

**STUDI METRIK SCHWARZSCHILD DALAM RELATIVITAS UMUM  
TERDEFORMASI- $\alpha$**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MACHFIANA MUZDALIFAH**  
**NIM. 200604110043**



**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2024**

**STUDI METRIK SCHWARZSCHILD DALAM RELATIVITAS UMUM  
TERDEFORMASI- $\alpha$**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:  
MACHFIANA MUZDALIFAH  
NIM. 200604110043**

**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2024**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

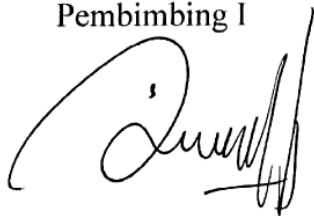
**STUDI METRIK SCHWARZSCHILD DALAM RELATIVITAS UMUM  
TERDEFORMASI- $\alpha$**

**SKRIPSI**

Oleh:  
Machfiana Muzdalifah  
NIM. 200604110043

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Pada tanggal, 05 Desember 2024

Pembimbing I



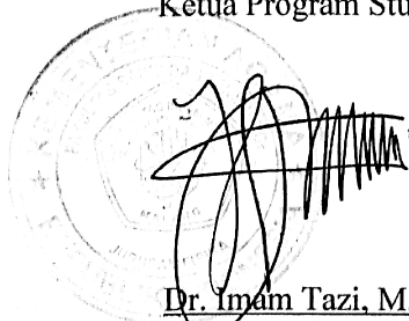
Arista Romadani, M.Sc  
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Drs. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003

Mengetahui,  
Ketua Program Studi,



Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP. 19740730 200312 1 002



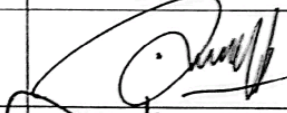

## HALAMAN PENGESAHAN

### STUDI METRIK SCHWARZSCHILD DALAM RELATIVITAS UMUM TERDEFORMASI- $\alpha$

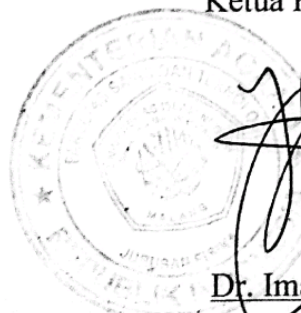
#### SKRIPSI

Oleh:  
MACHFIANA MUZDALIFAH  
NIM. 200604110043

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Diterima sebagai  
Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal, 16 Desember 2024

Penguji Utama	: <u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua penguji	: <u>Dr. Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	: <u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	: <u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	

Mengesahkan,  
Ketua Program Studi,



Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP. 19740730 200312 1 002

## HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : MACHFIANA MUZDALIFAH  
NIM : 200604110043  
Program Studi : FISIKA  
Fakultas : SAINS DAN TEKNOLOGI  
Judul Penelitian : Studi Metrik Schwarzschild Dalam Relativitas Umum  
Terdeformasi- $\alpha$

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2024  
Yang Membuat  
Pernyataan



Machfiana Muzdalifah  
NIM.200604110043

## **MOTTO**

*"Hiduplah seolah engkau mati esok, Belajarlah seolah engkau hidup selamanya."*

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Segenap rasa syukur saya haturkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan segala berkah dan petunjuk-Nya sepanjang perjalanan pendidikan saya. Tanpa rahmat dan bimbingan-Nya, saya tidak akan mampu mencapai titik ini.*

*Saya juga mempersembahkan karya ini kepada orang tua saya tercinta. Terima kasih yang tak terhingga atas segala dukungan, cinta, dan pengorbanan yang telah kalian berikan. Tanpa doa dan dukungan kalian, saya tidak akan mampu mencapai impian ini.*

*Selanjutnya, saya ingin mengucapkan terima kasih kepada nenek dan kakek saya yang telah dengan ikhlas membiayai pendidikan saya selama ini. Semoga segala pengorbanan yang telah dilakukan mendapat balasan yang setimpal.*

*Karya ini juga saya persembahkan untuk orang-orang terdekat saya. Kebersamaan kita, dukungan, serta semangat saling menguatkan telah membuat perjalanan ini lebih berarti.*

*Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan menjadi sumbangsih bagi ilmu pengetahuan serta masyarakat.*

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamiin, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya yang tiada henti sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Studi Metrik Schwarzschild Dalam Relativitas Umum Terdeformasi- $\alpha$ ”**. Semoga shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, para sahabat, dan segenap orang yang mengikuti jejaknya.

Skripsi ini disusun bertujuan sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana (S.Si). Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Dr. Erna Hastuti, M.Si., selaku Dosen Wali yang selalu memberikan arahan serta nasehat kepada penulis selama perkuliahan.
5. Bapak Arista Romadani, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Skripsi sekaligus Dosen Fisika Teori yang telah membimbing penulis selama perkuliahan yang berkaitan dengan Fisika Teori hingga penyelesaian skripsi ini.

6. Bapak Dr. Muhammad Taufiqi, M.Si, selaku Dosen Fisika Teori yang telah memberikan pengetahuan dalam proses pembelajaran mengenai Fisika Teori.
7. Seluruh dosen, laboran, dan staf administrasi Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu, pelayananan, dan membantu kelancaran penulisan skripsi ini.
8. Orang tua dan segenap keluarga besar yang selalu mendo'akan dan memberi dukungan untuk putrinya dalam segala hal.
9. Teman-teman Program Studi Fisika angkatan 20 dan beberapa teman angkatan 19, yang telah mengisi hari-hari perkuliahan dengan penuh canda tawa dan keseruan.
10. Semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung demi kesuksesan dalam penulisan skripsi ini.
11. Diri sendiri, yang telah berjuang sampai pada titik ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan ilmiah bagi penulis dan semua pihak yang membaca, serta memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Malang, 23 Desember 2024

Penulis

## DAFTAR ISI

SAMPUL .....	i
HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN .....	iii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN .....	v
MOTTO.....	vi
KATA PENGANTAR .....	viii
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xii
ABSTRAK.....	xiii
ABSTRACT .....	xiv
المخلص .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>7</b>
2.1 Kalkulus Fraksional.....	7
2.1.1. Kalkulus Fraksional Konformabel.....	8
2.1.2. Kalkulus Fraksional Konformabel Multivariabel .....	11
2.2 Teori Relativitas Umum .....	11
2.2.1. Teori Dasar Relativitas Umum .....	11
2.2.1. Tensor dalam Teori Relativitas Umum.....	18
2.3 Lubang Hitam Schwarzschild .....	29
2.3.1. Asumsi - asumsi dasar lubang hitam Schwarzschild .....	29
2.3.2. Metrik Schwarzschild .....	31
2.3.3. Integrasi Mengenai Teori Relativitas Umum.....	36
<b>BAB III PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN TERDEFORMASI-<math>\alpha</math> .....</b>	<b>38</b>
3.1 Komponen Teori Relativitas Umum .....	38
3.1.1. Simbol Christoffel.....	38
3.1.2. Tensor Kelengkungan .....	40
3.1.3. Tensor Riemann .....	43
3.1.4. Tensor Ricci .....	46
3.1.5. Persamaan Medan Einstein .....	48
<b>BAB IV SOLUSI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD</b>	
<b>TERDEFORMASI-<math>\alpha</math>.....</b>	<b>51</b>
4.1 Metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	51
4.2 Sifat-sifat ruang-waktu metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	54

4.3 Simbol Christoffel, tensor riemann, tensor ricci, skalar ricci, dan persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ ..	56
4.2.1 Simbol christoffel dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	56
4.2.2 Tensor rieman dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	61
4.2.3 Tensor ricci dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	65
4.2.4 Skalar ricci dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	66
4.2.1 Persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ .....	69
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>77</b>
5.1 Kesimpulan.....	77
5.2 Saran.....	78
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>79</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>83</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Konsep Sumur Gravitasi.....	15
Gambar 2. 2 Ilustrasi Dilatasi Waktu .....	16
Gambar 2. 3 Ilustrasi Kontraksi Panjang.....	17
Gambar 2. 4 Lubang Hitam .....	18

## ABSTRAK

Muzdalifah, Machfiana. 2024. **Studi Metrik Schwarzschild Dalam Relativitas Umum Terdeformasi- $\alpha$ . Skripsi.** Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Drs. Abdul Basid, M.Si.

---

**Kata Kunci:** Metrik Schwarzschild, Relativitas Umum, Kalkulus Fraksional Konformabel.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis deformasi metrik Schwarzschild dalam konteks relativitas umum dengan pendekatan kalkulus fraksional konformabel. Penelitian ini dimotivasi oleh perkembangan terbaru dalam teori relativitas umum dan kalkulus fraksional, yang menunjukkan bahwa turunan fraksional dapat memberikan pemahaman baru tentang interaksi antara geometri ruang-waktu dan materi. Untuk mendapatkan pengaruh deformasi terhadap lubang hitam Schwarzschild dilakukan penelitian terkait komponen-komponen relativitas umum yang telah terdeformasi kalkulus fraksional konformabel. Setelah itu, diformulasikan lubang hitam terdeformasi, serta menganalisis simbol Christoffel, tensor Riemann, tensor Ricci, dan skalar Ricci yang terdeformasi oleh turunan fraksional konformabel dari metrik Schwarzschild yang telah terdeformasi pula. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa adanya *memory effect* oleh deformasi turunan fraksional konformabel menyebabkan lubang hitam menjadi dinamis dan non-linear.

## ABSTRACT

Muzdalifah, Machfiana. 2024. **Schwarzschild Metric Study in Deformed- $\alpha$  General Relativity**. Thesis. Physics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisors: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Drs. Abdul Basid, M.Si

---

**Keywords:** Schwarzschild Metric, General Relativity, Conformable Fractional Calculus.

This research aims to analyze the deformation of the Schwarzschild metric within the context of general relativity using a conformable fractional calculus approach. The study is motivated by recent developments in general relativity and fractional calculus, which suggest that fractional derivatives can provide new insights into the interactions between spacetime geometry and matter. To assess the impact of deformation on Schwarzschild black holes, research was conducted on the components of general relativity that have been deformed by conformable fractional calculus. Following this, a formulation of the deformed black hole was developed, along with an analysis of the Christoffel symbols, Riemann tensor, Ricci tensor, and Ricci scalar that have been deformed by the conformable fractional derivatives of the deformed Schwarzschild metric. The findings indicate that the memory effect caused by the conformable fractional derivative deformation results in dynamic and non-linear behavior of black holes.

## المخلص

مزدلفة، مخفيانة. 2024. دراسة المترية Schwarzschild في النسبية العامة المشوهة  $\alpha$ -أطروحة. برنامج  
دراسة الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفون:  
(I) أريستا رمضان، الماجستير (II) الدكتور عبد الباسد، الماجستير.

---

الكلمات المفتاحية: مترية schwarzschild، النسبية العامة، حساب التفاضل الكسري المتوافق.

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل تشوه مترية schwarzschild في سياق النسبية العامة باستخدام نهج حساب التفاضل الكسري المتوافق. تأتي هذه الدراسة بدافع من التطورات الحديثة في نظرية النسبية العامة وحساب التفاضل الكسري، التي تشير إلى أن المشتقات الكسرية يمكن أن تقدم فهماً جديداً للتفاعل بين هندسة الزمكان والمادة. للحصول على تأثير التشوه على الثقب الأسود schwarzschild، تم إجراء بحث حول مكونات النسبية العامة المشوهة بحساب التفاضل الكسري المتوافق. بعد ذلك، تم صياغة الثقب الأسود المشوه وتحليل رموز كريستوفل، موتر ريمان، موتر ريتشي، والمقياس الريتشي المشوهة بالمشتق الكسري المتوافق من مترية schwarzschild المشوهة. أظهرت نتائج الدراسة أن تأثير الذاكرة الناتج عن تشوه المشتق الكسري المتوافق يؤدي إلى جعل الثقب الأسود ديناميكياً وغير خطي.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1695, Gottfried Leibniz berdiskusi dengan Guillaume l'Hôpital mengenai turunan dan integral yang dapat diperluas ke bilangan irasional, fraksional, atau kompleks. Pada awal abad ke-19 kalkulus fraksional sendiri sudah mulai dikembangkan dengan karya tokoh-tokoh seperti Joseph Fourier, Liouville, dan Cauchy, yang mempertimbangkan konsep turunan fraksional dalam konteks transformasi Fourier, teori kalor, dan kalkulus integral kompleks. Abad ke-20 terdapat perkembangan lebih lanjut, terutama dengan kontribusi Grünwald dan Letnikov, yang memperkenalkan pendekatan turunan fraksional berdasarkan iterasi diferensiasi diskrit.

Turunan dan integral fraksional dibangun dengan dua pendekatan utama yaitu Riemann-Liouville dan Grünwald-Letnikov. Dikarenakan turunan fraksional dari kedua pendekatan ini tampak kompleks dan kehilangan beberapa sifat dasar, seperti aturan perkalian dan aturan rantai, turunan fraksional konformabel telah diperkenalkan. Turunan ini lebih sederhana, dan masih mempertahankan sifat semigrup operator fraksional dalam beberapa kasus.

Saat ini, turunan fraksional konformabel telah diterapkan secara luas dalam berbagai masalah mekanika, seperti osilator harmonik fraksional dan osilator redam fraksional. Penerapannya memungkinkan untuk mendiskusikan versi fraksional dari mekanika Newtonian dan mekanika klasik. Turunan fraksional konformabel juga dapat diterapkan dalam kasus teori relativitas umum. Turunan ini nantinya dapat menyebabkan perubahan atau deformasi karena adanya orde fraksional atau yang

biasa dilambangkan dalam bentuk  $\alpha$  dalam struktur persamaan medan einstein yang mendefinisikan geometri ruang-waktu di sekitar objek bermassa besar seperti lubang hitam. Hal ini berarti bahwa turunan fraksional konformabel dapat menghasilkan efek yang berbeda dalam pengukuran jarak dan waktu, serta dalam pengukuran kurvatur ruang-waktu yang dinyatakan oleh tensor Ricci. Selain itu, adanya deformasi oleh  $\alpha$  juga mempengaruhi tensor energi-momentum, yang mencerminkan isi materi dari ruang-waktu tersebut.

Salah satu lubang hitam yang menarik untuk dikaji dalam konteks penerapan turunan fraksional konformabel ini adalah lubang hitam schwarzschild. Lubang hitam ini adalah solusi spesifik dari persamaan medan einstein dalam teori relativitas umum yang mana lubang hitam ini tidak berotasi dan tidak bermuatan. Jika pada teori relativitas umumnya terdeformasi- $\alpha$ , otomatis metrik dari lubang hitam schwarzschild diprediksikan akan terdeformasi- $\alpha$  juga. Dengan demikian, deformasi  $\alpha$  ini akan mengubah kompromi antara geometri ruang-waktu dan materi yang ada di dalam lubang hitam schwarzschild, yang dapat menghasilkan efek yang berbeda dalam dinamika objek atau partikel yang berinteraksi dengan ruang-waktu tersebut. sehingga studi metrik schwarzschild dalam relativitas umum terdeformasi- $\alpha$  penting untuk dilakukan.

Chun W. S dan Hounkonnou M. N. telah melakukan sebuah penelitian pada tahun (2020) mengenai pengaplikasian turunan fraksional dalam relativitas khusus. Dalam penelitian ini, diperkenalkan konsep baru tentang kecepatan yang memiliki dimensi (Panjang)  $\alpha$ /(Waktu) dan percepatan yang memiliki dimensi (Panjang)  $\alpha$ /(Waktu)<sup>2</sup>, berdasarkan aturan penambahan fraksional. Kemudian, dibahas mekanika fraksional dalam satu dimensi. Konservasi energi fraksional ditunjukkan, dan dirumuskan formalisme Hamiltonian untuk mekanika fraksional. Beberapa

contoh penerapan mekanika fraksional juga diberikan sebagai ilustrasi. (Chung & Honnkonnou, 2020)

Pada tahun yang sama yaitu (2020) D. D. Pawar, dkk. melakukan sebuah penelitian yang relevan untuk studi metrik Schwarzschild dalam relativitas umum terdeformasi- $\alpha$ . Dalam penelitian ini, ditemukan tensor kurvatur fraksional yang konformabel, tensor Riemann fraksional yang konformabel, dan dilakukan analisis terhadap sifat-sifatnya seperti simetri, antisimetri, dan sifat siklik. Selain itu, berhasil diperoleh tensor Ricci fraksional yang konformabel serta invarian kurvatur. Langkah terakhir, dengan menggunakan turunan fraksional yang konformabel, ditemukan persamaan medan Einstein. Sebagai contoh konkret, penelitian ini juga memaparkan sebuah kasus ilustratif yang memperjelas penerapan temuan tersebut. (Pawar, Raut, & Patil, 2020)

Pada tahun (2022) Hounkonnou, dkk. Juga melakukan penelitian terkait persamaan medan einstein yang terdeformasi- $\alpha$ , konstanta  $\Lambda$  adalah kosmologis,  $\kappa$  adalah konstanta;  $T_\alpha$  dan  $R_\alpha$  adalah tensor tress-energi yang terdeformasi- $\alpha$  dan tensor Ricci yang mengukur deviasi geodesik, secara berturut-turut.  $g_\alpha$  adalah tensor metrik terdeformasi- $\alpha$  yang memberi bahwa cara mengukur jarak dan waktu, dan  $R_\alpha$ , analog dengan kurvatur Gaussian  $\kappa$  untuk permukaan, adalah kurvatur skalar terdeformasi- $\alpha$  yang mengukur kurvatur ruang-waktu. Bagian kanan persamaan medan Einstein adalah konten materi ruang-waktu, di sini dapat ditempatkan medan elektromagnetik, fluida, medan skalar, dll. Oleh karena itu, persamaan Einstein mengekspresikan kompromi antara geometri ruang-waktu dan materi yang ada, sedemikian rupa sehingga masing-masing saling mempengaruhi, di mana kurvatur adalah manifestasi dari konten masif dari ruang-waktu tersebut. Perbedaan utama dibanding pendekatan lama adalah bahwa materi tidak lagi berevolusi melalui

skenario spasial statis, di mana semua jam di alam semesta setuju dalam pengukuran waktu mereka, tetapi sekarang ruang-waktu adalah aktor aktif yang mempengaruhi dinamika materi, dan pada gilirannya, konten materi, melalui tensor energi-momentum  $T_{\alpha}$ , menentukan bagaimana geometri tersebut. Selain itu, persamaan Einstein tidak linear, di mana variasi kecil dalam kondisi awal menghasilkan perubahan kecil dalam respons, tidak jauh berbeda dari sebelumnya. Dalam proses nonlinier, hal ini tidak terjadi.

Meskipun penelitian-penelitian sebelumnya telah memberikan pemahaman awal tentang deformasi  $\alpha$  dan turunan fraksional konformabel, masih ada kesenjangan pengetahuan yang perlu diisi. Kesenjangan tersebut meliputi adanya materi yang belum tersampaikan terkait bagaimana jika turunan fraksional konformabel mendeformasi beberapa ruang dimensi dan kurangnya Analisis teoretis yang lebih mendalam karena penelitian sebelumnya umumnya hanya memberikan pemahaman konseptual dan sedikit perhitungan eksak. Jadi masih terdapat ruang untuk melakukan analisis teoretis yang lebih mendalam, seperti pengembangan model matematika yang lebih rinci.

Penelitian ini juga didasari oleh ayat-ayat Al Quran, salah satunya adalah Q.S. At-Takwir : 15-16 yang berbunyi:

فَلَا أُفْسِمُ بِالنُّجُومِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

*“Oleh itu, Aku bersumpah dengan bintang-bintang yang tenggelam timbul Yang beredar, juga yang tetap pada tempatnya.” (Q.S. At-Takwir (81): 15-16)*

Dalam ayat tersebut kata al-khunnas atau tersembunyi, aljawari atau bergerak cepat, dan al-kunnas atau menelan ini menjelaskan mengenai Lubang hitam dalam teori relativitas umum Einstein yang merupakan bagian dari ruang dan waktu dengan gravitasi tinggi dan dapat menelan benda langit yang berada di zona

peristiwanya. Keberadaan lubang hitam ini memang benar ada di luar angkasa. Dalam penelitian ini metric lubang hitam schwarzschild akan dikaji lebih mendalam dengan adanya turunan fractional konformabel.

Dengan penelitian ini, diharapkan dapat melengkapi penelitian sebelumnya dan memperluas pemahaman tentang Studi Metrik Schwarzschild Dalam Relativitas Umum Terdeformasi- $\alpha$ . Penelitian ini akan mengisi kesenjangan pengetahuan yang masih ada dan memberikan kontribusi baru terhadap pemahaman teoritis dan praktis tentang interaksi ini, yang pada gilirannya akan memperkaya pengetahuan tentang gravitasi, mekanika kuantum, dan kosmologi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penelitian ini dapat diformulasikan sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan medan einstein yang terdeformasi- $\alpha$ ?
2. Bagaimana bentuk metrik schwarzschild yang terdeformasi- $\alpha$ ?
3. Bagaimana simbol Christoffel, tensor riemann, tensor ricci, skalar ricci, dan persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild yang terdeformasi- $\alpha$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan persamaan medan Einstein yang terdeformasi- $\alpha$
2. Merumuskan metrik schwarzschild yang terdeformasi- $\alpha$ .
3. Menformulasikan simbol Christoffel, tensor riemann, tensor ricci, skalar ricci, dan persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild yang terdeformasi- $\alpha$ .

