STUDI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

SKRIPSI

Oleh:
SITI MUFIDAH
NIM. 19640060

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

HALAMAN PENGAJUAN

STUDI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh:
SITI MUFIDAH
NIM. 19640060

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

SKRIPSI

Oleh:
SITI MUFIDAH
NIM. 19640060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 13 Desember 2024

Pembimbing I	Pembimbing II
Arista Romadani, M.Sc	Ahmad Abtokhi, M. Pd
NIP. 19900905 201903 1 018	NIP. 19761003 200312 1 004

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si.
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

SKRIPSI

Oleh:
Siti Mufidah
NIM. 19640060

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)
Pada Tanggal, 23 Desember 2024

Penguji Utama	Dr. Erna Hastuti, M. Si NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	Dr. Muhammad Taufiqi, M. Si NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	Arista Romadani, M. Sc NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	Ahmad Abtokhi, M.pd NIP. 19761003 200312 1 004	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M. Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Siti Mufidah
NIM	: 19640060
Jurusan	: Fisika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	: Studi Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Reissner Nordstrom

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian say aini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar Pustaka. Apabila hasil dari penelitian ini terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2024
Yang Membuat Pernyataan

METERAI TEMPEL
E5F6DAJX543973231

Siti Mufidah
NIM. 19640060

MOTTO

Hasbunallah wani'mal wakil ni'mal maula wani'man nasir

"Cukuplah Allah menjadi pelindung bagi kami. Allah adalah sebaik-baik pemberi perlindungan."

Hanya kepada Allah kita meminta segala ketidakmungkinan itu menjadi mungkin.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Pertama saya ucapkan alhamdulillah wa syukurillah atas kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmatnya karya yang sederhana ini dapat terselesaikan

*****

Karya ini saya persembahkan untuk Ibu, Umik dan Aba, serta Pakde dan Budhe saya yang seperti orangtua sendiri. Jazakumullah khairan katsiran untuk segala dukungan dan doa yang selama ini saya terima

*****

Kedua, untuk suami dan anakku. Untuk suamiku, terima kasih atas segala pengertian yang diberikan, yang tak pernah menuntut apapun dari istrimu yang sederhana ini. Untuk anakku Nevan, terima kasih nak sudah hadir dikehidupan bunda dan ayah. Menemani bunda dalam proses penyelesaian tugas akhir ini

*****

Terakhir, untuk kakak-kakaku. Terima kasih atas segala bentuk dukungan, kata-kata semangat yang terucap dikala semanagatku mulai meredup

*****

KATA PENGANTAR

Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan nikmatnya berupa kesehatan, kesabaran, ketekunan, kesempatan, serta kekuatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **"Studi Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Reissner Nordstrom".** Sholawat serta salam penulis panjatkan kepada Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun manusia dari kegelapan zaman jahiliyah menuju zaman yang terang dan penuh dengan ilmu pengetahuan seperti saat ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari pihak-pihak terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan membimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Khususnya penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi Jurusan Fisika Teori Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Dr. Muhammad Taufiqi, M.Si., selaku Dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran.
6. Dr. Erna Hastuti, M. Si., selaku Dosen Penguji Sidang Skripsi penulis.

7. Ahmad Abtokhi, M. Pd., selaku Dosen Pembimbing Integrasi skripsi penulis.
8. Ahmad Luthfin, M.Si., selaku Dosen Wali yang telah membantu, membimbing, dan memberikan motivasi kepada penulis.
9. Segenap jajaran dosen jurusan Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan yang sangat bermanfaat dalam membantu penulisan skripsi ini.
10. Keluarga tercinta, khususnya kedua orang tua penulis Alm Bapak Suradi dan Ibu Nur Fatimah, Bapak Suwardi dan Ibu Yuliati yang selama ini selalu memberikan dukungan do'a agar penulis senantiasa diberikan kemudahan dalam setiap langkahnya.
11. Teristimewa suami penulis Nur Muhammad Sultonik yang telah mendukung sepenuhnya serta limpahan kasih sayang yang tak terhingga.
12. Keluarga yang sudah seperti orang tua bagi penulis, yaitu Bapak Somad dan Ibu Yakutik yang selama ini telah memberikan dukungannya.
13. Saudara-saudara penulis, khususnya Andri Setiawan, Siti Khoiriyah, M Ghozali, Nurma, Abdul Karim, Khoirul, Imrotul, dan Rusdi, serta Khusnul yang telah mendukung penulis semasa menyelesaikan studinya.
14. Abi Moh Badrus SM S.T CTRQ, dan Ummi Siti Chalila pengasuh Pondok Pesantren An-Nurul Munzal yang penulis hormati dan takdimi yang telah mengajarkan nilai-nilai kehidupan.
15. Keluarga besar Pondok Pesantren An-Nurul Munzal yang telah membantu dan memberi dukungan kepada penulis.

16. Sahabat-sahabat bidang minat fisika teori Imala, Tata, Regita, Ursila, Nindia, Ulfa, Sofi yang selalu memberikan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
17. Teman-teman fisika Angkatan 2019 yang telah memberikan dukungan dalam penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat nanti. Penulis berharap penulisan skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan juga semua pihak yang membaca, dalam menambah wawasan ilmiah dan memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat konstruktif sangat penulis harapkan.

Malang, 18 April 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Mufidah, Siti. 2024. **Studi Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Reissner Nordstrom**. Skripsi. Program Studi Fisika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen Pembimbing: (1) Arista Romadani, M. Sc (II) Ahmad Abtokhi M. Pd

---

Kata kunci: Persamaan Dirac, Partikel Fermion, ruangwaktu Reissner Nordstrom

Persamaan Dirac menggambarkan gerakan partikel berspin setengah yang mempunyai muatan q. Penelitian ini mengkaji formulasi persamaan dirac yang berada dalam ruangwaktu melengkung Reissner Nordstrom dan bagaimana ketika partikel berinteraksi dengan medan gravitasi dan elektromagnetik lubang hitam RN pada wilayah horizon I dan II, yang mana merupakan solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu RN. Dengan dilakukan metode analitik, dalam mencari tujuan pertama, yaitu ditransformasikan persamaan dirac dalam ruangwaktu datar kedalam ruangwaktu melengkung, yang kemudian ditentukan metriks RN, sehingga dari metrik RN ini dicari beberapa komponen yang akan disubsitusikan kedalam persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung yang menghasilkan persamaan gelombang relativistik untuk partikel berspin setengah yang berada pada ruangwaktu RN bermuatan. Selanjutnya dilakukan separasi variabel untuk menghasilkan fungsi gelombang dari bentuk persamaan gelombang dirac. Dengan menentukan horizon peristiwa wilayah I dan II yang didapatkan dari sifat geometris lubang hitam, maka diketahui pergerakan partikel disekitar lubang hitam RN. Wilayah I menghasilkan gelombang datang dan pantul. Sedangkan wilayah II menghasilkan gelombang transmisi.

ABSTRACT

Mufidah, Siti. 2024**. Study of the Dirac Equation in Reissner-Nordstrom Spacetime**. Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisors: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Ahmad Abtokhi, M. Pd

Keywords: Dirac Equation, Fermion Particles, Reissner-Nordstrom Spacetime

The Dirac equation describes the motion of spin-half particles with charge qqq. This study examines the formulation of the Dirac equation in the curved spacetime of a Reissner-Nordström black hole and the interaction of particles with the gravitational and electromagnetic fields of the RN black hole at horizons I and II, which are solutions to the Dirac equation in RN spacetime. Using an analytical method, the first objective is to transform the Dirac equation from flat spacetime to curved spacetime. Subsequently, the Reissner-Nordström metric is determined, and specific components of this metric are substituted into the Dirac equation in curved spacetime. This results in a relativistic wave equation for spin-half particles in charged RN spacetime. Next, variable separation is performed to derive the wave functions from the Dirac wave equation. By identifying the event horizons of regions I and II based on the geometric properties of the black hole, the motion of particles around the RN black hole is analyzed. Region I produces incoming and reflected waves, while region II produces transmitted waves.

مستخلص البحث

،مفيداه، سيتي .2024 .دراسة معادلة ديراك في الزمكان رايسنر نوردستروم .مشروع التخرج .قسم الفيزياء كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج .المشرف) :١ (أريستا روماضني، الماجستير)٢ (أحمد أبتوخي، الماجستير.

الكلمات الرئيسيات :معادلة ديراك، الجسيمات الفرميونية، الزمكان رايسنر نوردستروم

تدرس هذه .q التي تمتلك شحنة (spin-half) معادلة ديراك تصف حركة الجسيمات ذات اللف الذاتي نصف الدراسة صياغة معادلة ديراك في الزمكان المنحني لثقب رايسنر-نوردشتروم الأسود وكيفية تفاعل الجسيمات واللذين يمثلان حلين لمعادلة ،IIو I عند الأفقين RN مع الحقلين الجاذبي والكهرومغناطيسي للثقب الأسود باستخدام الطريقة التحليلية، يتم أولاً تحويل معادلة ديراك من الزمكان المستوي إلىRN ديراك في زمكان ويتم ،(Reissner-Nordström) الزمكان المنحني. بعد ذلك، يتم تحديد مقياس رايسنر-نوردشتروم استخراج بعض مكونات هذا المقياس ليتم إدخالها في معادلة ديراك في الزمكان المنحني. ينتج عن ذلك معادلة المشحون.بعد ذلك، يتم إجراء RN موجية نسبية للجسيمات ذات اللف الذاتي نصف الموجودة في زمكان فصل المتغيرات للحصول على دالة الموجة من شكل معادلة ديراك الموجية. ومن خلال تحديد أفق الحدث المستخلصة من الخصائص الهندسية للثقب الأسود، يتم تحليل حركة الجسيمات حول الثقب ،IIو I للمناطق الأسود RN. المنطقة I تنتج موجات واردة ومنعكسة، بينما المنطقة II تنتج موجات منقولة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penemuan konsep kuantum dan ruangwaktu merupakan pencapaian terbesar dalam fisika. Bermula pada akhir abad 19, ditemukan ada beberapa ketidaksamaan yang hanya bisa diselesaikan dengan fisika modern. Istilah fisika modern diperkenalkan karena banyaknya fenomena-fenomena mikroskopis dan hukum-hukum baru yang ditemukan sejak tahun 1890. Fenomena mikrokopis meliputi fenomena-fenomena yang tidak dapat dilihat secara langsung, seperti electron, proton, neutron, atom, dan sebagainya. Dalam penelitian sebelumnya, para ahli fisika telah mencoba memecahkan persoalan tentang struktur atom, electron, radiasi dengan fisika klasik. Namun, fisika klasik tidak mampu menjelaskan fenomena yang terjadi dalam skala kecil. Dengan kelemahan-kelemahan fisika klasik, fisika modern mampu mengembangkan dan menjawab berbagai permasalahan yang tidak terjawab oleh fisika klasik.

Dalam pengembangan fisika modern ditemukan dua konsep fisika dalam ranah berbeda, yaitu teori kuantum dan relativitas. Dalam teori kuantum mengacu pada persamaan fundamental yang dikenal dengan persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger ini dikemukakan oleh Erwin Schrodinger, yang mana menjelaskan mengenai persamaan gelombang non relativistik. Sedangkan dalam teori relativitas yang dikemukakan oleh Albert Einstein terbagi menjadi dua yaitu teori relativitas khusus (TRK) dan teori reativitas umum (TRU). Dalam hal ini yang menjadi pertanyaan yaitu bagaimana menggabungkan antara teori kuantum dengan teori relativitas khusus (TRK) yang dikemukakan oleh Oskar Klein dan Walter Gordon pada tahun 1920, dengan tujuan untuk menjelaskan elektron yang bergerak sangat cepat (relativistik). Sehingga ditemukan cara untuk menggabungkan dua teori ini, yaitu melalui teori kuantum relativistik yang dikenal dengan persamaan Klein Gordon. Persamaan ini mendeskripsikan partikel skalar yang mempunyai spin-0. Kemudian, dari persamaan Klein Gordon akan diperluas menjadi persamaan Dirac. Hal ini disebabkan fungsi gelombang yang berasal dari solusi persamaan Klein Gordon ini ternyata tidak memenuhi syarat kontinuitas sebab fungsi waktu (t) dalam persamaan Klein Gordon ialah orde ke 2. Kelemahan dari persamaan Klein Gordon ini diperbaiki oleh Britania Paul Dirac pada tahun 1928 dengan merumuskan kembali persamaan gelombang relativistik yang mana fungsi waktu (t) tetap di orde pertama, sebagaimana persamaan Schrodinger. Adanya perbaikan dari persamaan ini, bukan berarti menunjukkan bahwa persamaan Klein Gordon tidak akan digunakan lagi. Namun, persamaan Klein Gordon tetap memiliki peran yang sangat penting dalam fisika. Kedua persamaan ini, yaitu persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac memiliki kegunaan yang berbeda tergantung pada jenis partikel yang digunakan atau yang akan dianalisis.

Persamaan dirac menggambarkan gerakan partikel ber-spin ½ bermuatan yang dipengaruhi oleh medan elegtromagnetik eksternal, yang mana akan memberikan dasar untuk mekanika kuantum relativistic dan elektrodinamika kuantum (QED) (Rizky, 2022).

Kajian teori kuantum membuka batas baru dalam fisika partikel berenergi tinggi. Didalikan berdasarkan prinsip-prinsip sains islam dan ayat-ayat Al-Qur’an yang relavan bahwa partikel-partikel dasar sebuah atom terbuat dari muatan. Kajian ini termaktub dalam QS. An-Nisa’ ayat 40.

اِنَّ اللّٰهَ لَا يَظْلِمُ مِثْقَالَ ذَرَّةٍۚ وَاِنْ تَكُ حَسَنَةً يُّضٰعِفْهَا وَيُؤْتِ مِنْ لَّدُنْهُ اَجْرًا عَظِيْمًا ۝٤٠

Artinya: *"Sungguh, Allah tidak akan menzalimi seseorang walaupun sebesar dzarrah, dan jika ada kebajikan (sekecil dzarrah), niscaya Allah akan melipatgandakannya dan memberikan pahala yang besar dari sisi-Nya."*

Dalam ayat ini, ma'na "ganda" berarti berpasangan yang mana menjadi petunjuk dalam partikel sebuah atom atau konstituennya. Kunci penting dalam studi mengenai fenomena yang diamati di dunia kuantum adalah dualita gelombang-partikel dari partikel subatomiknya. Elektron dan foton diamati berperilaku sebagai partikel dan gelombang. Ayat diatas secara khusus menyebutkan ma'na "ganda" untuk memberikan indikasi tentang adanya dua jenis energi yang berkaitan dengan perilaku tersebut. Sesuai dengan konsep berpasangan, kedua energi berperilaku sebagai pasangan dengan cara yang berlawanan. Energi dalam bentuk massa yang ada dalam partikel subatomic secara intrinsik dibangun di dalamnya. Benda-benda kecil bisa menjadi alasan perilaku dualita gelombang partikel. Fisikawan dengan jelas menegaskan keberadaan muatan listrik dan medan magnet yang diinduksi dalam sebuah electron karena putaran partikel. Analisis lebih lanjut diperlukan untuk mengetahui bagaimana muatan listrik dan medan magnet di dalam partikel (Watini & Devana. 2020).

Berdasarkan penemuan konsep kuantum, Einstein memperkenalkan Teori relativitas umum yang menjelaskan tentang fenomena gravitasi dikaitkan dengan kelengkungan ruangwaktu. Salah satu penerapan teori relativitas umum yang menarik adalah untuk menganalisis perilaku gravitasi dari lubang hitam. Bintang massif yang memiliki kecepatan lepas dengan nilai yang lebih besar dari kecepatan cahaya, akan menyebabkan cahaya tidak bisa lolos dari tarikan gravitasinya. Sehingga sesuai dengan gambaran TRU, medan gravitasi yang sangat kuat yang dihasilkan oleh sebuah lubang hitam akan menyebabkan ruang waktu disekitarnya menjadi sangat melengkung yang menyerupai lubang.

Lubang hitam Reissner Nordstrom menggambarkan geometri ruangwaktu yang mengelilingi lubang hitam berbentuk bola bermuatan tidak berputar. Lubang hitam RN juga mewakili peralihan antara ruangwaktu Schwarzchild dan Kerr. Dimana Lubang hitam RN pada tingkat kuantum dengan partikel bermuatan dalam beberapa hal akan menyerupai atom hydrogen. Keberadaan tingkat energi didalam lubang hitam membuka kemungkinan, bahwa lubang hitam menggunakan metode kuantum. Dalam kasus lubang hitam bermuatan, tingkat electron tidak hanya berada diluar tetapi juga didalam lubang hitam.

Pada penelitian sebelumnya diketahui bahwa solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung ini akan diselesaikan dengan pemisahan variabel. Ketergantungan waktu dan sudut dari fungsi gelombang spinor akan diperoleh dengan integrasi eksplisit. Dimana diketahui bahwa medan spinor yang merambat dalam ruangwaktu melengkung ternyata tidak menghadirkan keadaan terikat muatan listrik dalam medan gravitasi kuat. Maka dari itu, akan digambarkan keadaan terikat partikel bermuatan dalam ruangwaktu melengkung. Dalam hal ini apakah electron mengalami tarikan gravitasi atau tolakan Coulomb yang ditimbulkan oleh massa dan muatan gravitasi. Lalu, gaya apa yang mempunyai pengaruh lebih kuat pada partikel bermuatan.

Pada penelitian ini secara teoritis akan dicari bagaimana formulasi persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan koordinat metriks Reissner Nordstrom. Berangkat dari penelitian sebelumnya yang mengkaji kasus persamaan Klein Gordon dan persamaan Dirac dalam Ruangwaktu Kerr (Pambudi

2022), maka dalam penelitian ini akan dilanjutkan dalam kasus ruangwaktu Reissner Nordstrom. Selanjutnya, dilakukan pemisahan variabel sebagai solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu RN secara analitik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, penelitian ini merumuskan masalah yang diuraikan sebagai berikut:

1. Bagaimana formulasi persamaan Dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrik Reissner Nordstrom?
2. Bagaimana solusi persamaan Dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordström?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mencari formulasi persamaan Dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrik Reissner Nordstrom.
2. Untuk memperoleh solusi persamaan Dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom.

1.4 Batasan Masalah

Pembatasan yang dilakukan oleh penelitian ini yaitu:

1. Penelitian ini dibatasi pada persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metric Reissner Nordström.
2. Digunakan metriks Reissner Nordstrom yang mempunyai muatan.

1.5 Manfaat Penelitian

Setelah menyelasaikan telaah ini, diharapkan penelitian ini dapat memberikan manfaat, antara lain:

1. Manfaat Akademis

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dan wawasan kepada masyarakat dalam mengkaji persamaan Dirac dalam ruangwaktu melengkung khususnya dengan menggunakan koordinat metric Reissner Nordström.

2. Manfaat Teoritis

Hasil penilitian ini diharapkan dapat menjadi refrensi dalam penelitian selanjutnya khususnya dalam bidang fisika kuantum relativistic. Seperti fenomena-fenomena yang dihasilkan dari lubang hitam, yaitu efek Casimir dan superradiasi pada partikel fermion.

BAB II

DASAR TEORI

2.1 Teori Kuantum

Bermula dari mekanika klasik yang diformulasikan oleh Newton dan selanjutnya dikembangkan oleh Lagrange, Hamilton dan lain-lainnya sangat sukses dalam menjelaskan gerak dinamis benda-benda makroskopis. Demikian pula teori tentang cahaya sebagai gelombang yang dikembangkan oleh A. J. Fresnel, teori gelombang elektromagnet oleh J. C. Maxwell dan percobaan Hertz tentang emisi gelombang elektromagnet oleh osilator muatan-muatan listrik. Namun, pada akhir abad 19 teori-teori klasik tersebut tidak dapat digunakan untuk memberi penjelasan yang memuaskan bagi sejumlah fenomena interaksi radiasi-materi. Ahli fisika telah mencoba memecahkan persoalan tentang struktur atom, electron, radiasi dengan fisika klasik. Namun, tidak berhasil menerangkan fenomena-fenomena tersebut. Karena itu para ahli fisika mencari ilmu dan model-model lain yang baru yang dapat menerangkan fenomena-fenomena mikroskopis itu (Siregar 2018).

Sejarah perkembangan fisika memiliki karakteristik periode sains modern dengan sifat pengamatan sangat mikroskopis. Paradigma yang berkembang adalah paradigma atomic. Fisika modern ditandai dengan pemikiran-pemikiran baru oleh ilmuwan fisika, dimana pemikiran baru ini lebih luas dari pemikiran di zaman fisika klasik. Dengan kelamahan fisika klasik, fisika modern mampu mengembangkan dan menjawab berbagai permasalahan yang tidak terjawab oleh pemikiran fisika klasik. Fisika modern dikembangkan pada awal abad ke 20, bermula dari sejak Max Planck yang mengemukakan gagasannya mengenai mekanika kuantum atau fisika kuantum.

2.2 Teori Kuantum Relativistik

2.2.1 Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Minkowski

Persamaan dirac merupakan persamaan gelombang relativistic yang dirumuskan oleh fisiskawan kuantum kebangsaan Inggris, P. A. M. Dirac pada tahun 1928. Dimana persamaan ini memiliki fungsi yang sama seperti gelombang yang dirumuskan oleh Erwin Schrodinger yaitu untuk menemukan solusi fungsi gelombang kuantum yang dapat mendeskripsikan suatu partikel pada skala mikroskopik ketika sedang berada pada kondisi tertentu (P. W. Atkins 1997).

Pada dasarnya partikel elementer dibagi menjadi dua golongan berdasarkan sifat spin yang dimilikinya boson dan fermion. Boson merupakan golongan partikel yang berspin kelipatan bulat, sedangkan fermion adalah partikel yang berspin kelipatan ½. Ketika partikel bergerak dalam suatu medan dengan kecepatan relativistic, efek spin partikel yang berasosiasi dengan medan eksternal juga diperhitungan. Untuk partikel boson, persamaan gelombang yang dapat mendeskripsikan keadaan partikel dalam kondisi tertentu adalah persamaan Klein Gordon, sedangkan untuk fermion spin ½ adalah persamaan Dirac yang solusinya digunakan untuk meninjau partikel dalam kondisi relativistic. Spin merupakan momentum sudut intrinsik partikel. Efek spin dapat ditunjukkan secara eksperimental ketika partikel bergerak dalam suatu medan magnetic homogen, seperti yang ditunjukkan dalam eksperimen Stern-Gerlach. Efek ini dikarenakan oleh momen magnetic yang dimiliki akibat rotasi partikel bermuatan terhadap sumbunya (P. W. Atkins, 1997).

Persamaan Dirac ini muncul sebagai solusi dalam mengatasi beberapa permasalahan yang ada pada persamaan Klein Gordon. Terdapat beberapa permasalahan dalam persamaan Klein-Gordon. Pertama, rapat probabilitas (ρ)

terdiri dari suku positif (+) dan negative (-) yang mana artinya (ρ) tidak terjamin selalu bernilai (+) sehingga tidak selalu memiliki arti fisis. Kedua, persamaan Klein Gordon diturunkan dari bentuk:

$$E = m_o c^2 + pc \tag{2.1}$$

Dimana solusi dari E,

$$E = \pm\sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{2.2}$$

Adanya kemungkinan munculnya energi negative. Ketiga, persamaan Klein-Gordon mengandung turunan kedua terhadap waktu sehingga konsekuensinya dibutuhkan integral 2x untuk mendapatkan x terhadap 2 derajat kebebasan yang tidak ada di persamaan Schrödinger (Griffiths, 2004).

Dirac mengurangi adanya 2 derajat kebebasan menjadi hanya 1 (dengan tujuan agar serupa dengan persamaan Schrödinger). Dirac mengganti turunan orde 2 menjadi orde 1. Penurunan persamaannya dimulai dari persamaan Klein Gordon yang merupakan turunan ke dua terhadap waktu.

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \nabla^2\Psi = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Psi = 0 \tag{2.3}$$

Jika komponen p^μ disubsitusikan kedalam persamaan diatas, maka

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2c^2\right) = (\beta^k p_k + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \tag{2.4}$$

Dimana $\beta^k \, dan \, \gamma^\lambda$ adalah koefisien delapan untuk menentukan †. Jika bagian kanan dari persamaan dikalikan maka diperoleh nilai

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \gamma^k\gamma^\lambda p_k p_\lambda \\ (\gamma^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2(p^0)^2 + (\gamma^1)^2(p^1)^2 \\ &\quad +(\gamma^2)^2(p^2)^2 + (\gamma^3)^2(p^3)^2 \\ &\quad + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p_0p_1 \\ &\quad + (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)p_0p_2 \\ &\quad + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p_0p_3 \\ &\quad + (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)p_1p_2 \\ &\quad + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p_1p_2 \\ &\quad + (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)p_2p_3 \\ (\gamma^0)^2 = 1 \, dan \, (\gamma^1)^2 &= (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = i \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(\gamma^u \gamma^v + \gamma^v \gamma^u) = 0, untuk\ u \neq v$$
$$(\gamma^u \gamma^v) = 2g^{uv}$$

Bentuk dari tensor g^{uv} adalag tensor matriks Minkowski

$$g^{uv} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Dengan menggunakan kaidah Bjorken dan Drell yaitu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Dimana $\sigma^i (i = 1,2,3)$ adalah bentuk matriks pauli. Hubungan relativitas antara energi dan momentum memiliki factor

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2 c^2\right) = (\gamma^k p_k + mc)\left(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\right) = 0 \quad (2.8)$$

Jika hasil dari persamaan diatas nol maka nilai salah satu faktornya juga bernilai nol

$$(\gamma^k p_k + mc) = 0 \quad (2.9)$$

Jika disubsitusikan operator $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ dan fungsi gelombang ψ pada persamaan diatas maka didapatkan persamaan dirac (Pambudi, 2022).

$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0$$

Atau

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi - i\hbar\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi \quad (2.10)$$

Jika diturunkan sekali lagi harus memenuhi persamaan Klein Gordon. Karena apabila persamaan yang telah dimodifikasi, harus tetap memenuhi persamaan klasiknya. Maka, persamaan umum dirac menjadi

$$i\hbar \frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} = \beta mc^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - i\hbar\vec{\alpha}\vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.11)$$

Dengan menggunakan aturan notasi natural unit, ђ = 1, c = 1 persamaan (2.11) menjadi

$$i\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = \beta m\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\vec{\alpha}\vec{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.12)$$

Dari persamaan umum Dirac, dikali –i maka ђ = 1, c = 1

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\beta m\frac{\partial\psi}{\partial t} - \vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi \quad (2.13)$$

Kemudian persamaan (2.12) disubsitusikan ke persamaan (2.13)

$$i\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = \beta m\left(-i\beta m\frac{\partial\psi}{\partial t} - \vec{\alpha}\vec{\nabla}\Psi\right) - i\vec{\alpha}\vec{\nabla}\left(-i\beta m\frac{\partial\psi}{\partial t} - \vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi\right)$$

$$i\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = -i\beta^2 m^2\psi - m\beta\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi - m\vec{\alpha}\beta\vec{\nabla}\psi - i\vec{\alpha}^2\vec{\nabla}^2\psi$$

$$i\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = -i\beta^2 m^2\psi - m(\beta\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\beta)\vec{\nabla}\psi - -i\left(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right)^2\psi$$

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = -\beta^2 m^2\psi - im(\beta\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\beta)\vec{\nabla}\psi - \left(\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right)^2\psi$$

Untuk persamaan Klein Gordon

$$-ђ^2\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = -ђ^2 c^2\vec{\nabla}^2\psi - m^2 c^4\psi$$

$$-\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}^2\psi - m^2\psi$$

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2\psi - m^2\psi \quad (2.14)$$

Jika persamaan (2.10) dibandingkan dengan persamaan Klein Gordon (2.14) maka telah sesuai, namun dengan syarat:

$$\beta^2 = 1$$

$$\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \qquad \text{dimana } = \{1,2,3\}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_{x\hat{\imath}} + \alpha_{y\hat{\jmath}} + \alpha_{z\hat{k}}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha_{1\hat{\imath}} + \alpha_{2\hat{\jmath}} + \alpha_{3\hat{k}}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial\hat{\imath}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{\jmath}}{\partial y} + \frac{\partial\hat{k}}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\alpha\nabla} = \alpha_{1\hat{\imath}} + \alpha_{2\hat{\jmath}} + \alpha_{3\hat{k}}$$

$$\left(\overrightarrow{\alpha\nabla}\right)^2 = \left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{\alpha\nabla}\right)^2 = {\alpha_1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + {\alpha_2}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + {\alpha_3}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \alpha_1\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \alpha_1\alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \alpha_2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \alpha_2\alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \alpha_3\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \alpha_3\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}$$

evaluasi $\left(\overrightarrow{\alpha\nabla}\right)^2$

$$\begin{gathered} {\alpha_1}^2 = 1 \\ {\alpha_2}^2 = 1 \\ {\alpha_3}^2 = 1 \end{gathered}$$

$${\alpha_i}^2 = 1 \qquad \text{dimana i = 1,2,3}$$

$$\begin{gathered} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0 \end{gathered}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \qquad \text{dimana}\{i,j\} = \{1,2,3\},\ i \neq j=0$$

Sehingga persamaan Dirac menjadi

$$\begin{gathered} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2\psi - i\hbar\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\beta mc^2 - i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla}\right)\psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{dirac}\psi \end{gathered} \tag{2.15}$$

Dimana ψ dapat direpresentasikan dengan matriks dan dapat terpenuhi jika matriks min ordo 4x4. Jika dipilih $\alpha\ dan\ \beta$ maka dapat jadi matriks sehingga tidak dapat dibolak balik. Sedangkan posisi $\alpha\ dan\ \beta$ dalam persamaan umum dirac dapat bertukar tempat sehingga menjadi vector. Maka ψ menjadi matriks kolom, dimana harus memenuhi persamaan Klein Gordon (Pambudi 2022).

