
5.1 Kesimpulan.....	35
5.2 Saran	35
DAFTAR PUSTAKA	37
RIWAYAT HIDUP	38

ABSTRAK

Fithrullah, Muhammad. 2024. **Teorema Titik Tetap Schauder**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M. Sc. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Titik Tetap, Multi-Pemetaan, Schauder.

Penelitian ini membahas mengenai pembuktian teorema titik tetap Schauder. Misalkan X merupakan himpunan bagian kompak konveks tak kosong dari ruang norm linier E dan misalkan $T: X \rightarrow X$ merupakan sebuah pemetaan kontiniu maka T memiliki titik tetap di X . Dalam penelitian ini, akan digunakan pendekatan studi pustaka untuk menganalisis konsep dan membuktikan teorema titik tetap Schauder. Beberapa konsep yang mendukung dan memudahkan pembuktian titik tetap Schauder seperti multi-pemetaan, convex hull, cuasiconcave, dll. Sebagaimana yang dikemukakan oleh S.Park, menjadi dasar utama dalam pembahasan ini. Hasil penelitian menunjukkan bahwa teorema titik tetap schauder dapat dibuktikan melalui pendekatan yang lebih sederhana.

ABSTRACT

Fithrullah, Muhammad. 2024. **Schauder's Fixed Point Theorem**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M. Sc. (II) M. Nafie Jauhari, M.Sc.

Keywords: Fixed Point, Multi-Map, Schauder.

This study discusses the proof of Schauder's fixed point theorem. Suppose X is a non-empty convex compact subset of a linear norm space E and suppose $T: X \rightarrow X$ is a continuous mapping then T has a fixed point in X . In this study, a literature study approach will be used to analyze the concept and prove Schauder's fixed point theorem. Several concepts that support and facilitate the proof of Schauder's fixed point such as multi-mapping, convex hull, cuasiconcave, etc. as proposed by S. Park, are the main basis for this discussion. The results of the study show that the Schauder fixed point theorem can be proven through a simpler approach.

مستخلص البحث

فطر الله، محمد. ٢٠٢٤. نظرية النقطة الثابتة لشودر. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) د، إيلي سوسانتي، الماجستير (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير

الكلمات المفتاحية: النقطة الثابتة، الخرائط المتعددة، شودر

ناقشت هذه الدراسة إثبات نظرية النقطة الثابتة لشودر. افترض أن X هي مجموعة فرعية محدبة مضغوطة غير فارغة من الفضاء المعياري الخطي E وافترض أن $X \leftarrow X : T$ عبارة عن التعيين المستمر، فإن T لها نقطة ثابتة في X . في هذه الدراسة، تم استخدام نهج الدراسة الأدبيات لتحليل المفهوم وإثبات نظرية النقطة الثابتة لشودر. العديد من المفاهيم التي تدعم وتسهل إل إثبات نقطة ثابتة لشودر مثل التعيين المتعدد، والغلاف المحدب، والتقعر السداسي، وما إلى ذلك كما اقترح $S. Park$ ، هي الأساس الرئيسي لهذه المناقشة. ظهرت نتائج الدراسة أنها تمكن إثبات نظرية النقطة الثابتة لشودر من خلال النهج الأبسط.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teorema titik tetap merupakan salah satu konsep dalam analisis matematika yang memiliki aplikasi luas di berbagai bidang, termasuk teori persamaan diferensial, teori optimisasi, dan ekonomi. Konsep ini berkembang melalui kontribusi penting dari beberapa matematikawan terkemuka, seperti Banach, Brouwer, dan Schauder, yang masing-masing memperkenalkan pendekatan dan generalisasi yang relevan.

Teorema titik tetap Banach, juga dikenal sebagai Banach Fixed-Point Theorem atau Contraction Mapping Theorem, diperkenalkan oleh Stefan Banach pada tahun 1922. Teorema ini menyatakan bahwa setiap pemetaan kontraktif pada ruang metrik lengkap memiliki tepat satu titik tetap.

Teorema titik tetap Brouwer merupakan hasil signifikan lain yang diperkenalkan oleh L.E.J. Brouwer pada tahun 1912. Berbeda dengan Banach, Brouwer berfokus pada ruang-ruang vektor topologi berhingga dimensi. Teorema ini menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu yang memetakan bola tertutup dalam ruang Euclides ke dirinya sendiri memiliki setidaknya satu titik tetap.

Teorema titik tetap Schauder diperkenalkan pada 1930. Teorema ini merupakan pengembangan lebih lanjut yang dilakukan oleh Juliusz Schauder. Schauder memperluas gagasan Brouwer ke ruang vektor topologi berdimensi tak hingga.

Pada skripsi ini akan diberikan sebuah pembuktian sederhana dari theorema titik tetap Schauder dengan mengaplikasikan penelitian Park's mengenai teorema titik tetap yaitu:

Misalkan (X, D) merupakan ruang convex dan $P: X \rightarrow D$ sebuah multimap. Jika terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ subset terbuka tak kosong $G_i \subset P^-(z_i)$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga

$$co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$$

Maka pemetaan $coP: X \rightarrow X$ memiliki sebuah titik tetap $x_n \in X$.

Dalam teorema titik tetap Schauder, konsep jarak berperan penting dalam konsep kompaksi dan kontinuitas.

Allah SWT. berfirman dalam surah Al-Anbiya ayat 30:

أَوَلَمْ يَرِ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ۝ ٣٠

Artinya:

“Apakah orang-orang kafir tidak mengetahui bahwa langit dan bumi, keduanya, dahulu menyatu, kemudian Kami memisahkan keduanya dan Kami menjadikan segala sesuatu yang hidup berasal dari air? Maka, tidakkah mereka beriman?”(Kemenag, 2024)

Dalam ayat ini Allah mengungkapkan bahwa kaum musyrikin dan kafir Mekah tidak memperhatikan keadaan alam ini, dan tidak memperhatikan peristiwa-peristiwa yang terjadi di alam yang luas ini, padahal dari berbagai peristiwa yang ada di alam ini dapat diperoleh bukti-bukti tentang adanya Allah serta kekuasaan-Nya yang mutlak. Langit dan bumi yang dulunya merupakan suatu kesatuan yang padu, kemudian Allah pisahkan keduanya. Bumi sebelum menjadi tempat hidupnya berbagai makhluk hidup adalah sebuah satelit yaitu benda angkasa yang mengitari

matahari. Satelit bumi yang semula panas sekali ini karena berputar terus menerus maka lama kelamaan menjadi dingin dan berembun. Embun yang lama menjadi gumpalan air. Inilah yang menjadi sumber kehidupan makhluk.(tafsir kemenag)

Dari tafsiran tersebut bisa dilihat bahwa Allah SWT. menciptakan jarak antara langit dan bumi, Dimana pada awalnya langit dan bumi adalah satu kesatuan yang berarti bahwa tidak terdapat jarak antara langit dan bumi kemudian Allah pisahkan keduanya . Dalam penafsiran tersebut Allah SWT. menunjukkan kekuasaan-Nya terhadap alam semesta dan mengingatkan bahwa kita sebagai manusia tidak diperbolehkan untuk bersifat sombong dan mengingatkan kepada diri kita sendiri bahwa kita bukanlah apa-apa dibandingkan kekuasaan Allah yang tidak bisa diukur.