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Penelitian ini memiliki beberapa manfaat yang signifikan, antara lain:

1. Memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep kalkulus fraksional dan penerapannya dalam fisika modern. Ini membantu dalam pengembangan teori dan aplikasi kalkulus fraksional dalam berbagai disiplin ilmu.
2. Memperluas penerapan turunan fraksional konformabel dalam bidang mekanika dan fisika. Dengan mempelajari konsekuensi dan aplikasi dari turunan fraksional ini dalam masalah seperti mekanika Newtonian fraksional dan mekanika klasik
3. Memberikan kontribusi terhadap pemahaman kosmologi dengan mempertimbangkan efek deformasi  $\alpha$  pada solusi Einstein field equation dalam metrik Schwarzschild.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Batasan masalah pada penelitian ini adalah Lingkup metrik yang digunakan hanya metrik schwarzschild. Penelitian ini juga hanya mempertimbangkan pengaruh Turunan Konfomabel pada metrik schwarzschild.

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **2.1 Kalkulus Fraksional**

Kalkulus fraksional telah digunakan untuk memodelkan proses fisik dan rekayasa, yang ditemukan lebih baik dijelaskan oleh persamaan diferensial fraksional. Penting untuk dicatat bahwa model matematis standar dengan turunan orde bulat, termasuk model nonlinier, tidak bekerja dengan baik dalam banyak kasus. Dalam beberapa tahun terakhir, kalkulus fraksional telah memainkan peran penting di berbagai bidang, seperti mekanika, listrik, kimia, biologi, dan ekonomi, terutama dalam teori kontrol serta pengolahan sinyal dan citra. Beberapa topik utama dalam kalkulus fraksional meliputi difusi anomali, getaran dan kontrol, jalan acak waktu kontinu, statistik Levy, gerakan Brownian fraksional, model kinetik neutron titik fraksional, hukum daya, potensial Riesz, turunan fraksional dan fraktal, serta persamaan turunan fraksional komputasional. Selain itu, kalkulus fraksional digunakan untuk mempelajari fenomena nonlokal, proses bergantung pada sejarah, media berpori, filter fraksional, rekayasa biomedis, loop terkunci fase fraksional, prinsip variasional fraksional, transformasi fraksional, wavelet fraksional, serta sistem predator-prey fraksional. Di samping itu, kalkulus fraksional juga diterapkan dalam mekanika materi lunak, pengolahan sinyal dan citra fraksional, analisis singularitas, representasi integral untuk sistem diferensial fraksional, serta fungsi khusus terkait kalkulus fraksional. Selain itu, ada pula penerapan kalkulus fraksional dalam konduksi panas non-Fourier, dissipasi akustik, geofisika, relaksasi, creep, viskoelastisitas, rheologi, dinamika fluida, serta analisis sistem yang kompleks dan masalah air tanah. (Atangana & Secer, 2013)

### 2.1 1. Kalkulus Fraksional Konformabel

Kalkulus fraksional menarik banyak penelitian pada abad terakhir ini dan abad sekarang. Dampak kalkulus fraksional ini dalam cabang ilmu murni dan terapan mulai meningkat secara substansial selama dua dekade terakhir. Banyak penelitian mulai menangani versi diskrit dari kalkulus fraksional ini dengan memanfaatkan teori skala waktu. Ide utama di balik pembentukan kalkulus fraksional ini disimpulkan menjadi dua pendekatan. Pendekatan pertama adalah Riemann-Liouville yang berdasarkan pada iterasi operator integral sebanyak  $n$  kali dan kemudian diganti dengan satu integral melalui rumus Cauchy yang terkenal di mana kemudian  $n!$  diganti dengan fungsi Gamma dan oleh karena itu integral fraksional dari orde noninteger didefinisikan. Kemudian integral digunakan untuk mendefinisikan turunan fraksional Riemann dan Caputo. Pendekatan kedua adalah pendekatan Grünwald-Letnikov yang didasarkan pada iterasi turunan sebanyak  $n$  kali dan kemudian diperoleh turunan fraksional dengan menggunakan fungsi Gamma dalam koefisien binomial.

Lebih jelasnya mengenai Derivatif Riemann-Liouville adalah dari  $f$  dengan orde  $\alpha$  (di mana  $\alpha$  adalah bilangan rasional) diberikan oleh:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-t\beta} f(\beta) d\beta \quad (2.1)$$

di mana  $\Gamma(1-\alpha)$  adalah fungsi gamma. Definisi ini menunjukkan bahwa derivatif Riemann-Liouville adalah integral dari fungsi  $f(t)$  yang dikalikan dengan faktor eksponensial  $e^{-t\beta}$ , dan hasilnya dibagi dengan  $\Gamma(1-\alpha)$  untuk mendapatkan derivatif yang diinginkan.

Lalu untuk Derivatif Caputo dari  $f(t)$  dengan orde  $\alpha$  didefinisikan sebagai:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left( \frac{df(\beta)}{d\beta} \right) (t-\beta)^{-\alpha} d\beta \quad (2.2)$$

di mana  $\frac{df}{dt}$  adalah derivatif pertama dari  $f$  terhadap  $t$ . Definisi ini menunjukkan bahwa derivatif Caputo adalah integral dari derivatif pertama  $f$  yang dikalikan dengan faktor gamma, dan hasilnya dibagi dengan  $\Gamma(1-\alpha)$  untuk mendapatkan derivatif yang diinginkan. (Gao & Chi, 2020)

Turunan fraksional yang diperoleh dalam kalkulus ini tampak rumit dan kehilangan beberapa sifat dasar yang dimiliki turunan biasa seperti aturan perkalian dan aturan rantai. Namun, sifat semigrup dari operator fraksional ini berperilaku baik dalam beberapa kasus. Baru-baru ini, didefinisikan turunan fraksional baru yang berperilaku baik dan sederhana yang disebut "turunan fraksional yang sesuai" yang hanya tergantung pada definisi batas dasar dari turunan. Yaitu, untuk sebuah fungsi  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  turunan fraksional konformabel dari orde  $0 < \alpha \leq 1$  dari  $f$  pada  $t > 0$  didefinisikan sebagai berikut. (Abdeljawad, 2015)

$$T_\alpha f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \quad (2.3)$$

Turunan fraksional konformabel  $T_\alpha f(t)$  adalah pengembangan dari konsep turunan klasik yang disesuaikan dengan pendekatan fraksional. Ini memberikan cara untuk menangkap perilaku kompleks dari fungsi, terutama yang berkaitan dengan sistem dinamis dan fenomena dengan efek memori. Pada tabel berikut, ditampilkan penerapan turunan fraksional konformabel untuk berbagai fungsi dasar, seperti polinomial, eksponensial, dan fungsi trigonometri. Pengaruh parameter  $\alpha$  pada hasil turunan tercermin dalam setiap contoh, menyesuaikan perubahan sifat dari setiap fungsi yang diturunkan. (Kareem, 2017)

Tabel 2.1 Penerapan turunan fraksional konformabel dalam berbagai fungsi dasar.

Fungsi $f(t)$	Turunan Fraksional Konformabel $T_\alpha f(t)$
$af + bg$	$aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$
$\lambda$	0
$fg$	$fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$
$\frac{f}{g}$	$\frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$
$t^p$	$pt^{p-\alpha}$
$e^{ct}$	$ct^{1-\alpha}e^{ct}$
$\lambda$	0
$\sin(at)$	$at^{1-\alpha} \cos(at)$
$\cos(at)$	$-at^{1-\alpha} \sin(at)$
$\tan(at)$	$at^{1-\alpha} \sec^2(at)$
$\cot(at)$	$-at^{1-\alpha} \csc^2(at)$
$\sec(at)$	$at^{1-\alpha} \sec(at) \tan(at)$
$\csc(at)$	$-at^{1-\alpha} \csc(at) \cot(at)$

Turunan Konformabel ini telah banyak digunakan dalam berbagai disiplin ilmu, dengan penekanan khusus pada ilmu terapan dan fisika. Para ilmuwan telah memanfaatkan Turunan Konformabel untuk mendapatkan wawasan lebih dalam tentang sistem yang kompleks. Pemanfaatannya dalam ilmu terapan dan fisika mencerminkan kemampuannya untuk menangkap dinamika dan perilaku yang rumit dari fenomena dunia nyata. (Has, Yilmaz, & Baleanu, 2024)

## 2.1 2. Kalkulus Fraksional Konformabel Multivariabel

Dalam mengembangkan model lain dalam kalkulus fraksional konformabel multivariabel, pendekatan berbeda dapat digunakan tergantung pada jenis masalah yang dihadapi dan persyaratan aplikatif dari sistem yang dimodelkan. Salah satu model adalah dengan memperluas sifat dasar turunan fraksional satu variabel ke beberapa variabel, dimana setiap variabel dalam sistem memiliki kontribusi fraksional yang dapat bervariasi sesuai konteks. Metode ini memungkinkan penguraian fungsi bernilai vektor dalam ruang berdimensi lebih tinggi, sehingga membuka ruang untuk analisis yang lebih rinci dan terstruktur pada sistem kompleks, terutama dalam fisika dan teknik.

Definisi baru ini menyatakan bahwa jika  $f$  adalah fungsi bernilai real dengan  $n$  variabel dan  $a = (a_1, \dots, a_n)$  adalah titik di mana setiap komponen  $a_i$  positif, maka turunan parsial konformabel ke- $i$  dari  $f$  pada titik  $a$  dinyatakan dengan limit yang melibatkan perubahan pada komponen ke- $i$  dari  $a$ .

Teorema selanjutnya menyatakan bahwa jika  $f$  adalah fungsi bernilai vektor dengan  $n$  variabel dan  $f$  dapat di-diferensialkan secara  $\alpha$  di titik  $a$  (dengan setiap  $a_i > 0$ ), maka semua turunan parsial konformabel  $\frac{\partial^\alpha}{\partial_j^\alpha} f(a)$  ada untuk setiap  $1 \leq i \leq m$  dan  $1 \leq j \leq n$ . Jacobian konformabel dari  $f$  di titik  $a$  didefinisikan sebagai matriks  $m \times n$  yang terdiri dari elemen-elemen  $\frac{\partial^\alpha}{\partial_j^\alpha} f(a)$ . (Gozutoka, 2017)

## 2.2 Teori Relativitas Umum

### 2.2.1. Teori Dasar Relativitas Umum

Sebelum Einstein memperkenalkan Teori Relativitas Umum (TRU) pada 1915, pengetahuan tentang tiga hukum gerak mekanika Newton, relativitas khusus, dan gravitasi Newton telah ada. Mekanika Newton berhasil menjelaskan gerakan

benda pada kecepatan rendah, tetapi gagal ketika benda mendekati kecepatan cahaya, sementara transformasi Galilei tidak konsisten dengan hukum-hukum seperti persamaan Maxwell. Einstein mengatasi kekurangan ini dengan Teori Relativitas Khusus (TRK), yang menyatakan bahwa semua hukum fisika berlaku dalam setiap kerangka inersial dan kecepatan cahaya adalah konstan. TRK menjelaskan gerakan mendekati kecepatan cahaya dan menyatukan persamaan Maxwell dengan transformasi Lorentz. Namun, hukum gravitasi Newton tidak konsisten dengan TRK karena mengimplikasikan bahwa efek gravitasi merambat dengan kecepatan tak terbatas, bertentangan dengan prinsip TRK.

Einstein mencoba beberapa kali merumuskan teori gravitasi yang sesuai dengan Teori Relativitas Khusus. Pada tahun 1915, usahanya menghasilkan Teori Relativitas Umum (TRU), di mana ia menyatakan bahwa gravitasi bukanlah gaya seperti yang lain, melainkan efek dari kelengkungan ruang-waktu karena adanya massa dan energi di dalamnya. TRU didasarkan pada dua asas utama, yaitu asas kesetaraan dan kovariansi umum. Einstein mengilustrasikan asas kesetaraan dengan contoh astronot di dalam roket di permukaan bumi dan di ruang angkasa, yang menunjukkan bahwa tidak ada percobaan lokal yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara, seperti yang terlihat dari hasil yang sama ketika benda dilepaskan dengan percepatan  $g = 9,8 \frac{m}{s}$ .

Asas kesetaraan menyatakan bahwa massa inersia dan massa gravitasi memiliki kesamaan, memungkinkan eliminasi efek gravitasi dengan menggunakan kerangka acuan dipercepat yang sesuai. Dalam medan gravitasi, semua benda mengalami percepatan yang sama tanpa memperdulikan ukuran atau massa. Sebagai contoh, benda dengan massa jatuh dengan percepatan gravitasi. Dengan transformasi koordinat yang tepat, massa inersial sama dengan massa gravitasi, sehingga dapat

memilih kerangka acuan inersial untuk menghilangkan efek gravitasi. Sebagai contoh penerapan, pengamat dalam elevator yang jatuh bebas dalam medan gravitasi bumi dapat melepaskan benda dari keadaan diam dan benda tersebut akan tetap diam dalam kerangka pengamat tersebut. Meskipun medan gravitasi nyata tidak sama persis dengan medan gravitasi yang setara dengan kerangka dipercepat, prinsipnya tetap berlaku bahwa hukum gerak dalam kerangka inersial dalam medan gravitasi serupa dengan hukum gerak dalam kerangka jatuh bebas.

Implikasi dari prinsip kesetaraan ini memungkinkan untuk menghilangkan efek gravitasi dengan menggunakan kerangka acuan yang dipercepat dengan benar. Hal ini sejalan dengan konsep bahwa semua benda dalam medan gravitasi mengalami percepatan yang sama, independen dari ukuran atau massa mereka. Misalnya, sebuah benda dengan massa  $m$  jatuh dalam medan gravitasi dengan percepatan  $g$ . Dengan menggunakan koordinat  $(y, t)$ , persamaan gerak benda tersebut adalah:

$$m_1 \frac{d^2 y}{dt^2} = m_G g \quad (2.4)$$

Di sini,  $m_1$  adalah massa inersia,  $y$  adalah posisi vertikal,  $m_G g$  adalah massa gravitasi, dan  $g$  adalah percepatan gravitasi. Selanjutnya, dilakukan transformasi koordinat dengan:

$$y' = y - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{dan} \quad t' = t$$

pada koordinat  $(y', t')$  persamaan menjadi:

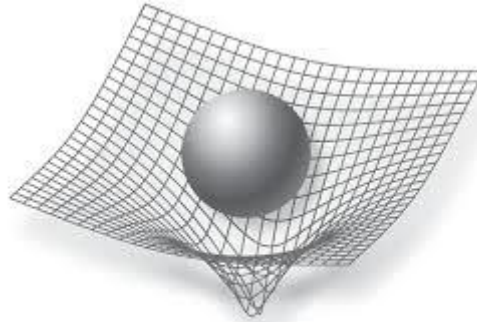
$$m_1 \frac{d^2 y'}{dt'^2} + m_1 g = m_G g \quad (2.5)$$

Karena massa inersia  $m$  sama dengan massa gravitasi  $m_G$ , maka:

$$m_1 \frac{d^2 y'}{dt'^2} = 0 \quad (2.6)$$

Ini berarti dapat memilih kerangka acuan inersial ( $y',r'$ ) untuk menghilangkan efek gravitasi pada kerangka ( $y, t$ ). Dengan kata lain, kerangka ( $y, t$ ) adalah kerangka dipercepat dengan percepatan  $g$  terhadap kerangka inersial ( $y',r'$ ) di daerah tanpa medan gravitasi. Contoh penerapannya adalah ketika sebuah sistem pengamatan jatuh bebas dalam medan gravitasi bumi, seperti elevator yang kabelnya putus. Seorang pengamat dalam elevator tersebut dapat melepaskan sebuah benda dari keadaan diam (dalam kerangka pengamat) dan benda tersebut akan tetap diam. Kesimpulannya adalah bahwa hukum gerak dalam kerangka inersial di daerah tanpa medan gravitasi sama dengan hukum gerak dalam kerangka jatuh bebas di dalam medan gravitasi. Namun, medan gravitasi nyata tidak sepenuhnya sama dengan medan gravitasi yang setara dengan kerangka dipercepat. Di tempat yang jauh dari sumber, medan gravitasi nyata selalu lenyap, sementara medan gravitasi yang setara dengan kerangka dipercepat selalu ada. Sebaliknya, medan gravitasi yang setara dengan kerangka dipercepat akan lenyap begitu percepatan kerangka dihapuskan, sedangkan medan gravitasi nyata tidak dapat dihilangkan oleh pemilihan kerangka acuan manapun. (Anugraha, 2011).

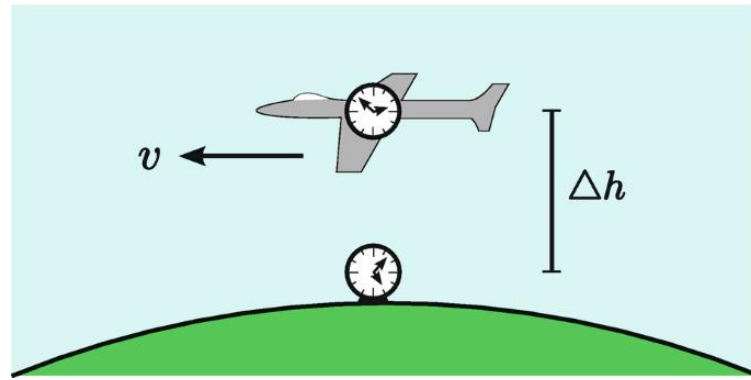
Analogi sumur gravitasi seperti gambar 2.1 sering digunakan untuk menggambarkan konsep ini. Dimisalkan ruang-waktu sebagai lembaran karet yang elastis. Ketika sebuah objek masif seperti bintang ditempatkan di atas lembaran ini, lembaran tersebut akan melengkung ke bawah membentuk cekungan. Objek-objek lain yang berada di dekatnya akan mengikuti jalur melengkung ini, yang diinterpretasikan sebagai gerak akibat gaya gravitasi. Dengan demikian, sumur gravitasi memberikan visualisasi yang intuitif tentang bagaimana massa melengkungkan ruang-waktu dan mempengaruhi gerak benda-benda di sekitarnya



Gambar 2. 1 Konsep Sumur Gravitasi (Sumber:Rezzolla, 2023)

Teori relativitas umum menawarkan perspektif yang jauh lebih radikal. Einstein mengajukan gagasan bahwa gravitasi bukanlah gaya, melainkan manifestasi dari kelengkungan ruang-waktu yang disebabkan oleh massa dan energi. Implikasi dari teori ini begitu luas dan mendalam, mengubah cara pandang waktu, ruang, dan bahkan nasib alam semesta. Pada bab ini, akan dijelaskan beberapa implikasi paling mencengangkan dari teori relativitas umum, termasuk dilatasi waktu, kontraksi panjang, pembengkokan ruang-waktu, dan fenomena eksotis seperti lubang hitam.

Salah satu implikasi paling terkenal dari teori relativitas umum adalah dilatasi waktu. Dalam relativitas khusus konsep ini menyatakan bahwa waktu berjalan lebih lambat bagi suatu objek yang bergerak dengan kecepatan sangat tinggi. Sedangkan, dalam teori relativitas umum, dilatasi waktu dijelaskan dalam eksperimen Hafele-Keating.



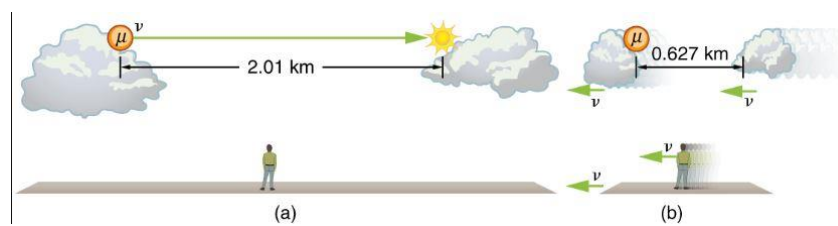
Gambar 2. 2 Ilustrasi Dilatasi Waktu (Sumber: Rafelski, J. 2022)

Eksperimen Hafele-Keating adalah salah satu bukti empiris paling awal yang mengkonfirmasi keberadaan dilatasi waktu. Dalam eksperimen ini, para peneliti membawa jam atom yang sangat akurat mengelilingi Bumi dengan pesawat terbang. Setelah perjalanan, waktu yang ditunjukkan oleh jam atom yang dibawa pesawat ternyata sedikit lebih lambat dibandingkan dengan jam atom yang tetap berada di bumi. Hal ini diakibatkan oleh perbedaan medan gravitasi antara pengamat dengan jam atom. Jam atom berada jauh dengan medan gravitasi, sehingga medan gravitasi pada jam atom melemah dan mengakibatkan waktu berjalan lebih cepat relatif terhadap pengamat yang berada didekat medan gravitasi kuat. (Hafele & Keating, 2005)

Selain dilatasi waktu, Teori Relativitas Khusus juga memprediksi fenomena yang disebut kontraksi panjang. Kontraksi panjang adalah sebuah fenomena di mana sebuah objek tampak lebih pendek ketika diamati oleh pengamat yang bergerak relatif terhadap objek tersebut. Fenomena ini merupakan salah satu konsekuensi dari teori relativitas khusus yang dikemukakan oleh Albert Einstein. (Sfarti, 2012)

Misalkan sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Bagi pengamat yang diam relatif terhadap benda tersebut, benda itu akan tampak lebih pendek dari panjang sebenarnya saat diam. Fenomena ini

seolah-olah benda tersebut mengalami penyusutan sepanjang arah geraknya. Fenomena ini mungkin terdengar aneh, namun telah dikonfirmasi secara eksperimental, meskipun efeknya baru terlihat signifikan pada kecepatan yang sangat tinggi, mendekati kecepatan cahaya. Kontraksi panjang memiliki implikasi penting dalam fisika partikel, di mana partikel-partikel subatomik dipercepat hingga kecepatan yang sangat tinggi dalam akselerator partikel.