2.3 Teori Relativitas Umum

Teori Relativitas Umum adalah salah satu teori fisika modern yang cukup besar peranannya dalam menerangkan struktur ruangwaktu dan jagad raya. Teori ini memiliki persyaratan matematik berupa analisis tensor. Sebelum teori Relativitas Umum (TRU) diperkenalkan oleh Einstein pada tahun 1915, orang mengenal sedikitnya tiga hukum gerak yaitu mekanika Newton, relativitas khusus dan gravitasi newton. Mekanika Newton sangat berhasil di dalam menerangkan sifat gerak benda berkelajuan rendah. Namun mekanikan ini gagal untuk benda yang kelanjuannya mendekati laju cahaya. Di samping itu, transformasi Galileo gagal apabila diterapkan pada hukum-hukum seperti persamaan Maxwell yang sifatnya menjadi tidak kovarian di dalam kerangka inersial. Kekurangan ini ditutupi oleh Einstein dengan mengemukakan Teori Relativitas Khusus (TRK).

Teori Relativitas Khusus Einstein berhasil menerangkan fenomena benda saat melaju mendekati laju cahaya. Di samping itu TRK berhasil merumuskan kekovarianan persamaan Maxwell di sebarang kerangka inersial dengan menggunakan transformasi Lorentz sebagai pengganti transformasi Galileo. Hukum gravitasi Newton berhasil menerangkan fenomena gerak benda-benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antar benda-benda tersebut dengan ketelitian tinggi. Namun sayangnya, hukum ini tidak konsisten dengan TRK Jika sebuah benda digerakkan maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah dalam sekejap, atau terjadi aksi spontan.

Einstein berkali-kali mencoba merumuskan teori gravitasi yang konsisten atau kompatibel dengan Teori Relativitas Khusus. Upayanya di tahun 1915 menghasilkan Teori Relativitas Umum (TRU). Ia mengemukakan saran yang cukup revolusioner bahwa gravitasi bukanlah seperti gaya-gaya yang lain, namun gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruangwaktu karena adanya penyebaran massa dan energi di dalam ruangwaktu tersebut. Teori Relativitas Umum ini dibangun di atas dua asas, yaitu pertama, asas kesetaraan (principle of equivalence) dan kedua, kovariansi umum (general covariance) (Weinberg, 1972).

Teori Relativitas Umum meramalkan cahaya bintang yang melewati sebuah benda langit yang masif, maka cahaya bintang tersebut akan dibelokkan. Gravitasi bumi bukan menjadi pengaruh membeloknya cahaya bintang melainkan ruangwaktu di sekitar matahari tersebut melengkung. Perkembangan dalam dunia relativitas menghasilkan Teori Relativitas Umum yang mampu memberikan 9 pandangan yang baru mengenai konsep ruang-waktu. Konsep yang menjelaskan ruang-waktu dapat melengkung jika didalamnya terdapat materi massif (Hernani, 2021).

2.3.1 Teori Relativitas Umum dalam Kajian Islam

Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur’an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur’an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur’an. Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar. Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur’an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur’an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur’an. Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar. Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur’an dengan teori relativitas, maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur’an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur’an.

Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar. Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur'an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur'an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur'an. Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur'an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur'an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur'an. Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur'an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat Al-Qur'an yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur'an. Kemudian, dalam melakukan analisis terhadap teori relativitas khusunya perihal keabsolutan kecepatan cahaya dengan digunakan Al-Quran sebagai tinjauan, sehingga bila terjadi perbedaan nilai/hasil maka dianggap konsep yang terdapat pada Al-Quran adalah yang benar.

Untuk mengetahui adanya hubungan antara Al-Qur'an dengan teori relativitas maka perlu diselidiki adanya ayat-ayat yang mendukung atau menyatakan hal senada dengan teori relativitas serta apakah teori relativitas dapat diterapkan dalam Al-Qur’an. Teori Relativitas Umum (TRU) mampu menjelaskan fenomena-fenomena astronomis seperti benda-benda massif baik berupa bintang-bintang, meliputi katai putih (white dwarf), bintang neutron (neutron star), lubang hitam (black holes) dan quasar termasuk elemen struktur besar objek fisika berupa jagad raya ini. Namun dalam kasus ini, yang akan dibahas mengenai lubang hitam yang merupakan bintang massif yang mempunyai gravitasi yang sangat kuat sehingga cahaya tidak dapat keluar. Dalam QS. An-Nur ayat 35 menjelaskan kebesaran Allah dalam menciptakan bintang sebagai berikut:

اَللّٰهُ نُوْرُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِۗ مَثَلُ نُوْرِهٖ كَمِشْكٰوةٍ فِيْهَا مِصْبَاحٌۗ اَلْمِصْبَاحُ فِيْ زُجَاجَةٍۗ اَلزُّجَاجَةُ كَاَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُّوْقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُّبٰرَكَةٍ زَيْتُوْنَةٍ لَّا شَرْقِيَّةٍ وَّلَا غَرْبِيَّةٍۙ يَّكَادُ زَيْتُهَا يُضِيْۤءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌۗ نُوْرٌ عَلٰى نُوْرٍۗ يَهْدِى اللّٰهُ لِنُوْرِهٖ مَنْ يَّشَاۤءُۗ وَيَضْرِبُ اللّٰهُ الْاَمْثَالَ لِلنَّاسِۗ وَاللّٰهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيْمٌ ۙ.

Artinya: *“Allah (pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. Perumpamaan cahaya-Nya, seperti sebuah lubang yang tidak tembus, yang di dalamnya ada pelita besar. Pelita itu di dalam tabung kaca (dan) tabung kaca itu bagaikan bintang yang berkilauan, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang diberkahi, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di timur dan tidak pula di barat, yang minyaknya (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. Cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah memberi petunjuk kepada cahaya-Nya bagi orang yang Dia kehendaki, dan Allah membuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.”*

Bintang yang mempunyai gravitasi yang tinggi tidak dapat bergerak dan tak nampak. Namun keberadaannya masih dapat diketahui disebabkan mampu menarik benda-benda yang ada disekitar. Sifat bintang yang memiliki gravitasi yang tinggi sehingga mampu menarik benda sekitar dijelaskan di QS. At Takwir ayat 15 – 16 sebagai berikut

فَلَآ أُقۡسِمُ بِٱلۡخُنَّسِ ١٥ ٱلۡجَوَارِ ٱلۡكُنَّسِ ١٦

Artinya: *"Aku bersumpah demi bintang-bintang, yang beredar dan terbenam"*.

2.4 Persamaan Medan Einstein

Sehubungan dengan gagalnya mekanika Newton dalam kelajuan tinggi, teori gravitasi Newton pun hanya dapat menjelaskan fenomena gravitasi dalam limit nonrelativistik. Hal ini menuntun Albert Einstein untuk membangun teori gravitasi yang kompatibel dengan relativitas khusus. Berdasarkan relativitas khusus, materi dan energi adalah setara sehingga energi murni yang tidak memiliki massa diam sekalipun mesti memberikan efek setara. Karena radiasi dan medan listrik memiliki energi, maka radiasi, medan listrik, atau bentuk energy lainnya juga menghasilkan medan gravitasi (Gautama, 2018).

Didasari oleh asas kesetaraan, Einstein berasumsi distribusi materi dan energy melengkungkan ruangwaktu di sekitarnya. Efek kelengkungan ruangwaktu inilah yang kita amati sebagai gravitasi. Dengan demikian, gravitasi dalam relativitas umum ialah efek dari kelengkungan ruangwaktu akibat kehadiran materi-energi di dalamnya. Dapat pula kita nyatakan dalam ungkapkan materi-energi melengkungkan ruangwaktu di sekitarnya, sedangkan kelengkungan ruangwaktu menentukan pergerakan materi di dalamnya. Tentunya, untuk menentukan relasi kuantitatif antara materi dan energi dengan kelengkungan ruangwaktu (geometri) yang ditimbulkan, diperlukan suatu persamaan. Berdasarkan postulat relativitas umum yang telah ia gagas sejak 1911, Einstein berupaya merumuskan persamaan gravitasi yang memenuhi konservasi energi, kovarian terhadap transformasi koordinat, dan tentunya mesti tereduksi menjadi bentuk yang setara dengan hukum gravitasi Newton dalam limit medan lemah. Persamaan medan Einstein merumuskan jalinan antara geometri ruangwaktu, yang disajikan dalam metrik, dengan kontribusi materi-energi dan medan di dalamnya. Dengan mengetahui geometri dari suatu ruangwaktu maka dinamika partikel (masif maupun foton) dalam di dalamnya dapat diketahui. Kita dapat pula bekerja dengan cara sebaliknya, dengan menetapkan geometri ruangwaktu (misalnya berdasarkan dinamika yang teramati), kita dapat mencari tahu materi dan energi yang hadir di sana. Adapun bentuk persamaan Medan Einstein dituliskan (Gautama, 2018).

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

Salah satu implikasi yang cukup spektakuler adalah munculnya gagasan lubang hitam (black hole) yang dibatasi oleh event horizon dimana segala peristiwa yang terjadi di dalam event horizon tidak dapat diamati dari luar. Lubang hitam adalah sebuah konsep matematik yang muncul dari solusi persamaan gravitasi Einstein dengan memiliki sifat-sifat fisis tertentu. Karena itulah orang berupaya untuk mencari, adakah lubang hitam di jagad raya ini (Anugraha, 2011).

2.4.1 Aksi Hilbert-Einstein

Tahun 1915, Hilbert mengemukakan gagasannya berdasarkan pekerjaan Einstein sebelumnya. Keuntungan dari perumusan dengan prinsip aksi adalah kita dapat memperoleh jalinan sistematis antara tensor stres-energi-momentum dengan Lagrangian materi; suatu alat yang sangat ampuh dalam menjabarkan dinamika dan energi sistem serta telah dipahami dengan sangat baik. Dalam mekanika klasik, besaran aksi adalah integral terhadap waktu dari lagrangian system.

$$S = \int L \, dt \tag{2.17}$$

Jika lagrangian L diganti menjadi rapat lagrangian, $L = \frac{dL}{dv_3}$, maka besaran aksi dapat dituliskan kembali, yaitu:

$$S = \int L \, dv_3 dt = \int L\sqrt{-g} d^4x \tag{2.18}$$

Dengan $L\sqrt{-g}d^4x$ adalah integral volume 4, dimana $\sqrt{-g}$ tidak lain adalah Javobian untuk ruangwaktu setelah menggabungkan komponen ruang ($dv_3 = J(x')d^3x$ dan komponen waktu (dt). Lagrangian dan rapat lagrangian adalah skalar.

Perumusan aksi dalam relativitas umum dapat dilakukan terlebih dahulu memecah Lagrangian system ke dalam komponen gravitasi dan materi energy.

$$S = -\int \left(L_g + L_M\right)\sqrt{-g}\; d^4x \tag{2.19}$$

Dengan $L = L_g + L_M; L_M$ adalah rapat Lagrangian materi; dan L_g adalah rapat lagrangian gravitasi, yang mana berupa skalar Ricci:

$$L_g = R = -\frac{RC^4}{16\pi G} = -\frac{R}{2k}$$

atau

$$\delta S_{EH} = \delta \int d^4x\sqrt{-g}\, R \tag{2.20}$$

Persamaan diatas dikenal sebagai aksi dan Lagrangian Hilbert (atau disebut juga dengan aksi Einstein Hilbert). Persamaan tersebut dapat dipecahkan menjadi:

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int dx^4 \delta(\sqrt{-gg^{ab}}\, R_{ab} \\ &= \int d^4x\sqrt{-gg^{ab}}\,\delta R_{ab} + \int d^4x\sqrt{-g}\,\delta R_{ab} g^{ab} + \\ &\quad \int d^4x R\delta\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dievaluasi terlebih dahulu suku pertama, dicari nilai δR_{ab}, dikarenakan:

$$R_{ab} = R^c_{acb} = \partial_c \Gamma^c_{ab} - \partial_c \Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ba} - \Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac} \tag{2.22}$$

Maka variasinya:

$$\begin{aligned}\delta R_{ab} &= \partial_c \delta\Gamma^c_{ab} - \partial_b \delta\Gamma^c_{ac} + \Gamma^d_{ba}\delta\Gamma^c_{cd} + \Gamma^c_{cd}\delta\Gamma^d_{ba} - \Gamma^d_{ac}\delta\Gamma^c_{bd} - \\ &\quad \Gamma^c_{bd}\delta\Gamma^d_{ac} \\ &= \left(\partial_c \delta\Gamma^c_{ab} + \Gamma^c_{cd}\delta\Gamma^d_{ba} - \Gamma^d_{ac}\delta\Gamma^c_{bd} - \Gamma^d_{bc}\delta\Gamma^c_{ad}\right) - (\partial_b \delta\Gamma^c_{ac} + \\ &\quad \Gamma^c_{bd}\delta\Gamma^d_{ac} - \Gamma^d_{ba}\delta\Gamma^c_{cd} - \Gamma^d_{bc}\delta\Gamma^c_{ad} \\ &= \nabla_c \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_c \delta\Gamma^c_{ac}\end{aligned} \tag{2.23}$$

Maka suku pertama variasi aksi:

$$\begin{aligned}\delta S_{EH_1} &= \int d^4x\sqrt{-g}\; g^{ab}(\nabla_c \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_c \delta\Gamma^c_{ac} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_c(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}) - \delta\Gamma^c_{ab}\nabla_c g^{ab} - \\ &\quad \nabla_b(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ac}) + \delta\Gamma^c_{ac}\nabla_b g^{ab}] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_c(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}) - \nabla_b(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ac})] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_c\left[(g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}) - g^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}\right]\end{aligned} \tag{2.24}$$

Menggunakan teorema stokes, didapat:

$$\delta S_{EH_1} = \oint_{permukaan} d^3x\sqrt{-hn_c}\,\left[g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - g^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}\right] \tag{2.25}$$

Dimana n_c adalah vector normal dari permukaan ruang 4, dan tensor h_{ab} adalah metric yang diasosiakan dengan permukaan ruang 4 dimana:

$$h_a b = g_{ab} + n_a n_b \tag{2.26}$$

Integral permukaan pada ruang 4 ini bernilai nol, hal ini dikarenakan mengikuti teorema divergensi, yang mengatakan bahwa variasi di permukaan (tak berhingga) hilang, atau bernilai nol. Sehingga:

$$\delta S_{EH(1)} = 0 \tag{2.27}$$

Sekarang untuk suku ketiga variasi aksi, dicari nilai $\delta\sqrt{-g}$. Variasi ini menghasilkan:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}1/\sqrt{-g}\delta g \tag{2.28}$$

Telah diketahui sebelumnya dari persamaan, didapat:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}gg^{ab}dg_{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}dg_{ab} \tag{2.29}$$

Dan dari hubungan, didapat:

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \int d^4x\sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + \int d^4xR\delta\sqrt{-g}\\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right)\delta g^{ab}\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dengan prinsip aksi terkecil $\delta S = 0$, ini memberikan persamaan medan Einstein pada ruang vakum:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{2.31}$$

Dikarenakan suku pertama diselesaikan, maka variasi suku kedua memberikan:

$$\begin{aligned}\delta S_M &= -2k\int d^4x\delta(\sqrt{-g}L_M)\\ &= -2k\int d^4x\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}}\delta g^{\mu\nu}_{,a}\right\}\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$= -2k \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}} \delta g^{\mu\nu} \right]_{,a} - \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}} \right]_{,a} \delta g^{\mu\nu} \right\}$$

$$= -2k \int d^4x \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}} \right]_{,a} \right\} \delta g^{\mu\nu}$$

Dengan lagi-lagi pada integral permukaan $\delta g^{\mu\nu} = 0$, Suku dalam kurung, dilihat sebagai persamaan euler-lagrange untuk tensor energy momentum, dimana:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left[\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_M\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}}\right]_{,a} \qquad (2.33)$$

sehingga,

$$\delta S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left(kT_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.34)$$

Maka prinsip aksi terkecil memberikan persamaan medan Einstein:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \qquad (2.35)$$

2.5 Ruangwaktu

2.5.1 Ruangwaktu Datar

Dalam makalah ini, digunakan huruf-huruf dari abjad romawi modern (a, b, c…) untuk menunjukkan indeks ruangwaktu datar yang disebut indeks Lorentz. Dipertimbangkan sejumlah ruangwaktu dimensi, yang dinyatakan dalam D. Dengan didefinisikan vector Lorentz kovarian dan kontravarian sebagai berikut:

$$A^a = (A^0, A^1, \dots, A^{D-1})$$

$$A_a = \left(A_0, A_1, \dots, A_{D-1}\right) = \left(A^0, -A^1, \dots, -A^{D-1}\right) = \eta_{ab}A^b, \qquad (2.36)$$

Dimana η_{ab} adalah metric Minkowski ruangwaktu datar. Setiap indeks yang berulang akan disingkat menjadi indeks bawah dan satu indeks atas. Sedangkan koordinat pertama A^0 berhubungan dengan waktu. Untuk koordinat lainnya berhubungan dengan dimensi ruang (D-1). Dalam ruangwaktu dimensi metriks Minkowski, yaitu:

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

Dengan mendefinisikan indeks atas dan bawah, menjadi lebih mudah untuk bekerja dengan besaran relativistic. Sekarang didefinisikan $x^a = (ct, \vec{x})\ dan\ p^a = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ menjadi vector posisi dan momentum Lorentz, yang masing-masing mencakup waktu dan energy. Menurut teori relativistic $x^a\ dan\ p^a$ harus bertransformasi sebagai vector Lorentz. Setiap vector Lorentz harus bertransformasi dengan cara yang sama dengan transformasi Lorentz apapun, sehingga akan mendapatkan vector Lorentz yang sama dalam kerangka yang berbeda. Transformasi Lorentz adalah transformasi linear dari koordinat yang mempertahankan hasil kali dalam dari dua vector Lorentz, $A_a B^a$. Hasil kali ini adalah skalar, sehingga dapat dikatakan skalar invariant dalam transformasi Lorentz (Landau, 1968).

Dapat dinyatakan transformasi sebagai dua-tensor Λ^a_b, dan ditemukan kondisi diatasnya sehingga produk dalam sama di setiap bidang Lorentz:

$$A'^a = \Lambda^a_b A^b,$$

$$\Lambda^c_a \eta_{cd} \Lambda^d_b = \eta_{ab} \qquad (2.38)$$

Untuk menguji persamaan dirac yang ditemukan adalah invariant Lorentz. Transformasi yang sangat kecil, $\Lambda^a_b = \delta^a_b + \epsilon^a_b\ dimana\ \epsilon^a_b \ll 1$ sehingga koordinatnya hanya berubah sedikit. Memasukkan Λ^a_b kedalam persamaan tersebut hingga pada bentuk orde yang pertama δ^a_b, yang dinamakan ϵ_{ab} adalah antisimetri.

$$\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba} \tag{2.39}$$

Ketika efek transformasi Lorentz sangat kecil, vector Lorentz A^a ditransformasikan oleh $\delta A^a = \epsilon_b^a A^a$, dimana ϵ_{ab} adalah parameter kecil antisimetri arbiter konstan. Turunan terhadap kontravarian berubah seperti vector kovarian dan sebaliknya. Dengan demikian digunakan notasi kompak:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \to \partial_a, \frac{\partial}{\partial x_a} \to \partial^a, \tag{2.40}$$

Disederhanakan notasi dengan menggunakan unit $\hbar = c = 1$.

2.5.2 Ruangwaktu Melengkung

Diketahui bahwa cahaya bergerak dengan mengikuti lintasan geodesiknya, yaitu lintasan dengan jarak terdekat. Pada ketiadaan medan gravitasi, pengamat melihat bahwa cahaya melintasi garis lurus antar dua titik, namun, pada saat diberi medan gravitasi yang kuat, atau ekuivalen dengan roket yang diberi percepatan yang sangat besar, lintasan cahaya teramati tidak lagi bergerak dengan lintasan garis lurus. Jika cahaya benar mengikuti lintasan geodesic pada ruang, maka dengan tidak lurusnya lintasan, ruang itu tidak lagi datar. (Jayawiguna. 2019)

Ruangwaktu melengkung akan dilihat dari metriknya. Pertama, geodesik suatu ruang dinyatakan sebagai:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.41}$$

Masing-masing pada koordinat kartesian, silinder, dan bola adalah $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$; $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, \rho^2, 1)$; $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, r^2 \sin^2 \theta)$. Pada ruangwaktu datar terpenuhi bahwa $\partial_a \eta_{\mu\nu} = 0$, namun pada ruang melengkung deviasi metriknya tidak bernilai nol $\partial_a \eta_{\mu\nu} \neq 0$. Sehingga notasi metric ruang melengkung ini ditulis $\eta_{\mu\nu}.g_{\mu\nu}$ disebut sebagai Tensor Metrik Riemannian (Lippoldt n.d.).

2.5.3 Tensor

Tensor adalah perluasan dari vektor, sebagaimana vektor adalah perluasan dari skalar. Oleh karena itu, tensor juga memiliki bentuk yang tetap dalam sembarang pemilihan kerangka koordinat sebagaimana halnya vektor. Dengan menggunakan kuantitas tensor, kita dapat mengkonstruksi persamaan-persamaan yang menyatakan hukum alam dengan bentuk tetap dalam sembarang pemilihan koordinat. Sebagian besar penjabaran relativitas umum melibatkan persamaan tensor. Oleh karena itu, kita perlu mempelajari analisis tensor terlebih dahulu untuk dapat mempelajari relativitas umum (Gautama, 2018).

Tensor mempunyai indeks lebih dari satu. Dimana banyaknya indeks disebut dengan rank *r* dengan jumlah komponen N^r. Tensor rank dua kontravarian $A^{\mu\nu}$, kovarian $A_{\mu V}$, dan campuran A_{ν}^{μ} didefinisikan oleh sifat transformasi komponennya.

2.5.4 Simbol Chrisstofel

Persamaan symbol christoffel memenuhi:

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{k} = \frac{1}{2} g^{\mu k} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \tag{2.42}$$

Dimana α, β, μ, ν merupakan indeks = 1, 2, 3…

2.5.5 Persamaan Geodesik

Geodesik dalam relativitas diartikan sebagai jarak atau lintasan terpendek yang ditempuh sebuah partikel dalam suatu geometri atau ruangwaktu tertentu. Pada ruang datar lintasan terpendek berupa garis lurus, sedangkan pada ruang melengkung jarak terpendek berupa garis melengkung pada permukaan lengkung.

Jadi lintasan geodesik bergantung pada bentuk geometri yang dilaluinya. Ditinjau dua buah titik dalam ruang sembarang berdimensi-N, yang berada pada koordinat (dalam notasi vector-4) yang itu $x^\mu\ dan\ x^\mu + dx^\mu$. Jarak kedua titik tersebut memenuhi persamaan:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.43}$$

Dengan $\mu, \nu = 1,2,3, \dots \dots \dots N\ dan\ g_{\mu\nu}$ adalah tensor metriks kovarian. Jika $x^\mu = \mu\ (t)$ dengan t adalah suatu parameter maka diperoleh:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt^2 \tag{2.44}$$

Sehingga jarak kedua titik menjadi:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt^2 \right)^{1/2} \tag{2.45}$$

Syarat stasioner agar jarak kedua titik bernilai ekstrem maka memenuhi prinsip aksi terkecil dinyatakan dengan:

$$\delta s_{12} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{F} dt = 0 \tag{2.46}$$

Dengan δs_{12} adalah bentuk variasinya. Persamaan merupakan integral aksi fungsi Lagrange $\sqrt{F}$ dan persamaan lintasan t. Jika dibandingkan persamaan maka:

$$F = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt^2 \tag{2.47}$$

dengan menggunakan persamaan Euler Lagrange yaitu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \sqrt{F}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.48}$$

diuraikan menggunakan turunan partial:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial \sqrt{F}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{F}} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{dF}{dt} \right] = 0 \tag{2.49}$$

disini t dapat diambil sama dengan jarak s_{12} sepanjang kurva lintasan. Untuk kasus ini karena s parameter sembarang maka:

$$\frac{dF}{ds} = 0$$
$$\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \tag{2.50}$$

sehingga dari persamaan (2.50) diperoleh:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} = 2g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} \tag{2.51}$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} = \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \tag{2.52}$$

maka persamaan menjadi:

$$2g_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} + 2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\eta}}\frac{dx^{\eta}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \tag{2.53}$$

dengan menggunakan lambang Christoffel jenis pertama serta mengalikannya dengan $g_{\mu\eta}$, persamaan (12) pada akhirnya dapat dituliskan persamaan geodesic sebagai berikut:

$$\frac{d^2x^{\eta}}{\partial \dot{x}^{\mu}} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \tag{2.54}$$

2.6 Geometri Riemannian

2.6.1 Tensor Riemann

Tensor Riemann didefinisikan, sebagai berikut:

$$R^{\beta}_{\lambda\mu\nu} = \left(\partial_{\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\right)\nu^{\lambda} \tag{2.55}$$

Tensor Riemann dibangun dari turunan kovarian orde dua dari sebuah vector. Dimana dalam kalkulus diketahui bahwa turunan orde dua itu menunjukkan kecekungan dari sebuah kurva. Maka dari itu, tensor Riemann menunjukkan kelengkungan dari sebuah manifold. Tensor Riemann ketika dinyatakan dalam bentuk kovarian:

$$R_{\sigma\lambda\mu\nu} = g_{\beta\sigma} R^{\beta}_{\lambda\mu\nu} \tag{2.56}$$

2.6.2 Turunan Kovarian dan Tensor Riemann-Chrisstoffel

Ditinjau turunan terhadap sebuah vector $\vec{V}$ yang secara eksplisit memiliki komponen v^{μ} dan basis $\overrightarrow{e_{\alpha}}$ yaitu:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + v^{\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{e_{\alpha}}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.57}$$

karena $\frac{\partial \overrightarrow{e_{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}$ adalah vector sehingga dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari basis vector dengan kata lain:

$$\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \vec{e}_{\mu} \tag{2.58}$$

dengan $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ adalah symbol Christoffel. Subsitusikan persamaan (2.57) ke persamaan (2.58):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \vec{e}_{\mu} \tag{2.59}$$

karena $\alpha\ dan\ \mu$ pada basis adalah indeks boneka maka indeks μ bias diganti dengan α dan sebaliknya pada suku terakhir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} &= \left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + V^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right) \vec{e}_{\alpha} \\ v^{\alpha}_{;\beta} \vec{e}_{\alpha} &= \left(\partial_{\beta} V^{\alpha} + V^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right) \vec{e}_{\alpha} \\ V^{\alpha}_{;\beta} &= \partial_{\beta} V^{\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_{\mu} \end{aligned} \tag{2.60}$$

dengan $\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \partial_{\beta} v^{\alpha}$ sebagai turunan partial dan v^{α}_{β} adalah turunan kovarian vector kontravarian. Sedangkan turunan kovarian untuk vector kovarian adalah:

$$V_{\alpha;\beta} = \partial_\beta V_\alpha - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_\mu \tag{2.61}$$

selanjutnya, dengan menurunkan kovarian sekali lagi persamaan (2.61) diperoleh:

$$V_{\alpha;\beta\gamma} = \partial_\gamma \left(V_{\alpha;\beta\gamma} \right) - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} V_{\eta;\beta} - \Gamma^{\eta}_{\gamma\beta} V_{\alpha;\eta} \tag{2.62}$$

disubsitusikan persamaan (2.61) kedalam persamaan (2.62):

$$V_{\alpha;\beta\gamma} = \partial_\gamma \left(\partial_\beta V_\alpha - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} V_\mu \right) - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} \left(\partial_\beta V_\eta - \Gamma^{\mu}_{\eta\beta} V_\mu \right) - \Gamma^{\eta}_{\gamma\beta} (\partial_\eta V_\alpha - \Gamma^{\mu}_{\alpha\eta} V_\mu \tag{2.63}$$

dengan menukar indek β dengan γ dan sebaliknya diperoleh:

$$V_{\alpha;\gamma\beta} = \partial_\beta \left(\partial_\gamma V_\alpha - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} V_\mu \right) - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} \left(\partial_\gamma V_\eta - \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma} V_\mu \right) - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma} (\partial_\eta V_\alpha - \Gamma^{\mu}_{\alpha\eta} V_\mu \tag{2.64}$$

persamaan (2.64) dikurangi persamaan (2.63) maka:

$$\begin{gathered} V_{\alpha;\gamma\beta} - V_{\alpha;\beta\gamma} = \left(\partial_\gamma \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma} \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\eta\beta} \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} \right) V_\mu \\ R^{\mu}_{\alpha\gamma\beta} V_\mu = \left(\partial_\gamma \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma} \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\eta\beta} \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} \right) V_\mu \end{gathered} \tag{2.65}$$

sehingga didapatkan tensor Riemann Christoffel karena dalam bentuk koneksi metric (symbol Christoffel):

$$R^{\mu}_{\alpha\gamma\beta} = \partial_\gamma \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma} \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\eta\beta} \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} \tag{2.66}$$

keterkaitan antara tensor Riemann-Christoffel dengan tensor kelengkungan Riemann yaitu:

$$R_{\nu\alpha\gamma\beta} = g_{\nu\mu} R^{\mu}_{\alpha\gamma\beta} \tag{2.67}$$

sehingga dari tensor Riemann-Christoffel ini dapat digunakan untuk menurunkan beberapa kuantitas matematik yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein seperti tensor Ricci dan skalar Ricci (Gautama.2018).