1.2 Rumusan Masalah

Menurut latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dapat diteliti dalam penelitian ini adalah “Bagaimana pembuktian Teorema Titik Tetap Schauder?”

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini akan difokuskan untuk melengkapi pembuktian penelitian sebelumnya mengenai teorema titik tetap dengan tujuan menyempurnakan isi penelitian tersebut.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagi penulis, dapat menambah wawasan dan juga melatih pola pikir penulis dalam menyelesaikan masalah pembuktian dalam teorema titik tetap Schauder.
2. Bagi pembaca, dapat menambah wawasan dan mempermudah memahami secara lengkap mengenai teorema titik tetap Schauder.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya membahas mengenai pembuktian dari teorema titik tetap Schauder yang merupakan generalisasi dari theorema titik tetap Browner.

Teorema Titik Tetap merupakan sebuah teori yang diperkenalkan pada tahun 1922 oleh seorang matematikawan asal polandia Bernama Stefan Banach. Teorema ini sangat populer dan banyak matematikawan yang berusaha menyempurnakannya. Salah satunya ialah Browner dan Schauder

Teorema titik-tetap Brouwer menyatakan bahwa setiap transformasi kontinu dari cakram tertutup (termasuk batas) ke dalam dirinya sendiri meninggalkan setidaknya satu titik tetap. Teorema ini juga berlaku untuk transformasi kontinu titik-titik pada interval tertutup, dalam bola tertutup, atau dalam himpunan dimensi abstrak yang lebih tinggi yang analog dengan bola.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada sub-Bab Teori Pendukung penulis akan menjelaskan mengenai materi-materi yang harus dipahami agar dapat membuktikan Theorema titik tetap schauder.

2.1.1 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan himpunan yang mempunyai definisi jarak antara elemen. Metrik pada X merupakan suatu fungsi yang didefinisikan pada X yang mendefinisikan jarak antara 2 titik pada X . Ruang metrik adalah konsep yang penting dalam analisis.

Definisi 2.1(Deepak, 2021)

Ruang metrik adalah sebuah himpunan X dengan sebuah metrik $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ sehingga $\forall x, y, z \in X$, d memenuhi persamaan berikut:

1. $d(x, y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk semua $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk semua $x, y, z \in X$

Himpunan X Bersama dengan metrik d disebut ruang metrik dan ditulis (X, d) . Secara intuitif $d(x, y)$ menginterpretasikan jarak dari x ke y .

Contoh.

Fungsi $d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ yang di definisikan oleh $d(x, y) = |x - y|$ adalah metrik pada $\mathbb{Q}$, sehingga $(\mathbb{Q}, d)$ adalah ruang metrik.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$. Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$, maka

$$d(x, y) = |x - y| \geq 0 \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{Q}$$

2. Akan ditunjukkan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

($\Leftarrow$) jika $d(x, y) = 0$ maka $x = y$. Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$, $d(x, y) = |x - y| = 0$ maka $x = y$

($\Rightarrow$) jika $x = y$ maka $d(x, y) = 0$. Ambil $x, y \in \mathbb{Q}$ dengan $x = y$ maka $d(x, y) = |x - y| = 0$ jadi, $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

2.1.2 Himpunan Convex

Himpunan convex adalah himpunan dalam ruang vektor di mana, untuk setiap dua titik yang terdapat di dalamnya, seluruh garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut juga tetap berada di dalam himpunan tersebut.

Definisi 2.2(Tan, 2019)

Sebuah himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan *convex* jika $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$ untuk setiap $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema 2.2(Tan, 2019)

Misalkan $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan himpunan *convex* untuk setiap

$i \in I$, Dimana I merupakan himpunan *index* sembarang. Maka himpunan

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i \text{ convex.}$$

Bukti:

Misalkan $x, y \in C$ dan $\lambda \in [0,1]$. Maka $x, y \in C_i$ untuk setiap $i \in I$ dan karena C_i *convex* maka $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_i$ untuk setiap $i \in I$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} C_i = C.$$

2.1.3 Convex hull

Himpunan konveks adalah bentuk yang mendasari konsep convex hull, karena convex hull adalah himpunan convex terkecil yang mengandung himpunan tertentu. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Convex hull dari S dinotasikan dengan coS , adalah irisan semua himpunan convex yang memuat S , atau ekuivalennya, himpunan convex terkecil yang memuat S . Definisi ini dapat dilihat sebagai karakterisasi coS dari luar, tetapi tidak langsung jelas bagaimana elemen dalam coS berhubungan dengan elemen dalam S . Jika himpunan awal sudah convex, maka convex hull nya adalah himpunan itu sendiri. Namun, jika himpunan awal tidak convex, maka convex hull nya adalah perluasan minimal yang menjadikannya konveks. Teorema berikut ini memberikan jawaban untuk pertanyaan ini, dan memberikan karakterisasi coS dari dalam.

Teorema 2.3(Tan, 2019)

Untuk setiap $S \subseteq \mathbb{R}^n$, coS adalah himpunan dari semua kombinasi *convex* dari elemen-elemen di S .

Bukti:

Misalkan C merupakan notasi dari semua kombinasi *convex* dari elemen-elemen di S . Karena semua elemen di S ada di dalam coS maka $C \subset coS$. Di sisi lain, ambil setiap $y, z \in C$. Disana terdapat $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_n \in S$ dan scalar $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \lambda_n \geq 0$ sehingga

$$y = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j, z = \sum_{j=m+1}^n \lambda_j x_j, \text{ dan } \sum_{j=1}^m \lambda_j = \sum_{j=m+1}^n \lambda_j = 1.$$

Untuk setiap $\mu \in [0,1]$, diperoleh

$$(1 - \mu)y + \mu z = (1 - \mu) \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j + \mu \sum_{j=m+1}^n \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^n \Lambda_j x_j$$

Dengan

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j = \sum_{j=1}^m (1 - \mu) \lambda_j + \sum_{j=m+1}^n \mu \lambda_j = (1 - \mu) + \mu = 1$$

Sehingga C merupakan himpunan *convex*. Dan juga, $S \subset C$ dari definisi C dan $coS \subset C$.

2.1.4 Fungsi Convex dan Concave

Fungsi *convex* (cembung) dan *concave* (cekung) adalah dua jenis fungsi yang memiliki sifat khusus yang berkaitan dengan bentuk grafiknya dan perilaku nilai-nilainya. Memahami perbedaan antara kedua jenis fungsi ini sangat penting dalam analisis matematis, optimasi, dan berbagai aplikasi lainnya.

Fungsi *convex* dan *concave* adalah konsep dasar dalam analisis matematis yang membantu kita memahami sifat dan perilaku fungsi.

Definisi 2.4.1 (Kythe, 2018)

Sebuah fungsi $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di definisikan pada sebuah himpunan *conveks* S merupakan *concave* jika untuk setiap dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ terdapat:

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

f dikatakan *strictly concave* jika untuk setiap dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in (0,1)$ terdapat :

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) > \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

Definisi 2.4.2 (Kythe, 2018)

Sebuah fungsi $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di definisikan pada sebuah himpunan *convex* S merupakan *convex* jika untuk setiap dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ terdapat :

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

f dikatakan *strictly convex* jika untuk setiap dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in (0,1)$ terdapat:

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

Contoh:

Misalkan $S = [0, \infty)$ dan anggap $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$ maka f dikatakan fungsi *concave* dan g dikatakan fungsi *convex*.