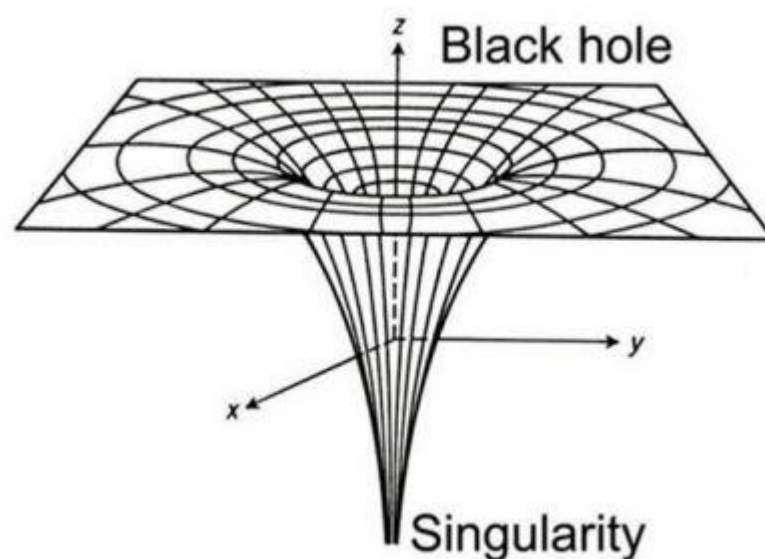


Gambar 2. 3 Ilustrasi Kontraksi Panjang (Sumber: phys.libretexts.org)

Dalam teori relativitas umum kontraksi panjang tidak hanya diakibatkan oleh kecepatan tetapi juga dipengaruhi oleh medan gravitasi dalam bentuk distorsi ruang-waktu. Ketika sebuah benda masif seperti bintang atau planet diletakkan di atas lembaran, lembaran tersebut akan melengkung ke bawah, membentuk semacam cekungan. Objek-objek lain yang berada di dekatnya akan mengikuti jalur melengkung ini, yang diinterpretasikan sebagai gerak akibat gaya gravitasi. Inilah yang menyebabkan planet-planet mengorbit bintang, dan cahaya pun dapat dibelokkan oleh gravitasi benda-benda masif, seperti yang telah dikonfirmasi oleh pengamatan gerhana matahari total. Konsep pembengkokan ruang-waktu ini juga menjadi dasar untuk memahami fenomena-fenomena eksotis seperti lubang hitam dan gelombang gravitasi.

Salah satu konsekuensi paling ekstrem dari pembengkokan ruang-waktu adalah keberadaan lubang hitam. Lubang hitam adalah objek dengan gravitasi yang sangat kuat sehingga tidak ada yang dapat melepaskan diri darinya, bahkan cahaya

sekalipun. Ketika sebuah bintang masif kehabisan bahan bakar nuklir, ia akan runtuh di bawah pengaruh gravitasi sendiri. Jika massa bintang cukup besar, runtuhannya ini akan berlanjut tanpa batas, membentuk sebuah singularitas—suatu titik di mana kepadatan materi menjadi tak terhingga dan hukum fisika yang dikenal tidak lagi berlaku. Di sekitar singularitas ini terdapat horizon peristiwa, batas di mana gravitasi begitu kuat sehingga tidak ada yang dapat melarikan diri. Segala sesuatu yang melewati horizon peristiwa akan terperangkap selamanya di dalam lubang hitam.



Gambar 2. 4 Lubang Hitam (Sumber: Marda, 2023)

### 2.2.1. Tensor dalam Teori Relativitas Umum

Dalam pandangan klasik, ruang dan waktu dianggap terpisah dan memiliki sifat yang absolut. Namun, Einstein merevolusi pemahaman ini dengan menyatukan ruang dan waktu menjadi sebuah entitas tunggal yang disebut ruang-waktu. Lebih jauh lagi, ia menunjukkan bahwa massa dan energi dapat melengkungkan ruang-waktu ini, mirip seperti bola bowling yang melengkungkan permukaan trampolin. Untuk mendeskripsikan kelengkungan ruang-waktu yang kompleks ini, para fisikawan mengembangkan alat matematika yang canggih, salah satunya adalah

tensor. Tensor adalah objek matematika yang dapat digeneralisasi dari konsep skalar (bilangan tunggal) dan vektor (besaran dengan arah). Dalam konteks TRU, tensor digunakan untuk menggambarkan berbagai sifat geometris dari ruang-waktu, termasuk kelengkungannya. Berikut adalah tensor-tensor yang digunakan untuk mendeskripsikan kelengkungan ruang-waktu:

Tensor Riemann-Christoffel, Ricci, dan Einstein adalah konsep-konsep yang penting dalam teori relativitas umum, ini adalah sebuah teori fisika yang dikembangkan oleh Albet Einstein.

Dalam sebuah buku karangan Sochi telah dijelaskan tensor tensor tersebut sebagai berikut. (Sochi, 2016)

#### **2.2.2.1. Simbol Christoffel**

Simbol Christoffel memiliki peranan yang sangat penting dalam berbagai cabang fisika dan matematika, terutama dalam teori relativitas umum dan geometri diferensial. Dalam relativitas umum, simbol-simbol ini digunakan untuk menggambarkan bagaimana ruang-waktu melengkung di sekitar objek bermassa dan bagaimana massa tersebut mempengaruhi gerak benda-benda lainnya. Selain itu, simbol Christoffel juga berfungsi dalam mendeskripsikan persamaan geodesik, yang merupakan lintasan terpendek atau terdekat antara dua titik dalam ruang lengkung.

Dalam geometri diferensial, simbol-simbol ini muncul ketika dilakukan perhitungan dalam sistem koordinat non-inersial, atau sistem yang tidak bergerak secara lurus dan seragam. Dengan menggunakan simbol-simbol ini, dapat dihitung bagaimana vektor berubah ketika dipindahkan di sepanjang permukaan yang melengkung, sesuatu yang sangat penting untuk mempelajari manifold dan struktur yang lebih kompleks. Jadi, simbol Christoffel memainkan peran kunci dalam banyak

perhitungan yang melibatkan geometri ruang-waktu dan struktur matematika lainnya yang melibatkan kelengkungan. (Nascimento, 2020)

Simbol Christoffel diklasifikasikan sebagai simbol jenis pertama dan simbol jenis kedua. Kedua jenis ini terhubung melalui operator penurunan dan peningkatan indeks. Kedua jenis simbol Christoffel adalah fungsi variabel dari koordinat secara umum.

Simbol-simbol Christoffel dari jenis pertama memegang peranan yang sangat penting dalam berbagai cabang matematika dan fisika. Keberadaan mereka menjadi kunci dalam memahami banyak fenomena kompleks, terutama yang melibatkan perubahan bentuk dan koordinat. Dalam fisika, khususnya, mereka sering muncul dalam konteks sistem mekanik benda kaku, di mana gerakan dan perubahan orientasi benda dianalisis secara mendalam. Simbol-simbol ini membantu menggambarkan bagaimana sebuah sistem dapat berubah atau bergerak tanpa mengubah struktur internalnya, sehingga menjadi dasar bagi pemodelan sistem dinamis yang melibatkan rotasi dan translasi. (Arczewski, 1986)

$$[ij, l] = \frac{1}{2}(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} + \partial_l g_{ij}) \quad (2.7)$$

Simbol Christoffel jenis kedua memiliki peran yang sangat penting dalam banyak cabang matematika dan fisika, khususnya dalam konteks geometri diferensial. Dalam geometri Riemannian, simbol ini menjadi elemen kunci untuk menggambarkan bagaimana ruang lengkung (atau manifold) berinteraksi dengan struktur afinnya. Melalui simbol Christoffel ini, bisa mendefinisikan koneksi afin yang konsisten, yang memungkinkan untuk menghitung perubahan vektor dalam ruang lengkung. Selain itu, mereka digunakan untuk menentukan integral yang invarian terhadap perubahan koordinat, yang sangat penting dalam teori relativitas

umum Einstein serta dalam berbagai aplikasi fisika teoretis lainnya. Dengan demikian, peran simbol ini tidak hanya terbatas pada matematika murni, tetapi juga meluas ke banyak aspek fisika modern. (Kline)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} + \partial_l g_{ij}) \quad (2.8)$$

### 2.2.2.2. Tensor Riemann

Tensor Riemann menggambarkan kelengkungan ruang-waktu dalam manifold Riemannian. Tensor Riemann memberikan informasi tentang bagaimana vektor-vektor berubah ketika diparalelkan sepanjang kurva dalam manifold tersebut. Tensor Riemann dalam konteks teori relativitas umum, memainkan peran penting dalam persamaan medan Einstein yang menghubungkan kelengkungan ruang-waktu dengan distribusi massa dan energi. (Das, 2007)

Tensor riemann adalah tensor berpangkat-4, yang juga disebut sebagai tensor kelengkungan Riemann dan tensor Riemann-Christoffel. Tensor ini memainkan peran penting dalam geometri secara umum dan dalam geometri non-Euclidean secara khusus. Tensor riemann didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{rk}^i - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{rl}^i \quad (2.9)$$

### 2.2.2.3. Tensor Ricci

Tensor Ricci adalah bagian penting dari analisis tensor yang digunakan untuk menggambarkan geometri ruang. Tensor Ricci juga didefinisikan sebagai kontraksi dari tensor Riemann, yang mengukur kelengkungan ruang. Dalam teori relativitas umum, terutama dalam persamaan medan Einstein, tensor Ricci menghubungkan distribusi massa dan energi dengan kerucut ruang-waktu. (Schouten, 2013)

Tensor Ricci dari jenis pertama diperoleh dengan mengontraksi indeks kontravarian dengan indeks kovarian terakhir dari tensor Riemann dari jenis kedua. Tensor Ricci jenis pertama dituliskan dalam persamaan berikut:

$$R_{ij} = R_{ji} \quad (2.10)$$

Tensor Ricci jenis kedua, juga dikenal sebagai tensor Ricci-dual atau versi transformasi kontravarian dari tensor Ricci, ditulis sebagai  $R_j^i$ . Tensor ini diperoleh dengan menaikkan indeks tensor Ricci jenis pertama  $R_{ij}$  menggunakan metrik. Tensor Ricci jenis kedua didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$R_j^i = g^{ik} R_{kj} \quad (2.11)$$

Berbeda dengan tensor Ricci jenis pertama yang menggunakan indeks kovarian, tensor Ricci jenis kedua menggunakan indeks kontravarian, yang memberikan sudut pandang berbeda dalam analisis kelengkungan ruang dalam relativitas umum dan geometri diferensial. Penggunaan tensor Ricci jenis kedua dapat memberikan wawasan yang lebih mendalam tentang struktur dan sifat manifold Riemannian.

#### 2.2.2.4. Skalar Ricci

Skalar Ricci diperoleh dengan menaikkan indeks subskrip tensor Einstein Ricci jenis pertama menggunakan operator peningkatan diikuti dengan pemendekan dua indeks.

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (2.12)$$

Skalar Ricci digunakan untuk menganalisis pengaruh konstanta kosmologi terhadap model alam semesta. Jurnal ini menjelaskan bagaimana skalar Ricci, yang

merupakan kontraksi dari tensor Ricci, berperan dalam persamaan medan Einstein yang menghubungkan distribusi massa dan energi dengan kerucut ruang-waktu. Dengan menggunakan skalar Ricci, penulis membantu memodelkan alam semesta dan membandingkan hasil model dengan dan tanpa konstanta kosmologi, sehingga menunjukkan pengaruhnya terhadap evolusi alam semesta. (Ramadhan & Subagyo, 2016)

### 2.2.2.5. Tensor Einstein

Tensor Einstein  $G$  adalah tensor *rank-2* yang didefinisikan dalam hal tensor Ricci  $R$  dan skalar lengkungan Ricci sebagai berikut:

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn} \quad (2.13)$$

Tensor Einstein menjelaskan tensor simetris dan bebas divergen yang merupakan konsekuensi dari tensor metrik  $g_{mn}$  beserta derivasinya hingga dua kali. Karena baik tensor Ricci maupun tensor metrik simetris, tensor Einstein juga simetris. Divergensi tensor Einstein menghilang di semua titik ruang untuk setiap metrik Riemannian. (Lovelock, 1971)

### 2.2.1. Persamaan Gravitasi Einstein

Sebelum menyelami kompleksitas persamaan medan Einstein, mari mulai dengan fondasi yang lebih sederhana. Hukum Coulomb adalah salah satu fondasi dalam listrik. Hukum ini menjelaskan bagaimana muatan listrik saling berinteraksi. Sederhananya, muatan listrik yang sejenis akan tolak-menolak, sedangkan muatan yang berbeda jenis akan tarik-menarik. Potensial listrik adalah besaran skalar yang

menunjukkan energi potensial per satuan muatan di suatu titik dalam medan listrik. Konsep ini sangat berguna untuk menganalisis gerak muatan dalam medan listrik. (Halliday, Resnick, & Walker, 2013)

Dalam mekanika klasik, Newton memberikan hukum gravitasi universal yang menyatakan bahwa setiap partikel di alam semesta menarik partikel lain dengan gaya yang sebanding dengan hasil kali massanya dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak di antara keduanya. Persamaan potensial gravitasi Newton pun mengikuti pola yang serupa dengan persamaan Coulomb, hanya saja konstanta proporsionalitasnya berbeda.

Dalam hukum coulomb , terdapat persamaan potensial listrik berbentuk  $\Delta^2\phi = -4\pi k\rho(\vec{r})$ . Dengan mengacu pada persamaan tersebut, maka persamaan potensial medan gravitasi newton berbentuk  $\Delta^2\phi = -4\pi G\rho(\vec{r})$ .

Potensial gravitasi ini kemudian diperluas menggunakan geometri riemman menjadi kelengkungan ruang-waktu yang tertuang dalam tensor einstein, yaitu:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.14)$$

Persamaan (2.13) adalah inti dari teori relativitas umum yang menghubungkan geometri ruang-waktu dengan distribusi materi dan energi. Tensor energi-momentum  $G_{\mu\nu}$  mencerminkan bagaimana massa dan energi mempengaruhi kelengkungan ruang-waktu, yang diwakili oleh tensor Ricci  $R_{\mu\nu}$  dan skalar Ricci  $R$ . Tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  berfungsi untuk mendefinisikan jarak dan sudut dalam ruang-waktu, menunjukkan bagaimana geometri tersebut terdistorsi oleh kehadiran massa.

Ketika ketetapan kosmologi  $\Lambda$  disertakan, persamaan menjadi sebagai berikut:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Ketetapan kosmologi menambahkan komponen yang menggambarkan efek energi gelap, berfungsi untuk menjelaskan percepatan perluasan alam semesta. Kontribusi  $-\Lambda g_{\mu\nu}$  menunjukkan bahwa energi gelap bertindak secara repulsif, berbeda dari interaksi gravitasi materi biasa.

Tensor Einstein bagian integral dari persamaan medan Einstein yang menghubungkan distribusi massa dan energi dengan kelengkungan ruang-waktu. Ketetapan kosmologi yang dimasukkan dalam persamaan medan Einstein, memainkan peran penting dalam mempengaruhi evolusi dan ekspansi alam semesta. Ketetapan ini dapat ditafsirkan sebagai representasi dari energi vakum atau energi gelap yang menyebabkan percepatan ekspansi kosmos. Buku ini menyediakan penjelasan komprehensif tentang bagaimana tensor Einstein, bersama dengan ketetapan kosmologi, membantu untuk memahami struktur dan dinamika alam semesta dari skala besar. (Wesson, 2014)

Dikarenakan kelengkungan ruang waktu sebanding dengan tensor energi momentum, maka persamaan (2.14) akan menjadi seperti berikut:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Dengan  $\kappa$  adalah tetapan positif yang berhubungan dengan  $G$ . jika dilakukan kontraksi, diperoleh

$$R = \kappa T \quad (2.17)$$

Berdasarkan persamaan diatas, dapat ditentukan persamaan hukum gravitasi einstein menjadi:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right) \quad (2.18)$$

Persamaan (2.17) menjelaskan tentang hukum gravitasi Einstein yang menggantikan teori gravitasi Newton. Persamaan ini menjelaskan bahwa massa dan

energi mempengaruhi struktur ruang-waktu, yang kemudian menyebabkan benda-benda bergerak di bawah pengaruh gravitasi. Berbeda dengan hukum gravitasi Newton yang menyatakan bahwa setiap dua benda dengan massa saling menarik dengan gaya yang sebanding dengan massa mereka dan berbanding terbalik dengan kuadrat jaraknya, hukum gravitasi Einstein lebih kompleks dan mencakup konsep kerucut ruang-waktu. Teori Einstein ini menjelaskan fenomena seperti perubahan frekuensi cahaya saat melewati medan gravitasi, efek relativitas dalam sistem satelit GPS, dan dinamika orbit bintang neutron, memberikan pemahaman yang lebih mendalam dan akurat tentang bagaimana gravitasi bekerja dalam skala besar dan kecepatan tinggi. (Clifton, 2017)

Jika tetapan kosmologi disertakan kedalam persamaan (2.17) maka persamaan akan berbentuk sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Salah satu kelebihan dari teori relativitas umum adalah kemampuannya untuk secara konsisten mengurangi diri menjadi hukum gravitasi Newton di dalam medan gravitasi yang lemah, yang dikenal sebagai asas korespondensi. Ini berarti dalam ruang-waktu yang terpengaruh oleh gravitasi, di sini menggunakan geometri Riemann, sedangkan dalam ruang-waktu tanpa gravitasi, yang digunakan geometri Euclidean. Dalam ruang Euclidean, digambarkan metrik ruang-waktu dengan metrik Minkowski.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.20)$$

Metrik Minkowski sendiri dijelaskan sebagai metrik ruang-waktu datar yang digunakan dalam teori relativitas khusus untuk menggambarkan bagaimana jarak dan waktu saling terkait dalam ruang-waktu. Metrik ini berasal dari perilaku

gelombang dan membantu memahami konsep-konsep seperti simultaneity, kontraksi panjang, dan penyempurnaan waktu. (Schmitz, 2022)

Dalam medan gravitasi yang lemah, metrik ruang-waktu hampir tidak berbeda jauh dari bentuk yang diberikan sebelumnya. Tensor metrik  $\mu\nu g$  dalam kondisi gravitasi yang lemah dapat didekati dengan bentuk yang serupa.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

Dalam medan gravitasi lemah, persamaan geodesiknya menjadi:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu\right)_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.22)$$

Melalui

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.23)$$

Maka akan menjadi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu\right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.24)$$

Dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  sama dengan 0

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + (\Gamma_{00}^\mu) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.25)$$

Karena medan tersebut bersifat stasioner, turunan  $g_{\mu\nu}$  terhadap  $t$  lenyap

$$(\Gamma_{00}^\mu) = -\frac{1}{2}(g^{\mu\nu})(\partial_\nu h_{00}) \quad (2.26)$$

Sehingga diperoleh percepatan gerak benda:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (2.27)$$

Dengan menggunakan

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad h_{00} = -2\phi + \text{tetapan},$$

$$g_{00} = -(1 + 2\phi), \quad g^{00} = -(1 + 2\phi)^{-1} \quad (2.28)$$

Ditinjaulah bentuk tensor riemann-christoffel dalam medan lemah ebagai berikut:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial y^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z^{\beta}} \right) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial h_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.29)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta} (\partial_0 \partial_0 h_{\nu\beta} + \partial_{\nu} \partial_{\beta} h_{00} - \partial_0 \partial_{\beta} h_{0\nu} - \partial_0 \partial_{\nu} h_{0\beta}) \quad (2.30)$$

Jika distribusi materi bersifat stasi maka  $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$  dan  $R_{00}$  menjadi :

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta} \partial_{\nu} \partial_{\beta} h_{00} \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3) h_{00} \\ &= \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$R_{00} = -\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho \quad (2.32)$$

Karena distribusi materi bersifat statik maka,

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} \quad \text{dan} \quad V_{\mu} = (-1, \vec{0}) \quad (2.33)$$

Sehingga yang tersisa hanya  $T_{00} = \rho$ .