2.7 Tensor Ricci dan skalar Ricci

Untuk mendapatkan tensor Ricci yaitu dengan mengontraksi indek pertama dan ketiga tensor Riemann-Christoffel ebagai berikut:

$$R_{\alpha\gamma} = R^{\mu}_{\alpha\gamma\mu} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\mu}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}\_\alpha\gamma \qquad (2.68)$$

Berdasarkan persamaan diatas adalah persamaan tensor Ricci yang memiliki sifat simetri $R_{\alpha\gamma} = R_{\gamma\alpha}$ sedangkan dalam skalar Ricci diperoleh dengan perkalian tensor metric kontravarian dengan tensor Ricci:

$$\mathcal{R} = \mathrm{g}^{\alpha\gamma}\mathrm{R}_{\alpha\gamma} \qquad (2.69)$$

2.8 Tetrad

Tetrad merupakan hubungan antara ruang Minkowski dan ruang melengkung, juga dapat diartikan untuk mendefinisikan torsi dan kelengkungan koneksi affine. Dalam ruangwaktu melengkung, setiap daerah pada ruang local jika dipandang akan terlihat seperti ruangwaktu datar. Setiap titik pada ruangwaktu, akan selalu ada ruang singgung dititik tersebut. Disini, tetrad akan digunakan untuk mengetahui hubungan ruang singgung dari sebuah koordinat local, yang mana bias digunakan empat medan vector yang bebas linear (Syaputra, 2020).

2.9 Lubang Hitam Reissner Nordstrom

Lubang hitam merupakan singularitas ruangwaktu. Singularitas ini akibat kuatnya gravitasi suatu benda yang sangat masif. Benda yang mampu menciptakan singularitas ruangwaktu tersebut akan menjadi lubang hitam dan wilayah singularitas (lokal) yang dibuatnya akan menjadi horizon peristiwa (event horizon). Wilayah singular ini adalah wilayah yang sedemikian rupa sehingga benda apapun (bahkan cahaya) yang masuk ke dalamnya tidak dapat lolos (Romadani, 2020).

Hawking dan Penrose menunjukkan bahwa relativitas umum harus terdapat singularitas berapat dan bekelengkungan ruangwaktu tak hingga di dalam lubang hitam. Horizon peristiwa merupakan batas daerah ruangwaktu dimana tidak ada yang mampu ke luar darinya berkelakuan mirip seperti membran searah di sekitar lubang hitam. Perlu di ingat horizon peristiwa adalah lintasan cahaya dalam ruangwaktu yang berusaha untuk keluar dari lubang hitam, dan tidak ada sesuatu yang dapat bergerak lebih cepat dari cahaya. Segala sesuatu yang jatuh melalui horizon peristiwa akan segera mencapai daerah dengan rapat massa tak-hingga dan akhir waktu (Romadani, 2020).

Dalam Relativitas Umum, salah satu solusi statis terkenal untuk persamaan medan Einstein adalah metriks Reissner Nordström yang ditemukan pada tahun 1916 dan 1918 oleh Reissner dan Nordstrom. Lubang hitam Reissner Nordström merupakan gambaran ruangwaktu disekitar lubang hitam static, bersimetri bola dan memiliki muatan listrik. Berbeda dari solusi lubang hitam Schwarzschild yang merupakan solusi eksak persamaan medan Einstein vakum (semua komponen tensor energi-momentumnya bernilai nol) dan tak bermuatan, solusi RN diperoleh dari persamaan medan Einstein dalam ruangwaktu yang memiliki medan elektromagnetik sehingga komponen tensor energy momentumnya tidak bernilai nol. Secara fisis, solusi RN ini menggambarkan geometri ruang-waktu di sekitar lubang hitam sferis bermuatan listrik yang tak-berotasi (Nirwanasari et al., 2020).

BAB III

FORMULASI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU MELENGKUNG DAN METRIK REISSNER NORDSTROM

3.1 Transformasi Persamaan Dirac Dari Ruangwaktu Datar Kedalam Ruangwaktu Melengkung

Pada bab sebelumnya, telah dibahas persamaan dirac yang dirancang agar konsisten dengan ruangwaktu datar. Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai persamaan dirac yang diterapkan dalam ruangwaktu melengkung. Dalam Teori Relativitas Umum, diketahui bahwa materi dapat melengkungkan ruangwaktu. Oleh karena itu, terdapat hubungan antara persamaan dirac dengan struktur ruangwaktu yang melengkung. Dalam persamaan (2.15) didapatkan persamaan dirac dalam ruangwaktu datar yaitu:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - Im)\psi = 0 \tag{3.1}$$

Dalam membangun persamaan Dirac pada ruangwaktu melengkung. Digunakan matriks yang bergantung waktu $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ yang berhubungan dengan matriks gamma pada relativitas khusus γ^{α} (Syaputra. 2020).

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}(x) = e_{a}^{\alpha}(x)\gamma^{\alpha} \tag{3.2}$$

sifat antikomutasi matriks gamma yang bergantung ruangwaktu:

$$\begin{aligned}
\{G^{\mu}, G^{\nu}\} &= \{\gamma^{a}, \gamma^{b}\} = 2\eta^{ab}I \\
\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} &= \tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu} \\
&= e_{a}^{\mu}\gamma^{a}e_{b}^{\nu}\gamma^{b} + e_{b}^{\nu}\gamma^{b}e_{a}^{\mu}\gamma^{a} \\
&= e_{a}^{\mu}e_{b}^{\nu}(\gamma^{a}\gamma^{b} + \gamma^{b}\gamma^{a}) \\
&= e_{a}^{\mu}e_{b}^{\nu}\{\gamma^{a}\gamma^{b}\} \\
&= e_{a}^{\mu}e_{b}^{\nu}2\eta^{ab} \\
&= 2g^{\mu\nu}I
\end{aligned} \tag{3.3}$$

diperkenalkan spinor ψ yang merupakan kuantitas yang bertransformasi:

$$\tilde{\psi}_{,\mu} = L\psi_{h,} \tag{3.4}$$

Dimana $L = L(x)$ adalah representasi spinor bergantung ruangwaktu untuk rotasi tetrad $\Lambda = \Lambda(x)$ dan berubah berdasarkan (t, x, y, z):

$$\tilde{\psi}_{,\mu} = L\psi_{,\mu} + L_{,\mu}\psi \tag{3.5}$$

turunan kovarian dari spinor, yaitu:

$$\begin{aligned} D_\mu &= I\psi_{,\mu} + \Gamma_\mu\psi \\ &= (I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi \end{aligned} \tag{3.6}$$

dimana Γ_μ, adalah koneksi affine spinor, yang mana harus bertransformasi seperti spinor.

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_\mu\tilde{\psi} &= LD_\mu\psi, \\ \widetilde{D}_\mu\tilde{\psi} &= I\tilde{\psi}_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu\tilde{\psi} \\ &= I(L\psi)_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu\tilde{\psi} \\ &= I(L\partial_\mu\psi + L_{,\mu}\psi) + \tilde{\Gamma}_\mu\tilde{\psi} \\ L(I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi &= (IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu)\psi \\ LI\partial_\mu + L\Gamma_\mu &= IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu L \\ IL\partial_\mu + L\Gamma_\mu - IL\partial_\mu - IL_{,\mu} &= \tilde{\Gamma}_\mu L \\ L\Gamma_\mu L^{-1} - IL_{,\mu}L^{-1} &= \tilde{\Gamma}_\mu \end{aligned} \tag{3.7}$$

dituliskan M sebagai hasil perkalian tensor antara vector dan kovektor, turunan kovarian dari M didefinisikan:

$$D_\mu M = \nabla_\mu M + [\Gamma_\mu, M] \tag{3.8}$$

dimana M adalah identitas, $D_\mu I = 0$, turunan kovarian dari metriks:

$$D_\mu g^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.9}$$

ditinjau,

$$\begin{gathered} \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ D_\mu\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = D_\mu(\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu) = 0 \\ D_\mu\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\mu D_\mu\tilde{\gamma}^\nu + D_\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu + \tilde{\gamma}^\nu D_\mu\tilde{\gamma}^\mu = 0 \end{gathered} \tag{3.10}$$

dipenuhi jika,

$$D_\mu\tilde{\gamma}^\alpha = 0 \tag{3.11}$$

ditinjau turunan kovarian dari metriks Minkowski, yaitu:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \eta_{ab} &= \partial_\mu \eta_{ab} - \omega^c_{\mu\alpha}\eta_{ab} - \omega^c_{\mu b}\eta_{ab} \\ &= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba} = 0 \\ &= \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba}\end{aligned} \tag{3.12}$$

dimana $\eta_{ab} = e^\mu_a e^\beta_b g_{\alpha\beta}$ maka:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \eta_{ab} &= \nabla_\mu\left(e^\alpha_a e^\beta_b g_{\alpha\beta}\right) \\ &= e^\beta_b \nabla_\mu e^\alpha_a g_{\alpha\beta} + e^\alpha_a \nabla_\mu e^\beta_a + e^\alpha_a e^\beta_b g_{\alpha\beta} \\ &= e^\beta_b \nabla_\mu e^\alpha_a g_{\alpha\beta} + e^\alpha_a \nabla_\mu e^\beta_b g_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{3.13}$$

disubsitusikan persamaan (3.13) ke dalam persamaan (3.12), maka didapatkan:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} &= e^\beta_b \nabla_\mu e^\alpha_a g_{\alpha\beta} + e^\alpha_a \nabla_\mu e^\beta_b g_\alpha \beta \\ &= e_{ab}\nabla_\mu e^\alpha_a + e_{\beta a}\nabla_\mu e^\beta_b \\ \omega_{\mu ab} &= e_{ab}\nabla_\mu e^\alpha_a\end{aligned} \tag{3.14}$$

diketahui,

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab},\end{aligned} \tag{3.15}$$

sehingga didefinisikan Fock Ivanenko, sebagai berikut:

$$\Gamma_c = e^\mu_c \Gamma_\mu \tag{3.16}$$

yang kemudian didapatkan turunan kovarian spinor pada koordinat otonormal local:

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu\right)\psi \tag{3.17}$$

Dimana ∂_μ adalah turunan biasa dalam koordinat Minkowski, dan Γ_μ adalah symbol Chrisstoffel yang menggambarkan efek kelengkungan ruangwaktu. Sehingga didapatkan persamaan Dirac untuk partikel bebas pada ruangwaktu melengkung memiliki bentuk:

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi &= 0 \\ (i\tilde{\gamma}^c e^\mu_c\left(\partial_\mu + \Gamma_\mu\right) - m)\psi &= 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dimana $\gamma^\mu = \tilde{\gamma}^c e^\mu_c$ adalah matrik dirac yang menggambarkan struktur ruangwaktu melengkung, m adalah massa partikel, dan ψ adalah fungsi gelombang partikel pada ruangwaktu melengkung. Sehingga solusi dari persamaan ini menunjukkan bagaimana partikel yang mempunyai massa rendah berinteraksi dengan ruangwaktu melengkung, yang mana dengan adanya keberadaan materi dan energi.

3.2 Metrik Reissner Nordstrom

Metrik Reissner Nordstrom merupakan solusi persamaan medan Einstein yang menggambarkan ruangwaktu diluar bola pejal yang mempunyai massa M dan muatan Q. Untuk menentukan bentuk dari metrik Reissner Nordstrom dapat dilakukan dengan menghitung seluruh komponen dari tensor Einstein dan tensor energi momentum, yang mana dengan adanya interaksi elegtromagnetik (Nirwanasari et al. 2020b). Dalam penelitian ini, dimulai dengan digunakan koordinat bola, yang elemen garisnya sebagai berikut:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{3.19}$$

bentuk umum dari metrik dalam koordinat bola, yaitu:

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)} dt^2 - e^{2\beta(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{3.20}$$

dimana $d\Omega^2$adalah metric satuan pada dua bola:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\,\phi^2 \tag{3.21}$$

Sehingga dapat dituliskan:

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)} dt^2 - e^{2\beta(r,t)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\,\phi^2 \tag{3.22}$$

dari bentuk metrik diatas dapat dituliskan tensor metric dalam bentuk kovarian, yaitu:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

untuk tensor metrik kontravarian:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

dari tensor metrik dicari komponen Simbol Christoffel yang memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\tau\mu} - \partial_\tau g_{\mu\nu}\right) \tag{3.25}$$

Dimana σ, τ, μ, ν merupakan indeks 0, 1, 2, 3 dengan 0 untuk koordinat t, 1 untuk koordinat r, 2 untuk koordinat θ, dan 3 untuk koordinat ϕ. Berikut komponen symbol Christoffel yang tidak sama dengan nol: (Lampiran A)

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\alpha}\left(0 - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial r} - 0\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \Gamma^0_{10} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 0$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}(-e^{-2\beta})\left(0 + 0 + \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial r}\right) \\ &= e^{(2\alpha - 2\beta)}\ \frac{\partial \alpha}{\partial r} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(\frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r}\right)$$
$$= \frac{\partial \beta}{\partial r} \tag{3.28}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial r}\right)$$
$$= -re^{-2\beta} \tag{3.29}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\Gamma_{33}^{1} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial r}\right)$$
$$= -rsin^2\theta e^{-2\beta} \tag{3.30}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} + 0 - 0\right)$$
$$= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^{2} \tag{3.31}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\Gamma_{33}^{2} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial\theta}\right)$$
$$= -sin\theta cos\theta \tag{3.32}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\Gamma_{13}^{3} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ (0 + 0 - 0)$$
$$= \frac{1}{r} \tag{3.33}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\Gamma_{23}^{3} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial\theta} + 0 - 0\right)$$
$$= \cot\theta \tag{3.34}$$

Jadi, didapatkan nilai dari komponen symbol christoffel yang tidak sama dengan nol yaitu:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$
$$\Gamma^0_{01} = \frac{\partial\alpha}{\partial r}$$
$$\Gamma^1_{00} = e^{2(\beta-\alpha)}\frac{\partial\beta}{\partial t}$$
$$\Gamma^1_{00} = e^{2\alpha-2\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial r}$$
$$\Gamma^1_{00} = \frac{\partial\beta}{\partial t}$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial\beta}{\partial r}$$
$$\Gamma^1_{22} = -re^{-2\beta}$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^1_{33} = -rsin^2\theta e^{-2\beta}$$
$$\Gamma^2_{33} = -sin\theta cos\theta$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$$
(3.35)

Kemudian dari komponen symbol Christoffel tersebut dihitung tensor Riemann Christoffel dengan menggunakan hubungan persamaan sebagai berikut:

$$R^{\mu}_{\gamma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} - \partial_\nu\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma} \tag{3.36}$$

dari persamaan tensor Riemann Christoffel, didapatkan tensor Ricci dengan mengontruksi indeks pertama dan ketiga dari persamaan Riemann Christoffel. Sehingga tensor Ricci dapat dihitung dengan menggunakan persamaan:

$$R_{\gamma\nu=}R^{\mu}_{\gamma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} - \partial_\nu\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma} \tag{3.37}$$

Untuk $\gamma = 0\ dan\ \nu = 0$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\mu\Gamma^{\mu}_{00} - \partial_0\Gamma^{\mu}_{\mu 0} + \Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^{\mu}_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu 0} \\ &= \{\partial_t\Gamma^0_{00} - \partial_t\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00}\} \\ &\quad+\{\partial_r\Gamma^1_{00} - \partial_t\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^1_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{10}\} \\ &\quad+\{\partial_\theta\Gamma^2_{00} - \partial_t\Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^2_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{20}\} \\ &\quad+\{\partial_\phi\Gamma^3_{00} - \partial_t\Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^3_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{30}\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$= \{0 - 0 + \left(0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 0 + 0\right) - (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{\alpha'' e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'(\alpha' - \beta')e^{2(\alpha-\beta)} - 0 + \left(0 + e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'\beta' + 0 + 0\right) - (e^{2(\alpha-\beta)}\alpha'^2 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \left\{0 - 0 + \left(0 + e^{2(\alpha-\beta)}\frac{\alpha'}{r} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 0 + 0)\right\}$$
$$+ \left\{0 - 0 + (0 + e^{2(\alpha-\beta)}\frac{\alpha'}{r} + 0 + 0 - (0 + 0 + 0 + 0)\right\}$$
$$= e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right)$$

Untuk $\gamma = 0\ dan\ \nu = 1$,

$$R_{01} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{10} - \partial_0 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^\mu_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0}$$
$$= \{\partial_t \Gamma^0_{10} - \partial_t \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^0_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\}$$
$$+\{\partial_r \Gamma^1_{00} - \partial_t \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\}$$
$$+\{\partial_\theta \Gamma^2_{01} - \partial_t \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\}$$
$$+\{\partial_\phi \Gamma^3_{10} - \partial_t \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{10} - \Gamma^3_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\}$$
$$= \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 + 0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$= 0 \tag{3.39}$$

Untuk $\gamma = 0\ dan\ \nu = 2$,

$$R_{02} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{20} - \partial_2 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0}$$
$$= \{\partial_t \Gamma^0_{20} - \partial_t \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\}$$
$$+\{\partial_r \Gamma^1_{20} - \partial_t \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\}$$
$$+\{\partial_\theta \Gamma^2_{20} - \partial_t \Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\}$$
$$+\{\partial_\phi \Gamma^3_{20} - \partial_t \Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{20} - \Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\}$$
$$= \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 + 0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0 + 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0 + 0)\}$$
$$= 0 \tag{3.40}$$

Untuk $\gamma = 0\ dan\ \nu = 3$,

$$R_{03} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{30} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 0}$$
$$= \{\partial_t \Gamma^0_{30} - \partial_t \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{00}\}$$
$$+\{\partial_r \Gamma^1_{30} - \partial_t \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{10}\} \tag{3.41}$$

$$+\{\partial_\theta\Gamma^2_{30} - \partial_t\Gamma^2_{20} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{20}\}$$
$$+\{\partial_\phi\Gamma^3_{30} - \partial_t\Gamma^3_{30} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{30} - \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{30}\}$$
$$= \{0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\}$$
$$+ \{0 + 0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\}$$
$$+ \{0 - 0 + (0+0+0+0 - (0+0+0+0)\}$$
$$= 0$$

Untuk $\gamma = 1\ dan\ \nu = 1$,

$$R_{11} = \partial_\mu\Gamma^\mu_{11} - \partial_1\Gamma^\mu_{\mu 1} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^\mu_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 1}$$
$$= \{\partial_t\Gamma^0_{11} - \partial_r\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^0_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{01}\}$$
$$+\{\partial_r\Gamma^1_{11} - \partial_r\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\}$$
$$+\{\partial_\theta\Gamma^2_{11} - \partial_r\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21}\}$$
$$+\{\partial_\phi\Gamma^3_{11} - \partial_r\Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{11} - \Gamma^3_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{31}\}$$
$$= \{0 - \alpha'' + (0 + \alpha'\beta' + 0 + 0) - (\alpha'^2 + 0 + 0 + 0)\} + \{\beta'' - \beta'' + (0 + \beta'^2 + 0 + 0) - (0 + \beta'^2 + 0 + 0)\} + \left\{0 + \tfrac{1}{r^2} + \left(0 + \tfrac{\beta'}{r} + 0 + 0\right) - (0 + 0 + 1/r^2 + 0)\right\} + \left\{0 + \tfrac{\beta'}{r} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + \tfrac{1}{r^2})\right\}$$
$$= -\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r} \qquad (3.42)$$

Untuk $\gamma = 1\ dan\ \nu = 2$,

$$R_{12} = \partial_\mu\Gamma^\mu_{21} - \partial_2\Gamma^\mu_{\mu 1} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 1}$$
$$= \{\partial_t\Gamma^0_{21} - \partial_\theta\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{01}\}$$
$$+\{\partial_r\Gamma^1_{21} - \partial_\theta\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\}$$
$$+\{\partial_\theta\Gamma^2_{21} - \partial_\theta\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{21}\}$$
$$+\{\partial_\phi\Gamma^3_{21} - \partial_\theta\Gamma^3_{31} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{31}\}$$
$$= \{0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \{0 + 0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \{0 - 0 + (0+0+0+0) - (0+0+0+0)\} + \left\{0 - 0 + (0 + 0 + \tfrac{\cot\theta}{r} + 0) - (0 + 0 + 0 + \tfrac{\cot\theta}{r}\right\}$$
$$= 0 \qquad (3.43)$$

Untuk $\gamma = 2\ dan\ \nu = 2$,

$$R_{22} = \partial_\mu\Gamma^\mu_{22} - \partial_2\Gamma^\mu_{\mu 2} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^\mu_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 2}$$
$$= \{\partial_t\Gamma^0_{22} - \partial_\theta\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^0_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{02}\}$$
$$+\{\partial_r\Gamma^1_{22} - \partial_\theta\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{21} - \Gamma^1_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{11}\}$$
$$+\{\partial_\theta\Gamma^2_{22} - \partial_\theta\Gamma^2_{32} + \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32}\}$$
$$+\{\partial_\phi\Gamma^3_{32} - \partial_\theta\Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^3_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32}\} \qquad (3.44)$$

$$= \{0 - 0 + (0 - r\alpha' e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{-e^{-2\beta} + 2r\beta' e^{-2\beta} - 0 + (0 - r\beta' e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 - e^{-2\beta} + 0)\} + \{0 - 0 + (0 - e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 - e^{-2\beta} + 0 + 0)\} + \{0 + \csc^2\theta + (0 - e\hat{} - 2\beta + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + \cot^2\theta\}$$

$$= -e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + 1$$

Untuk $\gamma = 2$ dan $\nu = 3$,

$$R_{23} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{32} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 2} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{22} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 2}$$

$$= \{\partial_t \Gamma^0_{32} - \partial_\phi \Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{02}\} + \{\partial_r \Gamma^1_{32} - \partial_\phi \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{12}\} + \{\partial_\theta \Gamma^2_{32} - \partial_\phi \Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{22}\} + \{\partial_\phi \Gamma^3_{32} - \partial_\phi \Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{32} - \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{32}\}$$

$$= \{0 - 0 + (0 - 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{0 + 0 - 0 + (0 - 0 + 0 + 0) - (0 + 0 - 0 + 0)\} + \{0 - 0 + (0 - 0 + 0 + 0) - (0 - 0 + 0 + 0)\} + \{0 + 0 + (0 - 0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0\}$$

$$= 0 \tag{3.45}$$

Untuk $\gamma = 3$ dan $\nu = 3$,

$$R_{33} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - \partial_3 \Gamma^\mu_{\mu 3} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^\mu_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu 3}$$

$$= \{\partial_t \Gamma^0_{33} - \partial_\phi \Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^0_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{03}\} + \{\partial_r \Gamma^1_{33} - \partial_\phi \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^1_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{13}\} + \{\partial_\theta \Gamma^2_{33} - \partial_\phi \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^2_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{23}\} + \{\partial_\phi \Gamma^3_{33} - \partial_\phi \Gamma^3_{33} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{33} - \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{33}\}$$

$$= \{0 - 0 + (0 - r\alpha' \sin^2\theta e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 + 0 + 0)\} + \{-\sin^2\theta e^{-2\beta} + 2r sin^2\theta\beta' e^{-2\beta} - 0 + (0 - r sin^2\theta\beta' e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 + 0 - 0 + 0)\} + \{-(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 0 + (0 - \sin^2\theta e^{-2\beta} + 0 + 0) - (0 - 0 + 0 - \cos^2\theta)\} + \{0 + 0 + (0 + 0 - \cos^2\theta + 0) - (0 - \sin^2\theta e^{-2\beta} - \cos^2\theta + 0\}$$

$$= -\sin^2\theta e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + \sin^2\theta$$

$$= sin^2\theta \tag{3.46}$$

Didapatkan tensor Ricci yang tidak sama dengan nol sebagai berikut,

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right)$$

$$R_{11} = -\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + 1 \tag{3.47}$$

$$R_{33} = sin^2\theta$$

Dari persamaan diatas didapatkan skalar Ricci:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$
$$= g^{00}\,R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$
$$= (e^{-2\alpha})e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) +$$
$$\left(-e^{-2\beta}\right)\left(-\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}\right) +$$
$$(-r^{-2})\left(-e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + 1\right) +$$
$$\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)(sin^2\theta\,)$$
$$= e^{-2\alpha+2\alpha-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) + \left(-e^{-2\beta}\right)\left(-\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}\right) + (-r^{-2})\left(-e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + 1\right) + \left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)(sin^2\theta\,)$$

Evaluasi 1

$$= e^{-2\alpha+2\alpha-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) + \left(-e^{-2\beta}\right)\left(-\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}\right)$$
$$= e^{-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) + \left(-e^{-2\beta}\right)\left(-\alpha'' - \alpha + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}\right)$$
$$= e^{-2\beta}\alpha'' + e^{-2\beta}\alpha'^2 + e^{-2\beta}\,\frac{2\alpha'}{r} - e^{-2\beta}\alpha'\beta' + e^{-2\beta}\alpha'' + e^{-2\beta}\alpha - e^{-2\beta}\alpha'\beta' - e^{-2\beta}\,\frac{2\beta'}{r}$$
$$= 2e^{-2\beta}(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\beta}{r} - \alpha'\beta'$$

Evaluasi 2

$$= -\frac{1}{r^2}\left(-e^{-2\beta}(r\alpha' - r\beta' + 1) + 1\right) + \left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)(sin^2\theta\,)$$
$$= -\frac{1}{r^2}(-e^{-2\beta}r\alpha' + e^{-2\beta}r\beta' - e^{-2\beta} + 1) + \left(-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$= \frac{e^{-2\beta}\alpha'}{r} - \frac{e^{-2\beta}\beta'}{r} + \frac{e^{-2\beta}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\beta}\alpha'}{r} - \frac{e^{-2\beta}\beta'}{r} + \frac{e^{-2\beta}}{r^2} - \frac{1}{r^2}$$
$$= \frac{2e^{-2\beta}\alpha'}{r} - \frac{2e^{-2\beta}\beta'}{r} + \frac{2e^{-2\beta}}{r^2} - \frac{2}{r^2}$$
$$= 2e^{-2\beta}\left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}$$

Digabungkan evaluasi 1 dan 2,

$$= 2e^{-2\beta}(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\beta}{r} - \alpha'\beta' + 2e^{-2\beta}\left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}$$
$$= -2e^{-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \alpha'\beta' + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\beta})\right) \qquad (3.48)$$

Kemudian dari tensor Ricci dan skalar Ricci, dicari tensor Einstein dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R} \tag{3.49}$$