Teorema 2.4(Kythe, 2018)

Misalkan $f_1, f_2, \dots, f_n$ merupakan fungsi *concave* (*convex*), dan misalkan $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$. Maka, kombinasi linier

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

Juga merupakan *concave*(*convex*).

Bukti:

misalkan dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan setiap $\lambda \in [0, 1]$. Maka

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) &= \alpha_1 f_1(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) + \dots + \alpha_n f_n(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \\ &\geq \alpha_1 (\lambda f_1(x^1) + (1 - \lambda)f_1(x^2)) + \dots + \alpha_n (\lambda f_n(x^1) + (1 - \lambda)f_n(x^2)) \\ &= \lambda (\alpha_1 f_1(x^1) + \dots + \alpha_n f_n(x^1)) + (1 - \lambda) (\alpha_1 f_1(x^2) + \dots + \alpha_n f_n(x^2)) \\ &= \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) \end{aligned}$$

Ketaksamaan terakhir dari baris pertama dan awal dari baris ke dua berlaku karena semua $f_j (j = 1, \dots, n)$ merupakan fungsi *concave* sehingga $f_j(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda f_j(x^1) + (1 - \lambda)f_j(x^2) (j = 1, \dots, n)$ dan juga karena $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$. Sehingga terbukti bahwa

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2)$$

Dan karena itu kombinasi linier dari fungsi *concave* adalah *concave*.

2.1.5 Fungsi Quasiconcave dan Quasiconvex

Fungsi quasiconvex dan quasiconcave merupakan jenis fungsi yang lebih luas dibandingkan fungsi *convex* dan *concave*, namun memiliki karakteristik serupa terkait bentuk kurvanya dalam ranah optimisasi.

Definisi 2.5(Vilà, 2022)

sebuah fungsi $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan pada sebuah himpunan convex S adalah *quasiconcave* jika untuk setiap dua titik $x^1, x^2 \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ diperoleh:

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \min\{f(x^1), f(x^2)\}$$

Sama hal nya, fungsi f merupakan *cuasiconvex* f untuk setiap dua titik x^1, x^2 dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ maka terdapat

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}$$

Bukti:

Misalkan $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan pada himpunan convex S . Asumsikan bahwa kontur atas himpunan $U_f(\bar{x})$ adalah convex untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}$ dibutuhkan untuk membuktikan bahwa untuk setiap dua titik $x, y \in S$ dan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ diperoleh:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

Perhatikan setiap dua titik $x, y \in S$ dan ambil $\bar{x} = \min\{f(x), f(y)\} = f(x)$ itu berarti bahwa

$$f(x) = \bar{x} \Rightarrow x \in U_f(\bar{x})$$

Juga, karena $\min\{f(x), f(y)\} = f(x)$ maka diperoleh $f(y) \geq f(x) = \bar{x}$ maka diperoleh

$$f(y) \geq \bar{x} \Rightarrow y \in U_f(\bar{x})$$

Karena diasumsikan $U_f(\bar{x})$ merupakan sebuah himpunan convex maka diperoleh $x \in U_f(\bar{x})$ dan $y \in U_f(\bar{x}) \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in U_f(\bar{x})$ untuk setiap $\lambda \in [0,1]$

Maka, berdasarkan definisi dari himpunan kuntor atas, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U_f(\bar{x})$ yang berarti bahwa

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \bar{x}$$

Karena $\bar{x} = \min\{f(x), f(y)\}$, disimpulkan untuk setiap $\lambda \in [0,1]$ maka diperoleh

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

2.1.6 Vektor dan Ruang Vektor

Vektor direpresentasikan sebagai segmen berarah. Vektor ditentukan oleh panjang dan arah. vektor adalah elemen dari ruang vektor, yang merupakan himpunan objek yang bisa dijumlahkan dan dikalikan dengan skalar (bilangan real atau kompleks) sesuai aturan tertentu. Vektor memiliki komponen-komponen yang menunjukkan posisi atau arah dalam suatu ruang dan didefinisikan oleh panjang (atau besar) dan arah. Ruang vektor, di sisi lain, adalah kumpulan semua vektor yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Secara formal, ruang vektor adalah himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi: penjumlahan vektor dan perkalian skalar.

Definisi 2.6.1(Meyer & Stewart, 2023)

Misalkan $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ merupakan sebuah vektor pada $\mathbb{R}^n$. Penjumlahan dari dua vektor tersebut didefinisikan sebagai vektor

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

Untuk sebuah scalar c , perkalian dengan scalar didefinisikan sebagai vektor

$$cu = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).$$

Dan juga untuk negatif u didefinisikan sebagai vektor

$$-u = (-1)(u_1, u_2, \dots, u_n) = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

Begitu juga untuk selisih

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n).$$

Definisi 2.6.2(Isaiah L, Bruno N, 2018)

Sebuah ruang vektor $\mathbb{F}$ pada himpunan V bersama dengan operasi penjumlahan $V \times V \rightarrow V$ dan perkalian scalar $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$. Agar himpunan tersebut menjadi ruang vektor, harus memenuhi beberapa aksioma,

1. Sifat komutatif: $u + v = v + u$ untuk semua $u, v \in V$;
2. Sifat asosiatif: $(u + v) + w = u + (v + w)$ dan $(ab)v + a(bv)$ untuk semua $u, v, w \in V$ dan $a, b \in \mathbb{F}$;
3. Identitas Penjumlahan: terdapat elemen $0 \in V$ sehingga $0 + v = v$ untuk semua $v \in V$;
4. Invers Penjumlahan: untuk setiap $v \in V$, terdapat elemen $w \in V$ sehingga $v + w = 0$;
5. Identitas perkalian: $1v = v$ untuk setiap $v \in V$;
6. Sifat distributive: $a(u + v) = au + av$ dan $(a + b)u = au + bu$ untuk semua $u, v \in V$ dan $a, b \in \mathbb{F}$

2.1.7 Ruang Topologi

Ruang topologi adalah himpunan yang dilengkapi dengan struktur topologi, yang terdiri dari koleksi himpunan-himpunan terbuka yang memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti tertutup terhadap gabungan dan irisan, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu seperti kelengkapan dan selimut.

Definisi 2.7(James Munkres, 2000)

Sebuah topologi $\mathcal{T}$ pada sebuah himpunan X merupakan Kumpulan dari subset pada X sehingga

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Jika $O_a \in \mathcal{T}$ untuk setiap $a \in A$, maka $\bigcup_{a \in A} O_a \in \mathcal{T}$
3. Jika $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, maka $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}$.

Sebuah himpunan $O \subseteq X$ dikatakan terbuka jika $O \in \mathcal{T}$. maka $(X, \mathcal{T})$ disebut sebagai ruang topologi.

2.1.8 Ruang Banach

Ruang Banach merupakan ruang vektor dengan metrik yang memungkinkan penghitungan panjang vektor dan lengkap dalam arti bahwa barisan Chauchy vektor selalu konvergen ke limit yang didefinisikan di dalam ruang.

Definisi 2.8 (Showalter, 1996)

Ruang Banach merupakan ruang linier bernorma yang merupakan ruang metrik lengkap terhadap metrik yang diturunkan dari normanya.