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} T_{00} = -\frac{\rho}{1 + 2\phi} \quad (2.34)$$

Setelah melewati beberapa perhitungan diatas persamaan  $R_{00}$  menjadi:

$$R_{00} = \kappa \left( \frac{1}{2} g_{00} T - T_{00} \right) \quad (2.35)$$

$$= -\frac{1}{2}\kappa\rho$$

Dimana :  $\kappa = 8\pi G$

Sehingga ditemukan persamaan gravitasi einstein sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.36)$$

## 2.3 Lubang Hitam Schwarzschild

### 2.3.1. Asumsi - asumsi dasar lubang hitam Schwarzschild

Solusi lubang hitam Schwarzschild ini pertama kali ditemukan oleh astronom Karl Schwarzschild pada tahun 1916 dan merupakan solusi non-trivial pertama dari persamaan medan Einstein. Dalam vakum, persamaan medan Einstein menjadi  $R_{\mu\nu} = 0$ , yang menghasilkan solusi Schwarzschild yang menggambarkan ruang-waktu sferis simetris. Solusi ini menunjukkan adanya lintasan acak yang satu arah, yang merupakan karakteristik utama dari lubang hitam Schwarzschild. (Romano, 2019)

Metrik Schwarzschild mengasumsikan bahwa sistem yang diamati memiliki simetri bola, artinya sifat fisiknya tidak berubah ketika dilihat dari sudut mana pun di sekitarnya. Untuk mencapai simetri ini dalam pemodelan matematika, metrik tersebut menggunakan sistem koordinat bola. Dalam sistem koordinat ini, jarak antara dua titik dalam ruang diukur menggunakan jari-jari ( $r$ ), sudut polar ( $\theta$ ), dan sudut azimuthal ( $\varphi$ ), sehingga mencakup semua arah di sekitar titik pusat. Saat Ruang-waktu dalam solusi Schwarzschild bersifat statik dan bersimetri bola. Maka, tidak ada perubahan dalam waktu (tidak ada dinamika temporal), dan tidak ada arah yang diistimewakan (tidak ada momentum linier atau momentum sudut).

Momentum linier atau sudut akan menyebabkan ruang-waktu tidak statik atau simetris bola, sehingga sifat statik dan simetri bola ini menunjukkan bahwa solusi Schwarzschild tidak melibatkan momentum. (Hawking & Ellis, 1973)

Ketika memformulasikan metrik Schwarzschild, istilah-istilah seperti  $r^2$  dan  $r^2 \sin^2 \theta$  muncul dalam ekspresi matematika untuk mencerminkan simetri bola ini. Ini memastikan bahwa metrik memperlakukan semua arah dengan cara yang sama, mencerminkan sifat simetri bola dari sistem.

Selanjutnya, solusi Schwarzschild juga didasarkan pada asumsi bahwa ruang di sekitar objek tersebut kosong, atau dalam istilah lain, tidak ada materi atau energi yang hadir di dalamnya ( $T_{\mu\nu} = 0$ ). Dalam konteks relativitas umum, ini dikenal sebagai kondisi vakum. Dengan mengasumsikan kondisi vakum, solusi hanya perlu memecahkan persamaan lapangan Einstein yang merupakan persamaan dasar relativitas umum, tanpa harus memperhitungkan kontribusi materi atau energi. Solusi Schwarzschild hanya relevan untuk pengamat eksternal di luar horizon lubang hitam, di mana tidak ada materi atau energi, sehingga ruang di luar horizon tersebut adalah ruang vakum. Dalam ruang vakum ini, hanya ada efek medan gravitasi yang disebabkan oleh massa  $M$  dari lubang hitam, tanpa pengaruh materi atau energi lainnya. (Misner, Thorne, & Wheeler, 1973)

Selain itu, solusi Schwarzschild juga bergantung pada asumsi bahwa sistem adalah statis dan tidak berubah terhadap waktu (time invariant), yang berarti tidak ada perubahan dalam geometri ruang-waktu seiring berjalannya waktu. Hal ini dibuktikan dengan Birkhoff's theorem, yang menyatakan bahwa solusi untuk ruang-waktu luar objek sferis simetris dalam keadaan vakum adalah unik dan hanya bergantung pada jarak dari pusat objek. Ini berarti bahwa elemen metrik, seperti  $g_{00}$

dan  $g_{11}$ , yang mengatur sifat waktu dan ruang, hanya bergantung pada jarak radial ( $r$ ) dari pusat objek dan tidak berubah terhadap waktu. (Blinn, 2017)

### 2.3.2. Metrik Schwarzschild

Persamaan medan Einstein adalah dasar dari teori relativitas umum, yang menghubungkan kelengkungan ruang-waktu dengan distribusi materi dan energi di dalamnya. Persamaan ini secara matematis dinyatakan sebagai:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Dalam konteks bumi, yang memiliki massa dan tekanan, tensor momentum-energi di dalam bumi tidaklah nol. Namun, di luar bumi, dapat diasumsikan bahwa ruang-waktu berada dalam kondisi hampiran vakum, yang berarti tensor momentum-energi  $T_{\mu\nu}$  di luar bumi adalah nol. Oleh karena itu, persamaan medan Einstein di luar bumi menjadi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.38)$$

Di sini,  $R_{\mu\nu}$  adalah tensor Ricci,  $g_{\mu\nu}$  adalah metrik, dan  $R$  adalah skalar Ricci (jejak dari tensor Ricci).

Untuk menaikkan indeks pada tensor Ricci  $R_{\mu\nu}$ , digunakan metrik invers  $g_{\mu\nu}$  yang memenuhi persamaan berikut:

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = 0 \quad (2.38)$$

Langkah berikutnya adalah menyederhanakan persamaan. (2.38) menjadi:

$$R_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2}R\delta_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (2.39)$$

diketahui bahwa  $\delta_{\mu}^{\mu}=4$  untuk ruang-waktu berdimensi 4. Maka substitusi ini ke persamaan (2.39) menghasilkan:

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{2}R4 &= 0 \\ R - 2R &= 0 \\ R &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Maka skalar riccie nya adalah 0. Sehingga untuk energi vakum persamaan medan einstein disederhanakan menjadi hanya tensor riccie yang bernilai 0, yang biasa disebut ruang waktu datar

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.41}$$

Sekarang vakum di luar massa masih dalam ruang waktu melengkung karena tensor kelengkungan riemann di sini tidak sama dengan 0. Lalu di ambil persamaan di atas dan menyelesaikan komponen metrik ruang waktu 4x4 yang menggambarkan ruang waktu melengkung. Maka digunakanlah metrik di bawah ini.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{2.42}$$

Nilai c sementara diisikan dengan 1, dan ditinjau metrik untuk medan gravitasi isotropik statik. Yang dalam hal ini untuk komponen  $g_{tt}$  dan  $g_{rr}$  hanya menggunakan fungsi radial, sehingga persamaan diatas menjadi:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{2.43}$$

Selanjutnya determinan metrik yang menyajikan komponen tensor metrik adalah  $g$  yang bernilai

$$g = -A(r)B(r)r^4 \sin^2 \theta \tag{2.44}$$

Sehingga elemen volume invariannya

$$dV = \sqrt{g} dr d\theta d\phi = \sqrt{A(r)B(r)} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (2.45)$$

Hubungan affine (affine connection) atau lambang Christoffel dapat dihitung dengan menggunakan formula

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) \quad (2.46)$$

Dengan rumus di atas dapat dihitung komponen-komponen lambang Christoffel yang tak lenyap bernilai

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{r}{A(r)}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2\theta}{A(r)}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} &= \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot\theta \\ \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \end{aligned}$$

Lalu, dibutuhkan besaran tensor Ricci yang dirumuskan sebagai

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \quad (2.47)$$

Dari lambang-lambang Christoffel di atas, komponen-komponen tensor Ricci diberikan sebagai

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{B(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} \\ &= -B'' 2BA + (b')^2 Ar + (A)'rB + (A)'4B^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{1}{2} \frac{r}{A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)} \quad (2.49)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{A(r)} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} \\
&= 2BrBAB'' + \partial rAB'Br = B'4AB - (B')^2 Ar
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Dalam metrik sferis, ada hubungan antara komponen  $R_{\theta\theta}$  dan  $R_{\phi\phi}$  dari tensor Ricci. Khususnya, hubungan geometris untuk koordinat sferis memberikan:

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \tag{2.52}$$

Ini adalah konsekuensi dari simetri sferis dan sifat koordinat sudut  $\phi$  dan  $\theta$ , di mana kelengkungan dalam arah azimutal  $\phi$  bergantung pada kelengkungan arah poloidal  $\theta$  melalui faktor  $\sin^2 \theta$ .

Dalam metrik sferis, dapat ditulis hubungan antara komponen  $R_{rr}$  (komponen radial dari tensor Ricci) dan  $R_{tt}$  (komponen temporal dari tensor Ricci) dalam bentuk persamaan diferensial. Hubungan ini dapat diformulasikan sebagai:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \tag{2.53}$$

Jika berada di ruang vakum, maka  $R_{\mu\nu} = 0$ , termasuk untuk komponen  $R_{rr}$  dan  $R_{tt}$ . Dengan mensubstitusi  $R_{\mu\nu} = 0$  ke dalam persamaan (2.53), diperoleh:

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \tag{2.54}$$

Integrasi sederhana menunjukkan bahwa produk  $A(r)B(r) = \text{konstan}$ .

Ini adalah bentuk yang umum muncul dalam solusi metrik untuk ruang vakum dengan simetri bola. Dalam kasus khusus Schwarzschild, biasanya menetapkan konstanta ini sebagai 1 (dengan melakukan normalisasi yang sesuai).

Selanjutnya syarat batas untuk A dan B adalah bahwa untuk  $r \rightarrow \infty$ , bentuk metrik isotropik statik tersebut harus kembali ke bentuk metrik Minkowski dalam koordinat bola, yang berarti

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad (2.55)$$

Dengan syarat batas ini hubungan antara  $A(r)$  dan  $B(r)$  dapat dituliskan secara lebih eksplisit dalam bentuk

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} \quad (2.56)$$

Adapun komponen tensor Riccinya menjadi

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r = B(r) \quad (2.57)$$

Selanjutnya, ditinjau komponen  $R_{rr}$  dari tensor Ricci. Persamaan yang diberikan adalah:

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} \frac{B'}{rB} = \frac{R_{\theta\theta}'}{2rB} \quad (2.58)$$

Persamaan (2. 59) menjelaskan bagaimana kelengkungan radial  $R_{rr}$  terhubung dengan turunan kedua dari fungsi metrik  $Br$  serta bagaimana ini berhubungan dengan komponen  $R_{\theta\theta}$ , yang menggambarkan kelengkungan sudut.

Dengan mengingat bahwa  $R_{\theta\theta}=0$  (karena bekerja dalam ruang vakum, di mana tidak ada sumber materi atau energi), maka persamaan (2.57) menghasilkan kondisi:

$$rB' + B = \frac{d}{dr}(rB) = 1 \quad (2.59)$$

Solusi persamaan diferensial di atas adalah

$$rB(r) = r + \text{tetapan} \quad (2.60)$$

Untuk menentukan nilai tetapan integrasi di atas, diingatbaha untuk jarak yang cukup jauh dari pusat massa  $M$  yang terletak di pusat koordinat  $O$ , komponen  $g_{tt} = -B$  harus bernilai mendekati  $-(1 + 2U)$  dengan  $U$  adalah potensial

Newtonian benda bermassa  $M$  pada jarak  $r$  yang bernilai  $U = -\frac{GM}{r}$ . Jadi nilai tetapan integrasi di atas adalah  $-2GM$ , sehingga

$$B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \quad (2.61)$$

Akhirnya bentuk metrik isotropik statik untuk ruang-waktu 4 dimensi berkoordinat bola adalah sebagai berikut. (Anugraha, 2011)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.63)$$

### 2.3.3. Integrasi Mengenai Teori Relativitas Umum

Dalam memahami keteraturan dan keindahan alam semesta, kita sering kali merujuk pada prinsip-prinsip fisika yang diungkapkan melalui teori relativitas umum. Teori ini menjelaskan bagaimana gravitasi dan interaksi antara objek-objek besar di ruang angkasa membentuk struktur dan pergerakan mereka. Surah Ya-Sin (36:38-40) memberikan gambaran yang sejalan dengan pemahaman ini, di mana Allah SWT menegaskan bahwa matahari dan bulan bergerak dalam orbitnya masing-masing sesuai dengan ketetapan-Nya yang sempurna. Ayat-ayat ini mengajak kita untuk merenungkan bagaimana hukum-hukum alam yang ditetapkan oleh Allah berfungsi dalam konteks yang lebih luas, mencerminkan kebesaran-Nya sebagai Pencipta. Dengan demikian, Surah Ya-Sin menjadi pengingat akan keteraturan dan keindahan ciptaan-Nya yang harmonis.

سُبْحٰنَ الَّذِيْ خَلَقَ الْاَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْاَرْضُ وَمِنْ اَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُوْنَ (۳۶) وَاٰیةٌ لَّهُمْ لَيْلٌ نَّسْلَخُ مِنْهُ النَّهَارَ فَاِذَا هُمْ مُظْلَمُوْنَ (۳۷) وَالشَّمْسُ تَجْرِيْ لِمُسْتَقَرٍّ لِّهَا ذٰلِكَ تَقْدِيْرُ الْعَزِيْزِ الْعَلِيْمِ (۳۸)

*"Dan matahari berjalan di tempat peredarannya. Demikianlah ketetapan Yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui. Dan bagi bulan telah Kami tetapkan*

*tempat-tempatnya, sehingga (setelah dia sampai ke tempat terakhir) kembalilah dia seperti bentuk tandan yang tua. Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malam pun tidak dapat mendahului siang. Dan masing-masing beredar pada garis edarnya."*

Ayat ini menunjukkan bahwa pergerakan matahari dan bulan tidak hanya teratur, tetapi juga sesuai dengan ketentuan Allah yang sempurna. Hal ini mencerminkan bagaimana hukum fisika, terutama yang berkaitan dengan relativitas dan pergerakan dalam ruang-waktu, mendasari interaksi antara objek-objek astronomis ini.

## BAB III

### PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN TERDEFORMASI- $\alpha$

#### 3.1 Komponen Teori Relativitas Umum

##### 3.1.1. Simbol Christoffel

Simbol Christoffel adalah elemen fundamental dalam geometri diferensial dan teori relativitas umum yang menggambarkan bagaimana vektor berubah saat diparalelkan sepanjang kurva dalam manifold. Secara khusus, mereka merupakan komponen dari koneksi metrik yang menyediakan cara untuk menentukan turunan kovarian vektor medan. Ini adalah esensi dari bagaimana geometri Riemannian dan semi-Riemannian memodelkan kelengkungan dan perubahan dalam ruang-waktu.

$$[ij, k]^\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^\alpha (g_{ik})}{\partial x^{j\alpha}} + \frac{\partial^\alpha (g_{ik})}{\partial x^{i\alpha}} - \frac{\partial^\alpha (g_{ij})}{\partial x^{k\alpha}} \right) \quad (3.1)$$

$g_{ik}$  adalah komponen tensor metrik yang memberikan informasi tentang geometri ruang, dalam  $\frac{\partial^\alpha (g_{ik})}{\partial x^{j\alpha}}$  ditunjukkan bahwa turunan fraksional diterapkan dalam setiap operasi turunan. Dimana dalam hal ini  $\alpha$  dapat bernilai  $0 < \alpha \leq 1$ .

Simbol Christoffel ini memberi informasi tentang bagaimana basis vektor berubah disekitar titik tertentu dalam geometri diferensial. Persamaan (3. 1) ini memberikan cara untuk menghitung komponen simbol Christoffel dengan memperhitungkan turunan parsial dari tensor metrik.

$$[\Gamma_{jk}^i]^\alpha = g^{is} [jk, s]^\alpha = \frac{1}{2} g^{is} \left( \frac{\partial^\alpha (g_{is})}{\partial x^{k\alpha}} + \frac{\partial^\alpha (g_{ks})}{\partial x^{j\alpha}} - \frac{\partial^\alpha (g_{jk})}{\partial x^{s\alpha}} \right) \quad (3.2)$$

$g_{is}$  adalah komponen dari invers tensor metrik, yang diperlukan untuk Persamaan (3. 2) menunjukkan bahwa simbol Christoffel dapat dihitung dengan

melibatkan tensor metrik dan turunannya, dimana dalam hal ini turunan yang digunakan juga menggunakan aturan turunan fraksional conformable yang melibatkan paramter  $\alpha$ , serta invers dari tensor metrik. menghitung simbol christoffel jenis kedua.

$$i, j, k = 0, 1, \dots, N, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.3)$$

$$[ij, k]^\alpha = [ji, k]^\alpha \quad (3.4)$$

$$[\Gamma_{jk}^i]^\alpha = [\Gamma_{kj}^i]^\alpha \quad (3.5)$$

Meski menggunakan turunan frasioanl conformable persamaan (3.5) menyatakan bahwa simbol Christoffel memenuhi sifat komutatif, yaitu urutan indeks dalam simbol Christoffel dapat ditukar tanpa mengubah hasilnya.

$$[ij, k]^\alpha = g_{ks} [\Gamma_{ij}^s]^\alpha \quad (3.6)$$

Persamaan (3. 6) ini menghubungkan komponen simbol Christoffel dari jenis pertama dengan simbol Christoffel dari jenis kedua. Menunjukkan bagaimana struktur tensor metrik terhubung dengan perubahan vektor.

$$\frac{\partial^\alpha (g_{ij})}{\partial x^{k\alpha}} = -g^{is} [\Gamma_{sk}^j]^\alpha - g^{js} [\Gamma_{sk}^i]^\alpha \quad (3.7)$$

Pada persamaan (3. 7) adalah hubungan antara turunan dari tensor metrik dan simbol Christoffel yang menunjukkan bahwa turunan dari tensor metrik dapat diekspresikan dengan simbol christoffel. Hal ini menunjukkan interaksi antara geometri dan perubahan struktur ruang.

$$[\Gamma_{ij}^i]^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{j\alpha}} (\ln \sqrt{g}) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{j\alpha}} (\ln \sqrt{-g}) \quad (3.8)$$

$g$  adalah determinan dari tensor metrik. Turunan fraksional ini menunjukkan bagaimana informasi geometris terakumulasi dalam struktur ruang. Menghitung

turunan logaritma dari determinan memberikan wawasan tentang bagaimana volume dan ukuran ruang berinteraksi dengan geometri.

Semua persamaan ini membangun kerangka untuk memahami bagaimana geometri ruang berinteraksi dengan konsep perubahan aturan turunan fractional conformable. Simbol christoffel bertindak sebagai penghubung utama , yang memungkinkan untuk menghubungkan sifat sifat geometris dengan dinamika vektor dan perubahan dalam struktur ruang.

### 3.1.2. Tensor Kelengkungan

Tensor kelengkungan adalah tensor yang memberikan cara untuk mengukur bagaimana ruang atau ruang-waktu melengkung di sekitar titik tertentu, dengan menggambarkan bagaimana vektor di dalam manifold berubah saat diparalelkan sepanjang berbagai lintasan. Konsep ini memungkinkan untuk menjelaskan fenomena gravitasi dalam kerangka relativitas umum dan mengeksplorasi sifat geometris manifold Riemannian.. Pemahaman yang solid tentang tensor kelengkungan akan memberikan landasan yang kuat untuk memahami konsep-konsep lanjutan dalam fisika dan matematika teoretis.

$$[T_{r;m}]^\alpha = \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{m\alpha}} - [\Gamma_{rm}^p]^\alpha T_p \quad (3.9)$$

Persamaan (3. 9) ini menyatakan turunan kovarian pertama dari tensor  $T_r$  dengan menghitungnya di sepanjang arah  $x^\mu$ . Komponen pertama,  $\frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{m\alpha}}$  adalah turunan parsial dengan menggunakan turunan fraksional conformable dari  $T_r$  terhadap koordinat  $x^m$ . Komponen kedua,  $[\Gamma_{rm}^p]^\alpha T_p$ , adalah koreksi geometris yang menggambarkan efek kelengkungan ruang menggunakan simbol Christoffel, yang menggambarkan bagaimana vektor berubah di ruang melengkung.

$$\begin{aligned}
[T_{r;m}]_n^\alpha &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} \left( \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{m\alpha}} - [\Gamma_{rm}^p]^\alpha T_p \right) - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \left( \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{m\alpha}} - [\Gamma_{qm}^p]^\alpha T_p \right) \\
&\quad - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \left( \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{q\alpha}} - [\Gamma_{rq}^p]^\alpha T_p \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Persamaan (3. 10) adalah turunan kovarian kedua dari tensor  $T_r$  yang dihitung sepanjang koordinat  $x^n$  dan  $x^\mu$ . Persamaan ini mengekspresikan perubahan tensor ketika dihitung secara kovarian di dua arah.