Untuk G_{00}:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{00} &= R_{00} - \tfrac{1}{2} g_{00}\mathcal{R} \\
&= e^{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha'' + \alpha'^2 + \tfrac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta'\right) - e^{2(\alpha-\beta)}\Big(\alpha'' + \alpha'^2 + \\
&\quad \tfrac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \alpha'\beta' + \tfrac{1}{r^2}\left(1 - e^{\alpha\beta}\right)\Big) \\
&= \frac{2e^{2(\alpha-\beta)}\beta'}{r} - \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Untuk G_{11}:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{11} &= R_{11} - \tfrac{1}{2} g_{11}\mathcal{R} \\
&= -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha'\beta' + \tfrac{2\beta'}{r} + \Big(\alpha'' + \alpha'^2 + \tfrac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \\
&\quad \alpha'\beta' + \tfrac{1}{r^2}(1 - e^{2\beta})\Big) \\
&= \frac{2\alpha\prime}{r} - \frac{e^{2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Untuk G_{22}:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{22} &= R_{22} - \tfrac{1}{2} g_{22}\mathcal{R} \\
&= -e^{-2\beta}(r\alpha' + r\beta' + 1) + 1 + 2r^2 e^{2\beta}\Big(\alpha'' + \alpha'^2 + \\
&\quad \tfrac{2}{r}(\alpha' - \beta') - \alpha'\beta' + \tfrac{1}{r^2}\left(1 - e^{2\beta}\right)\Big) \\
&= \frac{G_{33}}{\sin^2\theta}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Selanjutnya dirumuskan tensor energy momentum, namun sebelumnya ditinjau tensor medan elegtromagmetik:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.53}$$

Berdasarkan hukum Coulomb, didapatkan hubungan medan listrik:

$$E_1 = -\partial_r V \tag{3.54}$$

Karena medan berupa simetri bola, maka suku sudut medan magnet maupun medan listrik sama dengan nol dan diambil keadaan dengan $B_1 = 0$. Sehingga, komponen medan elektromagnetik hanyalah E_1. Tensor medan elektromagnetiknya menjadi:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1/c & 0 & 0 \\ -E_1/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

Karena tensor metric ansatz adalah matriks diagonal, maka bisa dibangun tensor medan elektromagnetik kontravarian $F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}F_{\mu\nu}$. Sehingga dengan digunakan persamaan Maxwell, didapatkan:

$$\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)_{,\mu} = \left(g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)_{,\mu} = 0 \tag{3.56}$$

untuk komponen $F_{10} = -F_{01}$, didapatkan relasi:

$$\frac{\partial}{\partial_r}\left(\frac{E_1}{c}e^{-(\alpha-\beta)}r^2 \sin^2\theta\right) = 0 \tag{3.57}$$

Atau,

$$\begin{gathered} e^{-(\alpha-\beta)}r^2 = C \\ E_1 = \frac{C}{r^2}e^{\alpha+\beta}, \end{gathered} \tag{3.58}$$

Dimana C adalah tetapan integrasi. Dibandingkan dengan limit ketika jarak cukup jauh dari sumber, maka medan listriknya akan kembali ke bentuk ruang Minkowski dengan:

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \tag{3.59}$$

sehingga tensor medan elektromagnetik menjadi:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} & 0 & 0 \\ -\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Dengan demikian, didapatkan teonsor energi momentum sebagai berikut:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\rho}F_{\lambda\nu}g^{\rho\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right) \tag{3.61}$$

Untuk komponen T_{00},

$$T_{00} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{0\rho}F_{\lambda 0}g^{\rho\lambda} + \frac{1}{4}g_{00}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left(F_{01}F_{10}g^{11} + \frac{1}{4}g_{00}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10})\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(-\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(e^{-2\beta}\right) - \frac{1}{4}e^{2\alpha}x2e^{-2(\alpha+\beta)}\left(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2\right]$$

Dimana $\alpha = -\beta$ sesuai dengan syarat asimtotik
Evaluasi 1

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\left(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(-\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(e^{-2\beta}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)\left(e^{2\alpha}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}\left(e^{2\alpha}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2\right)$$

Evaluasi 2

$$= -\frac{1}{4}e^{2\alpha}x2e^{-2(\alpha+\beta)}\left(\frac{Qe^{\alpha+\beta}}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}e^{2\alpha-2\alpha-2\beta}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}e^{2\alpha}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2$$

Digabungkan evaluasi 1 dan 2,

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[e^{2\alpha}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{e^{2\alpha}}{2\mu_0}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 cr^2}\right)^2$$

karena, $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, maka:

$$T_{00} = \frac{e^{2\alpha}}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{Q^2}{r^4} \tag{3.62}$$

Dengan tensor Einstein untuk suku G_{00} subsitusikan $\alpha = -\beta$, dengan menggunakan teonsor energy momentum T_{00}, didapatkan persamaan medan Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \tag{3.63}$$

$$-\frac{2\alpha' e^{4\alpha}}{r}-\frac{e^{4\alpha}}{r^2}+\frac{e^{2\alpha}}{r^2}=\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0}\frac{e^{2\alpha}}{r^4}$$

$$e^{2\alpha}+2\alpha' r e^{2\alpha}=1-\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}$$

$$\frac{\partial(re^{2\alpha})}{\partial r}=1-\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}$$

diintegralkan kedua sisi, sehingga didapatkan:

$$re^{2\alpha}=\int\left(1-\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}\right)dr$$

$$=r+\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r}+C$$

$$e^{2\alpha}=1+\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}+\frac{C}{r} \tag{3.64}$$

dimana $C=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ yang merupakan tetapan integrasi, maka didapatkan metriks Reissner Nordstrom sebagai berikut:

$$ds^2=\left(1+\frac{c}{r}+\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}\right)dt^2-\left(1+\frac{c}{r}+\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}\right)^{-1}dr^2- r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.65}$$

Dalam kasus ketika muatan dihilangkan dari sumber dalam limit $Q=P\rightarrow 0$, maka solusi akan kembali kedalam solusi Schwarzschild. Sehingga didapatkan $c=-\frac{2GM}{c^2}=-2M.$ Dengan menuliskan $\frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0}=Q^2$. Dengan demikian, didapatkan:

$$ds^2=\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2 - \mathrm{r}^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.66}$$

Dimana:

ds^2 : Elemen jarak ruangwaktu

M : Massa benda pusat

Q : Muatan benda pusat

$dt, dr, d\theta, d\phi$: Elemen jarak dalam koordinat waktu (t), radial (r), polar (θ), dan azimuthal (ϕ)

G : Konstanta gravitasi

c : Kecepatan cahaya dalam ruang vakum

ϵ_0 : Permitivitas vakum

Dengan mengamati bentuk metric Reissner Nordstrom, solusi dari metriks tersebut menunjukkan singularitas bila $\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) = 0$ oleh karena $ds \to -\infty$. Jika $Q \leq M$ singularitas ini muncul pada:

$$r = \begin{cases} r_{H-} = M - \sqrt{\dfrac{M^2}{2} - Q^2} \\ r_{H+} = M + \sqrt{\dfrac{M^2}{2} - Q^2} \end{cases} \tag{3.67}$$

Adapun jika $Q > M$, maka lubang hitam Reissner Nordstrom tidak memiliki solusi horizon yang memungkinkan pengamat luar dapat melihat singularitas dalam lubang hitam (Gautama. 2018).

3.3 Formulasi Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Melengkung dengan Menggunakan Metriks Reissner Nordstrom

Persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom merupakan kerangka teoritis yang menggambarkan perilaku partikel bermassa rendah yang mempunyai muatan dalam medan gravitasi dan medan elektromagnetik (Syaputra. 2020). Sebelumnya telah dicari metriks Reissner Nordstrom, didapatkan sebagai berikut:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.68}$$

dimana metric diatas mempunyai solusi lubang hitam, yang mana posisi horizon peristiwa adalah solusi radius dari persamaan:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{3.69}$$

Jika $f(r) = 0$, maka:

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \tag{3.71}$$

Sehingga menghasilkan:

$$\begin{gathered} r\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \\ r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2} \\ r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \end{gathered} \tag{3.70}$$

Dimana r_+ adalah horizon peristiwa bagian luar, dan r_- adalah horizon peristiwa bagian dalam. Horizon peristiwa adalah sebuah permukaan yang menutup secara total titik singularitas. Sehingga bentuk metriks Reissner Nordstrom menjadi:

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - \mathrm{r}^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.72}$$

Untuk membentuk persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut, yaitu dengan menentukan:

3.3.1 Tensor metrik

Tensor metrik digunakan untuk menghitung jarak antara dua titik didalam ruangwaktu, dimana nantin=ya akan mendapatkan elemen garis invariant. Dari metric RN dapat dituliskan tensor metric kovariannya:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Untuk tensor metric kontravariannya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

3.3.2 Tetrad

Tetrad diperlukan untuk menghubungkan antara dua jenis metrik, yaitu metriks lorentzian dalam ruangwaktu Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) dan metric ruangwaktu melengkung $(g_{\mu\nu})$. Sehingga persamaan tetrad dapat dituliskan:

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \eta_{ab} \tag{3.75}$$

Tetrad dapat dianggap sebagai sebuah tensor, artinya tetrad merupakan jenis besaran yang memiliki nilai dan arah serta dapat dihitung menggunakan prinsip matematika. Sehingga bagian ruang melengkung dapat berubah seperti vector koordinatnya:

$$e'^a_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a_\nu \tag{3.76}$$

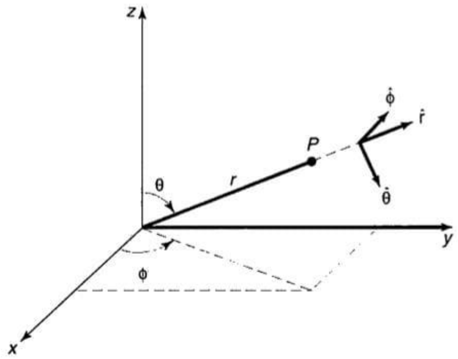
Demikian, tetrad Reissner Nordstrom dapat dituliskan dalam bentuk:

$$e^a_\mu = \begin{bmatrix} f^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -rsin\theta \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

inversnya,

$$e^\mu_a = \begin{bmatrix} f^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{rsin\theta} \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

Dalam penelitian ini agar lebih mudah menganalisis simetri bola dari lubang hitam digunakan koordinat bola untuk membentuk metrik RN. Sehingga dapat didefinisikan bidang vector orthogonal lokal yang diperoleh dari hasil transformasi dari koordinat kartesian ke koordinat bola: (Vicente, Cardoso, and Lopes. 2018)



Gambar 3.1 Koordinat Bola (David J. Griffiths. 2005)

dari gambar (3.1) analisis bidang $z\rho$,

$$\begin{aligned} \hat{r} &= cos\theta\hat{z} + sin\theta\hat{\rho} \\ \hat{\theta} &= -sin\theta\hat{z}cos\theta\hat{\rho} \end{aligned} \tag{3.79}$$

analisis bidang xy,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= cos\phi\hat{x} + sin\phi\hat{y} \\ \hat{\phi} &= -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y} \end{aligned} \tag{3.80}$$

disubsitusikan persamaan (3.78) kedalam (3.79) untuk mendapatkan transformasi koordinat r, θ, ϕ:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= cos\theta\hat{z} + sin\theta\hat{\rho} \\ &= cos\theta\hat{z} + sin\theta(cos\phi\hat{x} + sin\phi\hat{y}) \\ &= sin\theta cos\phi\hat{x} + sin\theta sin\,\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= -sin\theta\hat{z}cos\theta\hat{\rho} \\ &= -sin\theta\hat{z}cos\theta(cos\phi\hat{x} + sin\phi\hat{y}) \\ &= cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sin\phi\hat{y} - sin\theta\hat{z} \end{aligned}$$

$$\hat{\phi} = -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y}$$

Sehingga dapat dituliskan bidang vector koordinat local:

$$\begin{aligned} \vec{X}_r &= sin\theta cos\phi\hat{x} + sin\theta sin\,\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z} \\ \vec{X}_\theta &= cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sin\phi\hat{y} - sin\theta\hat{z} \\ \vec{X}_\phi &= -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Selanjutnya disubsitusikan kedalam tetrad RN:

$$e_a^{\mu} = e_a^{\mu}\vec{X}_a \tag{3.82}$$

dimana $\mu = t, r, \theta, \phi\ dan\ a = \tau, x, y, z$
untuk koordinat $\mu = t$,

$$\begin{aligned} e_a^t &= \vec{X}_t\ (e_\tau^t, e_x^t, e_y^t, e_z^t) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{f}}, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \tag{3.83}$$

untuk koordinat $\mu = r$,

$$\begin{aligned} e_a^r &= \vec{X}_r\ (e_\tau^r, e_x^r, e_y^r, e_z^r) \\ &= (0, \sqrt{f}sin\theta cos\phi\ , \sqrt{f}sin\theta sin\ \phi, \sqrt{f}cos\theta) \end{aligned} \tag{3.84}$$

untuk koordinat $\mu = \theta$,

$$\begin{aligned} e_a^\theta &= \vec{X}_\theta\ (e_\tau^\theta, e_x^\theta, e_y^\theta, e_z^\theta) \\ &= (0, \tfrac{1}{r}cos\theta cos\phi, \tfrac{1}{r}cos\theta sin\phi, -\tfrac{sin\theta}{r}) \end{aligned} \tag{3.85}$$

untuk koordinat $\mu = \phi$,

$$\begin{aligned} e_a^\phi &= \vec{X}_\phi\ (e_\tau^\phi, e_x^\phi, e_y^\phi, e_z^\phi) \\ &= \left(0, -\tfrac{sin\phi}{rsin\theta}, \tfrac{cos\phi}{rsin\theta}, 0\right) \end{aligned} \tag{3.86}$$

Sehingga didefinisikan:

$$\begin{aligned} \gamma^r &= \vec{\gamma}.\vec{X}_r = \gamma^1 sin\theta cos\phi + \gamma^2 sin\theta sin\ \phi + \gamma^3 cos\theta \\ \gamma^\theta &= \vec{\gamma}.\vec{X}_\theta = \gamma^1 cos\theta cos\phi + \gamma^2 cos\theta sin\phi\hat{y} - \gamma^3 sin\theta \\ \gamma^\phi &= \vec{\gamma}.\vec{X}_\phi = \frac{1}{rsin\theta}(-\gamma^1 sin\phi + \gamma^2 cos\phi) \end{aligned}$$

dengan,

$$\vec{\gamma} = \gamma^1\vec{x} + \gamma^2\vec{y} + \gamma^3\vec{z} \tag{3.87}$$

3.3.3 Simbol Christoffel

Dari tensor metrik Reissner Nordstrom dicari komponen Simbol Christoffel yang memenuhi persamaan sebagai berikut: (Syaputra. 2020)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + \partial_\nu g_{\tau\mu} - \partial_\tau g_{\mu\nu}\right) \tag{3.88}$$

Dimana σ, τ, μ, ν merupakan indeks 0, 1, 2, 3 dengan 0 untuk koordinat t, 1 untuk koordinat r, 2 untuk koordinat θ, dan 3 untuk koordinat ϕ.

untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 1$,

$$\Gamma_{01}^0 = \tfrac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01})$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(0-\frac{\partial\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}{\partial r}-0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(-\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \tag{3.89}$$

untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 0$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01}+\partial_0 g_{10}-\partial_1 g_{00})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(0+0-\frac{\partial\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}{\partial r}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{3.90}$$

untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 1$,

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11}+\partial_1 g_{11}-\partial_1 g_{11})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}}{\partial r}+0-0\right)$$

$$= \frac{\partial\beta}{\partial r} \tag{3.91}$$

untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 2$,

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21}+\partial_2 g_{12}-\partial_1 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(0+0-\frac{\partial r^2}{\partial r}\right)$$

$$= -r\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) \tag{3.92}$$

untuk $\sigma = 1, \mu = 3, \nu = 3$,

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31}+\partial_3 g_{13}-\partial_1 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(0+0-\frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial r}\right)$$

$$= -rsin^2\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) \tag{3.93}$$

untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 2$,

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22}+\partial_2 g_{21}-\partial_2 g_{12})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}+0-0\right)$$

$$= \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21} \tag{3.94}$$

untuk $\sigma = 2, \mu = 3, \nu = 3$,

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32}+\partial_3 g_{23}-\partial_2 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0+0-\frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial\theta}\right)$$

$$= -sin\theta cos\theta \tag{3.95}$$

untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 3$,

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33}+\partial_3 g_{31}-\partial_3 g_{13})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(0+0-0) \tag{3.96}$$

$$= \frac{1}{r}$$

untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} + 0 - 0 \right)$$
$$= \cot \theta \qquad (3.97)$$

Jadi symbol Christoffel dari metric Reissner Nordstrom yang tidak sama dengan nol adalah: (Lampiran B)

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1}$$
$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3} \right)$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial \beta}{\partial r}$$
$$\Gamma^1_{22} = -r \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$
$$\Gamma^1_{33} = -r sin^2 \theta \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^2_{33} = -sin\theta cos\theta$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \qquad (3.98)$$
$$\Gamma^3_{23} = \cot \theta$$

3.3.4 Koefisien koneksi spin

Koefisien koneksi spin ini menggambarkan spin partikel yang termasuk bagian dari simbol Christoffel yang mempengaruhi komponen matriks dirac. Sehingga ketika memasukkan efek kelengkungan ruangwaktu kedalam persamaan dirac, maka diperlukan koefisien koneksi spin sebagai fungsi dari posisi ruangwaktu untuk mengetahui perubahan spin partikel. Dari tensor metric RN, komponen symbol Christoffel, dan komponen tetrad yang sudah didapat, dicari komponen koneksi spin untuk koordinat RN. Ditinjau persamaan:

$$\omega_{\mu ab} = e_{\alpha\beta} \nabla_\mu e^\beta_b$$
$$= g_{\alpha\beta} e^\beta_a (\partial_\mu e^\beta_b + \Gamma^\beta_{\mu\gamma} e^\gamma_b) \qquad (3.99)$$

Dimana $\mu = koordinat\ (t, r, \theta, \phi) dan\ \alpha = \beta\ dan\ \gamma$ yang bergantung pada indeks $a = 0, 1, 2, 3$, yang mana 0 menunjukkan koordinat t, 1 untuk koordinat r, 2 untuk koordinat θ, dan 3 untuk koordinat ϕ.

untuk $a = 0, b = 1$,

$$\omega_{t01} = g_{tt} e_0^t (\partial_t e_1^t + \Gamma_{tr}^t e_1^r)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\partial_t(0) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^{3,}}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{3.100}$$

untuk $a = 1, b = 0$,

$$\omega_{t10} = g_{rr} e_1^r (\partial_t e_0^r + \Gamma_{tt}^r e_b^t)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\partial_t(0) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{2r^3}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\right)\Bigg)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{3.101}$$

untuk $a = 1, b = 2$,

$$\omega_{\theta 12} = g_{rr} e_1^r (\partial_\theta e_2^r + \Gamma_{\theta\theta}^r e_2^\theta)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\theta(0) - r\left(1 - \frac{2M}{r} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \tag{3.102}$$

untuk $a = 2, b = 1$,

$$\omega_{\theta 21} = g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_\theta e_1^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta e_1^r)$$
$$= r^2 \frac{1}{r}\left(\partial_\theta(0) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.103}$$

untuk $a = 1, b = 3$,

$$\omega_{\phi 13} = g_{rr} e_1^r (\partial_\phi e_3^r + \Gamma_{\phi\phi}^r e_3^\phi)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\partial_\phi(0) +$$
$$rsin^2\theta\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{rsin\theta}\Bigg) \tag{3.104}$$

$$= -sin\theta\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk $a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 23} &= g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_\phi e_3^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta e_3^\phi) \\ &= r^2 \frac{1}{r}\left(\partial_\phi(0) - sin\theta cos\theta \frac{1}{rsin\theta}\right) \\ &= -cos\theta \end{aligned} \quad (3.105)$$

untuk $a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 31} &= g_{\phi\phi} e_3^\phi (\partial_\phi e_1^\phi + \Gamma_{\phi r}^\phi e_1^r) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}\left(\partial_\phi(0) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= sin\theta\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.106)$$

untuk $a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 32} &= g_{\phi\phi} e_3^\phi (\partial_\phi e_2^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\phi e_2^\theta) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}\left(\partial_\phi(0) + cot\theta \frac{1}{r}\right) \\ &= cos\theta \end{aligned} \quad (3.107)$$

Didapatkan komponen koneksi spinorial yang tidak sama dengan nol:(Lampiran C)

$$\begin{aligned}\omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \\ \omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \\ \omega_{\phi 13} &= -\omega_{\phi 31} = -sin\theta\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \\ \omega_{\phi 23} &= -\omega_{\phi 32} = -cos\theta \end{aligned} \quad (3.108)$$

3.3.5 Koefisien Fock Ivanenko

Koefisien fock ivanenko merupakan gambaran dari efek rotasi local yang disebabkan oleh efek kelengkungan ruangwaktu pada gelombang partikel berspin. Dari matrik tetrad dan koneksi spinor yang sudah diperoleh, sehingga dapat dilakukan perhitungan untuk mendapatkan kooefisien fock ivanenco dengan menggunakan persamaan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= e_c^\mu \Gamma_\mu \\ &= e_c^\mu\left(\frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^a\gamma^b\right)\end{aligned} \quad (3.109)$$

dengan ketentuan antikomutasi matriks gamma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) &= \eta^{ab} \\ (\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) &= 2\eta^{ab}\end{aligned} \quad (3.110)$$

untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= e_0^t\left(\frac{1}{4}\omega_{t01}\gamma^0\gamma^1 + \omega_{t10}\gamma^1\gamma^0\right)\\ &= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\gamma^0\gamma^1+\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\gamma^1\gamma^0\right)\\ &= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{8}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)(\gamma^1\gamma^0-\gamma^0\gamma^1)\\ &= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{8}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)2(\gamma^1\gamma^0-\eta^{10})\\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\gamma^1\gamma^0 \end{aligned} \tag{3.111}$$

untuk $c = 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= e_0^r\left(\frac{1}{4}\omega_{rab}\gamma^a\gamma^b\right)\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.112}$$

untuk $c = 2$,

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= e_2^\theta\left(\frac{1}{4}\omega_{\theta12}\gamma^1\gamma^2 + \omega_{\theta21}\gamma^2\gamma^1\right)\\ &= \frac{1}{r}\frac{1}{4}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^1\gamma^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^2\gamma^1\right)\\ &= \frac{1}{4r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2\gamma^1-\gamma^1\gamma^2)\\ &= \frac{1}{4r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}2(\gamma^2\gamma^1-\eta^{21})\\ &= \frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^2\gamma^1\end{aligned} \tag{3.113}$$

untuk $c = 3$,

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= e_3^\phi\left(\frac{1}{4}\omega_{\phi13}\gamma^1\gamma^3+\omega_{\phi31}\gamma^3\gamma^1+\omega_{\phi23}\gamma^2\gamma^3+\omega_{\phi32}\gamma^3\gamma^2\right)\\ &= \frac{1}{r sin\theta}\frac{1}{4}\left(\left(-sin\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\right)\gamma^1\gamma^3+\left(sin\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}\right)\gamma^3\gamma^1+(-cos\theta)\gamma^2\gamma^3+(cos\theta)\gamma^3\gamma^2\right)\\ &= \frac{1}{4r sin\theta}\left(sin\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}2(\gamma^3\gamma^1-\eta^{31})+cos\theta 2(\gamma^3\gamma^2-\eta^{23})\right)\\ &= \frac{1}{4r sin\theta}\left(2sin\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^3\gamma^1+2cos\theta\gamma^3\gamma^2\right)\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$= \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^3\gamma^1 + \frac{cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2$$

3.3.6 Turunan Kovarian Spinor

Turunan kovarian spinor digunakan untuk memperhitungkan bagaimana spinor mengalami transformasi ketika partikel dengan spin bergerak dalam medan gravitasi yang melengkung. Adapun turunan kovarian spinor dapat dicari setelah diperoleh koefisien Fock Ivanenko, yaitu dengan menggunakan rumus persamaannya:

$$D_c\psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi$$
$$D_c = e_a^\mu \partial_\mu + \Gamma_\mu \qquad (3.115)$$

untuk $c = 0$,

$$D_0 = e_0^t \partial_t + \Gamma_0$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \partial_t + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right)\gamma^1\gamma^0 \qquad (3.116)$$

untuk $c = 1$

$$D_1 = e_1^r \partial_r + \Gamma_1$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2} \partial_r \qquad (3.117)$$

untuk $c = 2$,

$$D_2 = e_2^\theta \partial_\theta + \Gamma_2$$
$$= \frac{1}{r}\partial_\theta + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^2\gamma^1 \qquad (3.118)$$

untuk $c = 3$,

$$D_3 = e_3^\phi \partial_\phi + \Gamma_3$$
$$= \frac{1}{rsin\theta}\partial_\phi + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^3\gamma^1 + \frac{cot\theta}{2r}\gamma^3\gamma^2 \qquad (3.119)$$

Demikian, dari turunan kovarian jika disubsitusikan kedalam persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung (3.18), maka didapatkan formulasi persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrik Reissner Nordstrom sebagai berikut:

$$\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)\psi=0$$
$$\left((i\gamma^{0}D_{0}+\gamma^{1}D_{1}+\gamma^{2}D_{2}+\gamma^{3}D_{3})-m\right)=0$$
$$\left(\left(i\gamma^{0}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\partial_{t}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^{2}}+\frac{2Q^{2}}{r^{3}}\right)\gamma^{1}\gamma^{0}+i\gamma^{1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\partial_{r}+i\gamma^{2}\frac{1}{r}\partial_{\theta}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{2}\gamma^{1}+i\gamma^{3}\frac{1}{rsin\theta}\partial_{\phi}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{3}\gamma^{1}+\frac{cot\theta}{2r}\gamma^{3}\gamma^{2}\right)-m\right)\psi=0 \quad (3.120)$$

Karena lubang hitam RN itu mempunyai muatan yang berinteraksi dengan partikel yang bermuatan, maka akan ada potensial Coulomb dari interaksi kedua muatan. Adapun potensial Coulomb antara dua muatan $Q\, dan\, q$ pada jarak r diberikan oleh:

$$V(r)=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_{0}r} \quad (3.121)$$

Sehingga formulasi persamaaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom menjadi:

$$\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-\gamma^{0}\frac{qQ}{4\pi\epsilon_{0}r}-m\right)\psi=0$$
$$\left(\left(i\gamma^{0}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\partial_{t}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^{2}}+\frac{2Q^{2}}{r^{3}}\right)\gamma^{1}\gamma^{0}+i\gamma^{1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1/2}\partial_{r}+i\gamma^{2}\frac{1}{r}\partial_{\theta}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{2}\gamma^{1}+i\gamma^{3}\frac{1}{rsin\theta}\partial_{\phi}+\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma^{3}\gamma^{1}+\frac{cot\theta}{2r}\gamma^{3}\gamma^{2}\right)-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_{0}r}-m\right)\psi=0 \quad (3.122)$$

Dengan mengikuti sifat dari matriks gamma $\left(\gamma^{i}\right)^{2}=I$, maka persamaan (3.122) dapat disederhanakan menjadi:

$$\left(\left(i\gamma^0\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_t+i\frac{1}{4}\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)+i\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_r+i\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta+i\frac{1}{2r}\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+i\gamma^3\frac{1}{rsin\theta}\partial_\phi+i\frac{1}{2r}\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+i\gamma^2\frac{cot\theta}{2r}\right)-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}-m\right)\psi=0 \quad (3.123)$$

Dengan dikalikan $-i\gamma^0$ dari kiri, maka didapatkan bentuk paling sederhana dari persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrik Reissner Nordstrom, sebagai berikut:

$$\left(\left(\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_t+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{4}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)+\gamma^0\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_r+\gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma^1\gamma^3\frac{1}{rsin\theta}\partial_\phi+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma^0\gamma^2\frac{cot\theta}{2r}\right)-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}-m\right)=0 \quad (3.124)$$

persamaan (3.124) dalam jurnal lain juga dapat dituliskan sebagai: (Vicente. 2018)

$$\left(\left(\gamma^0\left(\frac{i}{S(r)}\frac{\partial}{\partial_t}-\frac{e}{S(r)}V(r)\right)+\gamma^r\left(iS\,(r)\frac{\partial}{\partial_r}+\frac{i}{r}(S\,(r)-1)+\frac{i}{2}S'(r)\right)+i\gamma^\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+i\gamma^\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)-m\right)\psi=0 \quad (3.125)$$

Dimana $S\,(r)=f(r), V(r)=\frac{Q}{r}$

$S\,(r)$: Suku radial

$S'(r)$: Turunan dari suku radial

e : Muatan

$V(r)$: Fungsi radial potensial coloumb

γ^μ : Matriks gamma

m : Massa partikel

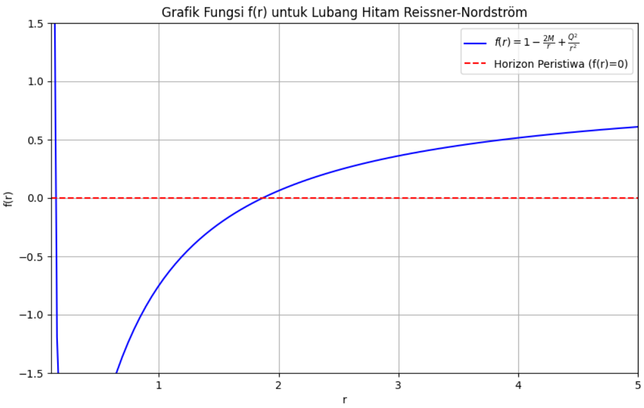
M : Massa lubang hitam

Q : Muatan lubang hitam

q : Muatan partikel

Bagian pertama dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan metode analitik didapatkan formulasi persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrics RN yang ditunjukkan pada persamaan (3.124) dan (3.125). Pertama, dilakukan transformasi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu datar kedalam ruangwaktu melengkung. Kedua, ditentukan metriks Reissner Nordstrom dengan menggunakan koordinat bola. Selanjutnya, diformulasikan metriks Reissner Nordstrom dengan mencari komponen-komponennya ke dalam persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung. Sehingga didapatkan formulasi persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung Reissner Nordstrom yang merupakan persamaan gelombang relativistik untuk partikel berspin setengah.