Contoh 2.8

ruang $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{C}^n$ adalah ruang lengkap

Ruang $\mathbb{R}^n$ diperoleh jika kita mengambil himpunan dari setiap n -tupel berurut dari bilangan riil.

$$x = \xi_1, \dots, \xi_n, \quad y = \eta_1, \dots, \eta_n$$

Metrik $\mathbb{R}^n$ di definisikan dengan

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

Ruang $\mathbb{C}^n$ diperoleh jika mengambil himpunan dari setiap n -tupel dari bilangan kompleks dan di definisikan dengan

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \dots + |\xi_n - \eta_n|^2}$$

Bukti kelengkapan: Diketahui bahwa metrik di $\mathbb{R}^n$ didefinisikan dengan

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}$$

Dimana $x = (\xi_i)$ dan $y = (\eta_i)$. perhatikan setiap barisan Cauchy (x_m) di $\mathbb{R}^n$, ditulis $x_m = (\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$. Karena x_m adalah barisan Cauchy, untuk semua barisan $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga

$$(1) \quad d(x_m, x_r) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (m, r > N).$$

Dari persamaan tersebut dikuadratkan maka untuk $m, r > N$ dan

$i = 1, \dots, n$ diperoleh

$$(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \text{ dan } |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)}| < \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap titik i , ($1 \leq i \leq n$), barisan $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots)$ merupakan barisan Cauchy dari bilangan riil. Diperoleh $\xi_i^{(m)} \rightarrow \xi_i$ sebagaimana $m \rightarrow \infty$. Dengan menggunakan limit- n ini, didefinisikan $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Jelas bahwa $x \in \mathbb{R}^n$. Dari (1), dengan $r \rightarrow \infty$

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon \quad (m > N).$$

Ini menunjukkan bahwa x merupakan limit dari (x_m) dan membuktikan kelengkapan dari $\mathbb{R}^n$ karena (x_m) merupakan sembarang baris Cauchy. Kelengkapan dari $\mathbb{C}^n$ dibuktikan dengan cara yang sama.

2.1.9 Multi-pemetaan(Multimap)

Multi-pemetaan atau multimap merupakan konsep fungsi yang tidak hanya memetakan elemen dari domain ke satu elemen dalam kodomain, tetapi seperangkat elemen dalam kodomain. Dengan kata lain, sebuah multimap adalah pemetaan yang memungkinkan setiap elemen dari domain memiliki lebih dari satu nilai atau hasil dari kodomain

Definisi 2.9(Park, 2014)

Misalkan X dan Y adalah dua himpunan. Sebuah multimap F dari $X \rightarrow Y$ adalah suatu relasi $F \subseteq X \times 2^Y$, yang berarti bahwa setiap elemen $x \in X$ dipetakan ke suatu subset dari Y , yaitu $F(x) \subseteq Y$.

Contoh 2.9

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $Y = \mathbb{R}^2$, dan misalkan multimap F adalah pemetaan sebagai berikut:

$$F(x) = \{(x, \sin(x)), (x, \cos(x))\}$$

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, setiap nilai x dalam $\mathbb{R}$ dipetakan ke dua titik dalam $\mathbb{R}^2$, yaitu titik $(x, \sin(x))$ dan $(x, \cos(x))$

2.1.10 Barisan Cauchy

Barisan Cauchy adalah barisan (urutan) elemen dalam ruang metrik yang memiliki sifat bahwa elemen-elemen dari barisan tersebut semakin mendekati satu sama lain ketika indeksnya semakin besar. Dengan kata lain, elemen-elemen barisan tersebut menjadi "dekat" satu sama lain tanpa memperhatikan apakah barisan itu konvergen ke suatu titik dalam ruang tersebut atau tidak.

Definisi 2.10(Bartle & Sherbert, 1927)

Barisan bilangan real (x_n) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > N$ berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Contoh 2.10 Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$

Bukti:

Diambil sembarang $\varepsilon > 0$. Terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ Jadi

untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema 2.10.1

Diketahui (x_n) barisan bilangan riil. Jika (x_n) barisan Cauchy, maka (x_n) terbatas.

Bukti:

Diketahui (x_n) barisan Cauchy. Diambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_m| < 1$. Jadi untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_{n_0}| < 1$ yang berakibat $|x_n| < |x_{n_0}| + 1$.

Diambil $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\}$, maka $|x_n| \leq M$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, (x_n) terbatas.

Teorema 2.10.2

Diberikan barisan bilangan riil (x_n) . Barisan (x_n) konvergen jika dan hanya jika (x_n) merupakan barisan Cauchy

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui bahwa (x_n) konvergen, Misalkan $\lim(x_n) = x$. terdapat $\varepsilon > 0$ sembarang, maka terdapat bilangan asli K yang berakibat $|x_n - x| < \varepsilon/2$ untuk semua $n \geq K$. Sehingga untuk semua $m, n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.

($\Leftarrow$) Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Karena (x_n) Cauchy maka terdapat bilangan asli K_1 sehingga

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ untuk semua } m, n \geq K_1.$$

Katakan $\lim(x_{r_n}) = x^*$. Oleh karena itu terdapat bilangan asli K_2 sehingga

$$|x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk semua } r_n \geq K_2$$

Jika diambil $K := \max\{K_1, K_2\}$ maka keduanya berlaku

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_{r_n} - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk semua } n, m, r_n \geq K.$$

Khususnya untuk $m = K = r_n$ berlaku

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2 \text{ dan } |x_K - x^*| < \varepsilon/2 \text{ untuk semua } n \geq K.$$

Maka diperoleh untuk semua $n \geq K$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_K + x_K - x^*| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Maka (x_n) konvergen ke x

2.1.11 Teorema Titik Tetap

Teori titik tetap berfungsi sebagai alat penting untuk berbagai cabang analisis matematika dan aplikasinya. Secara umum, ada tiga pendekatan utama dalam teori ini yakni pendekatan metrik, topologi, dan teoretis urutan, contoh yang mewakilinya adalah teorema Banach (Almezel et al., 2014).

Definisi 2.11 (Kreyzig, 1978)

Misalkan X merupakan sebuah himpunan dan $f: X \rightarrow X$ merupakan sebuah fungsi pemetaan X ke dirinya sendiri. Sebuah titik tetap dari f merupakan elemen $x \in X$ untuk setiap $f(x) = x$.

Contoh 2.11

Misalkan X merupakan himpunan dua elemen $\{a, b\}$. Fungsi $f: X \rightarrow X$ didefinisikan dengan $f(a) = b$ dan $f(b) = a$ tidak memiliki titik tetap, namun tiga fungsi lainnya yaitu pemetaan X ke dirinya sendiri masing-masing memiliki satu atau dua titik tetap. Lebih umum, misalkan X merupakan himpunan sembarang, setiap konstanta fungsi $f: X \rightarrow X$ memetakan X ke dirinya sendiri

memiliki sebuah titik tetap(unik). Dan untuk fungsi identitas $f(x) = x$, setiap titik di X merupakan titik tetap.