Lalu dilanjutkan perhitungannya sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
[T_r]_{mn}^\alpha &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} \left( \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{m\alpha}} \right) - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha T_p - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{n\alpha}} \\
&\quad - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{m\alpha}} - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha [\Gamma_{qm}^p]^\alpha T_p - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{q\alpha}} \\
&\quad - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha [\Gamma_{rq}^p]^\alpha T_p
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
[T_r]_{nm}^\alpha &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} \left( \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{n\alpha}} \right) - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha T_p - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{m\alpha}} \\
&\quad - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{n\alpha}} - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha [\Gamma_{qn}^p]^\alpha T_p - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_r}{\partial x^{q\alpha}} \\
&\quad - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha [\Gamma_{rq}^p]^\alpha T_p
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&[T_r]_{mn}^\alpha - [T_r]_{nm}^\alpha \\
&= - \left\{ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha - [\Gamma_{rn}^p]^\alpha [\Gamma_{qm}^p]^\alpha - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha \right. \\
&\quad \left. - [\Gamma_{rm}^p]^\alpha [\Gamma_{qn}^p]^\alpha \right\} T_p - [\Gamma_{rm}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{n\alpha}} - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{m\alpha}} \\
&\quad + [\Gamma_{rn}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{m\alpha}} + [\Gamma_{rm}^q]^\alpha \frac{\partial^\alpha T_q}{\partial x^{n\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$[T_r]_{mn}^\alpha - [T_r]_{nm}^\alpha = [R_{rmn}^p]^\alpha T_p \tag{3.13}$$

Persamaan (3.14) adalah definisi tensor kelengkungan Riemann  $R_{rmn}^p$ . Hal ini menyatakan bahwa perbedaan antara dua turunan kovarian tensor  $T_r$  dapat

dinyatakan dalam bentuk tensor Riemann. Tensor Riemann  $[R_{rmn}^p]^\alpha$  menggambarkan sifat kelengkungan ruang: bagaimana ruang "melengkung" atau "membelok" dalam dua arah yang berbeda dan bagaimana perubahannya saat turunan fraksional conformable digunakan.

$$[R_{rmn}^p]^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha + [\Gamma_{rn}^p]^\alpha [\Gamma_{qm}^p]^\alpha - [\Gamma_{rm}^p]^\alpha [\Gamma_{qm}^p]^\alpha \quad (3.14)$$

Persamaan (3.15) adalah definisi eksplisit dari tensor kelengkungan Riemann dalam hal simbol Christoffel. Istilah pertama dan kedua adalah turunan parsial dari simbol Christoffel, yang menggambarkan bagaimana koneksi geometris (simbol Christoffel) berubah dalam dua arah. Istilah ketiga dan keempat menggambarkan interaksi antara simbol Christoffel itu sendiri, memperhitungkan bagaimana perubahan dalam dua arah  $m$  dan  $n$  berinteraksi satu sama lain.

$$[R_{rmn}^p]^\alpha = -[R_{rnm}^p]^\alpha \quad (3.15)$$

Untuk persamaan (3.16) ini menunjukkan antisimetri dari tensor kelengkungan Riemann. Artinya, jika ditukar dua indeks  $m$  dan  $n$ , tanda dari tensor berubah. Hal ini adalah sifat penting dari tensor kelengkungan, yang mencerminkan bahwa perubahan dalam dua arah yang berbeda bersifat berlawanan dalam pengaruhnya.

$$[R_{rmn}^p]^\alpha = [R_{mnr}^p]^\alpha + [R_{nrm}^p]^\alpha = 0 \quad (3.16)$$

Persamaan (3.17) ini adalah identitas Bianchi, sebuah sifat penting dari tensor kelengkungan Riemann. Identitas ini mengungkapkan hubungan simetri antara komponen-komponen tensor Riemann. Dalam fisika, identitas ini sangat penting karena memainkan peran dalam persamaan medan Einstein dan memastikan

bahwa kelengkungan ruang waktu terkait secara langsung dengan distribusi materi dan energi.

Parameter  $\alpha$  dalam konteks tensor kelengkungan, seperti tensor Riemann, biasanya mewakili orde dari turunan atau dimensi tensor. Perubahan dalam parameter  $\alpha$  dapat memengaruhi sifat kelengkungan tensor, memberikan informasi tentang perubahan yang lebih halus dalam geometri ruang. Selain itu,  $\alpha$  juga dapat berkaitan dengan dimensi fisik dalam teori medan atau ruang waktu, di mana kelengkungan ruang waktu bergantung pada distribusi materi dan energi.

Di sisi lain, turunan fraksional konformal memperkenalkan pendekatan yang lebih kompleks dalam analisis kelengkungan, memungkinkan untuk menangani fenomena non-linear dan sistem dengan sifat fraktal. Penggunaan turunan fraksional dalam konteks tensor kelengkungan Riemann dapat mengkaji bagaimana kelengkungan dipengaruhi oleh sifat-sifat non-homogen dan dinamis dari ruang.

### 3.1.3. Tensor Riemann

Tensor Riemann adalah tensor yang menggambarkan kelengkungan manifold Riemannian dan berperan penting dalam mengukur bagaimana ruang-waktu dipengaruhi oleh distribusi massa dan energi. Melalui tensor ini, dapat dipahami bagaimana geodesik - lintasan terpendek antara dua titik dalam ruang lengkung - mengalami deviasi dan bagaimana kelengkungan intrinsik sebuah manifold dapat diukur.

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps}[R_{rmn}^s]^\alpha \quad (3.17)$$

Persamaan (3.18) menunjukkan bahwa tensor kelengkungan Riemann  $[R_{prmn}]^\alpha$  dikontraksikan dengan metrik tensor  $g_{ps}$  untuk menghasilkan bentuk lain dari tensor kelengkungan Riemann. Pada dasarnya, ini adalah sebuah operasi

pengontrakan indeks dengan metrik untuk mentransformasikan satu tensor menjadi bentuk tensor yang berbeda.  $g_{ps}$  adalah tensor metrik yang digunakan untuk menaikkan atau menurunkan indeks.  $[R_{rmn}^s]^\alpha$  adalah komponen tensor kelengkungan Riemann.

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps} \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha + [\Gamma_{rm}^q]^\alpha [\Gamma_{qn}^s]^\alpha - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha [\Gamma_{qm}^s]^\alpha \right) \quad (3.18)$$

Persamaan diatas adalah rumus ekspansi komponen tensor Riemann dalam hal simbol Christoffel  $\Gamma_{rm}^p$ . Tensor kelengkungan Riemann menggambarkan seberapa banyak ruang (atau manifold) melengkung, dan dapat diekspresikan dalam bentuk derivatif parsial dari simbol Christoffel serta produk simbol Christoffel itu sendiri.  $\Gamma_{rm}^p$  adalah simbol Christoffel, yang pada dasarnya mewakili koneksi afinnya, dan ini adalah bagian penting dari teori geometri diferensial yang mendeskripsikan bagaimana vektor di ruang melengkung berubah ketika dipindahkan.

$$[R_{prmn}]^\alpha = -[R_{rmpn}]^\alpha \quad (3.19)$$

Ini adalah sifat antisimetri dari tensor Riemann. Artinya, jika dibalikkan urutan beberapa indeks, tanda dari tensor berubah. Antisimetri ini mencerminkan sifat dasar dari kelengkungan pada manifold yang dijelaskan oleh tensor ini.

$$[R_{prmn}]^\alpha + [R_{rmpn}]^\alpha = 0 \quad (3.20)$$

Ini adalah sifat antisimetri lain dari tensor Riemann. Persamaan (3.21) menyatakan bahwa jika ditukar indeks pertama dengan yang kedua (dari tensor Riemann), nilai tensor tersebut berubah tanda. Ini menunjukkan bahwa tensor Riemann antisimetri pada dua indeks pertama.

$$[R_{prmn}]^\alpha = -[R_{mnpr}]^\alpha \quad (3.21)$$

Persamaan (3.22) juga mengekspresikan sifat antisimetri, tetapi kali ini melibatkan penukaran empat indeks secara keseluruhan. Ini menunjukkan bahwa kelengkungan ruang tetap sama meskipun indeks-indeks ditukar, tetapi dengan perubahan tanda. Ini adalah salah satu sifat penting dari tensor Riemann

$$[R_{prmn}]^\alpha + [R_{prnm}]^\alpha + [R_{pnrm}]^\alpha = 0 \quad (3.22)$$

Persamaan (3.23) ini adalah identitas Bianchi, yang merupakan salah satu identitas fundamental dalam Relativitas Umum dan geometri diferensial. Identitas Bianchi ini menyatakan bahwa kombinasi siklik dari beberapa komponen tensor Riemann selalu sama dengan nol. Identitas ini sangat penting dalam mempelajari kelengkungan manifold dan juga dalam pengembangan persamaan medan Einstein.

Setiap persamaan di atas mengekspresikan sifat-sifat fundamental tensor kelengkungan Riemann, yang digunakan untuk mendeskripsikan kelengkungan ruang-waktu dalam Relativitas Umum. Tensor ini penting untuk memahami bagaimana massa dan energi melengkungkan ruang-waktu, yang pada gilirannya memengaruhi gerak benda-benda dalam ruang-waktu tersebut.

Turunan biasa dalam geometri diferensial, seperti yang digunakan pada tensor kelengkungan Riemann, menggambarkan laju perubahan kelengkungan di suatu ruang melengkung. Dengan mengganti turunan biasa dengan turunan fractional conformable, diubah sifat-sifat manifold (ruang) menjadi lebih umum dan kompleks, sehingga dapat mengakomodasi geometri yang memiliki kelengkungan yang mungkin tidak mulus (irregular curvature). Ini memungkinkan penggambaran ruang-waktu yang lebih fleksibel.

### 3.1.4. Tensor Ricci

Tensor Ricci, sebuah konsep penting dalam geometri diferensial dan teori relativitas umum yang memiliki aplikasi luas dalam memahami kelengkungan ruang-waktu. Tensor Ricci merupakan hasil kontraksi dari tensor Riemann dan digunakan untuk menggambarkan sifat-sifat geometris manifold dengan lebih sederhana. Dalam konteks relativitas umum, tensor Ricci memainkan peran sentral dalam persamaan medan Einstein, yang menghubungkan distribusi massa dan energi dengan kelengkungan ruang-waktu.

$$[R_{rm}]^\alpha = [R_{rmn}^n]^\alpha \quad (3.23)$$

Persamaan (3. 24) di atas menunjukkan bahwa tensor  $[R_{rm}]^\alpha$  diperoleh dari kontraksi (atau penjumlahan) salah satu indeks dari tensor kelengkungan Riemann  $[R_{rmn}^n]^\alpha$ . Kontraksi ini berarti dijumlahkan komponen-komponen tensor Riemann berdasarkan dimensi n, yang mengurangi jumlah indeks dari empat menjadi dua dan menghasilkan tensor Ricci.

$$\begin{aligned} [R_{rm}]^\alpha = & -\frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha - \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha + [\Gamma_{rm}^q]^\alpha [\Gamma_{qn}^s]^\alpha \\ & - [\Gamma_{rn}^q]^\alpha [\Gamma_{qm}^s]^\alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

Turunan parsial dari simbol Christoffel  $\Gamma_{rm}^p$  terhadap koordinat  $x^{n\alpha}$  dinyatakan sebagai  $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^{n\alpha}} [\Gamma_{rm}^p]^\alpha$ . Hal ini menunjukkan bagaimana simbol Christoffel tersebut berubah terhadap koordinat ruang yang terkait. Sementara itu,  $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^{m\alpha}} [\Gamma_{rn}^p]^\alpha$  menggambarkan turunan kedua dari  $[\Gamma_{rn}^p]^\alpha$  terhadap  $x^{m\alpha}$ , yang merupakan langkah lebih lanjut dalam menghitung perubahan geometri ruang.

Pada suku ke-3 dan ke-4 yaitu  $[\Gamma_{rm}^q]^\alpha [\Gamma_{qn}^s]^\alpha$  dan  $[\Gamma_{rn}^q]^\alpha [\Gamma_{qm}^s]^\alpha$  menjelaskan bagaimana geometri ruang mengalami perubahan atau distorsi ketika terpengaruh oleh koneksi dalam arah yang berbeda. Kombinasi turunan dan hasil kali simbol Christoffel ini menggambarkan bagaimana geometri ruang terdefiniskan oleh sifat-sifat koneksinya.

Secara sederhana, persamaan (3.25) ini menggambarkan bagaimana kelengkungan ruang (yang diwakili oleh tensor Riemann) muncul dari simbol-simbol Christoffel, yang menggambarkan bagaimana gravitasi mempengaruhi geometri ruang-waktu.

$$[R_{rm}]^\alpha = g^{pn} [R_{prmn}]^\alpha \quad (3.25)$$

Persamaan (3.26) menunjukkan kontraksi tensor kelengkungan Riemann untuk mendapatkan tensor Ricci. Di sini,  $g^{pn}$  adalah tensor metrik invers, yang digunakan untuk menurunkan atau menaikkan indeks. Tensor Riemann  $[R_{prmn}]^\alpha$  memiliki empat indeks, dan metrik  $g^{pn}$  mengkontraksi indeks  $p$  dan  $n$  untuk mengurangi jumlah indeks menjadi dua, menghasilkan tensor Ricci  $[R_{rm}]^\alpha$

$$R^\alpha = g^{mn} [R_{rm}]^\alpha \quad (3.26)$$

Persamaan terakhir ini menunjukkan skalar Ricci  $R^\alpha$ , yang diperoleh dari kontraksi tensor Ricci  $[R_{rm}]^\alpha$  dengan tensor metrik invers  $g^{mn}$ .

Pengaruh turunan fraksional conformable terhadap tensor Ricci akan menghasilkan model kelengkungan ruang-waktu yang lebih kaya, kompleks, dan dinamis. Ini memungkinkan penggambaran yang lebih akurat tentang bagaimana kelengkungan berinteraksi dengan materi dan energi, termasuk memperkenalkan efek memori, solusi non-linier, dan solusi yang lebih umum untuk persamaan medan Einstein. Pengaruh ini juga bisa membantu dalam memahami fenomena ekstrem

seperti lubang hitam, energi gelap, dan kosmologi awal, serta memberikan jembatan menuju teori gravitasi kuantum.

### 3.1.5. Persamaan Medan Einstein

Tensor Einstein dan persamaan medan Einstein, yang merupakan dasar dari teori relativitas umum. Tensor Einstein adalah alat matematis yang menghubungkan kelengkungan ruang-waktu dengan distribusi massa dan energi. Persamaan medan Einstein menggambarkan bagaimana massa dan energi menyebabkan kelengkungan ruang-waktu, yang pada gilirannya mempengaruhi gerak benda-benda. Pemahaman yang mendalam tentang tensor Einstein dan persamaan medannya akan memberikan wawasan penting tentang struktur dan dinamika alam semesta.

$$[G_{mn}]^\alpha = [R_{mn}]^\alpha - \frac{1}{2} R^\alpha g_{mn} \quad (3.27)$$

Persamaan (3.28) menghubungkan tensor  $[G_{mn}]^\alpha$  dengan tensor  $[R_{mn}]^\alpha$  dan metrik  $g_{mn}$ . Tensor  $[G_{mn}]^\alpha$  adalah sebuah tensor yang sedang dibahas dalam konteks tertentu, di mana indeks-indeksnya menunjukkan komponen tensor tersebut dan pangkat  $\alpha$  menunjukkan bahwa tensor ini dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ . Selain itu, terdapat tensor lain yang dilambangkan dengan  $[R_{mn}]^\alpha$ , yang juga dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ , namun memiliki arti atau peran yang berbeda dalam konteksnya. Selanjutnya,  $R^\alpha$  merupakan suatu kuantitas skalar, yang berarti ia tidak memiliki indeks seperti tensor-tensor sebelumnya, namun tetap dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ . Sementara itu,  $g_{mn}$  adalah tensor metrik yang sering digunakan untuk mengukur jarak dan sudut dalam suatu ruang, di mana metrik ini memiliki peran fundamental dalam banyak bidang fisika, khususnya dalam relativitas umum dan geometri diferensial.

Persamaan ini menunjukkan bahwa tensor  $[G_{mn}]^\alpha$  dihitung dengan mengurangkan  $\frac{1}{2} R^\alpha g_{mn}$  dari  $[R_{mn}]^\alpha$ . Secara umum, ini bisa menggambarkan hubungan antara tensor yang dimodifikasi dan tensor lainnya dengan memanfaatkan metrik dan kuantitas skalar

$$[G_{mn}]^\alpha = [R^{mn}]^\alpha \frac{1}{2} R^\alpha g^{mn} \quad (3.28)$$

Persamaan (3.29) ini mirip dengan yang pertama, tetapi kali ini menggunakan indeks atas dan bawah yang berbeda. Dimana  $[G_{mn}]^\alpha$  adalah tensor yang sedang dibahas.  $[R_{mn}]^\alpha$  adalah tensor lain yang dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ .  $R^\alpha$  adalah suatu kuantitas skalar yang juga dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ .  $g_{mn}$  adalah tensor metrik yang sering digunakan untuk mengukur jarak dan sudut dalam ruang.

Persamaan ini menunjukkan bahwa tensor  $[G_{mn}]^\alpha$  dihitung dengan mengurangkan  $\frac{1}{2} R^\alpha g_{mn}$  dari  $[R_{mn}]^\alpha$ . Ini menggambarkan cara lain untuk menghubungkan tensor tersebut menggunakan metrik invers.

$$[G_n^m]^\alpha = [R_n^m]^\alpha \frac{1}{2} R^\alpha g_n^m \quad (3.29)$$

$$[G_{mn}]^\alpha + g_{mn} P = [T_{mn}]^\alpha Q \quad (3.30)$$

Persamaan di atas melibatkan penambahan dan perkalian tenso dimana  $[G_{mn}]^\alpha$  adalah tensor yang sedang dibahas.  $g_{mn}$  adalah tensor metrik.  $P$  adalah kuantitas atau tensor yang tidak dijelaskan lebih lanjut.  $[T_{mn}]^\alpha$  adalah tensor lain yang dinyatakan dalam bentuk pangkat  $\alpha$ .  $Q$  adalah kuantitas atau tensor lain yang juga tidak dijelaskan lebih lanjut.

Persamaan ini menunjukkan bahwa jumlah dari  $[G_{mn}]^\alpha$  dan  $g_{mn} P$  sama dengan hasil kali  $[T_{mn}]^\alpha Q$ . Ini bisa menggambarkan hubungan antara tensor dan

kuantitas lain dengan cara yang lebih kompleks. Hubungan antara  $P$  dan  $Q$  dalam konteks persamaan tensor di ruang pecahan adalah bahwa mereka berperan sebagai faktor skala yang mengubah sifat-sifat tensor metrik dan tensor.

## BAB IV

### SOLUSI LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD TERDEFORMASI- $\alpha$

#### 4.1 Metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$

Metrik schwarzschild pada umumnya berbentuk seperti pada persamaan (2.62). Namun, Pada penelitian ini metrik yang dibutuhkan adalah metrik schwarzschild yang telah dideformasi oleh parameter  $\alpha$ , dimana parameter  $\alpha$  dalam hal ini adalah lambang dari perubahan aturan turunan biasa menjadi aturan turunan konformabel.

Aturan konformabel yang cocok digunakan untuk mendeformasi metrik ini adalah turunan konformabel multivariat yang sebelumnya sudah dijelaskan di dalam bab 2.

Pertimbangkan  $h$  sebagai koordinat fungsi  $\mathbb{R}_\alpha^{2n}$  yang dapat diturunkan. Turunan konformabel atau  $\alpha$ -differential terhadap posisi  $q$  dan momentum terkait  $p$  didefinisikan sebagai berikut:

$$d_\alpha : \mathbb{R}_\alpha^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$h \mapsto d_\alpha h := \sum_{\mu=1}^{2n} \alpha |x_\mu|^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x_\mu} h \quad (4.1)$$

dengan variabel  $x_\nu = q^\nu$  sebagai koordinat posisi dan  $x_{\nu+n} = p_\nu$  sebagai koordinat momentum

Dalam kasus ini nilai dari  $n$  adalah 4, hal ini dikarenakan sistem bekerja dalam ruang-waktu 4 dimensi, sesuai dengan teori relativitas umum, yang mencakup 3 dimensi ruang dan 1 dimensi waktu. (Osborne, Rowan, & Coontz, 2002)

Ruang fase yang digunakan terdiri dari 8 dimensi, yaitu 4 dimensi posisi ( $q^\nu$  dengan  $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) dan 4 dimensi momentum ( $p_\nu$  yang terkait dengan masing-

masing koordinat posisi). Jadi, indeks  $v = 1, 2, 3, 4$  merujuk pada komponen posisi dalam ruang-waktu 4 dimensi, sementara  $x_{v+n} = p_v$  mewakili komponen momentum yang berhubungan dengan setiap posisi tersebut, sehingga total dimensi ruang fase adalah  $2n = 8$ .

Setelah mengetahui nilai  $n$  dan  $v$ , maka dapat disimpulkan bahwa dalam metrik ini terdapat 8 variabel  $x_\mu$  yaitu:

$$x_1 = t \text{ (waktu)}$$

$$x_2 = r \text{ (jarak radial)}$$

$$x_3 = \theta \text{ (sudut zenit)}$$

$$x_4 = \phi \text{ (sudut azimut)}$$

$$x_5 = p_t \text{ (momentum terkait waktu)}$$

$$x_6 = p_r \text{ (momentum terkait radial)}$$

$$x_7 = p_\theta \text{ (momentum terkait sudut zenit)}$$

$$x_8 = p_\phi \text{ (momentum terkait sudut azimut)}$$

Seluruh komponen yang mewakili momentum dianggap bernilai 0 karena seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa sifat statik dan simetri bola ini menunjukkan bahwa solusi Schwarzschild tidak melibatkan momentum. Maka setelah melakukan substitusi seluruh komponen  $x_\mu$  kedalam persamaan (4.1), maka hasil yang didapat adalah sebagai berikut:

$$d_\alpha h = \alpha \left( t^{(\alpha-1)} \frac{dh}{dt} + r^{(\alpha-1)} \frac{dh}{dr} + \theta^{(\alpha-1)} \frac{dh}{d\theta} + \phi^{(\alpha-1)} \frac{dh}{d\phi} \right) \quad (4.2)$$

Setelah mendapatkan persamaan (4.2), langkah selanjutnya adalah menerapkan pengaruh parameter  $\alpha$  pada setiap komponen dari metrik Schwarzschild.