Dengan demikian, dari persamaan gelombang ini menunjukkan bahwa lubang hitam Reissner Nordstrom mempunyai muatan listrik (Q), maka akan menghasilkan medan listrik yang akan mempengaruhi partikel fermion bermuatan q. Sehingga akan ada gaya elektrostatik antara kedua muatan. Dimana interaksi kedua muatan ini mengikuti hukum Coulomb yang menyatakan bahwa jika ada dua benda bermuatan akan saling tarik-menarik atau tolak menolak, yang mana berkaitan dengan tanda masing-masing muatan. Gaya elektrostatik digambarkan oleh potensial Coulomb, yang menunjukkan bahwa potensial yang terjadi pada fermion akibat dari medan listrik yang dihasilkan oleh muatan lubang hitam. Kemudian dari hasil penelitian dibuat plot grafik fungsi $f(r)$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik Fungsi $f(r)$ untuk Lubang Hitam RN

dengan $f\ (r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ adalah fungsi $f(r)$ yang menunjukkan struktur lubang hitam RN, dimana:

M : Massa lubang hitam

Q : Muatan listrik lubang hitam

r : Jarak radial dari pusat lubang hitam

Gambar 3.2 adalah grafik fungsi $f(r)$ untuk lubang hitam RN yang mana, sumbu x menunjukkan nilai r dan sumbu y menunjukkan nilai $f(r)$. Sedangkan garis merah pada grafik menandakan nilai $f(r) = 0$. Untuk nilai $f(r) = 0$ sebagai penentu antara posisi horizon luar dan dalam. Titik ini dinamakan radius horizon lubang hitam. Radius horizon r_h merupakan jarak dari horizon peristiwa ke pusat lubang hitam, dimana pada titik ini gravitasi menjadi sangat kuat sehingga tidak ada informasi yang bisa keluar meskipun itu berupa cahaya. Ketika r mendekati horizon peristiwa, maka nilai $f(r)$ akan berkurang hingga mencapai nol, yang mana akan menunjukkan batas antara wilayah dalam dan luar lubang hitam. Sedangkan pada limit muatan dihilangkan yaitu $Q \rightarrow 0$, maka ruangwaktu akan kembali kedalam bentuk Schwarzschild, dan lubang hitam akan hanya bergantung pada massa.

Begitu juga, jika massa dari lubang hitam dihilangkan yaitu $M = 0$, maka tidak ada lubang hitam. Artinya suatu lubang hitam wajib mempunyai massa. Kemudian jika $M = 0$ dan $Q = 0$, maka persamaan akan kembali pada koordinat bola. Hal ini sesuai dengan sifat bahwa pada jarak yang sangat jauh dari sumber, kelengkungan disekitar benda massif itu menjadi sangat kecil, sehingga jika operator turunan kovarian dikembalikan kedalam turunan parsial biasa maka persamaan akan Kembali kedalam ruangwaktu datar, yang artinya tidak ada benda massif dalam persamaan dirac dalam ruangwaktu datar.

BAB IV

SOLUSI PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

Persamaan dirac merupakan salah satu persamaan gelombang yang digunakan untuk menggabungkan dua teori besar dalam fisika, yaitu mekanika kuantum dengan teori relativitas khusus. Dimana persamaan dirac ini menggambarkan perilaku partikel fermion yang mempunyai massa rendah yang bergerak mendekati kecepatan cahaya. Sedangkan metrik Reissner Nordstrom merupakan solusi dari persamaan Einstein dalam teori relativitas umum yang menggambarkan ruangwaktu disekitar lubang hitam yang bermuatan. Dengan kata lain, metrik Reissner Nordstrom ini tergantung pada medan gravitasi (Neznamov, Safronov, and Shemarulin 2018).

Pada bagian ini akan dikaji solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan metrik Reissner Nordstrom, yang merupakan salah satu pendekatan yang digunakan untuk menemukan solusi dari kasus penggabungan mekanika kuantum dengan teori relativitas umum. Dengan demikian, untuk mempertimbangkan pengaruh medan gravitasi yang dihasilkan oleh lubang hitam bermuatan maka dalam kasus ini persamaan dirac akan dimodifikasi. Sehingga dapat menghasilkan persamaan yang menggambarkan perilaku partikel fermion yang mempunyai muatan listrik berinteraksi dengan medan gravitasi yang dihasilkan oleh lubang hitam yang bermuatan tersebut.

Pada bab 3 telah dilakukan modifikasi pada persamaan dirac yaitu persamaan dirac yang berada pada ruangwaktu Reissner Nordstrom yang menghasilkan sebuah persamaan baru. Sehingga metode selanjutnya yang harus dilakukan agar menemukan solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom adalah sebegai berikut: (Vicente n.d.-a)

4.1 Separasi Variabel

Untuk memecahkan persamaan dirac yang telah dimodifikasi, maka dilakukan separasi variabel yaitu dengan memisahkan variabel menjadi suku waktu, suku sudut dan suku radialnya. Karena telah diketahui bahwa ruangwaktu Reissner Nordstrom pada penelitian ini adalah menggunakan koordinat bola, yang artinya suku sudut pada metrik Reissner Nordstrom sama dengan sudut ruang. Dari persamaan (3.125) didapatkan persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung RN, yang dituliskan: (Vicente, 2018)

$$\left(\left(\gamma^0\left(\frac{i}{S}\frac{\partial}{\partial_t}-\frac{e}{S}V(r)\right)+\gamma^r\left(iS\ \frac{\partial}{\partial_r}+\frac{i}{r}(S\ -1)+\frac{i}{2}S'\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,i\gamma^\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+i\gamma^\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)-m\right)\psi=0 \qquad (4.1)$$

Dari persamaan diatas, spinor dirac ψ diasumsikan dapat dipisahkan menjadi variabel waktu, sudut dan radial dalam bentuk:

$$\psi\ (t,r,\theta,\phi)=\Psi(t)Y(\theta,\phi)R(r) \qquad (4.2)$$

Adapun langkah-langkah pemisahan masing-masing variabel adalah sebagai berikut:

4.1.1 Pemisahan Variabel Waktu

Pertama, dilakukan pemisahan variabel waktu. Karena dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom memiliki simetri waktu yang artinya invarian terhadap waktu. Maka pemisahan variabel waktu dapat dilakukan pada bagian temporal, yaitu dengan diasumsikan bahwa spinor dirac ψ, yaitu:

$$\psi\ (t,r,\theta,\phi)=e^{-i\omega t}\Phi(r,\theta,\phi) \qquad (4.3)$$

Dimana ω adalah energi partikel, dan $\Phi(r,\theta,\phi)$ adalah bagian ruang. Sehingga pemisahan variabel waktu dari persamaan (4.1) menjadi:

$$\gamma^0\left(\frac{i}{S}\frac{\partial}{\partial_t}-\frac{e}{S}V(r)\right)\psi(t,r,\theta,\phi)$$

dimana,

$$\frac{\partial}{\partial_t}\psi(t,r,\theta,\phi)=\frac{\partial}{\partial_t}e^{-i\omega t}\Phi(r,\theta,\phi)$$
$$=-i\omega e^{-i\omega t}\Phi(r,\theta,\phi) \qquad (4.4)$$

Jika persamaan diatas disubsitusikan kedalam komponen temporal, maka dihasilkan:

$$\gamma^0\left(\frac{\omega-eV}{S}\right)e^{-i\omega t}\Phi(r,\theta,\phi) \qquad (4.5)$$

Bagian waktu $e^{-i\omega t}$ merupakan faktor terpisah, sehingga pada kasus ini hanya berkaitan pada bagian ruang menjadi:

$$\left(\left(\gamma^0\left(\frac{\omega-eV}{S}\right)+\gamma^r\left(iS\,\frac{\partial}{\partial_r}+\frac{i}{r}(S\ -1)+\frac{i}{2}S'\right)+i\gamma^\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\right.\right.$$
$$\left.\left.i\gamma^\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)-m\right)\Phi(r,\theta,\phi)=0 \qquad (4.6)$$

Dalam solusi waktu memunculkan ω yang merupakan eigenvalue energi. Eigenvalue ini menggambarkan komponen temporal, yang mana dengan menggunakan ansatz $e^{-i\omega t}$ menunjukkan bahwa fungsi gelombang spinor akan berubah seiring waktu. Sehingga solusi umum dari pemisahan variabel waktu pada persamaan dirac dalam ruangwaktu RN menghasilkan eigenvalue yang merupakan kuantitas dari spektrum energi partikel fermionik yang berada pada medan gravitasi dan elektromagnetik yang digambarkan oleh ruangwaktu RN. Selanjutnya, persamaan dapat disederhanakan menjadi persamaan diferensial untuk bagian ruang.

4.1.2 Pemisahan Komponen Sudut $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\phi})$

Dalam pemisahan komponen sudut, diperlukan dekomposisi spinorial dengan menggunakan harmonik spinor bola $Y(\theta, \phi)$ yang sesuai dengan simetri bola dari ruangwaktu Reissner Nordstrom. Sehingga, persamaan menjadi:

$$\left(i\gamma^{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + i\gamma^{\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y(\theta, \phi)$$

$$\left(i\gamma^{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + i\gamma^{\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\chi_{jk}(\theta, \phi) = \lambda\chi_{jk}(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

Dalam teori spinor, fungsi sudut $Y(\theta, \phi)$ merupakan eigenfungsi dari operator momentum sudut total $\vec{\mathrm{J}}$ yang dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{L}} + \vec{\mathrm{S}} \quad (4.8)$$

Dimana $\vec{L}$ adalah operator momentum sudut orbital dan $\vec{S}$ adalah operator momentum sudut spin. Dituliskan operator momentum sudut orbital $(\vec{L})$ sebagai berikut:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = -i\,(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

$$L_{\pm} = L_x \pm L_y$$

$$L^2 = -\Delta s^2 = L_+L_- + L_z^2 - L_z = L_-L_+ + L_z^2 + L_z \quad (4.9)$$

Dimana

L : Momentum sudut orbital

r : Vektor posisi

p : Operator momentum linier

∇ : Operator gradient yang dapat dituliskan menjadi $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$

Δs^2 : Laplasian koordinat bola

Selanjutnya untuk menyatakan solusi dari persamaan laplasian dalam koordinat bola, ditinjau konstanta dari operator momentum sudut orbital $l(l+1)$ dan fungsi harmonik bola Y_l^k , yang dituliskan:

$$L^2Y_l^k = l(l+1)Y_l^k$$

$$L_zY_l^k = kY_l^k \quad (4.10)$$

$$L_{\pm} = \sqrt{l(l+1) - k(k \pm 1)Y_l^{k\pm1}}$$

Dimana $Y_l^k, l = 0,1,2,3, dst$ adalah harmonik bola, $k = -l, \dots, l$. Sehingga Y_l^k merupakan fungsi eigen dari L^2 dan L_z, yang mana persamaan tersebut orthonormal:

$$\int_{S^2} Y_l^{k*} Y_{l'}^{k'} = \delta_{jj'}\, \delta^{kk'} \tag{4.11}$$

Sedangkan untuk partikel dengan spin $\frac{1}{2}$. Komponen-komponen dari operator momentum sudut spin $(\vec{S})$, dapat diekspresikan dalam bentuk matriks Pauli yaitu:

$$\sigma^r = \vec{\sigma}.\vec{X}_r = \sigma^1 sin\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi + \sigma^3 cos\theta$$
$$\sigma^\theta = \vec{\sigma}.\vec{X}_\theta = \frac{1}{r}(\sigma^1 cos\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi - \sigma^3 sin\theta)$$
$$\sigma^\phi = \vec{\sigma}.\vec{X}_\phi = \frac{1}{rsin\theta}(-\sigma^1 sin\phi + \sigma^2 cos\phi) \tag{4.12}$$

dimana,

$$\vec{X}_r = sin\theta cos\phi\hat{x} + sin\theta sin\,\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z}$$
$$\vec{X}_\theta = cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sin\phi\hat{y} - sin\theta\hat{z}$$
$$\vec{X}_\phi = -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y} \tag{4.13}$$

menunjukkan bidang vector orthogonal local yang dihasilkan dari transformasi koordinat kartesian ke koordinat bola yang sudah didapatkan dalam bab sebelumnya pada persamaan (3.82).

Sedangkan $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ adalah matriks Pauli yang mempunyai sifat masing-masing, yaitu:

$$\begin{aligned}\sigma^r\sigma^\theta &= (\vec{\sigma}.\vec{X}_r)(\vec{\sigma}.\vec{X}_\theta)\\ &= (\sigma^1 sin\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi + \\ &\quad \sigma^3 cos\theta)\left(\tfrac{1}{r}(\sigma^1 cos\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi - \sigma^3 sin\theta)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r}(\sigma^1 sin\theta cos\phi)(\sigma^1 cos\theta cos\phi) +$$

$$\frac{1}{r}(\sigma^2 sin\theta sin\phi)(\sigma^2 sin\theta sin\phi) - \frac{1}{r}(\sigma^3 cos\theta)(\sigma^3 sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}(\sigma^1)^2\ sin\ \theta\ cos\phi\ cos\theta\ cos\phi +$$

$$\frac{1}{r}(\sigma^2)^2 \sin^2\theta \sin^2\phi - \frac{1}{r}(\sigma^3)^2 cos\theta \sin\theta$$

$$= \frac{1}{r}(\sigma^1)^2\ sin\ \theta\ cos\theta \cos^2\phi + \frac{1}{r}(\sigma^2)^2 \sin^2\theta \sin^2\phi -$$

$$\frac{1}{r}(\sigma^3)^2 cos\theta \sin\theta$$

$$= \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\ (\ (\sigma^1)^2\cos^2\phi + (\sigma^2)^2\sin^2\phi - (\sigma^3)^2) \tag{4.14}$$

Untuk menyederhanakan persamaan digunakan identitas trigonometri,

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \tag{4.15}$$

Sehingga didapatkan:

$$\sigma^r\sigma^\theta = \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\ (\ (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 - (\sigma^3)^2)$$
$$= i\sin\theta\frac{1}{r}\ ((\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 - (\sigma^3)^2)$$
$$= i\sin\theta\ \sigma^\phi \tag{4.16}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.14) dikalikan antara sigma r dan sigma ϕ, didapatkan:

$$\sigma^r\sigma^\phi = \left(\vec{\sigma}.\vec{X}_r\right)\left(\vec{\sigma}.\vec{X}_\phi\right)$$

$$= (\sigma^1 sin\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi +$$

$$\sigma^3 cos\theta)\left(\frac{1}{rsin\theta}(-\sigma^1 sin\phi + \sigma^2 cos\phi)\right)$$

$$= \frac{1}{rsin\theta}(\sigma^1 sin\theta cos\phi)(\ -\sigma^1 sin\phi)\ +$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^2 sin\theta sin\phi)(\sigma^2 cos\phi) -$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^3 cos\theta)(\sigma^2 cos\phi)$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^1)^2 sin\theta \sin\phi\cos\phi +$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^2)^2\ sin\ \theta\ \ sin\phi \cos\phi -$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^3)(\sigma^2)\ cos\theta\ cos\phi$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^1)^2 sin\theta \cos\theta \sin\phi \cos\phi +$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^2)^2 \sin^2\theta \ sin\phi \cos\phi -$$

$$\frac{1}{rsin\theta}(\sigma^3)^2 sin\theta \ cos\theta \ cos\phi$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta} \ sin\theta \cos\theta \ ((\sigma^1)^2 sin\phi \cos\phi +$$

$$(\sigma^2)^2 sin\phi \cos\phi - (\sigma^3)^2) \tag{4.17}$$

Untuk menyederhanakan persamaan digunakan identitas trigonometri,

$$\sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi \tag{4.18}$$

Sehingga didapatkan:

$$\sigma^r\sigma^\phi = -\frac{1}{rsin\theta}\sin\theta\cos\theta \ \left(\frac{1}{2}(\sigma^1)^2 sin2\phi + \frac{1}{2}(\sigma^2)^2 sin2\phi -\right.$$

$$\left.(\sigma^3)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta}\sin\theta\cos\theta \ \left(\left(\frac{1}{2}sin2\phi\right)((\sigma^1)^2 + \ (\sigma^2)^2) -\right.$$

$$\left.(\sigma^3)^2\right) \tag{4.19}$$

Untuk mempermudah mengelompokkan suku yang sama digunakan identitas trigonometri,

$$\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi \tag{4.20}$$

Sehingga,

$$\sigma^r\sigma^\phi = -\frac{1}{rsin\theta}\sin\theta\cos\theta \ \left(\left(\frac{1}{2}sin2\phi\right)((\sigma^1)^2 + \ (\sigma^2)^2) -\right.$$

$$\left.(\sigma^3)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{rsin\theta}\sin\theta\cos\theta \ \big((sin\phi\cos\phi)((\sigma^1)^2 + \ (\sigma^2)^2) -$$

$$2(\sigma^3)^2\big)$$

$$= -\frac{1}{r}((\sigma^1)^2 \sin\phi\cos\phi\cos\theta +$$

$$(\sigma^2)^2\sin\phi\cos\phi\cos\theta - 2(\sigma^3)^2\cos\theta) \tag{4.21}$$

Untuk mempermudah persamaan diperkenalkan $2\sigma^r \ dan \ 2\sigma^\theta$:

$$\sigma^r\sigma^\phi = -\frac{1}{2}(2(\sigma^1)^2\sin\phi\cos\phi\cos\theta +$$

$$2(\sigma^2)^2\sin\phi\cos\phi\cos\theta - 4(\sigma^3)^2\cos\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}2(\sigma^1)^2 \sin\phi\cos\phi\cos\theta +$$
$$\frac{1}{2}2(\sigma^2)^2 \sin\phi\cos\phi\cos\theta - \frac{1}{2}4(\sigma^3)^2\cos\theta$$
$$= -(\sigma^1)^2 \sin\phi\cos\phi\cos\theta + (\sigma^2)^2 \sin\phi\cos\phi\cos\theta -$$
$$2(\sigma^3)^2\cos\theta$$
$$= -\frac{i}{\sin\theta}\sigma^\theta \tag{4.22}$$

Dengan demikian didapatkan masing-masing sifat dari matrik pauli, yaitu:

$$\sigma^r\sigma^\theta = i\sin\theta\,\sigma^\phi$$
$$\sigma^r\sigma^\phi = -\frac{i}{\sin\theta}\sigma^\theta \tag{4.23}$$

dan juga,

$$(\sigma^r)^2 = (\sigma^1 sin\theta cos\phi + \sigma^2 sin\theta sin\phi + \sigma^3 cos\theta)^2$$
$$= (\sigma^1 sin\theta cos\phi)^2 + (\sigma^2 sin\theta sin\phi)^2 + (\sigma^3 cos\theta)^2 +$$
$$2(\sigma^1\sin\theta\cos\phi)(\sigma^2\sin\theta\sin\phi) +$$
$$2(\sigma^1\sin\theta\sin\phi)(\sigma^3\cos\theta) +$$
$$2(\sigma^2\sin\theta\sin\phi)(\sigma^3 cos\theta)$$
$$= (\sigma^1)^2(sin\theta)^2(cos\phi)^2 + (\sigma^2)^2(sin\theta)^2(sin\phi)^2 +$$
$$(\sigma^3)^2(cos\theta)^2 + 2\sigma^1\sigma^2(sin\theta)^2\cos\phi)(sin\phi) +$$
$$(2\sigma^1\sigma^3(sin\theta)(cos\phi)(cos\theta) +$$
$$+2\sigma^2\sigma^3(\sin\theta)(sin\phi)(\cos\theta) \tag{4.24}$$

dimana matriks Pauli memiliki sifat,

$$(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 = I \tag{4.25}$$

dan juga,

$$\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij}I \tag{4.26}$$

Dengan δ^{ij} adalah delta Kronecker yang mempunyai nilai 1 jika $i = j$ dan bernilai 0 jika $i \neq j$, sehingga nilai dari:

$$\sigma^1\sigma^2 = \sigma^1\sigma^3 = \sigma^2\sigma^3 = 0 \tag{4.27}$$

Sehingga persamaan (4.24) menjadi:

$$(\sigma^r)^2 = I(sin\theta)^2(cos\phi)^2 + I(sin\theta)^2(sin\phi)^2 + I(cos\theta)^2 +$$
$$2.0\,(sin\theta)^2(\cos\phi)(sin\phi) +$$
$$2.0\,(sin\theta)(cos\phi)(cos\theta) + +2.0\,(\sin\theta)(sin\phi)(\cos\theta)$$
$$= I((sin\theta cos\phi)^2 + (sin\theta sin\phi)^2 + (cos\theta)^2)$$
$$= I(\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta)$$
$$= I(\sin^2\theta\,(1) + \cos^2\theta)$$

$$= I(1)$$
$$= 1$$
$$(\sigma^r)^\dagger = \sigma^r \tag{4.28}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.23) didapatkan hubungan:

$$\vec{r} \times \vec{\nabla} = -r \times \vec{\nabla}$$
$$= -r\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\hat{\theta}\sin\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\right)$$
$$= -r(\hat{r} \times \hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + \left(\hat{r} \times \hat{\theta}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}sin\theta + (\hat{r} \times \hat{\phi})\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$
$$= -r\left(0 + \left(\hat{\phi}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}sin\theta + \left(-\hat{\theta}\right)\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= -r\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta}sin\theta - \frac{\hat{\theta}}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= -r\left(\frac{\vec{X}_\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} - \sin\theta\,\vec{X}_\phi\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{4.29}$$

Dari persamaan (4.29) didapatkan hubungan:

$$\sigma^r\vec{\sigma}.\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) = -r\sigma^r\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\sigma^\theta}{\sin\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\,\sigma^\phi\right)\left(\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= -ir\left(\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= -ir\left(\sigma^r\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^r\sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= -ir\left(i\sin\theta\,\sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin\theta}\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$
$$= r\left(\sin\theta\,\sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \phi} = \vec{\sigma}\vec{\nabla} - \sigma^r\partial_r$$
$$= \frac{\sigma^r}{r}(\vec{\sigma}\vec{r})\left(\vec{\sigma}\vec{\nabla} - \sigma^r\partial_r\right)$$
$$= \frac{\sigma^r}{r}\left(r\partial_r + i\vec{\sigma}\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) - r\partial_r\right)$$
$$= -\frac{\sigma^r}{r}\left(\vec{\sigma}.\vec{L}\right)$$
$$= -\frac{\sigma^r}{r}(K - 1) \tag{4.30}$$

Dalam persamaan ini operator diferensial $\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial \phi}$ bertindak pada vektor unit σ yang diberikan sebagai $K - 1$. Sedangkan $\vec{\sigma}.\vec{L}$ adalah operasi rotasi yang bertindak pada vektor unit σ yang dapat dijabarkan:

$$\vec{\sigma}.\vec{L} = -r\sigma^r \left(\sigma^\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma^\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{4.31}$$

Untuk mendapatkan persamaan bagaimana operator rotasi mempengaruhi koordinat $\sigma^\theta\ dan\ \sigma^\phi$. Sehingga dapat dinyatakan:

$$K - 1 = \sigma^\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma^\phi \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$K = \sigma^\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma^\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + 1$$

$$K = (\vec{\sigma}.\vec{L}) + 1 \tag{4.32}$$

Selanjutnya didefinisikan harmonisa spinor bola, sebagai bentuk penyederhanaan persamaan:

$$\chi_{jk}^L(\theta,\phi) = Y_{jk}^{L1/2}(\theta,\phi) \tag{4.33}$$

Adapun untuk mendeskripsikan partikel yang mempunyai momentum sudut orbital dan spin, diperlukan eigenfungsi serta eigennilai dari (J^2) dan komponen (J_z) sebagai spinor dari fungsi harmonik bola. Sehingga dalam pemisahan komponen sudut diperlukan fungsi-fungsi eigen dari operator momentum sudut total yang bekerja pada fungsi gelombang. Maka dari itu untuk mendapatkan eigenfungsi dari (J^2) dan (J_z) dilakukan penggabungan dari spinor bola $\chi_{\frac{1}{2}\sigma}$ dan harmonik bola $Y_{lm}(\theta,\phi)$.

$$\chi_{jk}^L(\theta,\phi) = \sum_{m\sigma} C_{lm1/2\sigma}^{jk}\, Y_{lm}(\theta,\phi)\chi_{\frac{1}{2}\sigma} \tag{4.34}$$

Dengan $j = \frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\ dst$ dan $k = -j, -j+1, (\dots), j-1, j$. Sehingga dari persamaan didefinisikan dua spinor dari pemisahan komponen sudut, yaitu:

$$\chi_{j-\frac{1}{2}}^k(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{j+k}{2j}}\, Y_{j-\frac{1}{2}}^{k-1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{j-k}{2j}}\, Y_{j-\frac{1}{2}}^{k+1}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\chi_{j+\frac{1}{2}}^k(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{j+1-k}{2j+2}}\, Y_{j+\frac{1}{2}}^{k-1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sqrt{\frac{j+1+k}{2j+2}}\, Y_{j+\frac{1}{2}}^{k+1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{4.35}$$

Dimana dari persamaan diatas ditinjau:

- Kofisien Clebsch Gordan $(C_{lm1/2\sigma}^{jk})$

Kofisien Clebsch Gordan digunakan untuk menggabungkan fungsi harmonik bola dan spinor bola (dua momentum sudut, yaitu orbital dan spin). Dimana nilainya dituliskan,

$$\sqrt{\frac{j+k}{2j}} \text{ dan } \sqrt{\frac{j-k}{2j}} \text{ untuk momentum sudut total } j = l - \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{\frac{j+1-k}{2j+2}} \text{ dan } \sqrt{\frac{j+1+k}{2j+2}} \text{ untuk momentum sudut total } j = l + \frac{1}{2} \quad (4.36)$$

- Harmonik Bola $Y_{lm}(\theta, \phi)$

Harmonik bola ditunjukkan $Y_{j-\frac{1}{2}}^{k-1/2}(\theta, \phi)$ dan $Y_{j+\frac{1}{2}}^{k-1/2}(\theta, \phi)$. Dengan j adalah setengah bilangan bulat, dan L adalah bilangan bulat.