Katakanlah (X, d) merupakan ruang metrik dan $F: X \rightarrow X$ merupakan kontraksi. Jika $c \in [0,1)$ merupakan *Lipschitz constant* dari F maka kita peroleh

$$d(x, y) \leq \frac{1}{1-c} d(x, F(x)) + d(y, F(y)), x, y \in X \quad (1)$$

Bukti:

Misalkan $x, y \in X$. Gunakan pertidaksamaan segitiga

$$d(x, y) \leq d(x, F(x)) + d(F(x), F(y)) + d(F(y), y)$$

Dengan menggunakan konsep konstanta Lipschitz $d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y)$

maka dapat ditulis dengan

$$d(x, y) \leq d(x, F(x)) + cd(x, y) + d(F(y), y)$$

Dengan menerapkan perhitungan aljabar sederhana maka diperoleh

$$d(x, y) - cd(x, y) \leq d(x, F(x)) + d(y, F(y))$$

$$(1 - c) d(x, y) \leq d(x, F(x)) + d(y, F(y))$$

$$d(x, y) \leq \frac{1}{1-c} d(x, F(x)) + d(y, F(y)), x, y \in X$$

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Pada masa era digital seperti ini, berita sangat mudah tersebar luas ke seluruh dunia. Hanya bermodalkan hp, kita bisa mengetahui apa yang terjadi di belahan bumi yang lain tanpa mengetahui bahwa berita itu fakta atau hanya berita palsu(Hoax).

Banyak dampak negatif yang dapat ditimbulkan jika percaya terhadap berita hoax seperti memicu perpecahan antar individu bahkan antar kelompok, hal

tersebut disebabkan karenan pengiringan opini terhadap seseorang tanpa mempedulikan kebenaran dari berita tersebut. Oleh karena itu sangat penting bagi kita untuk memastikan kebenaran dari berita yang kita peroleh sebelum mengambil tindakan terhadap berita tersebut.

Sama hal-nya dengan ilmu. Ilmu merupakan hal yang sangat penting dalam islam, sebagai seorang muslim sudah menjadi kewajiban kita untuk menuntut ilmu. Hal ini dilakukan semata-mata untuk mendekatkan diri kita pada Allah Swt. Ilmu yang baik adalah ilmu yang bisa dipastikan kebenarannya.

Allah Swt berfirman dalam surah Al-Hujurat ayat 6 (Kemenag, 2024):

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِنْ جَاءَكُمْ فَاسِقٌ بِنَبَأٍ فَتَبَيَّنُوا أَنْ تُصِيبُوا قَوْمًا بِجَهَالَةٍ فَتُصْبِحُوا عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَادِمِينَ ٦

Artinya:

“Wahai orang-orang yang beriman, jika seorang fasik datang kepadamu membawa berita penting, maka telitilah kebenarannya agar kamu tidak mencelakakan suatu kaum karena ketidaktahuan(-mu) yang berakibat kamu menyesali perbuatanmu itu.”

Ayat ini menekankan pentingnya ketelitian dan kehati-hatian dalam menerima dan memproses informasi apa pun yang diperoleh, karena kesalahan dalam memahami atau menyebarkan informasi bisa berdampak merugikan, baik bagi diri sendiri maupun orang lain. Prinsip ini sejalan dengan tujuan utama dari penelitian skripsi ini, yang berfokus pada pembuktian Teorema Titik Tetap Schauder. Dalam konteks penelitian matematika, khususnya terkait teorema-teorema fundamental seperti Titik Tetap Schauder, ketelitian dalam setiap langkah pembuktian menjadi hal yang sangat penting. Teorema ini sendiri memiliki implikasi yang luas dalam analisis fungsi dan memiliki penerapan dalam berbagai bidang, seperti dalam pemodelan matematika dan ilmu terapan lainnya. Dengan

melakukan penelitian yang mendalam, penulis berharap dapat memberikan kontribusi baru dalam pemahaman teorema tersebut, sekaligus menambah wawasan serta kecermatan dalam melakukan analisis matematis yang berlandaskan pada prinsip-prinsip kebenaran yang ketat.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Topik penelitian yang akan di teliti yakni Teorema titik tetap Schauder. Untuk memahami materi tersebut ada beberapa definisi yang perlu di ketahui, dan pembuktian berikut akan berfokus pada bilangan real ($\mathbb{R}$). Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Sebuah pemetaan $T: A \rightarrow B$ merupakan sebuah fungsi dari A ke himpunan kuasa 2^B dari B . Dinotasikan dengan

$$T(A) = \bigcup \{T(x): x \in A\}$$

Dan misalkan $T^-: B \rightarrow A$ didefinisikan dengan kondisi bahwa $x \in T^-(y)$ jika dan hanya jika $y \in T(x)$. Misalkan $\langle A \rangle$ menunjukkan himpunan dari subset tak kosong terbatas dari A . Misalkan X adalah ruang vektor dan D subset tak kosong dari X . Fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan *quasiconcave* pada X jika untuk setiap $x, y \in X$, berlaku

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \text{ untuk semua } \lambda \in [0,1]$$

Convex hull dari D dinotasikan dengan coD . sehingga (X, D) dikatakan sebuah ruang convex jika $coD \subset X$ dan X memiliki topologi yang meng-induksi topologi Euclid pada convex hull dari setiap $N \in \langle D \rangle$.

Teorema 2.3

Misalkan (X, D) merupakan ruang convex dan $P: X \multimap D$ sebuah multimap. Jika terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ subset terbuka tak kosong $G_i \subset P^-(z_i)$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga

$$co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$$

Maka pemetaan $coP: X \multimap X$ memiliki sebuah titik tetap $x_n \in X$.

Dalam penelitian ini akan diperlihatkan pembuktian sederhana dari teorema titik tetap Schauder dengan menggunakan teorema titik tetap Park's. kemudian, akan diperlihatkan sebuah generalisasi ketaksamaan minimax Fan's dan generalisasi teorema titik tetap Schauder, dan pada generalisai tersebut asumsi kekompakan akan diganti dengan penutup terbuka terbatas dan asumsi kontinuitas dihilangkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang bersifat kualitatif. Teknik pengumpulan data dilakukan dengan kajian pustaka, dilakukan dengan mengumpulkan buku, jurnal dan artikel dengan tujuan untuk mendapatkan materi secara lengkap terkait dengan materi skripsi yang di angkat.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini didasarkan pada journal dari National Kaohsiung Normal University yang membahas mengenai Teorema Titik Tetap Schauder. Pada penelitian ini akan difokuskan pada pembuktian materi Teorema titik tetap Schauder. Pada tahap pra penelitian hal-hal yang dipersiapkan yakni menentukan latar belakang, rumusan masalah, manfaat dan tujuan penelitian. Selanjutnya menyiapkan sumber-sumber seperti buku, jurnal dan artikel yang berhubungan dengan Teorema Titik Tetap Schauder.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah mencari referensi dari berbagai sumber yang berhubungan dengan topik penelitian yang akan di teliti yakni teorema titik tetap Schauder.

Hal-hal dasar yang perlu diketahui untuk memahami teorema titik tetap Schauder adalah mengenai ruang Banach, ruang bernorma, operator kompak, dan himpunan Konveks yang merupakan unsur penting yang digunakan dalam proses pembuktian. Setelah memahami hal-hal dasar tersebut selanjutnya adalah memahami konsep teorema titik tetap.

Setelah mempelajari semua materi yang perlu dipahami, Langkah selanjutnya adalah memahami dan membuktikan teorema Park mengenai titik tetap sebagai pendekatan, selanjutnya membuktikan eksistensi dari teorema titik tetap Schauder menggunakan teorema yang sudah dibuktikan sebelumnya, langkah terakhir yakni menyimpulkan keberadaan titik tetap.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan ditunjukkan mengenai pembuktian teorema titik tetap Schauder kemudian apa hikmah yang dapat diambil dari sudut pandang keagamaan.