Dalam konteks ini, akan dimodifikasi metrik ini dengan memasukkan faktor  $|x_\mu|^{\alpha-1}$  pada setiap komponen metrik schwarschild, di mana  $x_\mu$  mewakili variabel  $t, r, \theta$ , dan  $\phi$ . Penambahan parameter  $\alpha$  memperkenalkan kontribusi fraksional ke dalam setiap komponen metrik. Komponen waktu  $dt^2$  dimodifikasi dengan faktor  $|t|^{\alpha-1}$  sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) |t|^{2(\alpha-1)} dt^2 \quad (4.3)$$

Untuk komponen radial  $dr^2$ , kita menggunakan  $|r|^{\alpha-1}$  yang menghasilkan persamaan berikut

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} |r|^{2(\alpha-1)} dr^2 \quad (4.4)$$

Untuk komponen sudut polar  $d\theta^2$  faktor yang disubstitusikan adalah  $|\theta|^{\alpha-1}$ , sehingga persamaan menjadi:

$$r^2 |\theta|^{2(\alpha-1)} d\theta^2 \quad (4.5)$$

Dan yang terakhir adalah memasukkan faktor  $|\phi|^{\alpha-1}$  kedalam komponen sudut azimut  $d\phi^2$  yang mana menghasilkan persamaan berikut:

$$r^2 |\phi|^{2(\alpha-1)} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.6)$$

Setelah semua komponen metrik schwarschild terdeformasi maka Bentuk metrik schwarschild yang baru berdasarkan penurunan rumus di atas adalah

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)} dr^2 + r^2 \theta^{2(\alpha-1)} d\theta^2 + r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.7)$$

#### 4.2 Sifat-sifat ruang-waktu metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$

Dalam kajian relativitas umum dan teori lubang hitam, pemahaman mengenai struktur ruang-waktu yang dibentuk oleh metrik Schwarzschild adalah hal yang fundamental. Namun, dengan adanya modifikasi metrik melalui turunan fraksional konformabel, muncul kemungkinan untuk mendistorsi atau mendekonstruksi sifat-sifat ruang-waktu tersebut.

Pada bab ini, hal yang akan dieksplorasi adalah bagaimana sifat-sifat ruang-waktu, seperti horizon peristiwa dan singularitas, dapat terpengaruh oleh metrik Schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  yang dinyatakan dalam persamaan (4. 7).

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa interval nilai  $\alpha$  adalah pada  $0 < \alpha \leq 1$ . Dimana jika  $\alpha = 1$  metrik akan kembali ke bentuk metrik schwarzschild pada umumnya. Untuk dapat mengetahui kemungkinan Sifat-sifat ruang-waktu dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ , hal yang perlu dilakukan adalah melakukan percobaan dengan mensubstitusikan nilai  $\alpha$  sesuai dengan aturan turunan fraksional konformabel dalam hal ini dimisalkan besar nilai adalah  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Ketika besar  $\alpha = \frac{1}{2}$  maka bentuk metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  menjadi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)t^{-1}dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{-1}dr^2 + r^2\theta^{-1}d\theta^2 + r^2\phi^{-1}\sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.8)$$

Telah kita ketahui bahwa Horizon peristiwa terjadi ketika  $g_{tt} = 0$ . Dalam metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$ , nilai  $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)t^{-1}$  yang berarti  $1 - \frac{2M}{r}$  harus sama dengan 0 atau  $r = 2M$ . Meskipun nilai  $t^{-1}$  memodifikasi skala waktu, lokasi horizon peristiwa tetap berada di  $r = 2M$ , sama seperti dalam metrik

Schwarzschild klasik. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun ada deformasi, struktur dasar dari horizon peristiwa tidak berubah.

Selain horizon peristiwa, Singularitas juga perlu diteliti dalam metrik ini, singularitas terjadi ketika  $g_{rr} = \infty$ . Pada komponen  $g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{-1}$  agar  $g_{rr} = \infty$  maka nilai  $r$  harus sama dengan 0. Maka dalam hal ini nilai singularitas tetap sama seperti metrik Schwarzschild klasik yaitu pada  $r = 0$ .

Hal yang berbeda dari metrik schwarzschild klasik dengan metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  adalah adanya *memory effect* atau konsep kenangan yang merupakan Fenomena fisis dari deformasi  $\alpha$  itu sendiri. *Memory effect* berarti bahwa ruang-waktu "mengingat" deformasi yang terjadi di masa lalu. Dalam metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  Efek ini terjadi karena semakin kecil nilai waktu, semakin besar pengaruh gravitasi. Hal ini dapat dibuktikan dengan memisalkan besar nilai adalah  $\alpha = \frac{1}{2}$  juga sehingga komponen  $g_{tt}$  menjadi  $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{-1}$ .

Dari persamaan tersebut, terlihat bahwa faktor  $t^{-1}$  menunjukkan  $g_{tt}$  berbanding terbalik nilai  $t$ . Dimana hal ini bermakna bahwa pengaruh gravitasi atau kelengkungan ruang-waktu semakin kecil ketika waktu semakin besar. Fenomena inilah yang disebut dengan *memory effect* atau konsep kenangan.

### 4.3 Simbol Christoffel, tensor riemann, tensor ricci, skalar ricci, dan persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$

#### 4.2.1 Simbol christoffel dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$

Simbol chritoffel dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  didapat dengan menghitung komponen-komponen simbol christoffel dari metrik dalam persamaan (4.8) menggunakan persamaan (3.2) dan diambil hanya yang tidak bernilai 0.

Lebih jelasnya, hal yang pertama di lakukan adalah membentuk tensor metrik atau  $g_{is}$  dari metrik scwahrschild terdeformasi- $\alpha$ , menjadi bentuk sebagai berikut:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \theta^{2(\alpha-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Lalu, hal kedua yang dibutuhkan adalah invers dari tensor pada persamaan (4.10) atau  $g^{is}$  dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$  yaitu sebagai berikut:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \theta^{2(\alpha-1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Setelah terbentuk tensor metrik  $g_{is}$  dari metrik schwarschild terdeformasi- $\alpha$ , maka yang dapat digunakan hanyalah komponen tensor metrik yang tidak nol yaitu :

$$g_{11} = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) t^{2(\alpha-1)} \quad (4.11)$$

komponen waktu dari tensor metrik. Dalam metrik Schwarzschild standar, bagian ini menggambarkan potensi gravitasi di sekitar massa M pada jarak r.. Dengan pengaruh parameter  $\alpha$ , faktor waktu t dimodifikasi dengan faktor  $t^{2(\alpha-1)}$ . Hal ini memperkenalkan kontribusi fraksional yang bergantung pada  $\alpha$ , yang mengubah sifat temporal dari metrik, dan menunjukkan bagaimana perubahan fraksional mempengaruhi skala waktu dalam ruang-waktu tersebut.

$$g_{22} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} r^{2(\alpha-1)} \quad (4.12)$$

komponen radial dari tensor metrik. Bagian ini biasanya menggambarkan geometri ruang-waktu dalam arah radial (jarak r dari pusat massa). Dengan penambahan parameter  $\alpha$ , faktor radial r dimodifikasi dengan  $r^{2(\alpha-1)}$  Ini menunjukkan pengaruh fraksional dalam skala radial, yang mengubah cara jarak diukur dalam geometri ruang-waktu ketika  $\alpha$  diperkenalkan

$$g_{33} = r^2 \theta^{2(\alpha-1)} \quad (4.13)$$

komponen sudut polar  $\theta$  dari tensor metrik, yang biasanya menggambarkan geometri sudut di sekitar benda bermassa. Dengan penambahan  $\alpha$ , sudut  $\theta$  dimodifikasi dengan faktor fraksional  $\theta^{2(\alpha-1)}$ . Ini menunjukkan bagaimana sudut polar di sekitar massa tersebut terpengaruh oleh kalkulus fraksional, yang memperkenalkan kontribusi non-linier pada sudut tersebut.

$$g_{44} = r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2 \quad (4.14)$$

komponen sudut azimut  $\phi$  dari tensor metrik. Dalam bentuk standar, komponen ini menggambarkan rotasi di sekitar benda bermassa, namun dengan penambahan faktor fraksional  $\alpha$ , sudut  $\phi$  dimodifikasi oleh faktor  $\phi^{2(\alpha-1)}$ . Hal ini menunjukkan bahwa metrik ruang-waktu terpengaruh oleh fraksionalitas pada rotasi sudut azimut di sekitar massa.

Berikutnya dicari juga komponen invers tensor metrik yang tidak bernilai 0, yaitu

$$g^{11} = \frac{1}{-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)}} \quad (4.15)$$

$$g^{22} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)}} \quad (4.16)$$

$$g^{33} = \frac{1}{r^2 \theta^{2(\alpha-1)}} \quad (4.17)$$

$$g^{44} = \frac{1}{r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2} \quad (4.18)$$

Komponen-komponen invers dari tensor metrik ini menunjukkan bagaimana ruang-waktu terpengaruh ketika diperkenalkan parameter fraksional  $\alpha$ . Setiap komponen (baik temporal, radial, maupun sudut) dipengaruhi secara signifikan, dan invers ini memperlihatkan pengaruh fraksional terhadap pengukuran jarak dan waktu dalam ruang-waktu yang dimodifikasi. Pengaruh kalkulus fraksional tercermin dalam bentuk kebalikan dari komponen metrik biasa, memberikan gambaran lebih dalam tentang geometri ruang-waktu yang lebih kompleks di bawah pengaruh parameter  $\alpha$ .

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan semua hal yang sudah diketahui kedalam persamaan simbol christoffel terdeformasi- $\alpha$  sebagai berikut

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\psi} = \frac{1}{2} g^{\psi\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\beta\mu} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}) \quad (4.19)$$

Disini  $g^{\psi\beta}$  memenuhi setiap  $\psi = 1, 2, 3, 4$  dan  $\beta = 1, 2, 3, 4$ , berdasarkan perhitungan tensor metrik sebelumnya  $g^{\psi\beta}$  atau  $g^{is}$  jika dalam persamaan (3.2) yang tidak bernilai 0 hanya ada 4 yaitu untuk  $g^{11}, g^{22}, g^{33}$ , dan  $g^{44}$ . Maka perhitungan simbol chrisstoffel dimulai dengan hanya mengacu kepada 4 tensor metrik tersebut,

Setelah melakukan perhitungan dengan semua aturan turunan dalam prosesnya menggunakan aturan turunan fraksional conformable seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, komponen  $g^{11}$  menghasilkan 3 simbol christoffel yang tidak bernilai 0, yaitu:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{\alpha - 1}{t^{\alpha}} \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = \frac{M}{(r - 2M)r^{\alpha}} \quad (4.21)$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) = \frac{M}{(r - 2M)r^{\alpha}} \quad (4.22)$$

Perhitungan untuk komponen  $g^{22}$  dengan semua aturan turunan dalam prosesnya menggunakan aturan turunan fraksional conformable seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, menghasilkan 4 simbol christoffel yang tidak bernilai 0, yaitu:

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = \frac{M(r - 2M)t^{2\alpha-2}}{r^{3\alpha}} \quad (4.23)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = \frac{(\alpha - 1)r + (3 - 2\alpha)M}{(r - 2M)r^{\alpha}} \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \theta^{2\alpha-2} \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{44}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_4 g_{42} + \partial_4 g_{24} - \partial_2 g_{44}) = -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \quad (4.26)$$

Selanjutnya perhitungan dilanjutkan untuk kompone  $g^{33}$  dengan semua aturan turunan dalam prosesnya menggunakan aturan turunan fraksional conformable pula, komponen ini menghasilkan 4 simbol christoffel yang tidak bernilai 0, yaitu:

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = \frac{1}{r^\alpha} \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = \frac{1}{r^\alpha} \quad (4.28)$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = \frac{(\alpha-1)}{\theta^\alpha} \quad (4.29)$$

$$\Gamma_{44}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_4 g_{43} + \partial_4 g_{34} - \partial_3 g_{44}) = -\frac{\sin \theta \cos \theta \phi^{2\alpha-2}}{\theta^{3\alpha-3}} \quad (4.30)$$

Terakhir, dihitung simbol christoffel untuk komponen  $g^{44}$  dengan juga menggunakan aturan turunan fraksional conformable, komponen  $g^{44}$  dalam hal ini menghasilkan 5 simbol christoffel yang tidak bernilai 0, yaitu:

$$\Gamma_{24}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_2 g_{44} + \partial_4 g_{42} - \partial_4 g_{24}) = \frac{1}{r^\alpha} \quad (4.31)$$

$$\Gamma_{34}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_3 g_{44} + \partial_4 g_{43} - \partial_4 g_{34}) = \cot \theta \theta^{1-\alpha} \quad (4.32)$$

$$\Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{24} + \partial_2 g_{44} - \partial_4 g_{42}) = \frac{1}{r^\alpha} \quad (4.33)$$

$$\Gamma_{43}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{34} + \partial_3 g_{44} - \partial_4 g_{43}) = \cot \theta \theta^{1-\alpha} \quad (4.34)$$

$$\Gamma_{44}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{44} + \partial_4 g_{44} - \partial_4 g_{44}) = \frac{(\alpha-1)}{\phi^\alpha} \quad (4.35)$$

Berdasarkan hasil perhitungan dapat disimpulkan bahwa penggunaan aturan turunan fraksional konformabel dalam perhitungan simbol-simbol Christoffel

memperkenalkan beberapa perubahan signifikan dalam sifat dan struktur ruang geometri yang dikaji. Dalam geometri Riemannian standar, simbol Christoffel biasanya dihitung menggunakan turunan konvensional, yang merepresentasikan koneksi antara koordinat ruang di sekitar titik tertentu. Namun, ketika aturan turunan fraksional konformabel diterapkan, tingkat diferensiasi diubah menjadi fungsi fraksional dari parameter tertentu. Hal ini menghasilkan simbol Christoffel yang memiliki ketergantungan lebih kompleks terhadap parameter waktu ( $t$ ), radius ( $r$ ), serta sudut-sudut koordinat ( $\theta$  dan  $\phi$ ). Misalnya, dalam beberapa komponen simbol seperti  $\Gamma_{33}^2$ , ketergantungan terhadap sudut  $\theta$  mengalami modifikasi melalui eksponen  $\alpha$ , yang mencerminkan perubahan dalam skala sudut-sudut ruang ketika dievaluasi dengan turunan fraksional.

#### **4.2.2 Tensor rieman dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$**

Tensor Riemann berfungsi untuk menggambarkan kelengkungan ruang-waktu akibat pengaruh gravitasi. Dalam teori ini, ruang-waktu dipandang sebagai manifold berdimensi empat yang memiliki struktur kelengkungan yang kompleks. Tensor Riemann memberikan informasi tentang bagaimana vektor di sepanjang lintasan dalam manifold ini berubah ketika diparalelkan ke berbagai arah. Dalam kasus ini, diperkenalkan modifikasi fraksional melalui parameter  $\alpha$ , yang memberikan kontribusi baru dalam menggambarkan sifat kelengkungan tersebut. Rumus tensor Riemann dengan indeks bawah, yang diturunkan dari bentuk konvensional, memungkinkan untuk diproyeksikan tensor ini ke berbagai arah dalam ruang-waktu yang terpengaruh oleh gravitasi.

Diketahui rumus tensor riemann indeks bawah adalah sebagai berikut:

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps}[R_{rmn}^s]^\alpha \quad (4.36)$$

Persamaan (4.35) menggambarkan tensor Riemann dengan indeks bawah yang diperoleh dari tensor Riemann dengan indeks campuran (satu indeks atas dan tiga indeks bawah) melalui kontraksi dengan tensor metrik  $g_{ps}$ . Tensor Riemann  $[R_{rmn}^s]^\alpha$  mengukur kelengkungan ruang-waktu akibat gravitasi, dan penggunaan metrik  $g_{ps}$  menurunkan indeks atas sss menjadi bentuk tensor dengan empat indeks bawah. Dalam konteks ini, simbol  $\alpha$  menunjukkan bahwa tensor ini telah dimodifikasi oleh parameter fraksional  $\alpha$ , yang mencerminkan efek fraksional terhadap kelengkungan ruang-waktu. Modifikasi ini memungkinkan untuk memahami bagaimana perubahan non-linear akibat parameter fraksional dapat mempengaruhi geometri ruang-waktu.

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps}(\partial_m \Gamma_{nr}^s - \partial_n \Gamma_{mr}^s + \Gamma_{m\lambda}^s \Gamma_{nr}^\lambda - \Gamma_{n\lambda}^s \Gamma_{mr}^\lambda) \quad (4.37)$$

Persamaan di atas memberikan bentuk eksplisit tensor Riemann dengan indeks bawah, yang diperoleh dengan mengalikan tensor metrik  $g_{ps}$  dengan ekspresi turunan dan produk dari simbol Christoffel  $\Gamma$ . Simbol Christoffel adalah koneksi afin yang mendeskripsikan bagaimana koordinat ruang-waktu berubah dan berkontribusi pada kelengkungan ruang-waktu. Bagian pertama dari persamaan ini terdiri dari turunan parsial  $\partial_m \Gamma_{nr}^s - \partial_n \Gamma_{mr}^s$ , yang menggambarkan perubahan lokal dari koneksi tersebut dalam arah m dan n. Bagian kedua, yang melibatkan produk dari simbol Christoffel  $\Gamma_{m\lambda}^s \Gamma_{nr}^\lambda - \Gamma_{n\lambda}^s \Gamma_{mr}^\lambda$ , mencerminkan interaksi dua arah pergeseran paralel dalam ruang-waktu yang melengkung.

Lalu substitusikan komponen komponen tensor metrik dan simbol christoffel yang tidak nol.

$$[R_{1212}]^\alpha = -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha - 1)M(r - 2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{(r - 2M)r^{2\alpha+1}} \quad (4.38)$$

Persamaan (4.37) ini merepresentasikan komponen tensor Riemann  $[R_{1212}]^\alpha$ , yang menggambarkan kelengkungan ruang-waktu dalam arah radial dan temporal. Bagian pertama dari pembilang  $(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha - 1)M(r - 2M)r^\alpha t^{\alpha-2}$  menunjukkan kontribusi massa M dalam konteks fraksional melalui parameter  $\alpha$ , yang mempengaruhi perilaku temporal  $t^{2\alpha-2}$ . Komponen ini juga mencakup pengaruh non-linear dari massa dan radius (melalui r) yang menjadi lebih signifikan di dekat horizon Schwarzschild, dengan tambahan fraksional dari  $r = 2M$  dan  $r^\alpha$ .

$$[R_{1313}]^\alpha = \frac{M(r - 2M)t^{2\alpha-2}\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} \quad (4.39)$$

Komponen  $[R_{1313}]^\alpha$  menggambarkan kelengkungan antara arah temporal dan sudut polar  $\theta$ . Dalam hal ini, massa M, faktor radial  $(r-2M)$ , dan faktor temporal  $t^{2\alpha-2}$  berinteraksi dengan komponen sudut  $\theta^{2\alpha-2}$ , menghasilkan kelengkungan yang dimodifikasi oleh parameter fraksional  $\alpha$ . Pengaruh fraksional ini sangat terasa dalam perilaku kelengkungan di sekitar horizon Schwarzschild, di mana  $r=2M$ .

$$[R_{1414}]^\alpha = \frac{(r - 2M)t^{2\alpha-2}M\phi^{2\alpha-2}\sin^2\theta}{r^{4\alpha-2}} \quad (4.40)$$

Komponen  $[R_{1414}]^\alpha$  merepresentasikan kelengkungan antara arah temporal dan sudut azimuthal  $\phi$ . Persamaan ini melibatkan interaksi antara faktor temporal  $t^{2\alpha-2}$ , massa M, serta sudut azimuthal  $\phi^{2\alpha-2}$  yang semuanya dimodifikasi oleh kontribusi fraksional  $\alpha$ . Faktor  $\sin^2\theta$  mengatur kelengkungan sesuai dengan sudut polar  $\theta$ , dan peran radius r di sini juga memengaruhi kelengkungan secara signifikan, terutama mendekati horizon Schwarzschild.

$$[R_{2323}]^\alpha = \frac{r\theta^{2\alpha-2}}{r-2M} (2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1} \quad (4.41)$$

Komponen  $[R_{2323}]^\alpha$  menggambarkan kelengkungan ruang-waktu dalam arah sudut polar  $\theta$  dan radial  $r$ . Dalam persamaan ini, faktor fraksional  $\alpha$  berinteraksi dengan radius  $r$  dan massa  $M$ , memberikan koreksi pada kelengkungan standar Schwarzschild. Istilah  $(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}$  menunjukkan bagaimana parameter fraksional memengaruhi kelengkungan secara lebih mendetail, di mana kontribusi non-linear massa dan radius diatur oleh  $\alpha$ .

$$[R_{2424}]^\alpha = \frac{r\phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} (2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1} \quad (4.42)$$

Komponen  $[R_{2424}]^\alpha$  mengukur kelengkungan antara arah sudut azimutal  $\phi$  dan radial  $r$ . Mirip dengan  $[R_{2323}]^\alpha$ , di mana melibatkan interaksi fraksional antara radius  $r$ , massa  $M$ , dan parameter sudut  $\phi^{2\alpha-2}$ , dengan koreksi tambahan yang diberikan oleh  $\alpha$ . Selain itu,  $\sin^2 \theta$  mengatur bagaimana kelengkungan ini berperilaku dengan variasi sudut polar  $\theta$ .

$$\begin{aligned} [R_{3434}]^\alpha = & \phi^{2\alpha-2} \left( \sin^2 \theta (r^2 \theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2} (r-2M) r^{-2\alpha+3}) \right. \\ & + r^2 \left( (3-2\alpha) \sin \theta \cos \theta \theta^{-2\alpha+1} + \cos^2 \theta (\theta^{-2\alpha} \right. \\ & \left. \left. - \theta^{6\alpha-5}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Persamaan terakhir ini,  $[R_{3434}]^\alpha$ , menjelaskan kelengkungan ruang-waktu dalam arah sudut azimutal  $\phi$  dan sudut polar  $\theta$ , di mana terdapat interaksi fraksional yang sangat kompleks antara parameter  $\alpha$ , sudut  $\theta$ , dan radius  $r$ . Komponen fraksional yang dihasilkan dalam persamaan ini memberikan gambaran yang sangat detail tentang bagaimana kelengkungan dipengaruhi oleh variasi sudut azimutal dan polar. Istilah dalam tanda kurung menunjukkan bagaimana faktor-faktor sudut ini

berinteraksi secara rumit dengan kelengkungan ruang-waktu, terutama ketika mendekati horizon Schwarzschild.