- Spinor Bola $(\chi_{\frac{1}{2}\sigma})$

Dari persamaan ditinjau untuk partikel dengan spin $\frac{1}{2}$ dituliskan,

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, spin\ up \quad (4.37)$$
$$\chi_{-1/2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, spin\ down$$

Dimana memenuhi syarat othonormal harmonic bola, sebagai berikut

$$\int_{S^2} \left(\chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}\right)^{\dagger} \chi_{j\prime\mp 1/2}^{k\prime} d\Omega = \delta_{jj\prime}, \delta^{kk\prime}$$
$$\int_{S^2} \left(\chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}\right)^{\dagger} \chi_{j\prime\pm 1/2}^{k\prime} d\Omega = 0 \quad (4.38)$$

dengan digunakan operasi aljabar, dapat ditunjukkan bahwa:

$$J^2 \chi_{j\pm\frac{1}{2}}^{k} = \left(\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right)^2 \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}$$
$$= \left(\left(\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right)\left(\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right)\right) \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}$$
$$= \left(\vec{L}.\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{L} + \frac{1}{4}\vec{\sigma}\vec{\sigma}\right) \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}$$
$$= \left(\vec{L}.\vec{L} + \frac{1}{2}\left(\vec{L}\vec{\sigma} + \vec{\sigma}\vec{L}\right) + \frac{1}{4}(3\mathrm{I})\right) \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}$$

digunakan sifat komutasi $[L, \sigma] = 0$, sehingga:

$$= \vec{L}^2 \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k} + \frac{3\mathrm{I}}{4} \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k}$$
$$= j(j+1) \chi_{j\mp\frac{1}{2}}^{k} \quad (4.39)$$

Proyeksi momentum sudut total dalam arah z (j_z):

$$\begin{aligned} J_z\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} &= \left(L_z + \frac{1}{2}\sigma^3\right)\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} \\ &= k\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} K\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} &= \left(\left(\vec{\sigma}.\vec{L}\right) + 1\right)\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} \\ &= \pm\left(j + \frac{1}{2}\right)\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.41}$$

atau dapat dituliskan,

$$K\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} L_z + 1 & L_- \\ L_+ & -L_z + 1 \end{pmatrix}\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}} \tag{4.42}$$

Selanjutnya, perkalian antara σ^r dengan persamaan (4.41) akan menghasilkan vector eigen K, yaitu:

$$\begin{aligned} K\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} &= \left(\left(\vec{\sigma}.\vec{L}\right) + 1\right)\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ &= \left(-r\sigma^r\left(\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + 1\right)\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ &= -\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} - r\sigma^r\left(\sigma^\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma^\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ &= -\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} - \sigma^r\left(\vec{\sigma}.\vec{L}\right)\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ &= -\left(j + \frac{1}{2}\right)\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.43}$$

Sehingga dari persamaan diatas menunjukkan bahwa solusi dari persamaan sudut melibatkan harmonik sferis spinorial, yang merupakan solusi dari faktor eigen $\chi^k_{j\mp\frac{1}{2}}(\theta,\phi)$ untuk operator kuadrat momen angular (j^2) dan operator komponen momen angular dalam arah z (j_z). Dengan demikian, dari persamaan (4.42) dan (4.43) persamaan $\sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}}$ harus sebanding dengan $\chi^k_{j+\frac{1}{2}}$. Dengan dipertimbangkan faktor normalisasi, diperoleh rumus sederhana, yaitu:

$$\begin{aligned} \sigma^r\chi^k_{j-\frac{1}{2}} &= \chi^k_{j+\frac{1}{2}} \\ \sigma^r\chi^k_{j+\frac{1}{2}} &= \chi^k_{j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.44}$$

4.1.3 Pemisahan Komponen Radial $(\boldsymbol{r})$

Selanjutnya, akan dilakukan pemisahan variabel radial (r). Dimana dari komponen temporal dan komponen sudut yang telah didapatkan diatas. Maka dipertimbangkan dua ansatz, sebagai solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom yang sesuai untuk komponen tempolar, angular, dan radial dari fungsi gelombang ini, yang mana dapat diperoleh empat komponen spinor yang memenuhi persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom. Sebagai berikut:

$$\Psi^{+}_{jk\omega}(t,r,\theta,\phi) = e^{-i\omega t}\,\frac{S^{-1/2}}{r}\begin{pmatrix} \chi^{k}_{j-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) & \Upsilon^{+}_{jk\omega 1}(r) \\ i\chi^{k}_{j+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) & \Upsilon^{+}_{jk\omega 2}(r) \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

$$\Psi^{-}_{jk\omega}(t,r,\theta,\phi) = e^{-i\omega t}\,\frac{S^{-1/2}}{r}\begin{pmatrix} \chi^{k}_{j+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) & \Upsilon^{-}_{jk\omega 1}(r) \\ i\chi^{k}_{j-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) & \Upsilon^{-}_{jk\omega 2}(r) \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

dengan $\Upsilon^{\pm}_{jk\omega}$ adalah dua spinor. Sedangkan $\chi^{k}_{j-\frac{1}{2}}$ dan $\chi^{k}_{j+\frac{1}{2}}$ disebut harmonik bola spinor (indeks $j\ dan\ \kappa$ adalah setengah bilangan bulat yang memenuhi $j \geq \kappa$). (Vicente et al. 2018)

Komponen radial terbagi menjadi bagian positif $\Upsilon^{+}_{jk\omega}$ dan bagian negatif $\Upsilon^{-}_{jk\omega}$. Hal ini merupakan konsekuensi dari simetri spin dan energi dalam sistem. Persamaan dirac dalam ruangwaktu RN merupakan persamaan yang menggambarkan partikel yang diasosiasikan kedalam energi positif dan antipartikel yang diasosiasikan kedalam energi negatif, serta menghubungkan antara dua komponen spin atas dan spin bawah. Selanjutnya disubtisikan persamaan kedalam persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom yang telah didapatkan dalam persamaan (3.125) sehingga didapatkan matriks dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom. Dimana fungsi S diberikan: (Finster, Smoller, and Yau 2000)

$$S\,(r) = \left|1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right|^{1/2} \tag{4.47}$$

matriks dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom, dituliskan:

$$\left(\left(\gamma^0\left(\frac{i}{S}\frac{\partial}{\partial_t} - \frac{e}{S}V(r)\right) + \gamma^r\left(iS\,\frac{\partial}{\partial_r} + \frac{i}{r}(S\ - 1) + \frac{i}{2}S'\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. i\gamma^\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + i\gamma^\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - m\right)\psi = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\left(\frac{i}{S}\frac{\partial}{\partial_t} - \frac{e}{S}V(r)\right) + \begin{pmatrix}0 & \sigma^r\\ -\sigma^r & 0\end{pmatrix}\left(iS\,\frac{\partial}{\partial_r} + \frac{i}{r}(S\ - 1) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{i}{2}S'\right) - \frac{i}{r}\begin{pmatrix}0 & \sigma^r(K-1)\\ -\sigma^r(K-1) & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\Psi^{\pm}_{jk\omega} = 0 \tag{4.48}$$

Langkah selanjutnya, dengan disubsitusikan persamaan dua anzats (4.45) dan (4.46) kedalam persamaan dirac dan diterapkan hubungan (4.41), (4.42), (4.43), dan (4.44). Maka, diperoleh persamaan dirac dua komponen, yaitu:

$$S\,\frac{d}{dr}\Upsilon^{\pm}_{jk\omega} = \left[\omega - \frac{eV}{S}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \pm \frac{2j+1}{2r}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\Upsilon^{\pm}_{jk\omega} \tag{4.49}$$

sehingga untuk menyederhanakan kedua persamaan menjadi persamaan tunggal didefinisikan:

$$\Upsilon_{jk\omega} = \begin{cases}\Upsilon^{-}_{-jk\omega} & j = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, (\dots)\\ \Upsilon^{+}_{jk\omega} & j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, (\dots)\end{cases}$$

$$\tilde{j}(j) = sign(j)\left(\frac{2|j|+1}{2}\right)\epsilon\ \mathrm{Z}\backslash\{0\} \tag{4.50}$$

dimana $\tilde{j}(j)$ adalah fungsi yang menunjukkan nilai tertentu berdasarkan tanda dari j. Untuk $sign(j)$ adalah fungsi tanda yang memberikan nilai $+1\ jika\ j > 0\ dan -1\ jika\ j < 0$. Sedangkan $\frac{2|j|+1}{2}$ adalah rumus yang nilainya berdasarkan besar j. Misalnya jika $j = \frac{1}{2}$, maka $\tilde{j}(1/2) = 1 \times \left(\frac{2|1/2|+1}{2}\right) = 1$. Untuk Z\{0} menunjukkan bahwa j berada dalam himpunan bilangan bulat Z, yang artinya $j \neq 0$. Sehingga persamaan (4.49) menjadi: (Vicente, 2018)

$$S\frac{d}{dr}\Upsilon_{jk\omega} = \left[\omega - \frac{eV}{S}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{\tilde{j}}{r}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\Upsilon_{jk\omega} \quad (4.51)$$

Persamaan (4.51) merupakan system gabungan dari dua persamaan diferensial biasa (ordinary differential equetions atau ODE) yang terdiri dari dua persamaan linier orde pertama dalam komponen:

$$\Upsilon_{jk\omega}(r) = \begin{pmatrix}\Upsilon_{jk\omega 1}(r)\\ \Upsilon_{jk\omega 2}(r)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_j(r)\\ G_j(r)\end{pmatrix} \quad (4.52)$$

dimana $F_j(r)$ dan $G_j(r)$ dituliskan sebagai solusi dari suku radial dalam lubang hitam Reissner Nordstrom yang terbagi menjadi dua bagian. Dengan $F_j(r)$ menunjukkan bagian energi postif (partikel) dan $G_j(r)$ menunjukkan bagian energi negatif (antipartikel). Hal ini terjadi dikarenakan sifat dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom itu sendiri muncul secara alami yang melibatkan komponen spinorial partikel dan antipartikel. Untuk mendapatkan nilai dari diferensial terpisah $F_j(r)$ dan $G_j(r)$ disubsitusikan ansatz kedalam persamaan dirac. Dengan mengikuti bentuk umum dari suku radial persamaan dirac dalam ruangwaktu RN, maka dapat diperoleh solusi umum dari suku radial sebagai berikut:

$$S\frac{d}{dr}F_j - \frac{\tilde{j}}{r}F_j = -\left(\frac{\omega - eV}{S} + m\right)G_j \quad (4.52)$$

$$S\frac{d}{dr}G_j + \frac{\tilde{j}}{r}G_j = \left(\frac{\omega - eV}{S} - m\right)F_j \quad (4.52)$$

dimana S adalah faktor metrik, $\frac{d}{dr}$ adalah turunan terhadap radius r yang mengatur perubahan $F_j\ dan\ G_j$ seiring perubahan jarak radial dari pusat. Sedangkan eV itu sendiri adalah potensial listrik yang berasal dari interaksi antara partikel bermuatan e dengan medan listrik V yang dihasilkan oleh muatan Q dari ruangwaktu RN.

Persamaan (4.53) menghubungkan fungsi radial $F_j(r)$ dengan $G_j(r)$, dan menggabungkan frekuensi energi total (ω), potensial listrik (eV), massa partikel (m), dan momentum angular total $(\tilde{j}(j))$. Dimana persamaan (4.53) menunjukkan perubahan bagian radial $F_j(r)$ akibat dari bagian energi negative $G_j(r)$ yang terhubung dengan potensial listrik dan massa partikel. Sedangkan persamaan (4.54) sebaliknya menunjukkan bagian energi negatif $G_j(r)$ yang dipengaruhi oleh energi positif. Dengan demikian, persamaan dari solusi radial menunjukkan hubungan antara partikel dan antipartikel dari persamaan dirac dalam ruangwaktu RN, dan fungsi $S\ dan\ eV$ menunjukkan perubahan dinamika radial partikel spinorial akibat pengaruh dari perubahan medan elektromagnetik dan kelengkungan ruangwaktu. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai spesifik dari persamaan (4.53) diganti variabel $\frac{d}{dr}$ menjadi $u_*(r)$, maka:

$$\frac{du_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{S^2} \tag{4.55}$$

dengan digunakan operator al-jabar, didapatkan:

$$\frac{d^2}{du_*^2} F_j - \left[\frac{d}{du_*}\left(\frac{\tilde{j}}{r}\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right) - \omega^2\left(\frac{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right) + \frac{\tilde{j}^2}{r^2}\left(\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right)^2\right] F_j = 0 \tag{4.56}$$

Demikian juga, diganti variabel $\frac{d}{dr}$ menjadi $v_*(r)$, maka:

$$\frac{dv_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{S^2} \tag{4.57}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{d^2}{dv_*^2} G_j + \left[\frac{d}{dv_*}\left(\frac{\tilde{j}}{r}\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right) + \omega^2\left(\frac{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right) + \frac{\tilde{j}^2}{r^2}\left(\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right)^2\right] G_j = 0 \tag{4.58}$$

Dengan hubungan (4.55) menunjukkan bahwa:

$$\frac{d}{du_*}\left(\frac{\tilde{J}}{r}\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right)=-\frac{\tilde{J}}{r^2}\frac{S^3}{\left(1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}\right)^2}+\frac{\tilde{J}}{r}\frac{S^2}{\left(1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}\right)^2}\left[\frac{S^{-1}}{r^2}\left(M-\frac{Q^2}{r}\right)-\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\left(\frac{eV}{\omega r}+\frac{mS^{-1}}{\omega r^2}\left(M-\frac{Q^2}{r}\right)\right)\right] \tag{4.59}$$

Begitu juga dengan hubungan (4.57) menunjukkan bahwa:

$$\frac{d}{dv_*}\left(\frac{\tilde{J}}{r}\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\right)=-\frac{\tilde{J}}{r^2}\frac{S^3}{\left(1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}\right)^2}+\frac{\tilde{J}}{r}\frac{S^2}{\left(1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}\right)^2}\left[\frac{S^{-1}}{r^2}\left(M-\frac{Q^2}{r}\right)-\frac{S}{1-\frac{eV}{\omega}+\frac{mS}{\omega}}\left(\frac{eV}{\omega r}+\frac{mS^{-1}}{\omega r^2}\left(M-\frac{Q^2}{r}\right)\right)\right] \tag{4.60}$$

Dengan demikian nilai dari $F_j(r)$ dan $G_j(r)$ harus memenuhi persamaan (4.53) dan (4.54). Selanjutnya akan ditentukan perilaku asimtotik dari $F_j(r)$ dan $G_j(r)$. Perilaku asimtotik digunakan untuk menyederhanakan solusi radial dengan pendekatan batas solusi dibeberapa wilayah tertentu (Vicente et al. 2018).

4.2 Perilaku Asimtotik dari Solusi Persamaan Dirac dalam Ruangwaktu Reissner Nordstrom

Selanjutnya untuk mengetahui bagaimana $F_j(r)$ dan $G_j(r)$ yang merupakan solusi suku radial persamaan dirac dalam ruangwaktu Rissner Nordstrom berperilaku dan bagaimana partikel berinteraksi dengan medan gravitasi dan elektromagnetik lubang hitam, ditentukan perilaku asimtotik atau horizon peristiwa (batas peristiwa) ketika variabel mendekati batas tak hingga $r=+\infty$ di wilayah I dan ketika berperilaku didekat cakrawala $r=r_+$ di wilayah II.

4.2.1 Horizon Peristiwa Wilayah I: $r=+\infty$

Horizon peristiwa wilayah I adalah ketika variabel r mendekati batas tak hingga positif menunjukkan bahwa wilayah tersebut berada pada jarak yang jauh dari lubang hitam (wilayah berada pada luar lubang hitam). Artinya, dalam wilayah ini pengaruh dari gravitasi dan muatan listrik lubang hitam akan semakin menurun.

Karena berada diluar wilayah akibatnya nilai dari potensialnya menjadi lemah hingga mencapai nol. Sedangkan nilai dari energi kinetiknya diatur sedemikian rupa agar tetap bernilai positif sehingga partikel dalam wilayah ini akan terus bergerak. Dengan demikian fungsi gelombang yang dihasilkan dari wilayah I adalah fungsi gelombang pantul dan datang.

$$\lim_{r\to+\infty} S = 1$$
$$\lim_{r\to+\infty} V = 0 \tag{4.61}$$

Untuk memudahkan analisis dinamika partikel bermassa dan bermuatan yang mendekati horizon peristiwa lubang hitam, maka digunakan koordinat tortoise sebagai pengganti dari koordinat radial (r). Sehingga asimptotik limit pada persamaan (4.56) yaitu:

$$\frac{d^2}{du_*^2}\left(F_j\right)_I + \omega^2\left(\frac{\omega-m}{\omega+m}\right)\left(F_j\right)_I = 0 \tag{4.62}$$

dimana $u_*(r) = \frac{\omega+m}{\omega} r$ dan $\omega^2\left(\frac{\omega+m}{\omega-m}\right) = k^2$ atau $k = \omega\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}$ yang mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 + k^2 = 0$, untuk $\lambda = \pm ik$. Sehingga didapatkan solusi umum dari persamaan (4.62), yaitu:

$$\frac{d^2}{du_*^2}\left(F_j\right)_I + \omega^2\left(\frac{\omega-m}{\omega+m}\right)\left(F_j\right)_I = 0$$
$$\left(F_j\right)_I = \tilde{e}e^{iku_*} + \tilde{f}e^{-iku_*}$$
$$\left(F_j\right)_I = \tilde{e}e^{i\omega\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}u_*} + \tilde{f}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}u_*}$$
$$\left(F_j\right)_I = \tilde{e}e^{i\omega\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}\left(\frac{\omega+m}{\omega}r\right)} + \tilde{f}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}\left(\frac{\omega+m}{\omega}r\right)} \tag{4.63}$$

dengan,

$$\omega\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}\left(\frac{\omega+m}{\omega}r\right) = \sqrt{\omega^2+m^2}\, r \tag{4.64}$$

maka, didapatkan solusi umum dari persamaan (4.62), yaitu:

$$\left(F_j\right)_I = \tilde{e}\; exp\left[i\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] + \tilde{f}exp\left[-i\sqrt{\omega^2-m^2}r\right]$$
$$\left(F_j\right)_I = \tilde{e}\; exp\left[i\; sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] + \tilde{f}exp\left[-i\; sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] \tag{4.65}$$

dimana solusi dari nilai $\left(F_j\right)_I$ diberikan tanda $sign\ (\omega + m)$ untuk memastikan bahwa arah penyebaran gelombang atau solusi eksponensial sesuai dengan komponen yang diberikan. Dengan cara yang sama untuk asimptotik limit dari persamaan (4.58), yaitu:

$$\frac{d^2}{dv_*^2}\left(G_j\right)_I + \omega^2\left(\frac{\omega+m}{\omega-m}\right)\left(G_j\right)_I = 0 \tag{4.66}$$

dimana $v_*(r)$,

$$v_*(r) = \frac{\omega - m}{\omega} r \tag{4.67}$$

maka,

$$\frac{d^2}{dv_*^2}\left(G_j\right)_I + \omega^2\left(\frac{\omega+m}{\omega-m}\right)\left(G_j\right)_I = 0$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega-m}\right)^2 \frac{d^2}{dr^2}\left(G_J\right)_I + \omega^2\ \left(\frac{\omega+m}{\omega-m}\right)\left(G_j\right)_I = 0$$

disederhanakan dengan mengalikan kedua ruas dengan $\left(\frac{\omega-m}{\omega}\right)^2$:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(G_J\right)_I + \frac{\omega^2(\omega+m)(\omega-m)}{\omega^2}\ \left(G_j\right)_I = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(G_J\right)_I + (\omega^2 - m^2)\left(G_j\right)_I = 0$$

persamaan karakteristik untuk persamaan ini, yaitu:

$$\kappa^2 = \omega^2 - m^2$$

$$\kappa = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2}$$

maka, didapatkan solusi umum dari persamaan (4.66) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\left(G_j\right)_I &= \tilde{g}e^{i\omega\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}v_*} + \tilde{h}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}v_*} \\ &= \tilde{g}\ exp\left[i\ sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] + \\ &\quad \tilde{h}exp\left[-i\ sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right]\end{aligned} \tag{4.68}$$

Solusi tersebut memunculkan empat konstanta yang bernilai kompleks yaitu $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$. Dimana diekspresikan bahwa $\tilde{g}\ dan\ \tilde{h}$ fungsi dari $\tilde{e}\ dan\ \tilde{f}$. Sehingga dengan disubsitusikan $\left(F_j\right)_I$ dan $\left(G_j\right)_I$ maka diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\tilde{e}\, exp\left[i\, sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] - \tilde{f} exp\left[-i\, sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] = i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\left(\tilde{g}\, exp\left[i\, sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] + \tilde{h} exp\left[-i\, sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right]\right) \quad (4.69)$$

dan,

$$\tilde{e}\, exp\left[i\, sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] + \tilde{f} exp\left[-i\, sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] = i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\left(\tilde{g}\, exp\left[i\, sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right] - \tilde{h} exp\left[-i\, sign(\omega-m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right]\right) \quad (4.70)$$

Selanjutnya dengan membagi masing-masing ruas dengan $exp\left[i\, sign(\omega+m)\sqrt{\omega^2-m^2}r\right]$, maka diperoleh nilai:

$$\tilde{e}+\tilde{f} = i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\tilde{g} - i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\tilde{e} \quad (4.71)$$

sehingga,

$$\tilde{e} \approx i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\tilde{g}$$

$$\tilde{g}i \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}}\tilde{e} \quad (4.72)$$

dikalikan masing-masing ruas dengan $-i$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{g} = -i\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}\tilde{e} \quad (4.73)$$

dan,

$$\tilde{f} \approx -i\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}\tilde{h}$$

$$\tilde{h}i \approx -\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}}}\tilde{f} \quad (4.74)$$

begitu juga dikalikan masing-masing ruas dengan $-i$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{h} = i\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}}\tilde{f} \quad (4.75)$$

Dengan demikian, karena gelombang harus datang dari batas $r = +\infty$. Maka, solusi dari persamaan (4.49) memenuhi kondisi $\omega \in X$ dengan:

$$X = \{\omega | \omega^2 - m^2 > 0\} \tag{4.76}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan solusi gelombang datang dan pantul dari persamaan (4.49), maka digunakan kecepatan grup. Adapun fungsi dari kecepatan grup adalah untuk menggambarkan laju perambatan energi dalam gelombang tersebut. Bentuk umum dari solusi persamaan diferensial pada (4.49) adalah:

$$\psi_I(r) = Ae^{i\kappa r_*} + Be^{-i\kappa r_*} = Ae^{i\kappa r} + Be^{-ikr} \tag{4.77}$$

sehingga diperoleh solusi asimtotik $r = +\infty$ adalah:

$$\Upsilon^{\pm}_{j\kappa\omega}(r \to +\infty) = I^{\pm}e^{-i\kappa r}\left(\begin{matrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{\omega - m}{\omega + m}} \end{matrix}\right) + R^{\pm}e^{ikr}\left(\begin{matrix} 1 \\ -i\sqrt{\dfrac{\omega - m}{\omega + m}} \end{matrix}\right) \tag{4.78}$$

maka fungsi gelombang datang dituliskan:

$$(\Psi)^i_I = \sum_{j,k}[I^+\left(\Psi^+_{jk}\right)^i + I^-\left(\Psi^-_{jk}\right)^i] \tag{4.79}$$

dengan $\in = sign\ (\omega + m)$ maka,

$$\begin{aligned} \left(\Psi^+_{jk}\right)^i &= \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t {+}{\in} \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right)\right]\left(\begin{matrix} \chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{\omega - m}{\omega + m}}\chi^k_{j+\frac{1}{2}} \end{matrix}\right) \\ \left(\Psi^-_{jk}\right)^i &= \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t {+}{\in} \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right)\right]\left(\begin{matrix} \chi^k_{j+\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{\omega - m}{\omega + m}}\chi^k_{j-\frac{1}{2}} \end{matrix}\right) \end{aligned} \tag{4.80}$$

dan digunakan cara yang sama, fungsi gelombang pantul, dituliskan:

$$(\Psi)^r_I = \sum_{j,k}[R^+\left(\Psi^+_{jk}\right)^r + R^-\left(\Psi^-_{jk}\right)^r] \tag{4.81}$$

dengan,

$$\left(\Psi^+_{jk}\right)^r = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t {+}{\in} \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right)\right]\left(\begin{matrix} \chi^k_{j-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{\omega - m}{\omega + m}}\chi^k_{j+\frac{1}{2}} \end{matrix}\right) \tag{4.82}$$

$$\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^{r} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t + \in \sqrt{\omega^{2}-m^{2}}\, r\right]\begin{pmatrix} \chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \\ -\sqrt{\dfrac{\omega-m}{\omega+m}}\chi_{j-\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}\right.$$

Dengan demikian, dari persamaan solusi diatas amplitudo $I^{+}, I^{-}, R^{+}, dan\ R^{-}$ menunjukkan fungsi bernilai kompleks dari $j, \kappa\ dan\ \omega$. Dengan fungsi tanda ∈, solusi gelombang terdiri dari dua komponen yaitu gelombang datang dan pantul yang memiliki masing-masing kecepatan grup yang berlawanan disepanjang r yang memenuhi kondisi batas masalah (Vicente et al. 2018).

Persamaan dari solusi gelombang datang dan pantul $(\Psi_{I}^{i}\ dan\ \Psi_{I}^{r})$ yang terdiri dari komponen temporal (ωt), komponen sudut, dan komponen radial $(\in \sqrt{\omega^{2}-m^{2}}\, r)$ menunjukkan bahwa bagaimana partikel yang mempunyai spin setengah $(\frac{1}{2})$ berinteraksi dengan geometri ruangwaktu RN akibat dari massa dan muatan. Dimana Ψ_{I}^{i} menunjukkan partikel yang bergerak menuju horizon lubang hitam RN. Sedangkan Ψ_{I}^{r} menggambarkan partikel yang bergerak menjauh dari dari horizon. Adapun makna fisis dari komponen eksponensial, secara fisis menggambarkan:

- Evolusi temporal (ωt), menunjukkan perubahan fase terhadap waktu. Semakin besar nilai waktunya, maka energi total partikel akan semakin kecil.
- Propagasi radial $(\frac{1}{r})$, menunjukkan intensitas gelombang yang berkurang seiring bertambahnya jarak r, akibat dari distribusi energi diruang tiga dimensi.

- Fungsi tanda ∈, yang akan menentukan arah energi, masuk atau menjauh dari horizon.