4.1 Pembuktian Teorema Titik Tetap Schauder

Pada pembuktian ini akan di tunjukkan pembuktian dari teorema titik tetap Schauder dengan mengabaikan asumsi kontinuitas dan kekompakannya. Misalkan A dan B merupakan himpunan-himpunan tak kosong. Untuk mempermudah pembuktian, akan digunakan konsep multipemetaan (*multimap*).

Definisi 4.1(Du, 2016)

Misalkan A dan B merupakan dua himpunan. Sebuah multipemetaan dari A ke B dapat kita tulis dengan $T: A \multimap B$ yang menetapkan bahwa setidaknya satu elemen dari B untuk setiap elemen dari A . Dan misalkan $T^{-}: B \multimap A$ di definisikan dengan kondisi bahwa $x \in T^{-}(y)$ jika dan hanya jika $y \in T(x)$.

Sebuah pemetaan multivalued $T: A \multimap B$ merupakan sebuah fungsi dari A ke himpunan kuasa 2^B dari B . Maka di tunjukkan

$$T(A) = \bigcup \{T(x): x \in A\}$$

Misalkan $\langle A \rangle$ menunjukkan sebuah himpunan dari himpunan bagian tak kosong berhingga dari A . Misalkan X merupakan sebuah ruang vektor dan D merupakan sebuah himpunan bagian tak kosong dari X . Sebuah fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dinamakan *quasiconcave* di X jika untuk setiap $x, y \in X$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \text{ untuk semua } \lambda \in [0,1].$$

Convex hull dari D ditunjukkan dengan coD . Kita katakan (X, D) sebuah ruang convex jika $coD \subset X$ dan X memiliki sebuah topologi yang menginduksi topologi Euclid pada convex hull dari setiap $N \in \langle D \rangle$. Jika $X = D$ adalah convex, maka $X = (X, X)$ menjadi sebuah ruang convex.

Theorema 4.1(Du, 2016)

Misalkan (X, D) merupakan sebuah ruang konvex dan $P: X \rightarrow D$ merupakan sebuah multi-pemetaan. Jika terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ dan terbuka tak kosong subsets $G_i \subset P^-(z_i)$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga

$$co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$$

Maka pemetaan $coP: X \rightarrow X$ memiliki sebuah titik tetap $x_0 \in X$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa multi-pemetaan $coP: X \rightarrow X$ memiliki setidaknya satu titik tetap $x_0 \in X$, yaitu $x_0 \in coP(x_0)$.

Konveksifikasi dari P adalah:

$$coP(x) = \bigcup_{x \in X} co(P(x)),$$

Dimana $co(P(x))$ adalah himpunan bagian konveks terkecil yang memuat $P(x)$.

Dari teorema tersebut diketahui bahwa untuk setiap $x \in X$, $P(x) \subseteq D$, maka $coP \subseteq D$. $coP(x)$ bersifat kontinu dan tertutup karena $P(x)$ adalah multi pemetaan konveks.

Misalkan coP tidak memiliki titik tetap, maka untuk setiap $x \in X$, $x \notin coP(x)$ sehingga diperoleh

$$\emptyset(x) = \min_{z \in coP(x)} \|x - z\|,$$

yang berarti terdapat jarak antara x dan himpunan $coP(x)$. Karena $coP(x)$ merupakan konveks dan kompak maka jarak $\emptyset(x) > 0$ untuk setiap $x \in X$.

Pernyataan tersebut bertentangan dengan $co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$ dan setiap $G_i \subseteq P^{-1}(z_i)$.

Dari $co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G_i$, kombinasi konveks dari $z_1, z_2, \dots, z_n$ dapat diwakili dengan beberapa elemen $x \in G_i$. Karena G_i terbuka maka terdapat $x \in coP(x)$. Karena X merupakan ruang konveks maka coP memenuhi kondisi titik tetap yakni :

$$\exists x_0 \in X, x_0 \in coP(x_0)$$

Theorema 4.2(Du, 2016)

Misalkan (X, D) merupakan sebuah ruang convex dan $r \in \mathbb{R}$. Seandainya

$f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan sebuah fungsi bernilai real sehingga

- (1) $f(x, x) \leq r$ untuk semua $x \in X$
- (2) Untuk setiap $y \in X, x \rightarrow f(x, y)$ *quasiconcave* di X ;
- (3) Terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ dan himpunan bagian tak kosong terbuka

$G_i \subset \{y \in X: f(z_i, y) > r\}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ sehingga

$$co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

Maka terdapat $y_0 \in X$ sehingga $f(x, y_0) \leq r$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa terdapat $y_0 \in X$ sedemikian sehingga $f(x, y_0) \leq r$ untuk semua $x \in X$.

Definisikan multipemetaan $P: X \rightarrow X$ dengan

$$P(y) = \{x \in X: f(x, y) > r\}$$

Dengan kata lain, $P(y)$ merupakan himpunan semua $x \in X$ yang menghasilkan $f(x, y) > r$.

Untuk setiap $y \in X$, $P(y)$ adalah himpunan bagian X yang tidak kosong (karena $G_i \subseteq \{y \in X: f(z_i, y) > r\}$). Kemudian $P^{-1}(z_i) = \{y \in X: f(z_i, y) > r\}$, dan $G_i \subseteq P^{-1}(z_i)$.

Dari teorema 4.1 diperoleh beberapa Kesimpulan yakni terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ dan himpunan terbuka $G_i \subseteq P^{-1}(z_i)$. Kemudian $co\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$, maka multi-pemetaan coP memiliki setidaknya satu titik tetap $y_0 \in X$.

Sehingga y_0 memenuhi:

$$y_0 \in coP(y_0)$$

Dengan kata lain, terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x, y_0) > r$ untuk semua $x \in X$. Namun karena $f(x, x) \leq r$ untuk semua x , maka otomatis $f(x, y_0) \leq r$ juga untuk semua x .

Corollary 4.3(Du, 2016)

Misalkan X merupakan himpunan bagian kompak konveks tak kosong dari ruang norm linier E dan misalkan $T: X \rightarrow X$ merupakan sebuah pemetaan kontiniu maka T memiliki titik tetap di X .

Bukti:

Dari teorema 4.2 diperoleh $f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x, x) \leq r$ untuk semua $x \in X$, $x \mapsto f(x, y)$ merupakan quasikonveks di X untuk setiap $y \in X$, dan terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ dan himpunan terbuka $G_i \subseteq \{y \in X: f(z_i, y) > r\}$ dengan:

$$\text{co}\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i$$

Terdapat $y_0 \in X$ sehingga $f(x, y_0) \leq r$ untuk semua $x \in X$.

Dari Corollary 4.3 diberikan $T: X \rightarrow X$ dimana $X \subseteq E$ merupakan himpunan kompak, konveks, dan tak kosong dalam ruang norm E , dan T adalah pemetaan kontinu.

Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap, yaitu $\exists x^* \in X$ sehingga $T(x^*) = x^*$.