Penggunaan aturan turunan fraksional konformabel dalam perhitungan tensor Riemann memperkenalkan perubahan fundamental terhadap struktur kelengkungan ruang-waktu. Tensor Riemann biasanya digunakan untuk menggambarkan kelengkungan intrinsik dari suatu manifold, dan dalam konteks fisika, ia memiliki peran penting dalam teori relativitas umum untuk memahami distribusi massa dan energi yang memengaruhi gravitasi. Ketika aturan turunan fraksional diterapkan, setiap komponen tensor Riemann bergantung pada parameter fraksional  $\alpha$ , yang mengatur tingkat derivasi. Misalnya, pada komponen seperti  $[R_{1212}]^\alpha = -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{(r-2M)r^{2\alpha+1}}$ , ketergantungan terhadap  $t$  dan  $r$  diperumit dengan kehadiran eksponen  $\alpha$ , sehingga kelengkungan tidak hanya berfungsi terhadap koordinat-geometris standar, tetapi juga beradaptasi terhadap perubahan yang lebih halus dan fraksional dalam skala ruang-waktu.

Implikasi perubahan ini cukup mendalam. Turunan fraksional memengaruhi cara kelengkungan dihitung dan, oleh karena itu, memengaruhi solusi medan Einstein serta persamaan geodesik yang menentukan jalur partikel di dalam ruang-waktu. Komponen tensor Riemann seperti  $[R_{1313}]^\alpha$  dan  $[R_{2323}]^\alpha$  mengungkapkan adanya ketergantungan eksponensial pada parameter sudut  $\theta$  dan  $\phi$ , yang menunjukkan perubahan kelengkungan angular yang lebih kompleks dari biasanya.

#### 4.2.3 Tensor ricci dari metrik schwarzschild terdeformasi- $\alpha$

Sebelum melangkah lebih jauh dalam perhitungan komponen tensor Ricci, perlu dipahami bahwa tensor Ricci merupakan hasil dari kontraksi tensor Riemann, yang memberikan informasi penting mengenai kelengkungan ruang-waktu dalam

konteks yang lebih sederhana daripada tensor Riemann. Dalam kasus metrik Schwarzschild terdeformasi oleh parameter fraksional  $\alpha$ , kelengkungan ini berubah dan memberikan hasil yang lebih kompleks. Oleh karena itu, untuk menentukan komponen tensor Ricci yang tidak nol, diperlukan substitusi dari komponen tensor Riemann yang telah dihitung sebelumnya. Proses ini memberikan pandangan lebih jelas tentang bagaimana kelengkungan ruang-waktu terpengaruh oleh massa objek, parameter  $\alpha$ , dan variabel lain dalam metrik. Berikut adalah komponen tensor Ricci yang tidak nol, hasil dari substitusi tersebut.

Perubahan ini mempengaruhi berbagai aspek fisik ruang-waktu, terutama dalam kaitannya dengan solusi medan Einstein, yang menggunakan tensor Ricci untuk memodelkan distribusi energi dan momentum. Dalam kasus turunan fraksional, kelengkungan ruang-waktu menjadi tidak linier, dengan ketergantungan yang lebih rumit terhadap koordinat sudut dan radial, seperti yang terlihat pada komponen  $R_{33}$  dan  $R_{44}$ , di mana sudut  $\theta$  dan  $\phi$  dimodifikasi oleh eksponen  $\alpha$ .

#### **4.2.4 Skalar ricci dari metrik schwarzschild terdeformasi— $\alpha$**

Setelah menghitung komponen-komponen tensor Ricci yang tidak nol, langkah selanjutnya adalah menentukan skalar Ricci, yang merupakan kontraksi lebih lanjut dari tensor Ricci. Skalar Ricci memberikan ukuran kelengkungan total ruang-waktu pada setiap titik dan memainkan peran penting dalam persamaan medan Einstein. Dalam konteks kalkulus fraksional konformabel dengan parameter  $\alpha$ , skalar Ricci akan dimodifikasi untuk mencerminkan kontribusi fraksional pada geometri ruang-waktu. Skalar Ricci dapat dihitung dengan menggunakan rumus

berikut, yang melibatkan kontraksi tensor Ricci dengan metrik terbalik  $g^{ij}$ . Maka skalar ricci yang didapat adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R^\alpha = & \frac{r^{-4\alpha+1}(M(r-2M) - (\alpha M - M^2))}{-(r-2M)} + \frac{(\alpha-1)Mr^{-3\alpha+1}}{t^{\alpha+1}} \\
& - \frac{r}{(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} \left( (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right. \\
& \left. + (\cot \theta (3-2\alpha)\theta^{-2\alpha+1} + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right) \\
& + \frac{(\alpha M - M^2)}{(r-2M)r^{4\alpha-1}} + \frac{(\alpha-1)Mt^{-1}}{r^{3\alpha-1}} + \frac{M(r-2M)^2 t^{2\alpha-2}}{r^{6\alpha-5}} \\
& + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} + -\frac{M}{r^{4\alpha-1}} \\
& + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} \\
& + \left( \left( \frac{\theta^{4\alpha-4}}{r^2} + (r-2M)r^{-2\alpha-1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(3-2\alpha)\cot \theta \theta^{-4\alpha+3} + \cot^2 \theta (\theta^{-4\alpha+2} - \theta^{4\alpha-3})}{r^2} \right) \\
& + \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right) \right. \\
& \left. + (\theta^{4\alpha-4} + (r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right) \\
& \left. + (\cot \theta \theta^{-4\alpha+2} ((3-2\alpha)\theta^{-3} + \cot \theta (1 - \theta^{8\alpha-6}))) \right)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Pada bagian pertama, kontribusi dari  $\alpha$  muncul melalui suku  $\frac{r^{-4\alpha+1}(M(r-2M)-(\alpha M-M^2))}{-(r-2M)}$ , yang memperhitungkan pengaruh dari massa  $M$  serta hubungan fraksional antara variabel-variabel ruang-waktu. Di sini, massa objek  $M$  mengurangi kelengkungan ketika jarak  $r$  mendekati  $2M$ .

Selanjutnya, terdapat suku-suku tambahan yang melibatkan koordinat waktu  $t$ , yang memperkenalkan kontribusi fraksional baru melalui istilah  $t^{2(\alpha-1)}$ . Ini mencerminkan bagaimana deformasi temporal, terkait dengan parameter  $\alpha$ , mempengaruhi komponen Ricci pada sistem dengan geometri Schwarzschild yang terfraksionalisasi.

Kontribusi sudut  $\theta$  juga termodifikasi oleh parameter  $\alpha$ , terlihat dari adanya suku-suku yang melibatkan  $\theta^{6\alpha-6}$  dan fungsi trigonometri seperti  $\cot \theta$ . Ini menunjukkan bahwa deformasi sudut ruang-waktu memiliki dampak yang kompleks pada kelengkungan total, terutama ketika mempertimbangkan bagaimana derajat deformasi sudut berinteraksi dengan massa dan parameter  $\alpha$ .

Secara keseluruhan, skalar Ricci yang kompleks ini menunjukkan bagaimana parameter fraksional  $\alpha$  memperkenalkan perubahan ke dalam kelengkungan ruang-waktu, baik melalui kontribusi temporal, radial, maupun sudut. Skalar ini mencerminkan kelengkungan total sistem dalam konteks metrik Schwarzschild yang dimodifikasi secara fraksional.

Penggunaan aturan turunan fraksional konformabel dalam perhitungan skalar Ricci menghasilkan perubahan signifikan dalam sifat kelengkungan ruang-waktu yang terukur secara global. Skalar Ricci, yang merupakan kontraksi tensor Ricci, menggambarkan kelengkungan total ruang-waktu di setiap titik dan berperan penting dalam persamaan medan Einstein. Dengan penerapan turunan fraksional

konformabel, komponen-komponen skalar Ricci yang bergantung pada koordinat seperti radius  $r$ , waktu  $t$ , dan sudut  $\theta$  serta  $\phi$  dimodifikasi secara signifikan oleh parameter  $\alpha$ . Misalnya, dalam bagian pertama persamaan skalar Ricci, terdapat ketergantungan eksplisit pada  $r^{-4\alpha+1}$  dan  $t^{\alpha+1}$ , yang menunjukkan perubahan kelengkungan yang bergantung pada skala fraksional ruang dan waktu. Parameter  $\alpha$  mengontrol bagaimana kelengkungan ruang-waktu menyebar atau mengerut secara dinamis, tergantung pada variasi radial dan temporal.

Perubahan ini memengaruhi dinamika kelengkungan ruang-waktu dan solusi untuk persamaan medan Einstein. Karena skalar Ricci secara langsung terkait dengan distribusi energi dan materi di ruang-waktu, penerapan turunan fraksional konformabel dapat memodifikasi interaksi gravitasi yang muncul di sekitar objek masif, seperti bintang atau lubang hitam. Misalnya, komponen-komponen yang bergantung pada koordinat sudut, seperti ketergantungan pada  $\theta$  dan  $\phi$ , mengindikasikan bahwa medan gravitasi mungkin memiliki karakteristik yang lebih kompleks dibandingkan dengan perhitungan turunan standar.

#### **4.2.1 Persamaan medan einstein dari metrik schwarzschild terdeformasi— $\alpha$**

Persamaan medan einstein ini menggambarkan hubungan antara kelengkungan ruang-waktu (yang diwakili oleh tensor Ricci dan skalar Ricci) dengan distribusi energi dan momentum dalam ruang-waktu. Pada kasus ini, metrik Schwarzschild yang telah dimodifikasi oleh parameter fraksional  $\alpha$  memengaruhi struktur kelengkungan yang ada. Persamaan medan Einstein yang terdeformasi ini, dinyatakan sebagai persamaan (3.28), menunjukkan bagaimana kelengkungan total dipengaruhi oleh komponen tensor Ricci yang terdeformasi serta skalar Ricci yang telah dihitung sebelumnya. Langkah selanjutnya adalah mensubstitusi hasil tensor

Ricci yang telah diperoleh ke dalam persamaan ini untuk mendapatkan komponen-komponen persamaan medan Einstein yang tidak nol.

Untuk mendapatkan komponen-komponen persamaan medan Einstein yang tidak nol dapat dihitung dengan mensubstitusikan tensor Ricci yang sudah diperhitungkan sebelumnya.

$$\begin{aligned}
& [G_{11}]^\alpha = [R_{11}]^\alpha - \frac{1}{2} R^\alpha g_{11} \\
= & \left( t^{2\alpha-2} r^{-4\alpha} (M(r-2M) - (\alpha M - M^2)) \right. \\
& - (\alpha - 1) M (r - 2M) r^{-3\alpha} t^{\alpha-2} jnk \\
& + (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2} (r - 2M) r^{-2\alpha+1}) \\
& + (\cot \theta (3 - 2\alpha) \theta^{-2\alpha+1} + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{r^{-4\alpha+1} (M(r-2M) - (\alpha M - M^2))}{-(r-2M)} \right. \\
& + \frac{(\alpha - 1) M r^{-3\alpha+1}}{t^{\alpha+1}} \\
& - \frac{r}{(r-2M) t^{2(\alpha-1)}} \left( (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2} (r - 2M) r^{-2\alpha+1}) \right. \\
& + (\cot \theta (3 - 2\alpha) \theta^{-2\alpha+1} + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \\
& + \frac{(\alpha M - M^2)}{(r-2M) r^{4\alpha-1}} + \frac{(\alpha - 1) M t^{-1}}{r^{3\alpha-1}} \\
& + \frac{M (r - 2M)^2 t^{2\alpha-2}}{r^{6\alpha-5}} + \frac{(2\alpha - 1) r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} \\
& + -\frac{M}{r^{4\alpha-1}} + \frac{(2\alpha - 1) r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} \\
& \left. \left. + \left( \left( \frac{\theta^{4\alpha-4}}{r^2} + (r - 2M) r^{-2\alpha-1} \right) \right) \right) \right) \\
& + \frac{(3 - 2\alpha) \cot \theta \theta^{-4\alpha+3} + \cot^2 \theta (\theta^{-4\alpha+2} - \theta^{4\alpha-3})}{r^2} \\
& + \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} + \frac{(2\alpha - 1) r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right. \right. \\
& \left. \left. + (\theta^{4\alpha-4} + (r - 2M) r^{-2\alpha+1}) \right) \right) \\
& + \left( \cot \theta \theta^{-4\alpha+2} ((3 - 2\alpha) \theta^{-3} + \cot \theta (1 \right. \\
& \left. - \theta^{8\alpha-6})) \right) \left( - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) t^{2(\alpha-1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$



$$\begin{aligned}
& [G_{44}]^\alpha = [R_{44}]^\alpha - \frac{1}{2} R^\alpha g_{44} \\
& = \phi^{2\alpha-2} \left( \sin^2 \theta \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right. \right. \\
& \quad + (\theta^{4\alpha-4} + (r-2M)r^{-2\alpha+1}) \\
& \quad \left. \left. + \left( \cos \theta \theta^{-4\alpha+2} ((3-2\alpha) \sin \theta \theta^{-3} + \cos \theta (1 - \theta^{8\alpha-6})) \right) \right) \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( \frac{r^{-4\alpha+1} (M(r-2M) - (\alpha M - M^2))}{-(r-2M)} + \frac{(\alpha-1)Mr^{-3\alpha+1}}{t^{\alpha+1}} \right. \\
& \quad - \frac{r}{(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} \left( (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right. \\
& \quad \left. + (\cot \theta (3-2\alpha)\theta^{-2\alpha+1} + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right) \\
& \quad + \frac{(\alpha M - M^2)}{(r-2M)r^{4\alpha-1}} + \frac{(\alpha-1)Mt^{-1}}{r^{3\alpha-1}} + \frac{M(r-2M)^2 t^{2\alpha-2}}{r^{6\alpha-5}} \\
& \quad \quad + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} \\
& \quad + \frac{M}{r^{4\alpha-1}} + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha}} \\
& \quad + \left( \left( \frac{\theta^{4\alpha-4}}{r^2} + (r-2M)r^{-2\alpha-1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(3-2\alpha)\cot \theta \theta^{-4\alpha+3} + \cot^2 \theta (\theta^{-4\alpha+2} - \theta^{4\alpha-3})}{r^2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{r^2} \left( \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + (\theta^{4\alpha-4} + (r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right) \right) \\
& \quad + \left( \cot \theta \theta^{-4\alpha+2} ((3-2\alpha)\theta^{-3} + \cot \theta (1 \right. \\
& \quad \quad \left. - \theta^{8\alpha-6})) \right) \left. \right) r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2 \theta \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Dari persamaan medan einstein yang didapatkan maka dapat diambil kesimpulan bahwa perubahan aturan turunan fraksional konformabel mempengaruhi struktur persamaan medan einstein yang digunakan untuk mendeskripsikan interaksi gravitasi dalam relativitas umum. Dengan penggunaan aturan ini, komponen-komponen persamaan medan einstein mengalami perubahan signifikan dalam hal ketergantungan pada parameter  $\alpha$ , yang memodulasi dinamika kelengkungan ruang-waktu. Misalnya, dalam hasil persamaan medan einstein untuk  $G_{11}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{33}$ , dan  $G_{44}$  terlihat bahwa persamaan-persamaan tersebut mencakup ketergantungan yang lebih kompleks pada variabel ruang seperti  $r$ , sudut  $\theta$ ,  $\varphi$ , serta waktu  $t$ .

Perbedaan mendasar antara pendekatan lama dan yang baru dalam pemahaman interaksi antara materi dan ruang-waktu terletak pada cara dilihatnya dinamika sistem fisik. Dalam pendekatan tradisional, materi dianggap bergerak dalam kerangka ruang yang statis, di mana semua jam di alam semesta beroperasi dengan cara yang seragam dan konsisten. Ini berarti bahwa pengukuran waktu di berbagai lokasi dalam ruang tidak menunjukkan perbedaan, sehingga semua pengamat dapat sepakat mengenai waktu yang sama.

Namun, dengan perkembangan teori relativitas umum dan konsep ruang-waktu terdeformasi, pandangan ini telah berubah secara signifikan. Kini, ruang-waktu dipahami sebagai entitas dinamis yang tidak hanya menjadi latar belakang bagi pergerakan materi, tetapi juga berinteraksi secara aktif dengan materi itu sendiri. Dalam penelitian ini, ruang-waktu dapat mempengaruhi bagaimana materi bergerak dan berperilaku. Misalnya, kehadiran massa atau energi dapat menyebabkan kelengkungan pada ruang-waktu, yang pada gilirannya mempengaruhi jalur yang diambil oleh objek-objek yang bergerak di dalamnya.

Lebih lanjut, konten materi yang ada dalam ruang-waktu, yang dinyatakan melalui tensor energi-momentum  $T_{\alpha}$  berfungsi untuk menentukan sifat geometri ruang-waktu itu sendiri. Hal ini berarti bahwa distribusi massa dan energi tidak hanya dipengaruhi oleh geometri ruang-waktu, tetapi juga berkontribusi pada pembentukan geometri itu. Dengan kata lain, ada hubungan timbal balik antara geometri dan konten materi, keduanya saling mempengaruhi dalam cara yang kompleks.

Aspek lain yang penting dari teori ini adalah sifat non-linier dari persamaan Einstein. Dalam penelitian ini, efek linier merujuk pada situasi di mana respons sistem sebanding dengan penyebabnya. Misalnya, jika diubah kondisi awal sedikit saja, maka perubahan yang terjadi pada respons sistem juga akan relatif kecil. Namun, dalam sistem non-linier, hubungan ini menjadi lebih rumit. Dalam proses non-linier, perubahan kecil dalam kondisi awal dapat menghasilkan perubahan besar dan tidak terduga dalam respons sistem. Hal ini dapat menyebabkan perilaku sistem yang sangat kompleks dan sulit diprediksi.

Contoh dari fenomena non-linier ini bisa dilihat dalam banyak aspek fisika modern, seperti dalam dinamika fluida atau interaksi medan kuantum. Dalam konteks relativitas umum, ini berarti bahwa efek dari massa dan energi pada kelengkungan ruang-waktu tidak selalu dapat diprediksi dengan mudah, interaksi tersebut bisa menghasilkan efek yang lebih besar dari sekadar jumlah bagian-bagiannya.

Penjelasan diatas telah dijelaskan pula dalam Al-Qur'an bahwa kekuasaan dan kebesaran Allah dapat menciptakan dan mengatur alam semesta. Penjelasan tentang keteraturan dan dinamika alam semesta yang terdapat dalam Al-Qur'an dapat dihubungkan dengan konsep-konsep dalam fisika, khususnya relativitas umum,

yang menjelaskan interaksi gravitasi dan kelengkungan ruang-waktu. Keteraturan dalam Penciptaan Salah satu ayat yang mencolok dapat ditemukan dalam Surah Al-Anbiya (21:33), yang berbunyi

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ (٣)

*"Dan Dia-lah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing beredar pada garis edarnya."*

Dalam konteks ini, dilihat bahwa setiap benda langit memiliki pergerakan yang teratur dan dapat diprediksi, yang mencerminkan hukum-hukum fisika yang mengatur alam semesta. Konsep ini mirip dengan pemahaman dalam ilmu astronomi bahwa pergerakan benda langit mengikuti hukum-hukum Newton dan Einstein, yang menunjukkan bagaimana gravitasi mempengaruhi orbit planet, bulan, dan bintang. .

Dalam konteks ini, terdapat penekanan pada waktu dan pergerakan yang teratur, yang sejalan dengan konsep bahwa waktu dan ruang saling terkait. Relativitas umum menjelaskan bagaimana pengaruh gravitasi dapat memperlambat waktu, sehingga hubungan antara waktu dan ruang menjadi kompleks dan saling mempengaruhi. Dampak pada Pemahaman Ilmiah Keteraturan, ketentuan, dan keseimbangan yang disebutkan dalam ayat-ayat ini bukan hanya menunjukkan kekuasaan Allah, tetapi juga membuka pemahaman tentang bagaimana ilmu pengetahuan dan iman saling melengkapi. Dalam kajian fisika modern, penemuan mengenai kelengkungan ruang-waktu dan bagaimana massa mempengaruhi struktur ruang memberikan wawasan baru tentang sifat alam semesta. Konsep-konsep ini menciptakan jembatan antara spiritualitas dan sains, yang memungkinkan untuk dipahami bahwa penciptaan Allah tidak hanya berfungsi secara fisik, tetapi juga mencerminkan

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan analisa di atas maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan medan Einstein yang terdeformasi dengan parameter  $\alpha$  dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$[G_{mn}]^\alpha = [R_{mn}]^\alpha - \frac{1}{2} R^\alpha g_{mn}$$

Di sini,  $G_{mn}$  adalah tensor Einstein,  $R_{mn}$  adalah tensor Ricci,  $R$  adalah skalar Ricci, dan  $g_{mn}$  adalah tensor metrik. Deformasi ini memperkenalkan pengaruh dari turunan fraksional konformabel, yang memungkinkan analisis kelengkungan ruang-waktu dengan cara yang lebih kompleks.