4.2.2 Horizon Peristiwa Wilayah II: $r = r_+$

Horizon peristiwa wilayah II adalah ketika variabel r sama dengan r_+ menunjukkan bahwa wilayah tersebut berada dekat dengan lubang hitam (wilayah berada dalam lubang hitam). Artinya, dalam wilayah ini interaksi dari gravitasi dan muatan listrik lubang hitam menjadi sangat kuat. Karena berada didalam wilayah akibatnya nilai dari potensialnya bukan nol. Sedangkan nilai dari energi kinetiknya mendekati nilai nol sebab dalam wilayah ini lebih dipengaruhi oleh potensialnya. Dengan demikian fungsi gelombang yang dihasilkan dari wilayah ini adalah fungsi gelombang transmisi yang nanti akan masuk kedalam lubang hitam.

$$\lim_{r \to r_+} S = 0$$
$$\lim_{r \to r_+} V = V_+ = \frac{Q}{r_+} \tag{4.83}$$

untuk asimptotik limit pada persamaan (4.56),

$$\frac{d^2}{du_*^2}\left(F_j\right)_{II} + \omega^2\left(F_j\right)_{II} = 0 \tag{4.84}$$

dimana,

$$u_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)}(\omega - eV_+)\log(r - r_+)$$
$$k = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)}(\omega - eV_+) \tag{4.85}$$
$$u_*(r) = k\log(r - r_+)$$

maka didapatkan solusi dari persamaan (4.84):

$$\left(F_j\right)_{II} = \tilde{a}e^{i\omega u_*} + \tilde{b}e^{-i\omega u_*}$$
$$\left(F_j\right)_{II} = \tilde{a}e^{i\omega k\log(r - r_+)} + \tilde{b}e^{-i\omega k\log(r - r_+)}$$
$$e^{i\omega k\log(r - r_+)} = (r - r_+)^{-i\omega k} \tag{4.86}$$

$$\left(F_j\right)_{II} = \tilde{a}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} + \tilde{b}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}$$

$$\left(F_j\right)_{II} = \tilde{a}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} + \tilde{b}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}$$

Dengan cara yang sama untuk asimptotik limit dari persamaan (4.58), yaitu:

$$\frac{d^2}{dv_*^2}\left(G_j\right)_{II} + \omega^2\left(G_j\right)_{II} = 0 \tag{4.87}$$

dimana,

$$v_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+-r_-)}(\omega - eV_+)\log(r-r_+) \tag{4.88}$$

maka, solusi dari persamaan (4.78) didapatkan:

$$\begin{aligned}\left(G_j\right)_{II} &= \tilde{c}e^{i\omega u_*} + \tilde{d}e^{-i\omega u_*}\\ &= \tilde{c}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} + \tilde{d}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}\end{aligned} \tag{4.89}$$

Selanjutnya, untuk menuliskan $\tilde{c}$ dan $\tilde{d}$ sebagai fungsi dari $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ digunakan persamaan (4.53) dan (4.54) yang disubsitusikan kedalam batas $r \to r_+$, maka diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}-i\left[\tilde{a}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} - \tilde{b}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}\right]\\ = \tilde{c}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} + \tilde{d}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}-i\left[\tilde{a}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} + \tilde{b}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}\right]\\ = \tilde{c}(r-r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)} - \tilde{d}(r-r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}\end{aligned} \tag{4.91}$$

dari persamaan diatas, dengan membagikan masing-masing ruas dengan $(r - r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega-eV_+}{r_+-r_-}\right)}$, maka didapatkan hubungan:

$$\begin{aligned}-i\left(\tilde{a} - \tilde{b}\right) &= \tilde{c} + \tilde{d}\\ \tilde{c} &= -i\tilde{a}\\ \tilde{d} &= i\tilde{b}\end{aligned} \tag{4.92}$$

langkah selanjutnya didefinisikan koordinat $r_*(r)$ sebagai berikut:

$$r_* = \frac{r_+^2}{r_+-r_-}\log(r-r_+) \tag{4.93}$$

Sehingga dengan menggunakan koordinat radial r_* (disebut juga koordinat tortoise) didapatkan solusi umum dari komponen radial pada persamaan (4.49) di wilayah $r = r_+$ yaitu jumlah dari dua gelombang yang merambat dengan kecepatan grup yang simetris, artinya terdapat dua gelombang yang masing-masing bergerak dalam arah yang berlawanan, dengan kecepatan grup yang berlawanan tanda namun memiliki besaran yang sama. Dalam peristiwa ini, karena gelombang yang ditransmisikan harus memasuki peristiwa cakrawala atau horizon peristiwa, maka gelombang tersebut harus memiliki kecepatan grup negatif sepanjang koordinat r_* (r). Sehingga diperoleh solusi asimtotik $r = r_+$ adalah:

$$\Upsilon^{\pm}_{j\kappa\omega}(r \to r_*) = T^{\pm}\, e^{-isr_*}\binom{1}{i} \tag{4.94}$$

dan fungsi gelombang transmisi adalah:

$$(\Psi)^t_{II} = \sum_{j,k}[T^+(\Psi^+_{jk})^t + T^-(\Psi^-_{jk})^t] \tag{4.95}$$

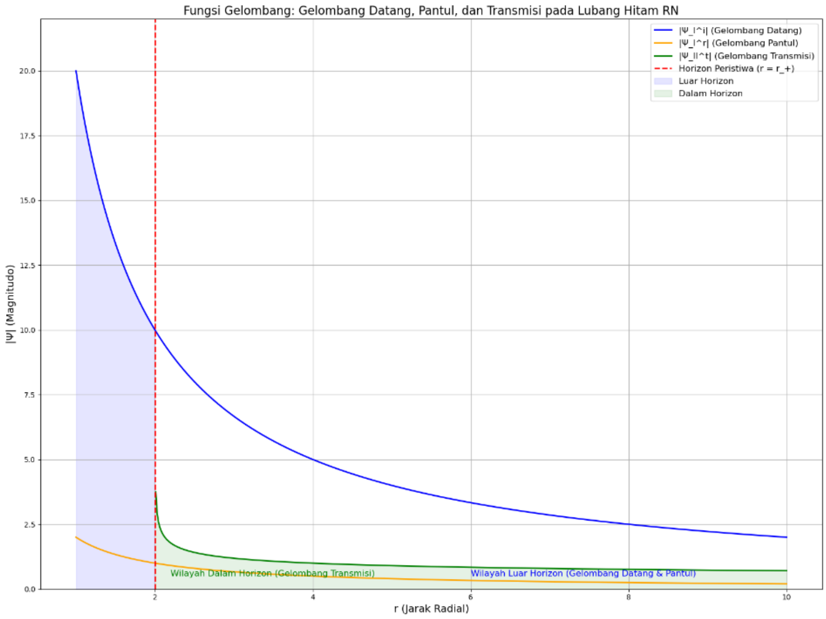
dengan,

$$\begin{aligned}(\Psi^+_{jk})^t &= \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+-r_-)^{1/4}(r-r_+)^{1/4}}\exp\left[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)\right]\begin{pmatrix}\chi^k_{j+\frac{1}{2}}\\ -\chi^k_{j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\\ (\Psi^-_{jk})^t &= \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+-r_-)^{1/4}(r-r_+)^{1/4}}\exp\left[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)\right]\begin{pmatrix}\chi^k_{j+\frac{1}{2}}\\ -\chi^k_{j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.96}$$

T_+ dan T_- adalah fungsi yang bernilai kompleks dari j, κ dan ω yang memiliki kecepatan grup negative sepanjang r_* (Vicente n., 2018). Komponen eksponensial dari solusi tersebut menggambarkan gelombang yang menembus horizon dengan adanya efek medan elektromagnetik.

Dengan demikian, dengan dilakukan separasi variabel dihasilkan tujuan akhir dari penelitian ini yaitu diperoleh solusi dari formulasi persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom yang merupakan fungsi gelombang relativistik untuk partakel berspin setengah. Karena dalam penelitian ini digunakan lubang hitam RN yang mempunyai sifat geometris, yaitu horizon peristiwa. Maka digunakan horizon peristiwa wilayah I dan II untuk mengetahui perilaku partikel disekitar lubang hitam RN. Pada wilayah I ketika variabel mendekati batas tak hingga positif ($r = \infty +$) yang menunjukkan bahwa wilayah tersebut berada pada jarak yang jauh dari lubang hitam, akibatnya pengaruh dari gravitasi dan muatan listrik lubang hitam semakin menurun maka partikel akan bergerak lebih bebas tanpa adanya pengaruh dari interaksi gravitasi dan muatan listrik lubang hitam. Sehingga dihasilkan gelombang datang yang menggambarkan partikel bergerak menuju horizon peristiwa diruangwaktu RN, yang kemudian gelombang akan terpantul kembali menjauh dari horizon peristiwa.

Sedangkan pada wilayah II ketika variabel r sama dengan $r +$ ($r = r+$) artinya wilayah tersebut berada dekat horizon peristiwa, akibatnya medan gravitasi dan medan listrik menjadi sangat kuat dan ketika partikel bermuatan q bergerak dalam medan gravitasi (bergerak mendekati horizon peristiwa) maka partikel akan dipercepat oleh gravitasi. Sehingga pergerakan percepatan ini menghasilkan fluktuasi dalam medan listrik dan medan magnetic disekitarnya, yang mana fluktuasi ini akan memancarkan energi dalam bentuk gelombang elektromagnetik yang disebut sebagai gelombang transmisi. Berdasarkan hasil akhir dari penelitian ini, dibuat plot grafik gelombang datang, pantul, dan transmisi pada lubang hitam RN. Berikut plot grafik hubungan antara fungsi gelombang dengan jarak radialnya pada tiga gelombang:



Gambar 4.1 Grafik Fungsi Gelombang Datang, Pantul, dan Transmisi pada Lubang Hitam Reissner Nordstrom

Grafik pada gambar 4.1 menunjukkan hubungan antara fungsi gelombang datang, pantul, dan transmisi, dengan jarak radialnya, yang mana dikaitkan dengan horizon peristiwa dari lubang hitam RN. Sumbu x menunjukkan jarak radial dari pusat lubang hitam (r) sedangkan sumbu y menunjukkan magnitudo dari masing-masing fungsi gelombang (ψ), dan garis putus-putus merah menunjukkan horizon peristiwa dari lubang hitam RN. Dari grafik ini menunjukkan bahwa gelombang datang dan pantul berada diluar horizon peristiwa yang ditunjukkan pada lokasi warna biru transparan, artinya pada wilayah I menunjukkan bahwa wilayah ini tidak terkena dampak medan gravitasi sehingga menghasilkan fungsi gelombang datang dan pantul. Sedangkan gelombang transmisi berada didalam horizon peristiwa yang ditunjukkan pada lokasi warna hijau transparan, artinya wilayah II ini menunjukkan telah terkena medan gravitasi sehingga menghasilkan fungsi gelombang transmisi yang akan masuk kedalam lubang hitam. Hal ini sesuai dengan dasar teori dari sifat geometris lubang hitam.

4.3 Integrasi Dalam Al-Qur’an

Al-Quran sangat mengutamakan ilmu pengetahuan dengan tujuan agar umat islam dapat berpikir dan mengkaji alam semesta sehingga menimbulkan suatu kesadaran akan kebesaran Allah, pencipta alam semesta. Kesadaran tersebut, akan semakin meningkatkan keimanan dan ketaqwaan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan harus sesuai dengan Al-Quran agar ilmu pengetahuan membawa kepada keimanan dan memberi manfaat dalam kehidupan umat manusia. Wujud nyata dari kemajuan ilmu pengetahuan yaitu adanya berbagai teknologi yang semakin canggih. Al-Quran tidak hanya menjadi sumber motivasi dan inspirasi bagi para ilmuwan, tapi juga sebagai penuntun agar ilmu pengetahuan tidak digunakan untuk tujuan-tujuan yang negatif, membawa kemusyrikan, atau menghancurkan alam semesta (manusia, hewan, tumbuhan, dan lingkungan) (Akil: 37).

Terbentuknya alam semesta yang indah ini yaitu melalui proses yang panjang. Keindahan alam semesta tersusun dari berbagai komponen yang saling berkaitan antara yang satu dengan yang lainnya. Dimulai dari struktur terkecil yaitu partikel sampai struktur yang terbesar yaitu galaksi yang saling mempengaruhi. Setiap komponen akan bergerak secara teratur dan seimbang. Dimana keseimbangan alam semesta dijaga oleh berbagai gaya yang bekerja. Salah satunya yang mempunyai kontribusi yang cukup besar dalam menjaga keseimbangan alam semesta yaitu Gravitasi (Pambudi, 2022).

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَاوُتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ

ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ

Artinya: *"Dialah yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat"*

"Kemudian ulangi pandangan (mu) sekali lagi (dan) sekali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih" (Q.S. al-Mulk [67]: 3-4)

Sayyid Qutb menjelaskan bahwa ayat tersebut bertujuan agar masyarakat muslim mempunyai pandangan baru mengenai wujud dan hubungan dengan pencipta alam semesta (M. Quraish Shihab). Sedangkan Maurice Bucaille dalam karyanya menafsirkan bahwa *"Dialah yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis"*, yang mana angka tujuh dalam Al-Qur'an terdapat 24 kali yang mempunyai tujuan masing-masing. Dimana dapat diambil pelajaran, bahwa bentuk kekuasaan Allah SWT ada namun terdapat yang tidak bisa terlihat oleh pandangan manusia biasa. Namun, Maha besar Allah kita sebagai hambaNya harus mengimani segala bentuk kekuasaan Allah SWT.

Dalam ayat ini berisi mengenai keseimbangan alam semesta yang diciptakan oleh Allah SWT. Jika ayat ini dihubungkan dengan fisika, keteraturan dan keseimbangan alam semesta tercermin dalam ruangwaktu yang ada dalam hukum-hukum fisika, yaitu relativitas umum dan teori medan kuantum. Dalam konteks ruangwaktu diatur dalam gravitasi dan elektromagnetik. Sedangkan dalam ranah partikel mengikuti hukum-hukum yang sangat teratur dan spesifik sesuai dengan penegasan dalam ayat ini.

Alam semesta itu sendiri tersusun dari beberapa materi. Materi memiliki susunan yang sangat kecil disebut dengan atom. Atom merupakan bagian terkecil dari sebuah benda yang tidak dapat dipisahkan lagi. Atom tersusun dari inti atom dan elektron yang mengelilingi inti atom. Dimana inti atom ini tersusun oleh dua bagian yang lebih kecil yaitu proton bermuatan positif dan neutron bermuatan netral. Sedangkan awan elektron mengandung lapisan energi yang disebut orbital.

Seiring dengan berkembangnya zaman. Para ilmuwan menyatakan bahwa atom tidak lagi menjadi susunan terkecil dari materi. Hal ini disebabkan karena didalam inti atom terdapat bagian yang lebih kecil, yaitu proton dan neutron yang merupakan partikel fermion yang berbeda. Perkembangan struktur terkecil sebagai penyusun materi dialam semesta sudah dijelaskan dalam Al Qur’an. Seperti didalam kandungan surat An Nisa’ ayat 40 (Pambudi. 2022).

اِنَّ اللّٰهَ لَا يَظْلِمُ مِثْقَالَ ذَرَّةٍۚ وَاِنْ تَكُ حَسَنَةً يُّضٰعِفْهَا وَيُؤْتِ مِنْ لَّدُنْهُ اَجْرًا عَظِيْمًا

Artinya: *“Sesungguhnya Allah tidak akan menzalimi (seseorang) walaupun sebesar zarah. Jika (sesuatu yang sebesar zarah) itu berupa kebaikan, niscaya Allah akan melipatgandakannya dan memberikan pahala yang besar dari sisi-Nya” (QS. An-Nisa’ ayat 40).*

Ayat tersebut menafsirkan bahwa kebaikan manusia meskipun sebesar zarah tidak akan berkurang atau bertambah. Niscaya Allah akan melipat gandakannya dari 10 sampai lebih dari 700 kali lipat. Allah akan melipat gandakan pahala seorang mukmin bahkan tak dapat diperkirakan oleh seorang sampai berapa kali lipat pahala yang akan didapatkan. Makna kata dzarrah di sini menunjukkan bahwa terdapat sesuatu yang sangat besar. Maka hal ini sama dengan energi di dalam atom yang sangat besar. (Al-Mahalli & As-Suyuthi, 2018)

Dalam ayat 40 surat An-nisa’, Allah kembali mengingatkan tentang perbuatan baik yang akan diberi pahala dua kali lipat. Namun, jumlah pahala yang telah dijelaskan dalam surat An-nisa’ ini juga disebutkan dalam berbagai ayat dengan cara yang berbeda. Dalam ayat yang menjelaskan tentang atom, secara khusus disebutkan bahwa pahala menjadi dua kali lipat. Sehingga ini bisa menjadi petunjuk mengenai properti atom yang berhubungan dengan kata ‘ganda’. Kata ‘ganda’ juga berarti berpasangan. Dalam studi mengenai fenomena yang diamati dalam dunia kuantum, dualitas gelombang partikel dan partikel subatomik adalah kunci pentingnya. Elektron dan foton diamati berperilaku sebagai partikel dan gelombang. Dalam ayat ini jika dikaitkan dengan teori kuantum menyebutkan kata ‘ganda’ memberikan indikasi tentang adanya dua jenis energi yang berkaitan dengan perilaku tersebut. Berdasarkan konsep berpasangan, kedua energi berperilaku sebagai pasangan dengan cara yang berlawanan. Dua energi, dalam bentuk massa yang ada dalam partikel subatomic, secara intrisik dibangun didalamnya. Benda-benda kecil merupakan perilaku dualitas gelombang partikel. Fisikawan dengan jelas menegaskan keberadaan muatan Listrik dan medan magnet yang diinduksi dalam sebuah electron. Dimana induksi ini akibat dari putaran partikel. Analisis lebih lanjut diperlukan untuk mengetahui bagaimana muatan Listrik dan medan magnet didalam partikel (Watini and Devana, 2021).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Formulasi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu melengkung dengan menggunakan koordinat metrik Reissner Nordstrom, sebagai berikut

$$\left(\left(\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_t+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{4}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{2Q^2}{r^3}\right)\right.\right.$$
$$+\gamma^0\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\partial_r+\gamma^0\gamma^2\frac{1}{r}\partial_\theta$$
$$+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma^1\gamma^3\frac{1}{rsin\theta}\partial_\phi$$
$$\left.\left.+\gamma^0\gamma^1\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma^0\gamma^2\frac{cot}{2r}\right)-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}-m\right)$$
$$=0$$

2. Solusi dari persamaan dirac dalam ruangwaktu Reissner Nordstrom adalah

- Pada wilayah I: $r=+\infty$

  Pada wilayah ini, solusinya menghasilkan gelombang datang dan pantul yaitu

  Gelombang datang:

$$(\Psi)_I^i=\sum_{j,k}[I^+\left(\Psi_{jk}^+\right)^i+I^-\left(\Psi_{jk}^-\right)^i]$$

  dengan,

$$\left(\Psi_{jk}^{+}\right)^{i} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t + \in \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right]\begin{pmatrix} \chi_{j-\frac{1}{2}}^{k} \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}}\chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^{i} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t + \in \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right]\begin{pmatrix} \chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}}\chi_{j-\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}\right.$$

Gelombang pantul:

$$(\Psi)_I^r = \sum_{j,k}\left[R^+\left(\Psi_{jk}^{+}\right)^r + R^-\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^r\right]$$

dengan,

$$\left(\Psi_{jk}^{+}\right)^{r} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t + \in \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right]\begin{pmatrix} \chi_{j-\frac{1}{2}}^{k} \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}}\chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^{r} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\left(\omega t + \in \sqrt{\omega^2 - m^2}\, r\right]\begin{pmatrix} \chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}}\chi_{j-\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}\right.$$

- Wilayah II: $r = r_+$
  Gelombang yang dihasilkan adalah gelombang transmisi, yaitu

$$(\Psi)_{II}^t = \sum_{j,k}\left[T^+\left(\Psi_{jk}^{+}\right)^t + T^-\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^t\right]$$

dengan,

$$\left(\Psi_{jk}^{+}\right)^{t} = \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+ - r_-)^{1/4}(r - r_+)^{1/4}}\exp\left[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)\right]\begin{pmatrix} \chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \\ -\chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}$$

$$\left(\Psi_{jk}^{-}\right)^{t} = \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+ - r_-)^{1/4}(r - r_+)^{1/4}}\exp\left[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)\right]\begin{pmatrix} \chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \\ -\chi_{j+\frac{1}{2}}^{k} \end{pmatrix}$$

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya dapat menggunakan persamaan dirac dalam ruangwaktu yang berbeda atau juga dapat meneruskan penelitian ini dengan mencari fenomena-fenomena yang dihasilkan dari lubang hitam, seperti efek casimir, dan superradiasi pada partikel fermion.

DAFTAR PUSTAKA

Akil, Muhammad Anshar. n.d. "Integrasi Alquran Dan Sains: Suatu Perspektif Komunikasi."

Andrias Widiantoro, Erika Rani. 2011. Persamaan Medan Dirac Dalam Pengaruh Medan Magnetik Yang Seragam. Jurusan Fisika UIN Maliki Malang. Jurnal Neutrino Vol.4, No.1.

Anugraha, Rinto. 2011. *Teori Relativitas Kosmologi*. Jurusan Fisika FMIPA UGM.

Era Zikri, H. A. (2024). Solusi Persamaan Medan Einstein untuk Lubang Hitam Statis dan Bermuatan dengan Potensial Riesz. *Positron*, 58-67.

E. Newman and R. Penrose. 1962. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coeffi- cients. Journal of Mathematical Physics, 3(3).

Eric Poisson, Adam Pound, Ian Vega. 2011. The Motion of Point Particles in Curved Spacetime, Living Rev. Relativity, 14, 7.

F. Finster, J. Smoller, and S.-T. Yau. Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. Phys. Rev. D, 59:104020. Apr 1999. doi: 10.1103/PhysRev D.59.104020. URL http://link.apa.org/doi/ 10.1103/PhysRevD. 59.104020.

Finster, Felix, Joel Smoller, and Shing-Tung Yau. 2000. "Non-Existence of Time-Periodic Solutions of the Dirac Equation in a Reissner-Nordstrom Black Hole Background." *Journal of Mathematical Physics* 41(4):2173–94. doi: 10.1063/1.533234.

Gautama, Sunkar E. n.d. "Pengantar Teori Relativitas Umum Dan Kosmologi."

Griffiths, David J. 2004. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall.

Griffiths, David J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall.

Hawking, S. W. 1975. Particle Creation by Black Hole. *Commun math, 43*(phys), 199-220.

Hernani, Ida. 2021. "Studi Persamaan Struktur Klein Gordon Dalam Ruangwaktu Swarzchild." *Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*.

John David Jackson. 2001. Classical Electrodynamics, Third Edition. Berkeley, university of California: Hamilton Printing Compani.

Landau, Lifshits. 1968. *The Classical Theory of Field*. Oxford: Pergamon press.

Lasino, Y. N. 1960. Dynamical Model of Elementary Particle Based on an Analogy With Superconductivity. *Physic, 122,* 345-358.

L. C. Biedenharn and J. D. Louck. Angular Momentum in Quantum Physics. Cambridge Univer- sity Press, 1984. ISBN 9780511759888, URL http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511759888. Cambridge Books Online.

Lippoldt, Stefan. n.d. "Fermions in Curved Spacetimes."

Neznamov, V. P., I. I. Safronov, and V. E. Shemarulin. 2018. "Stationary Solutions of Second-Order Equations for Fermions in Reissner–Nordström Space-Time." *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 127(4):684–704. doi: 10.1134/S1063776118100199.

Nicolas, Hammad, dan Parvaneh Sadeghi. 2023. Revisiting the Schrodinger Dirac equation. Department of Physics and Astronomy, Bishop's University, 2600 College Street, Sherbrooke, QC, J1M 1Z7 Canada.

Nirwanasari, Nirwanasari, Hasanuddin Hasanuddin, Mega Nurhanisa, and Azrul Azwar. 2020a. "Solusi Persamaan Einstein Untuk Lubang Hitam Reissner-Nordström Ekstrem." *Prisma fisika* 7(3):175. doi: 10.26418/pf.v7i3.36273.

P. W. Atkins, R. S. Friedman. 1997. *Molecular Quantum Mechanics, 3rd Ed.,*. Oxford: Oxford University Press.

Pambudi, Dian Eko. 2022. "Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)."

R. Brito, V. Cardoso, and P. Pan. 2013. Massive spin-2 fields on black hole spacetimes: Instability of the Schwarzschild and Kerr solutions and bounds on the graviton mass. Phys. Rev. D, 88:023514

Rizky, Lailur. 2022. "Studi Persamaan Dirac Versi Dual Pada Partikel Elektron." *Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*.

Era Zikri, H. A. (2024). Solusi Persamaan Medan Einstein untuk Lubang Hitam Statis dan Bermuatan dengan Potensial Riesz. *Positron,* 58-67.

Hawking, S. W. (1975, April 12). Particle Creation by Black Hole. *Commun math, 43*(phys), 199-220.

Lasino, Y. N. (1960, October 27). Dynamical Model of Elementary Particle Based on an Analogy With Superconductivity. *Physic, 122*, 345-358.

Romadani, A. (2023). Solution of Klein Gordon Equation in F(R) Theory of Gravity. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika Al-Biruni, 12*, 31-41.

Romadani, Arista. 2020. "Artikel Lubang Hitam." *Jurusan Fisika UIN Malang*.

Siregar, R. E. 2018. *Buku Fisika Kuantum*. Departemen Fisika Universitas Padjadjaran.

Syaputra, Gutivan Alief. 2020. “Persamaan Dirac Dalam Ruangwaktu Lengkung.” Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Vicente, Rodrigo, Vitor Cardoso, and Jorge C. Lopes. 2018. “The Penrose Process, Superradiance and Ergoregion Instabilities.” *Physical Review D* 97(8):084032. doi: 10.1103/PhysRevD.97.084032.

Vicente, Rodrigo Luís Lourenço. n.d.-a. “Superradiance of Bosonic Fermion Condensates.”

Watini, Sri, and Viola Tashya Devana. 2021. “Teori Kuantum Baru yang Sesuai Sains dan Teknologi dengan Kaidah Ilmu Islam.” *ADI Bisnis Digital Interdisiplin Jurnal* 2(1 Juni):89–93. doi: 10.34306/abdi.v2i1.450.

Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,*. New York: John Wiley & Sons.

Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. 1961. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. Phys. Rev., 122:345-358.Era Zikri, H. A. (2024). Solusi Persamaan Medan Einstein untuk Lubang Hitam Statis dan Bermuatan dengan Potensial Riesz. *Positron*, 58-67.

Zur Erlangung des akademischen Grades, dan doctor rerum naturalium. 2016. *Fermions In Curved Spacetimes*.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A

SIMBOL CHRISTOFFEL KOORDINAT BOLA

Dari tensor metrik dicari komponen Simbol Christoffel yang memenuhi persamaan sebagai berikut,

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\tau} + \partial_{\nu} g_{\tau\mu} - \partial_{\tau} g_{\mu\nu}\right) \tag{A.1}$$

Dimana σ, τ, μ, ν merupakan indeks 0, 1, 2, 3 dengan 0 untuk koordinat t, 1 untuk koordinat r, 2 untuk koordinat θ, dan 3 untuk koordinat ϕ.