Definisikan fungsi $f(x, y)$ dengan $f(x, y) = \|x - T(y)\|$

yaitu jarak antara x dan $T(y)$. Karena T kontinu dan norm adalah fungsi kontinu, maka $f(x, y)$ kontinu terhadap (x, y) . Untuk setiap $y \in X$, $x \mapsto \|x - T(y)\|$ adalah quasikonveks karena norma di ruang vektor linier merupakan fungsi konveks, dan untuk setiap $x \in X$, $f(x, x) = \|x - T(x)\|$. Jika x adalah titik tetap T , maka $f(x, x) = 0$, sehingga $f(x, x) \leq r$ untuk setiap $r > 0$.

Ambil $r = \inf_{x \in X} \|x - T(x)\|$. Karena X merupakan kompak, maka infimum tersebut terpenuhi.

Ambil titik $z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ sedemikian sehingga kombinasi konveksnya mencakup nilai $f(z_i, y) > r$ untuk setiap i . Karena X kompak dan f kontinu maka dapat dibentuk subset terbuka G_i dalam X .

Dari teorema 4.2 terdapat $y_0 \in X$ sehingga:

$$f(x, y_0) = \|x - T(y_0)\| \leq r \text{ untuk semua } x \in X$$

Maka untuk $x = y_0$ diperoleh

$$\|y_0 - T(y_0)\| \leq r$$

Karena r merupakan infimum jarak $\|x - T(x)\|$, maka $\|y_0 - T(y_0)\| = r$.

Jika $r > 0$, maka kontradiksi dengan asumsi bahwa r adalah jarak minimum. Jika $r = 0$ maka $y_0 = T(y_0)$ sehingga y_0 merupakan titik tetap.

4.2 Kajian Integrasi Nilai Keagamaan

Untuk memperoleh pembuktian dari teorema titik tetap schauder yang sederhana, terdapat syarat-syarat yang harus dipenuhi yakni membuktikan bahwa teorema-teorema sebelumnya berlaku dan terbukti benar. Teorema-teorema tersebut saling berhubungan satu sama lain dengan tetap memenuhi aturan dalam ruang. Sama halnya seperti ciptaan Tuhan yang memiliki sifat keteraturan dan keharmonisan.

Seperti yang sudah dijelaskan oleh Allah SWT. dalam surah Ali-Imran ayat 190-191:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمُوتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ۚ
الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمُوتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا
خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ۚ

Artinya:

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), “Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Maha Suci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka. ” (Kemenag, 2024)

Orang-orang berakal yaitu orang-orang yang senantiasa memikirkan ciptaan

Allah, merenungkan keindahan ciptaan-Nya, kemudian dapat mengambil manfaat

dari ayat-ayat kauniyah yang terbentang di jagat raya ini, seraya berzikir kepada Allah dengan hati, lisan, dan anggota tubuh. Mereka mengingat Allah sambil berdiri dan berjalan dengan melakukan aktivitas kehidupan. Mereka berzikir kepada-Nya seraya duduk di majelis-majelis zikir atau masjid, atau berzikir kepada-Nya dalam keadaan berbaring menjelang tidur dan saat istirahat setelah beraktivitas, dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi sebagai bukti kekuasaan Allah yang Mahaagung seraya berkata, “Ya Tuhan kami! Kami bersaksi bahwa tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia melainkan mempunyai hikmah dan tujuan di balik ciptaan itu semua. Mahasuci Engkau, kami bersaksi tiada sekutu bagi-Mu. Kami mohon kiranya Engkau melimpahkan taufik agar kami mampu beramal saleh dalam rangka menjalankan perintah-Mu, dan lindungilah kami dari murka-Mu sehingga kami selamat dari azab neraka.

Dari penafsiran tersebut dapat diambil pelajaran bahwa Allah SWT. tidak menciptakan sesuatu dengan sia-sia. Jika dihubungkan dengan teorema titik tetap Schauder maka dapat dikatakan Teorema yang satu tidak akan berlaku jika teorema yang lain tidak terpenuhi, begitupun sebaliknya. Hal sekecil apapun pasti memiliki tujuan.

Dalam ayat lain Allah SWT. juga menyebutkan dalam surah Al-Baqarah ayat 143:

وَكَذَلِكَ جَعَلْنَاكُمْ أُمَّةً وَسَطًا لِتَكُونُوا شُهَدَاءَ عَلَى النَّاسِ وَيَكُونَ الرَّسُولُ عَلَيْكُمْ
شَهِيدًا ۗ وَمَا جَعَلْنَا الْقِبْلَةَ الَّتِي كُنْتَ عَلَيْهَا إِلَّا لِنَعْلَمَ مَنْ يَتَّبِعِ الرَّسُولَ مِمَّنْ يَنْقَلِبُ عَلَى
عَقْبَيْهِ ۚ وَإِنْ كَانَتْ لَكَبِيرَةً إِلَّا عَلَى الَّذِينَ هَدَى اللَّهُ ۚ وَمَا كَانَ اللَّهُ لِيُضِلَّ إِيْمَانَكُمْ ۚ إِنَّ اللَّهَ
بِالنَّاسِ لَرَّءُوفٌ رَحِيمٌ ١٤٣

Artinya:

“Demikian pula Kami telah menjadikan kamu (umat Islam) umat pertengahan⁴⁰) agar kamu menjadi saksi atas (perbuatan) manusia dan agar Rasul (Nabi Muhammad) menjadi saksi atas (perbuatan) kamu. Kami tidak menetapkan kiblat (Baitulmaqdis) yang (dahulu) kamu berkiblat kepadanya, kecuali agar Kami mengetahui (dalam kenyataan) siapa yang mengikuti Rasul dan siapa yang berbalik ke belakang. Sesungguhnya (pemindahan kiblat) itu sangat berat, kecuali bagi orang yang telah diberi petunjuk oleh Allah. Allah tidak akan menyia-nyiakan imanmu. Sesungguhnya Allah benar-benar Maha Pengasih lagi Maha Penyayang kepada manusia. ” (Kemenag, 2024)

Jika Allah menjadikan Ka'bah sebagai kiblat yang paling utama karena dibangun oleh bapak para nabi, yaitu Nabi Ibrahim, maka demikian pula Kami telah menjadikan kamu, umat Islam, umat pertengahan, yaitu umat terbaik yang pernah ada di bumi ini. Umat yang terbaik sangatlah pantas menjadi saksi. Tujuannya adalah agar kamu menjadi saksi atas perbuatan manusia, yaitu ketika nanti pada hari Kiamat jika ada dari mereka yang mengingkari bahwa rasul-rasul mereka telah menyampaikan pesan-pesan Allah atau adanya penyimpangan pada ajaran mereka. Di samping itu, juga agar Rasul, Muhammad, menjadi saksi atas perbuatan kamu yaitu dengan memberikan petunjuk dan arahan-arahannya ketika masih hidup serta jalan kehidupannya juga petunjuknya ketika sudah meninggal. Allah kemudian menjelaskan tujuan pengalihan kiblat, yaitu menguji keimanan seseorang. Kami tidak menjadikan kiblat yang dahulu kamu berkiblat kepadanya melainkan agar Kami mengetahui siapa yang mengikuti Rasul dan siapa yang berbalik ke belakang. Bagi mereka yang tetap istikamah dengan keimanannya, mereka akan mengikuti apa pun yang diperintahkan oleh Allah dan Rasul-Nya, baik dalam pengalihan kiblat atau lainnya. Sebaliknya, bagi yang lain, mereka akan menolak dan enggan mengikuti perintah Allah dan Rasul-Nya.

Dari penafsiran tersebut dapat di ambil pelajaran bahwa manusia harus mencari keseimbangan dalam hidup dan menemukan jalan yang benar. Ayat

tersebut mengajarkan tentang keseimbangan dan tujuan yang jelas dalam hidup umat islam. Jika di analogikan dalam konsep teorema titik tetap Schauder, maka seluruh pembuktian teorema yang ada dalam penelitian ini memiliki satu tujuan yakni mencari keberadaan titik tetap.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Teorema titik tetap Schauder merupakan teorema yang terkait dengan ruang vektor topologi yang memberikan kondisi dimana pemetaan kontraksi pada ruang tersebut memiliki titik tetap.

Ada beberapa hal yang dapat kita simpulkan dari teorema titik tetap schauder yakni:

1. Teorema titik tetap Schauder menyajikan kerangka kerja matematis yang memastikan keberadaan dan keunikan titik tetap untuk pemetaan kontraksi pada ruang vektor topologi.
2. Keunikan titik tetap menunjukkan bahwa titik tersebut tidak hanya ada tetapi juga hanya satu dalam konteks kondisi yang diberikan.

Teorema ini memberikan landasan matematis yang kuat dan berguna untuk membuktikab keberadaan dan keunikan titik tetap dalam konteks pemetaan kontraksi pada ruang vektor topologi.

5.2 Saran

Penelitian mengenai teorem titik tetap, terutama dalam konteks Schauder, dapat memberikan kontribusi yang signifikan terhadap pemahaman struktur matematika fundamental. Disarankan untuk mulai dengan pemahaman mendalam terhadap konsep pemetaan kontraksi dan ruang Banach, yang menjadi landasan teorema ini. Secara khusus, penelitian dapat difokuskan pada pemahaman syarat-syarat keberadaan titik tetap, seperti ruang vektor norma lengkap dan himpunan

tertutup dan terbatas. Serta, dapat dianjurkan untuk melibatkan contoh kasus khusus dan penelitian numerik untuk mengilustrasikan penerapan teorema ini dalam situasi nyata.

DAFTAR PUSTAKA

- Almezel, S., Ansari, Q. H., & Khamsi, M. A. (2014). Topics in fixed point theory. In *Topics in Fixed Point Theory*. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01586-6>
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (1927). *Bartle Introduction To Real Analysis New Edition* (p. 400).
- Deepak, M. (2021). Metric Space And Its Applications. *University of Shanghai for Science and Technology*, 23(7), 957–961.
- Du, W.-S. (2016). A short note on a simple proof of Schauder’s fixed point theorem and its generalization without continuity and compactness assumptions. *International Journal of Mathematical Analysis*, 10(19), 933–938. <https://doi.org/10.12988/ijma.2016.6573>
- Isaiah L, Bruno N, A. S. (2018). Linear Algebra. *University of California*, November, 1–22.
- James Munkres. (2000). *Topology, 2_E (2000, Prentic Hall _ Pearson)*.
- Kemenag. (2024). *Qur ’an Kemenag*. <https://quran.kemenag.go.id/>
- Kreyzig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. In *John Wiley & Sons. Incorporation* (Vol. 46, Issue 1). John Wiley & Sons. Incorporation. <https://doi.org/10.1002/zamm.19660460126>
- Kythe, P. K. (2018). Concave and Convex Functions. *Elements of Concave Analysis and Applications*, 0, 63–86. <https://doi.org/10.1201/9781315202259-3>
- Meyer, C. D., & Stewart, I. (2023). CHAPTER 4: Vector Spaces. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Second Edition*, 33(d), 409–644.
- Park, S. (2014). *Foundations of the KKM theory via coincidences of composites of upper semicontinuous maps. December*.
- Showalter, R. E. (1996). *Montone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations* (B. M. Georgia, M. A. Howard, T. S. Ratiu, & M. Renardy (eds.)). American Mathematical Society.
- Tan, C. (2019). *Convex Sets And Convex Function*. 1–25.
- Vilà, X. (2022). *Notes on Concavity, Convexity, Quasiconcavity and Quasiconvexity*. 1–12.

RIWAYAT HIDUP



Muhammad Fithrullah atau biasa dipanggil Fithrah, lahir di Bima pada tanggal 18 Oktober 2001. Putra pertama dari empat bersaudara dari Bapak Syamsudin S,pd. dan Ibu Efi Susanti. Walaupun lahir di bima ia bersekolah dan tumbuh di lombok mengikuti orang tuanya yang menempuh pendidikan disana saat itu. Kini ia dan keluarga kecilnya menempati rumah sederhana yang terletak di Jln. KHM. Mansyur VII/29, RT.07, RW.038, Dasan Sari, Kebun Sari, Ampenan, Mataram.

Fithrah telah menempuh pendidikan formal mulai dari taman kanak-kanak di TK PGRI Kota Mataram dan lulus pada tahun 2007, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 32 Mataram. Setelah lulus pada tahun 2013, ia melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 15 Mataram dan lulus pada tahun 2016. Lalu melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 8 Mataram dan lulus pada tahun 2019. Kemudian pada tahun yang sama ia tercatat sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Disamping menempuh pendidikan formal, Fithrah juga aktif mengikuti kegiatan-kegiatan yang meningkatkan kualitas diri. Sejak kecil orang tuanya selalu menanamkan nilai-nilai moral keagamaan, belajar membaca al-quran di pengajian dekat dengan rumah, dan saat kelas 4 SD ia mulai belajar membaca al-qur'an di lembaga resmi Taman Pendidikan Qur'an Darul Mujawwidin Ampenan dan mulai menghafal Al-qur'an di kelas 2 SMP. Pada saat SMA ia dipercaya sebagai wakil ketua remaja mushola dan membantu menyukseskan program-program yang berkaitan dengan keagamaan salah satunya mengajarkan tahfidz. Karena gaya bicaranya yang sangat menarik, walaupun masih mahasiswa baru, ia dipercaya menjadi MC pada acara bergengsi Kompetisi Matematika 2019.

Fithrah merupakan seorang individu yang berdedikasi dan terus berusaha untuk tetap berkembang menjadi lebih baik.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Fithrullah
NIM : 19610102
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Teorema Titik Tetap Schauder
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Pembimbing II : M Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	9 Mei 2023	Konsultasi Kajian Integrasi	2.
3.	19 Mei 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	3.
4.	23 Mei 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	4.
5.	6 Juni 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	5.
6.	7 Juni 2023	ACC Seminar Proposal	6.
7.	2 April 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	7.
8.	1 September 2024	Konsultasi Bab IV	8.
9.	17 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	9.
10.	27 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	10.
11.	29 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	29 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	12.
13.	30 Oktober 2024	ACC Seminar Hasil	13.
14.	4 Desember 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	14.
15.	9 Desember 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

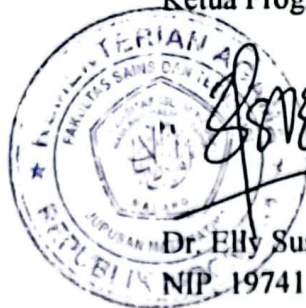
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	9 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	16.
17.	23 Desember 2024	ACC Keseluruhan	17.

Malang, 23 Desember 2024

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005