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{00} = -e^{-2\alpha}$

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial_{\mu} g_{\nu 0} + \partial_{\nu} g_{0\mu} - \partial_{0} g_{\mu\nu}\right) \tag{A.2}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_{0} g_{00} + \partial_{0} g_{00} - \partial_{0} g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\left(-\frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial t}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{01} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_{0} g_{10} + \partial_{1} g_{00} - \partial_{0} g_{01}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\left(0 - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial r} - 0\right) \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \Gamma^{0}_{10} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 2$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{02} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_{0} g_{00} + \partial_{2} g_{00} - \partial_{0} g_{02}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\left(-\frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial \theta} - 0\right) \\ &= 0 = \Gamma^{0}_{20} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 3$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{03} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_{0} g_{30} + \partial_{3} g_{00} - \partial_{0} g_{03}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha}\left(0 - \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial \phi} - 0\right) \\ &= 0 = \Gamma^{0}_{30} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 1$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left(0 + 0 - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial t}\right)$$
$$= 0 \tag{A.7}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 2$

$$\Gamma^0_{12} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^0_{21} \tag{A.8}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^0_{31} \tag{A.9}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 2, \nu = 2$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial t}\right)$$
$$= 0 \tag{A.10}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 2, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^0_{32} \tag{A.11}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 3, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33})$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial t}\right)$$
$$= 0 \tag{A.12}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{11} = e^{-2\beta}$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{11}\big(\partial_\mu g_{\nu 1} + \partial_\nu g_{1\mu} - \partial_1 g_{\mu\nu}\big) \tag{A.13}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 0$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(0 + 0 + \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial r}\right) \tag{A.14}$$

$$= e^{(2\alpha-2\beta)}\ \frac{\partial\alpha}{\partial r}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01})\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(\frac{\partial e^{2\beta}}{\partial t} + 0 - 0\right)\\ &= 0 = \Gamma^1_{10}\end{aligned} \tag{A.15}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02})\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}(0 + 0 - 0)\\ &= 0 = \Gamma^1_{20}\end{aligned} \tag{A.16}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03})\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}(0 + 0 - 0)\\ &= 0 = \Gamma^1_{30}\end{aligned} \tag{A.17}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(\frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r} - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial r}\right)\\ &= \frac{\partial\beta}{\partial r}\end{aligned} \tag{A.18}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1\ \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12})\\ &= \frac{1}{2}e^{2\beta}\left(0 + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial\theta} - 0\right)\\ &= 0 = \Gamma^1_{21}\end{aligned} \tag{A.19}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13})\\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\left(0 + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial\phi} - 0\right)\\ &= 0 = \Gamma^1_{31}\end{aligned} \tag{A.20}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \tag{A.21}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\beta} \left(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial r} \right)$$
$$= -re^{-2\beta}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23})$$
$$= \frac{1}{2} e^{-2\beta} (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{A.22}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$
$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \right)$$
$$= -rsin^2\theta e^{-2\beta} \tag{A.23}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{22} = \frac{1}{r^2}$

$$\Gamma^{22}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_\mu g_{\nu 2} + \partial_\nu g_{2\mu} - \partial_2 g_{\mu\nu} \right) \tag{A.24}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00})$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \; (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{A.25}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01})$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \; (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^2_{10} \tag{A.26}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02})$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{\partial t} + 0 - 0 \right)$$
$$= 0 = \Gamma^2_{20} \tag{A.27}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03})$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \; (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^2_{30} \tag{A.28}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0 + 0 - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial \theta}\right)$$
$$= 0 \tag{A.29}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 2,$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} + 0 - 0\right)$$
$$= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^{2} \tag{A.30}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\Gamma_{13}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{A.31}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial \theta} + \frac{\partial r^2}{\partial \theta} - \frac{\partial r^2}{\partial \theta}\right)$$
$$= 0 \tag{A.32}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\Gamma_{23}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{A.33}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\Gamma_{33}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial \theta}\right)$$
$$= -sin\theta cos\theta \tag{A.34}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{3} = \frac{1}{2} g^{33}\left(\partial_\mu g_{\nu 3} + \partial_\nu g_{3\mu} - \partial_3 g_{\mu\nu}\right) \tag{A.35}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) \tag{A.36}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(0+0+\frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial\phi}\right)$$
$$= 0$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ (0+0-0)$$
$$= 0 \tag{A.37}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ (0+0-0)$$
$$= 0 \tag{A.38}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r^2\sin^2\theta}{\partial t}+0-0\right)$$
$$= 0 \tag{A.39}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(0+0+\frac{\partial e^{2\beta}}{\partial\phi}\right)$$
$$= 0 \tag{A.40}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 2,$

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ (0+0-0)$$
$$= 0 \tag{A.41}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ (0+0-0)$$
$$= \frac{1}{r} \tag{A.42}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) \tag{A.43}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial \phi}\right)$$
$$= 0$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial\theta} + 0 - 0\right)$$
$$= \cot\theta \tag{A.44}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33})$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{A.45}$$

LAMPIRAN B
SIMBOL CHRISTOFFEL METRIKS REISSNER NORDSTROM

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}$

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial_\mu g_{\nu 0} + \partial_\nu g_{0\mu} - \partial_0 g_{\mu\nu}\right) \tag{B.1}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(0 + 0 - 0)\\ &= 0\end{aligned} \tag{B.2}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{01} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(0 - \frac{\partial\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}{\partial r} - 0\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(-\left(\tfrac{2M}{r^2} + \tfrac{2Q^2}{r^3}\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2M}{r^2} + \tfrac{2Q^2}{r^3}\right)\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{B.3}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{02} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(0 + 0 - 0)\\ &= 0 = \Gamma^0_{20}\end{aligned} \tag{B.4}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 0, \nu = 3$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{03} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(0 + 0 - 0)\\ &= 0 = \Gamma^0_{30}\end{aligned} \tag{B.5}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{11} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(0 + 0 - 0)\\ &= 0\end{aligned} \tag{B.6}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{12} &= \tfrac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12})\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(0 + 0 - 0)\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$= 0 = \Gamma^0_{21}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 1, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^0_{31} \tag{B.8}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 2, \nu = 2$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{B.9}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 2, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^0_{32} \tag{B.10}$$

Untuk $\sigma = 0, \mu = 3, \nu = 3$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} (0 + 0 - 0)$$
$$= 0 \tag{B.11}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{11} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial_\mu g_{\nu 1} + \partial_\nu g_{1\mu} - \partial_1 g_{\mu\nu}\right) \tag{B.12}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 0$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(0 + 0 - \frac{\partial\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}{\partial r}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{B.13}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01})$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^1_{10} \tag{B.14}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02})$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)(0 + 0 - 0)$$
$$= 0 = \Gamma^1_{20} \tag{B.15}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{03} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)(0 + 0 - 0) \\ &= 0 = \Gamma^1_{30}\end{aligned} \tag{B.16}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}}{\partial r} + 0 - 0\right) \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial r}\end{aligned} \tag{B.17}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1\ \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{12} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)(0 + 0 - 0) \\ &= 0 = \Gamma^1_{21}\end{aligned} \tag{B.18}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{13} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)(0 + 0 - 0) \\ &= 0 = \Gamma^1_{31}\end{aligned} \tag{B.19}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{22} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)\left(0 + 0 - \tfrac{\partial r^2}{\partial r}\right) \\ &= -r\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)\end{aligned} \tag{B.20}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{23} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) \\ &= \tfrac{1}{2} e^{-2\beta}(0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.21}$$

Untuk $\sigma = 1, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{33} &= \tfrac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)\left(0 + 0 - \tfrac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial r}\right) \\ &= -r sin^2\theta\left(1 - \tfrac{2M}{r} + \tfrac{Q^2}{r^2}\right)\end{aligned} \tag{B.22}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{22} = \frac{1}{r^2}$

$$\Gamma^{22}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_\mu g_{\nu 2} + \partial_\nu g_{2\mu} - \partial_2 g_{\mu\nu}) \tag{B.23}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\ (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.24}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\ (0 + 0 - 0) \\ &= 0 = \Gamma^2_{10}\end{aligned} \tag{B.25}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{\partial t} + 0 - 0\right) \\ &= 0 = \Gamma^2_{20}\end{aligned} \tag{B.26}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\ (0 + 0 - 0) \\ &= 0 = \Gamma^2_{30}\end{aligned} \tag{B.27}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0 + 0 - \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial \theta}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.28}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} + 0 - 0\right) \\ &= \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21}\end{aligned} \tag{B.29}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\ (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.30}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial \theta} + \frac{\partial r^2}{\partial \theta} - \frac{\partial r^2}{\partial \theta}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.31}$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\ (0 + 0 - 0)\end{aligned} \tag{B.32}$$

$$= 0$$

Untuk $\sigma = 2, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial\theta}\right) \\ &= -sin\theta cos\theta\end{aligned} \tag{B.33}$$

Kasus 1: Untuk $g^{\sigma\tau} = g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{33}\left(\partial_\mu g_{\nu 3} + \partial_\nu g_{3\mu} - \partial_3 g_{\mu\nu}\right) \tag{B.34}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 0,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(0 + 0 + \frac{\partial e^{2\alpha}}{\partial\phi}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.35}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{01} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,(0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.36}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,(0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.37}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 0, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial t} + 0 - 0\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.38}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 1,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(0 + 0 + \frac{\partial e^{2\beta}}{\partial\phi}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.39}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,(0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.40}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 1, \nu = 3,$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) \tag{B.41}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ (0 + 0 - 0)$$
$$= \frac{1}{r}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 2,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(0 + 0 - \frac{\partial r^2}{\partial \phi}\right) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.42}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 2, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial r^2 \sin^2\theta}{\partial \theta} + 0 - 0\right) \\ &= \cot\theta\end{aligned} \tag{B.43}$$

Untuk $\sigma = 3, \mu = 3, \nu = 3,$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\ (0 + 0 - 0) \\ &= 0\end{aligned} \tag{B.44}$$

LAMPIRAN C

KOEFISIEN KONEKSI SPIN

Kasus 1: $\mu = t$

Untuk $a = 0, b = 0,$

$$\omega_{t00} = g_{tt}e_0^t(\partial_t e_0^t + \Gamma_{tt}^t e_0^t)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_t\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0\right)$$
$$= 0 \tag{C.1}$$

Untuk $a = 0, b = 1,$

$$\omega_{t01} = g_{tt}e_0^t(\partial_t e_1^t + \Gamma_{tr}^t e_1^r)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_t(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^{3,}}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{C.2}$$

Untuk $a = 0, b = 2,$

$$\omega_{t02} = g_{tt}e_0^t(\partial_t e_2^t + \Gamma_{t\theta}^t e_2^t$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\partial_t(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.3}$$

Untuk $a = 0, b = 3,$

$$\omega_{t03} = g_{tt}e_0^t(\partial_t e_3^t + \Gamma_{tt}^t e_3^t)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\partial_t(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.4}$$

Untuk $a = 1, b = 0,$

$$\omega_{t10} = g_{rr}e_1^r(\partial_t e_0^r + \Gamma_{tt}^r e_b^t)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_t(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{2r^3}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{2Q^2}{r^3}\right) \tag{C.5}$$

Untuk $a = 1, b = 1,$

$$\omega_{t11} = g_{rr}e_1^r(\partial_t e_1^r + \Gamma_{tr}^r e_1^r) \tag{C.6}$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\partial_t \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} + 0\right)$$

$$= 0$$

Untuk $a = 1, b = 2,$

$$\omega_{t12} = g_{rr} e_1^r (\partial_t e_2^r + \Gamma_{t\theta}^r e_2^\theta)$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.7}$$

Untuk $a = 1, b = 3,$

$$\omega_{t13} = g_{rr} e_1^r (\partial_t e_3^r + \Gamma_{t\phi}^r e_3^\phi)$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.8}$$

Untuk $a = 2, b = 0,$

$$\omega_{t20} = g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_t e_0^\theta + \Gamma_{tt}^\theta e_0^t)$$

$$= r^2 \frac{1}{r} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.9}$$

Untuk $a = 2, b = 1,$

$$\omega_{t21} = g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_t e_1^\theta + \Gamma_{tr}^\theta e_1^r)$$

$$= r^2 \frac{1}{r} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.10}$$

Untuk $a = 2, b = 2,$

$$\omega_{t22} = g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_t e_2^\theta + \Gamma_{t\theta}^\theta e_2^\theta)$$

$$= r^2 \frac{1}{r} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.11}$$

Untuk $a = 2, b = 3,$

$$\omega_{t23} = g_{\theta\theta} e_3^\theta (\partial_t e_3^\theta + \Gamma_{t\phi}^\theta e_3^\phi)$$

$$= r^2 \frac{1}{r} (\partial_t(0) + 0)$$

$$= 0 \tag{C.12}$$

Untuk $a = 3, b = 0,$

$$\omega_{t30} = g_{\phi\phi} e_3^\phi (\partial_t e_0^\phi + \Gamma_{tt}^\phi e_0^t)$$

$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \left(\partial_t(\frac{1}{rsin\theta}) + 0\right)$$

$$= 0 \tag{C.13}$$

Untuk $a = 3, b = 1,$

$$\omega_{t31} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_t e_1^{\phi} + \Gamma_{tr}^{\phi} e_1^{r})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \,(\partial_t(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.14}$$

Untuk $a = 3, b = 2$,

$$\omega_{t32} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_t e_2^{\phi} + \Gamma_{t\theta}^{\phi} e_2^{\theta})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \,(\partial_t(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.15}$$

Untuk $a = 3, b = 3$,

$$\omega_{t33} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_t e_3^{\phi} + \Gamma_{t\phi}^{\phi} e_3^{\phi})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \,(\partial_t(0) + 0) \tag{C.16}$$
$$= 0$$

Kasus 2: Untuk $\mu = r$

Untuk $a = 0, b = 0$,

$$\omega_{r00} = g_{tt} e_0^{t} (\partial_r e_0^{t} + \Gamma_{rt}^{t} e_0^{t})$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_r \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{2r^3}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\right)\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2} + \frac{Q^2}{2r^3}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$= 0 \tag{C.17}$$

Untuk $a = 0, b = 1$,

$$\omega_{r01} = g_{tt} e_0^{t} (\partial_r e_1^{t} + \Gamma_{rr}^{t} e_1^{r})$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\partial_r(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.18}$$

Untuk $a = 0, b = 2$,

$$\omega_{r02} = g_{tt} e_0^{t} (\partial_r e_2^{t} + \Gamma_{r\theta}^{t} e_2^{\theta})$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\partial_r(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.19}$$

Untuk $a = 0, b = 3$,

$$\omega_{r03} = g_{tt}e_0^t(\partial_r e_3^t + \Gamma_{r\phi}^t e_3^\phi)$$
$$= -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.20}$$

Untuk $a = 1, b = 0,$

$$\omega_{r10} = g_{rr}e_1^r(\partial_r e_0^r + \Gamma_{rt}^r e_0^t)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.21}$$

Untuk $a = 1, b = 1,$

$$\omega_{r11} = g_{rr}e_1^r(\partial_r e_1^r + \Gamma_{rr}^r e_1^r)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_r\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{Q^2}{2r^3}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{Q^2}{2r^3}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}+\frac{Q^2}{2r^3}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= 0 \tag{C.22}$$

Untuk $a = 1, b = 2,$

$$\omega_{r12} = g_{rr}e_1^r(\partial_r e_2^r + \Gamma_{r\theta}^r e_2^\theta)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.23}$$

Untuk $a = 1, b = 3,$

$$\omega_{r13} = g_{rr}e_1^r(\partial_r e_3^r + \Gamma_{r\phi}^r e_3^\phi)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.24}$$

Untuk $a = 2, b = 0,$

$$\omega_{r20} = g_{\theta\theta}e_2^\theta(\partial_r e_0^\theta + \Gamma_{rt}^\theta e_0^t)$$
$$= r^2\frac{1}{r}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.25}$$

Untuk $a = 2, b = 1,$

$$\omega_{r21} = g_{\theta\theta}e_2^\theta(\partial_r e_1^\theta + \Gamma_{rr}^\theta e_1^r)$$
$$= r^2\frac{1}{r}(\partial_r(0)+0)$$
$$= 0 \tag{C.26}$$

Untuk $a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{r22} &= g_{\theta\theta}e_2^\theta(\partial_r e_2^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta e_2^\theta)\\ &= r^2\frac{1}{r}\left(\partial_r\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{1}{r}\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.27}$$

Untuk $a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{r23} &= g_{\theta\theta}e_2^\theta(\partial_r e_3^\theta + \Gamma_{r\phi}^\theta e_3^\phi)\\ &= r^2\frac{1}{r}\,(\partial_r(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.28}$$

Untuk $a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{r30} &= g_{\phi\phi}e_3^\phi(\partial_r e_0^\phi + \Gamma_{rt}^\phi e_0^t)\\ &= r^2\sin^2\theta\,\frac{1}{rsin\,\theta}\,(\partial_r(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.29}$$

Untuk $a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{r31} &= g_{\phi\phi}e_3^\phi(\partial_r e_1^\phi + \Gamma_{rr}^\phi e_1^r)\\ &= r^2\sin^2\theta\,\frac{1}{rsin\,\theta}\,(\partial_r(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.30}$$

Untuk $a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{r32} &= g_{\phi\phi}e_3^\phi(\partial_r e_2^\phi + \Gamma_{r\theta}^\phi e_2^\theta)\\ &= r^2\sin^2\theta\,\frac{1}{rsin\,\theta}\,(\partial_r(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.31}$$

Untuk $a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{r33} &= g_{\phi\phi}e_3^\phi(\partial_r e_3^\phi + \Gamma_{r\phi}^\phi e_3^\phi)\\ &= r^2\sin^2\theta\,\frac{1}{rsin\,\theta}\,(\partial_r(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.32}$$

Kasus 3 : $\mu = \theta$

Untuk $a = 0, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta00} &= g_{tt}e_0^t(\partial_\theta e_0^t + \Gamma_{\theta t}^t e_0^t)\\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\theta\left(1 - \frac{2M}{r} + \right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.33}$$

Untuk $a = 0, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\theta01} &= g_{tt}e_0^t(\partial_\theta e_1^t + \Gamma_{\theta r}^t e_1^r)\\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\partial_\theta(0) + 0)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.34}$$

Untuk $a = 0, b = 2,$

$$\omega_{\theta 02} = g_{tt} e_0^t (\partial_\theta e_2^t + \Gamma_{\theta\theta}^t e_1^\theta)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\theta \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0\right)$$
$$= 0 \tag{C.35}$$

Untuk $a = 0, b = 3$,

$$\omega_{\theta 03} = g_{tt} e_0^t (\partial_\theta e_3^t + \Gamma_{\theta\phi}^t e_1^\phi)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (\partial_\theta (0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.36}$$

Untuk $a = 1, b = 0$,

$$\omega_{\theta 10} = g_{rr} e_1^r (\partial_\theta e_0^r + \Gamma_{\theta t}^r e_0^t)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_\theta (0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.37}$$

Untuk $a = 1, b = 1$,

$$\omega_{\theta 11} = g_{rr} e_1^r (\partial_\theta e_1^r + \Gamma_{\theta r}^r e_1^r)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_\theta (0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.38}$$

Untuk $a = 1, b = 2$,

$$\omega_{\theta 12} = g_{rr} e_1^r (\partial_\theta e_2^r + \Gamma_{\theta\theta}^r e_2^\theta)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\theta (0) - r\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{r}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2} \tag{C.39}$$

Untuk $a = 1, b = 3$,

$$\omega_{\theta 13} = g_{rr} e_1^r (\partial_\theta e_3^r + \Gamma_{\theta\phi}^r e_3^\phi)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} (\partial_\theta (0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.40}$$

Untuk $a = 2, b = 0$,

$$\omega_{\theta 20} = g_{\theta\theta} e_2^\theta (\partial_\theta e_0^\theta + \Gamma_{\theta t}^\theta e_0^t)$$
$$= r^2 \frac{1}{r} (\partial_\theta (0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.41}$$

Untuk $a = 2, b = 1$,

$$\omega_{\theta 21} = g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_\theta e_1^{\theta} + \Gamma_{\theta r}^{\theta} e_1^{r})$$
$$= r^2 \frac{1}{r}\left(\partial_\theta(0) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{C.42}$$

Untuk $a = 2, b = 2$,

$$\omega_{\theta 22} = g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_\theta e_2^{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} e_2^{\theta})$$
$$= r^2 \frac{1}{r}(\partial_\theta(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.43}$$

Untuk $a = 2, b = 3$,

$$\omega_{\theta 22} = g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_\theta e_2^{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} e_2^{\theta})$$
$$= r^2 \frac{1}{r}(\partial_\theta(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.44}$$

Untuk $a = 3, b = 0$,

$$\omega_{\theta 30} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_\theta e_0^{\phi} + \Gamma_{\theta t}^{\phi} e_0^{t})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}(\partial_\theta(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.45}$$

Untuk $a = 3, b = 1$,

$$\omega_{\theta 31} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_\theta e_1^{\phi} + \Gamma_{\theta r}^{\phi} e_1^{r})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}(\partial_\theta(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.46}$$

Untuk $a = 3, b = 2$,

$$\omega_{\theta 32} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_\theta e_2^{\phi} + \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} e_2^{\theta})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}(\partial_\theta(0) + 0)$$
$$= 0 \tag{C.47}$$

Untuk $a = 3, b = 3$,

$$\omega_{\theta 33} = g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_\theta e_3^{\phi} + \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} e_3^{\phi})$$
$$= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta}\left(\partial_\theta(\frac{1}{rsin\theta}) + cot\theta \frac{1}{rsin\theta}\right)$$
$$= rsin\theta \left(-cot\theta \frac{1}{rsin\theta} + cot\theta \frac{1}{rsin\theta}\right)$$
$$= 0 \tag{C.48}$$

Kasus 4: $\mu = \phi$

Untuk $a = 0, b = 0$,

$$\omega_{\phi 00} = g_{tt} e_0^{t} (\partial_\phi e_0^{t} + \Gamma_{\phi t}^{t} e_0^{t})$$
$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0) + 0\right) \tag{C.49}$$
$$= 0$$

Untuk $a = 0, b = 1$,

$$\omega_{\phi 01} = g_{tt}e_0^t(\partial_\phi e_1^t + \Gamma_{\phi r}^t e_1^r)$$
$$= -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.50}$$

Untuk $a = 0, b = 2,$

$$\omega_{\phi 02} = g_{tt}e_0^t(\partial_\phi e_2^t + \Gamma_{\phi\theta}^t e_2^\theta)$$
$$= -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.51}$$

Untuk $a = 0, b = 3,$

$$\omega_{\phi 03} = g_{tt}e_0^t(\partial_\phi e_3^t + \Gamma_{\phi\phi}^t e_3^\phi)$$
$$= -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.52}$$

Untuk $a = 1, b = 0,$

$$\omega_{\phi 10} = g_{rr}e_1^r(\partial_\phi e_0^r + \Gamma_{\phi t}^r e_0^t)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.53}$$

Untuk $a = 1, b = 1,$

$$\omega_{\phi 11} = g_{rr}e_1^r(\partial_\phi e_1^r + \Gamma_{\phi r}^r e_1^r)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.54}$$

Untuk $a = 1, b = 2,$

$$\omega_{\phi 12} = g_{rr}e_1^r(\partial_\phi e_2^r + \Gamma_{\phi\theta}^r e_2^\theta)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.55}$$

Untuk $a = 1, b = 3,$

$$\omega_{\phi 13} = g_{rr}e_1^r(\partial_\phi e_3^r + \Gamma_{\phi\phi}^r e_3^\phi)$$
$$= \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_\phi(0) + rsin^2\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{rsin\theta}\right)$$
$$= -sin\theta\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{C.56}$$

Untuk $a = 2, b = 0,$

$$\omega_{\phi 20} = g_{\theta\theta}e_2^\theta(\partial_\phi e_0^\theta + \Gamma_{\phi t}^\theta e_0^t)$$
$$= r^2\frac{1}{r}\left(\partial_\phi(0)+0\right)$$
$$= 0 \tag{C.57}$$

Untuk $a = 2, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 21} &= g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_{\phi} e_1^{\theta} + \Gamma_{\phi r}^{\theta} e_1^{r}) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_{\phi}(0) + 0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.58}$$

Untuk $a = 2, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 22} &= g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_{\phi} e_2^{\theta} + \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} e_2^{\theta}) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_{\phi}(0) + 0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.59}$$

Untuk $a = 2, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 23} &= g_{\theta\theta} e_2^{\theta} (\partial_{\phi} e_3^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} e_3^{\phi}) \\ &= r^2 \frac{1}{r} \left(\partial_{\phi}(0) - sin\theta cos\theta \frac{1}{rsin\theta}\right) \\ &= -cos\theta \end{aligned} \tag{C.60}$$

Untuk $a = 3, b = 0,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 30} &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_{\phi} e_0^{\phi} + \Gamma_{\phi t}^{\phi} e_0^{t}) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \left(\partial_{\phi}(0) + 0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.61}$$

Untuk $a = 3, b = 1,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 31} &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_{\phi} e_1^{\phi} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} e_1^{r}) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \left(\partial_{\phi}(0) + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= sin\theta \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{C.62}$$

Untuk $a = 3, b = 2,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 32} &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_{\phi} e_2^{\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} e_2^{\theta}) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \left(\partial_{\phi}(0) + cot\theta \frac{1}{r}\right) \\ &= cos\theta \end{aligned} \tag{C.63}$$

Untuk $a = 3, b = 3,$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi 33} &= g_{\phi\phi} e_3^{\phi} (\partial_{\phi} e_3^{\phi} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} e_3^{\phi}) \\ &= r^2 \sin^2\theta \frac{1}{rsin\theta} \left(\partial_{\phi}(0) + 0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{C.64}$$

LAMPIRAN D

METODE NUMERIK GRAFIK FUNGSI $f(r)$ DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Parameter
M = 1.0  # Massa lubang hitam
Q = 0.5  # Muatan lubang hitam
# Rentang nilai r
r = np.linspace(0.1, 5, 100)  # Menghindari r=0 untuk menghindari pembagian dengan nol
# Fungsi f(r)
def f(r, M, Q):
    return 1 - (2 * M / r) + (Q**2 / r**2)
# Hitung nilai f(r)
f_values = f(r, M, Q)
# Plot
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(r, f_values, label=r'$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$', color='blue')
plt.axhline(0, color='red', linestyle='--', label='Horizon Peristiwa (f(r)=0)')
plt.title('Grafik Fungsi f(r) untuk Lubang Hitam Reissner-Nordström')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('f(r)')
plt.ylim(-1.5, 1.5)
plt.xlim(0.1, 5)
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

LAMPIRAN E

METODE NUMERIK GRAFIK FUNGSI GELOMBANG DATANG, PANTUL, DAN TRANSMISI PADALUBANG HITAM RN

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Definisi parameter
omega = 1.0  # Spektrum energi
m = 0.5      # Massa
r = np.linspace(1, 10, 500)  # Jarak radial
t = 0        # Waktu
# Fungsi tanda (signum)
def sign(x):
    return np.sign(x)
# Parameter tambahan
epsilon = sign(omega + m)
sqrt_term = np.sqrt(omega**2 - m**2)
# Komponen fungsi gelombang (Ψ_jk^+ dan Ψ_jk^-)
def psi_jk_plus(r, t):
    return (1 / r) * np.exp(-1j * (omega * t + epsilon * sqrt_term * r))
def psi_jk_minus(r, t):
    return (1 / r) * np.exp(-1j * (omega * t + epsilon * sqrt_term * r))
# Fungsi gelombang datang
I_plus = 10.0  # Amplitudo untuk I^+ (diperbesar untuk visibilitas)
I_minus = 10.0 # Amplitudo untuk I^-
psi_incoming = I_plus * psi_jk_plus(r, t) + I_minus * psi_jk_minus(r, t)
# Fungsi gelombang pantul
R_plus = 1.0  # Amplitudo untuk R^+
R_minus = 1.0 # Amplitudo untuk R^-
psi_reflected = R_plus * psi_jk_plus(r, t) + R_minus * psi_jk_minus(r, t)
# Fungsi gelombang transmisi
r_plus = 2.0  # Horizon peristiwa
eV_plus = 0.1
```

```
r_star = np.log(r - r_plus)
def psi_transmission(r, t):
    factor = 1 / (np.sqrt(r_plus) * (r_plus)**(1/4) * (r - r_plus)**(1/4))
    phase = np.exp(-1j * (omega * t + (omega - eV_plus) * r_star))
    return factor * phase
T_plus = 1.0  # Amplitudo untuk T^+
T_minus = 1.0 # Amplitudo untuk T^-
psi_transmitted = T_plus * psi_transmission(r, t) + T_minus * psi_transmission(r,
t)
# Plotting
plt.figure(figsize=(16, 12))  # Perbesar ukuran gambar
# Plot semua fungsi gelombang dalam satu gambar
plt.plot(r, np.abs(psi_incoming), label='|Ψ_I^i| (Gelombang Datang)', color='blue',
linewidth=2)
plt.plot(r, np.abs(psi_reflected), label='|Ψ_I^r| (Gelombang Pantul)',
color='orange', linewidth=2)
plt.plot(r, np.abs(psi_transmitted), label='|Ψ_II^t| (Gelombang Transmisi)',
color='green', linewidth=2)
# Tambahkan garis horizon peristiwa
plt.axvline(x=r_plus, color='red', linestyle='--', label='Horizon Peristiwa (r = r_+)',
linewidth=2)
# Pewarnaan area untuk wilayah luar dan dalam horizon
plt.fill_between(r, 0, np.abs(psi_incoming), where=(r < r_plus), color='blue',
alpha=0.1, label='Luar Horizon')
plt.fill_between(r, 0, np.abs(psi_transmitted), where=(r >= r_plus), color='green',
alpha=0.1, label='Dalam Horizon')
# Anotasi untuk wilayah
plt.text(r_plus + 0.2, 0.5, 'Wilayah Dalam Horizon (Gelombang Transmisi)',
color='green', fontsize=12)
plt.text(np.max(r) - 4, 0.5, 'Wilayah Luar Horizon (Gelombang Datang & Pantul)',
color='blue', fontsize=12)
# Sesuaikan skala y agar semua garis terlihat jelas
```

```
y_max = max(np.max(np.abs(psi_incoming)), np.max(np.abs(psi_reflected)),
np.max(np.abs(psi_transmitted)))
plt.ylim(0, y_max * 1.1)
# Pengaturan grafik
plt.title('Fungsi Gelombang: Gelombang Datang, Pantul, dan Transmisi pada
Lubang Hitam RN', fontsize=16)
plt.xlabel('r (Jarak Radial)', fontsize=14)
plt.ylabel('|Ψ| (Magnitudo)', fontsize=14)
plt.legend(fontsize=12)
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jalan Gajayana Nomor 50, Telepon (0341)551354, Fax (0341) 572533
Website http://www.uin-malang.ac.id Email info@uin-malang.ac.id

JURNAL BIMBINGAN SKRIPSI/TESIS/DISERTASI

IDENTITAS MAHASISWA

NIM	19640060
Nama	SITI MUFIDAH
Fakultas	SAINS DAN TEKNOLOGI
Jurusan	FISIKA
Dosen Pembimbing 1	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc
Dosen Pembimbing 2	AHMAD ABTOKHI,M.Pd
Judul Skripsi/Tesis/Disertasi	PERSAMAAN DIRAC DALAM RUANGWAKTU REISSNER NORDSTROM

IDENTITAS BIMBINGAN

No	Tanggal Bimbingan	Nama Pembimbing	Deskripsi Proses Bimbingan	Tahun Akademik	Status
1	18 September 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi jurnal penelitian	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
2	25 September 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi topik dan judul	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
3	02 Oktober 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Persetujuan judul penelitian	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
4	09 Oktober 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi Bab I, II, III	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
5	16 Oktober 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Revisi proposal skripsi bab I, II, III	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
6	23 Oktober 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Persetujuan proposal skripsi	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
7	29 Februari 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi perhitungan bab III	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi
8	07 Maret 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Diskusi perhitungan bab III dan ACC	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi
9	14 Oktober 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi perhitungan bab IV	Ganjil 2024/2025	Sudah Dikoreksi
10	21 Oktober 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Diskusi Bab IV dan ACC	Ganjil 2024/2025	Sudah Dikoreksi
11	29 Oktober 2024	AHMAD ABTOKHI,M.Pd	Konsultasi integrasi dan ACC	Ganjil 2024/2025	Sudah Dikoreksi

Telah disetujui
Untuk mengajukan ujian Skripsi/Tesis/Desertasi

Malang, 11 Nov 2024

Dosen Pembimbing 2

AHMAD ABTOKHI,M.Pd

Dosen Pembimbing

ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc

Kajur / Kaprodi,

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA JURUSAN FISIKA MALANG