2. Metrik Schwarzschild yang terdeformasi- $\alpha$  mencakup modifikasi berdasarkan parameter  $\alpha$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)} dr^2 + r^2 \theta^{2(\alpha-1)} d\theta^2 + r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2 \theta d\phi^2$$

yang mempengaruhi bagaimana ruang-waktu berperilaku di sekitar objek masif. Metrik ini dapat ditulis dalam bentuk umum yang mencakup interaksi lebih luas.

3. Simbol Christoffel dihitung menggunakan turunan fraksional konformabel dari tensor metrik schwarzschild, memberikan informasi tentang bagaimana vektor berubah dalam geometri ruang-waktu. Tensor Riemann mengukur kelengkungan ruang-waktu. Tensor Ricci diperoleh dari kontraksi tensor Riemann dan digunakan untuk menghubungkan distribusi massa dan energi dengan

kelengkungan ruang-waktu. Skalar Ricci dihasilkan dari kontraksi tensor Ricci, memberikan ukuran kelengkungan keseluruhan dari ruang-waktu. Dengan memanfaatkan semua komponen ini, persamaan medan Einstein dapat dimodifikasi untuk mencerminkan efek deformasi akibat turunan fraksional konformabel, menghasilkan ruang waktu schwarzschild yang dinamis serta persamaan medan einstein yang menjadi non-linear.

## 5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan besar nilai optimal dari parameter  $\alpha$  dalam konteks turunan konformabel, sehingga dapat mengeksplorasi bagaimana variasi nilai  $\alpha$  mempengaruhi sifat-sifat matematis dan aplikatif.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math.*
- Anpira, N. (2020). *Studi Orbit Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild Dalam Koordinat Isotropik*. UINMA: Malang.
- Anugraha, R. (2011). *Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press
- Arczewski, K. (1986). Determination of Christoffel Symbols of the first kind for a class of rigid body systems by topological considerations. *International Journal of Mechanical Sciences*.
- Atangana, A., & Secer, A. (2013). A Note on Fractional Order Derivatives and Table of Fractional Derivatives of Some Special Functions. *Abstract and Applied Analysis*.
- Blinn, C. (2017). Schwarzschild Solution to Einstein's General Relativity. *Journal of Modern Physics*.
- Chung, W. S. (2014). Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative . *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- Chung, W. S., & Hasanabadi. (2017). Dynamics of a Particle in a Viscoelastic Medium with Conformable Derivative. *Int. J. Theor. Phys.*
- Chung, W. S., & Honnkonnou, M. N. (2020). Deformed special relativity based on  $\alpha$ -deformed binary operations. *Int. J. Theor. Phys.*
- Clifton, T. (2017). *From Newton to Einstein*. Oxford: Oxford University Press.
- Das, A. J. (2007). The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*
- Gao, F., & Chi, C. (2020). Improvement on Conformable Fractional Derivative and its Applications in fractional Differential Equation. *Journal Function Spaces*.
- Gozutoka, N., & Gozutoka, U. (2017). Multivariable Conformable Fractional Calculus. *Filomat*, 32.
- Hafele, J., & Keating, R. E. (2005). Around the World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains. *JSTOR*.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). *Fundamentals of Physics*. 10th Ed., John Wiley and Sons, NY.
- Has, A., Yilmaz, B., & Baleanu, D. (2024). *On The Geometric and Physical Properties of Conformable Derivative*. Math. Sci. Appl. E-note, 60-70.
- Hawking, S. W., & Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure Of Space Time*.

- Houkonnou, M. N., Landalidji, M. J., & Mitrovic, M. (2022). Einstein field equation , recursion operators, Noether and master symmetries in conformable Poisson manifold. *arXiv.2203.10096*,
- Kareem, A. M. (2017). Conformable Fractional Derivatives and It Is Applications for Solving Fractional Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics*.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Hammad, M. A. (2019). Geometric Meaning of Conformable Derivative Via Fractional Cords. *J. Math. Computer Sci*.
- Kline, J. (n.d.). *Closed Connected Sets Which Are Disconnected by the Removal of a Finite Number of Points*. University of Pennsylvania.
- Lovelock, D. (1971). The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12, 498-501.
- Marda, Y. (2023). Black Holes. *International Journal of Creative Research Thoughts*, 11.
- Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. San Francisco
- Nascimento, L. (2020). *Simbolos De Christoffel Via Formalismo Lagrangeano*. Revista Tecnológica
- Osborne, I. S., Rowan, L. R., & Coontz, R. (2002). *Spacetime, Warped Branes, and Hidden Dimensions*. 1417-1417.
- Pawar, D. D., Raut, D. K., & Patil, W. D. (2020). Einstein Field Equations Within Conformable Fractional Derivative. *Advance and Application in Mathematical Science*, 1029-1045.
- Rafelski, J. (2022). Time Dilation. In: *Modern Special Relativity*. 978-3-030-54351-8
- Ramadhan, M., & Subagyo, B. A. (2016). Pengaruh Konstanta Kosmologi Terhadap Model Standar Alam Semesta. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, vol. 5, no. 2
- Rezzolla, L. (2023). *Spacetime, Curvature and Gravity*. In *The Irresistible Attraction of Gravity: A Journey to Discover Black Holes*. 9781009198752
- Romadani, Arista. (2015). *Lubang Hitam Schwarzschild Pada Perluasan Teori Relativitas Umum*. UGM: Daerah Istimewa Yogyakarta.
- Romano, A. M. (2019). *Schwarzschild's Solution and Black Holes*. In: *The Physical and Mathematical Foundations of the Theory of Relativity*. 978-3-030-27237-1
- Schmitz, W. (2022). *The Minkowski Metric*. In: *Understanding Relativity*. Springer Cham
- Schouten, J. (2013). *An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications*. doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-662-12927-2>

- Sfarti, A. (2012). Application of particle accelerators for the experimental measurement of relativistic length contraction. *International Journal of Nuclear Energy Science and Technology*.
- Sochi, T. (2016). *Tensor Calculus*. London: Department of Physics & Astronomy, University College London.
- Wesson, P. (2014). *Einstein's Equations, Cosmology, and Astrophysics*. Springer Handbook of Spacetime

# LAMPIRAN

## LAMPIRAN

Perhitungan Simbol Christoffel

$$\text{Untuk, } g^{11} = \frac{1}{-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)t^{2(\alpha-1)}}$$

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{(r-2M)t^{2\alpha-2}} \left( \partial_t^\alpha - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{(r-2M)t^{2\alpha-2}} \left( \frac{r}{r} - \frac{2M}{r} \right) (2\alpha - 2) t^{\alpha-2} \\ &= \frac{r-2M}{(r-2M)t^{2\alpha-2}} t^{2\alpha-2} (\alpha - 1) \\ &= t^{-\alpha} (\alpha - 1) = \frac{\alpha - 1}{t^\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{r}{(r-2M)t^{2\alpha-2}} \right) \left( \partial_r^\alpha - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{r}{(r-2M)t^{2\alpha-2}} t^{2(\alpha-1)} \partial_r^\alpha \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \\ &= \frac{r}{(r-2M)2} 2Mr^{-1-\alpha} = \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{14}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{41} + \partial_4 g_{11} - \partial_1 g_{14}) = 0$$

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) = \frac{M}{(r-2M)r^\alpha}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{24}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{41} + \partial_4 g_{12} - \partial_1 g_{24}) = 0$$

$$\mu = 3, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{13} - \partial_1 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_2 g_{13} - \partial_1 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{34}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{41} + \partial_4 g_{13} - \partial_1 g_{34}) = 0$$

$$\mu = 4, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{41}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_4 g_{11} + \partial_1 g_{14} - \partial_1 g_{41}) = 0$$

$$\Gamma_{42}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_4 g_{21} + \partial_2 g_{14} - \partial_1 g_{42}) = 0$$

$$\Gamma_{43}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_4 g_{31} + \partial_3 g_{14} - \partial_1 g_{43}) = 0$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_4 g_{41} + \partial_4 g_{14} - \partial_1 g_{44}) = 0$$

$$\text{Untuk, } g^{22} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^{2(\alpha-1)}}$$

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \right) \left( \partial_r^\alpha - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) t^{2(\alpha-1)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \right) t^{2(\alpha-1)} 2Mr^{-1-\alpha} \\
&= \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r^{3\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{14}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{42} + \partial_4 g_{21} - \partial_2 g_{14}) = 0$$

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \left( \partial_r^\alpha \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} r^{2(\alpha-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \left( \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} (2\alpha-2)r^{\alpha-2} + r^{2(\alpha-1)} \frac{2Mr^{-1-\alpha}}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \frac{(2\alpha-2)r^{\alpha-2}}{\frac{r-2M}{r}} + \frac{1}{2} \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \frac{r^{(2\alpha-2)} 2M}{\left( \frac{r-2M}{r} \right)^2 r^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{r-2M}{r^{\alpha+1}} \frac{(\alpha-1)r}{r-2M} + \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \frac{r^{(2\alpha-2)} M}{\frac{r-2M}{r} \frac{r-2M}{r} r^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{(r-2M)(\alpha-1)r}{r^{\alpha+1} (r-2M)} + \frac{M}{(r-2M)r^\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha-1)r + (3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha}$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{24}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{42} + \partial_4 g_{22} - \partial_2 g_{24}) = 0$$

$$\mu = 3, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{23} - \partial_2 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{23} - \partial_2 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r - 2M}{r^{2\alpha-1}} (-\partial_r^\alpha r^2 \theta^{2\alpha-2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r - 2M}{r^{2\alpha-1}} \theta^{2\alpha-2} (2r^{2-\alpha})$$

$$= -\frac{r - 2M}{r^{3\alpha-3}} \theta^{2\alpha-2}$$

$$\Gamma_{34}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{42} + \partial_4 g_{23} - \partial_2 g_{34}) = 0$$

$$\mu = 4, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{41}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_4 g_{12} + \partial_1 g_{24} - \partial_2 g_{41}) = 0$$

$$\Gamma_{42}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_4 g_{22} + \partial_2 g_{24} - \partial_2 g_{42}) = 0$$

$$\Gamma_{43}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_4 g_{32} + \partial_3 g_{24} - \partial_2 g_{43}) = 0$$

$$\Gamma_{44}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_4 g_{42} + \partial_4 g_{24} - \partial_2 g_{44})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r - 2M}{r^{2\alpha-1}} (-\partial_r^\alpha r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r - 2M}{r^{2\alpha-1}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta (2r^{2-\alpha})$$

$$= -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta$$

Untuk

$$\text{Untuk, } g^{33} = \frac{1}{r^2 \theta^{2(\alpha-1)}}$$

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{14}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{43} + \partial_4 g_{31} - \partial_3 g_{14}) = 0$$

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \theta^{2\alpha-2}} \partial_r^\alpha r^2 \theta^{2\alpha-2}$$

$$= \frac{1}{2r^2} r^{2-\alpha} = \frac{1}{r^\alpha}$$

$$\Gamma_{24}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{43} + \partial_4 g_{32} - \partial_3 g_{24}) = 0$$

$$\mu = 3, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = \frac{1}{r^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \theta^{2\alpha-2}} \partial_\theta^\alpha r^2 \theta^{2\alpha-2} \\
&= \frac{r^2}{2r^2 \theta^{2\alpha-2}} (2\alpha - 2) \theta^{\alpha-2} = \frac{(\alpha - 1)}{\theta^\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{34}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{43} + \partial_4 g_{33} - \partial_3 g_{34}) = 0$$

$$\mu = 4, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{41}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_4 g_{13} + \partial_1 g_{34} - \partial_3 g_{41}) = 0$$

$$\Gamma_{42}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_4 g_{23} + \partial_2 g_{34} - \partial_3 g_{42}) = 0$$

$$\Gamma_{43}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_4 g_{33} + \partial_3 g_{34} - \partial_3 g_{43}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{44}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_4 g_{43} + \partial_4 g_{34} - \partial_3 g_{44}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \theta^{2\alpha-2}} (-\partial_\theta^\alpha r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta) \\
&= -\frac{r^2 \phi^{2\alpha-2}}{2r^2 \theta^{2\alpha-2}} \partial_\theta^\alpha \sin^2 \theta \\
&= -\frac{r^2 \phi^{2\alpha-2}}{2r^2 \theta^{2\alpha-2}} 2 \sin \theta \cos \theta \theta^{1-\alpha} \\
&= -\frac{\sin \theta \cos \theta \phi^{2\alpha-2}}{\theta^{3\alpha-3}}
\end{aligned}$$

$$\text{Untuk, } g^{44} = \frac{1}{r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2}$$

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{11}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_1 g_{14} + \partial_1 g_{41} - \partial_4 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_1 g_{24} + \partial_2 g_{41} - \partial_4 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_1 g_{34} + \partial_3 g_{41} - \partial_4 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_1 g_{44} + \partial_4 g_{41} - \partial_4 g_{14}) = 0$$

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{21}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_2 g_{14} + \partial_1 g_{42} - \partial_4 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_2 g_{24} + \partial_2 g_{42} - \partial_4 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_2 g_{34} + \partial_3 g_{42} - \partial_4 g_{23}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{24}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} (\partial_2 g_{44} + \partial_4 g_{42} - \partial_4 g_{24}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} (\partial_r^\alpha r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{2r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} 2r^{2-\alpha} = \frac{1}{r^\alpha} \end{aligned}$$

$$\mu = 3, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{31}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_3 g_{14} + \partial_1 g_{43} - \partial_4 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_3 g_{24} + \partial_2 g_{43} - \partial_4 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_3 g_{34} + \partial_3 g_{43} - \partial_4 g_{33}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{34}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} (\partial_3 g_{44} + \partial_4 g_{43} - \partial_4 g_{34}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} (\partial_\theta^\alpha r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\phi^{2\alpha-2} r^2}{2r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta \theta^{1-\alpha}}{2 \sin^2 \theta} = \cot \theta \theta^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\mu = 4, \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_{41}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{14} + \partial_1 g_{44} - \partial_4 g_{41}) = 0$$

$$\Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{24} + \partial_2 g_{44} - \partial_4 g_{42}) = \frac{1}{r^\alpha}$$

$$\Gamma_{43}^4 = \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{34} + \partial_3 g_{44} - \partial_4 g_{43}) = \cot \theta \theta^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} g^{44} (\partial_4 g_{44} + \partial_4 g_{44} - \partial_4 g_{44}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} (\partial_\phi^\alpha r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\sin^2 \theta r^2}{2r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} (\partial_\phi^\alpha \phi^{2\alpha-2}) \\ &= \frac{\sin^2 \theta r^2}{2r^2 \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta} (2\alpha - 2) \phi^{\alpha-2} \\ &= \frac{(\alpha - 1)}{\phi^\alpha} \end{aligned}$$

Perhitungan Tensor Riemann

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps} [R_{rmn}^s]^\alpha$$

$$[R_{prmn}]^\alpha = g_{ps} (\partial_m \Gamma_{nr}^s - \partial_n \Gamma_{mr}^s + \Gamma_{m\lambda}^s \Gamma_{nr}^\lambda - \Gamma_{n\lambda}^s \Gamma_{mr}^\lambda)$$

Lalu substitusikan komponen komponen tensor metrik dan simbol christoffel yang tidak nol.

$$\begin{aligned} [R_{1111}]^\alpha &= g_{1s} (\partial_1 \Gamma_{11}^s - \partial_1 \Gamma_{11}^s + \Gamma_{1\lambda}^s \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^s \Gamma_{11}^\lambda) \\ &= g_{11} (\partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{11}^\lambda) \\ &\quad + g_{12} (\partial_1 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{1\lambda}^2 \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^2 \Gamma_{11}^\lambda) \\ &\quad + g_{13} (\partial_1 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{1\lambda}^3 \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^3 \Gamma_{11}^\lambda) \\ &\quad + g_{14} (\partial_1 \Gamma_{11}^4 - \partial_1 \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{1\lambda}^4 \Gamma_{11}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^4 \Gamma_{11}^\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R_{1212}]^\alpha &= g_{1s}(\partial_1 \Gamma_{22}^s - \partial_2 \Gamma_{12}^s + \Gamma_{1\lambda}^s \Gamma_{21}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^s \Gamma_{12}^\lambda) \\
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{21}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^1 \Gamma_{12}^\lambda) \\
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{14}^1 \Gamma_{21}^4 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 \\
&\quad - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{24}^1 \Gamma_{12}^4) \\
&= g_{11}(-\partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1) \\
&= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} \left(-\partial_r \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} + \frac{\alpha-1}{t^\alpha} \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} \frac{M}{(r-2M)r^\alpha}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} \left(\frac{M\alpha(r-2M)}{(r-2M)^2 r^{2\alpha}} + \frac{\alpha-1}{t^\alpha} \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} - \frac{M^2}{(r-2M)^2 r^{2\alpha}}\right) \\
&= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^{2(\alpha-1)} \left(\frac{M\alpha(r-2M)t^\alpha + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha - m^2 t^\alpha}{(r-2M)^2 t^\alpha r^{2\alpha}}\right) \\
[R_{1212}]^\alpha &= -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{(r-2M)r^{2\alpha+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R_{1313}]^\alpha &= g_{1s}(\partial_1 \Gamma_{33}^s - \partial_3 \Gamma_{13}^s + \Gamma_{1\lambda}^s \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^s \Gamma_{13}^\lambda) \\
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^1 \Gamma_{13}^\lambda) \\
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{14}^1 \Gamma_{33}^4 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 \\
&\quad - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{34}^1 \Gamma_{13}^4) \\
&= g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^2 \\
&= -\frac{(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r} \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} \left(-\frac{(r-2M)\theta^{2\alpha-2}}{r^{3\alpha-3}}\right) \\
[R_{1313}]^\alpha &= \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R_{1414}]^\alpha &= g_{1s}(\partial_1 \Gamma_{44}^s - \partial_4 \Gamma_{14}^s + \Gamma_{1\lambda}^s \Gamma_{44}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^s \Gamma_{14}^\lambda) \\
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{44}^1 - \partial_4 \Gamma_{14}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{44}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^1 \Gamma_{14}^\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_{11}(\partial_1 \Gamma_{44}^1 - \partial_4 \Gamma_{14}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^3 + \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^4 - \Gamma_{41}^1 \Gamma_{14}^1 - \Gamma_{42}^1 \Gamma_{14}^2 \\
&\quad - \Gamma_{43}^1 \Gamma_{14}^3 - \Gamma_{44}^1 \Gamma_{14}^4) \\
&= g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^2 \\
&= -\frac{(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r} \frac{M}{(r-2M)r^\alpha} \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \right) \\
[R_{1414}]^\alpha &= \frac{(r-2M)t^{2\alpha-2} M \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r^{4\alpha-2}} \\
[R_{2121}]^\alpha &= [R_{1212}]^\alpha \\
[R_{2222}]^\alpha &= g_{2s}(\partial_2 \Gamma_{22}^s - \partial_2 \Gamma_{22}^s + \Gamma_{2\lambda}^s \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^s \Gamma_{22}^\lambda) \\
&= g_{21}(\partial_2 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{2\lambda}^1 \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^1 \Gamma_{22}^\lambda) \\
&\quad + g_{22}(\partial_2 \Gamma_{22}^2 - \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{22}^\lambda) \\
&\quad + g_{23}(\partial_2 \Gamma_{22}^3 - \partial_2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{2\lambda}^3 \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^3 \Gamma_{22}^\lambda) \\
&\quad + g_{24}(\partial_2 \Gamma_{22}^4 - \partial_2 \Gamma_{22}^4 + \Gamma_{2\lambda}^4 \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^4 \Gamma_{22}^\lambda) = 0 \\
[R_{2323}]^\alpha &= g_{2s}(\partial_2 \Gamma_{33}^s - \partial_3 \Gamma_{23}^s + \Gamma_{2\lambda}^s \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^s \Gamma_{23}^\lambda) \\
&= g_{22}(\partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^2 \Gamma_{23}^\lambda) \\
&= g_{22}(\partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{24}^2 \Gamma_{33}^4 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 \\
&\quad - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{34}^2 \Gamma_{23}^4) \\
&= g_{22}(\partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1}}{r-2M} \left( \partial_r \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \theta^{2\alpha-2} \right) - \frac{(\alpha-1)r + (3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha} \frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \theta^{2\alpha-2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \theta^{2\alpha-2} r^{-\alpha} \right) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1} \theta^{2\alpha-2}}{r-2M} \left( \frac{(3\alpha-3)(r-2M)}{r^{4\alpha-3}} + r^{2-4\alpha} - \frac{(\alpha-1)r + (3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha} \frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} r^{-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^{2\alpha-1}\theta^{2\alpha-2}}{r-2M} \left( \frac{(2\alpha-1)r-4M\alpha+M}{r^{4\alpha-3}} + r^{2-4\alpha} \right) \\
&= \frac{(2\alpha-1)r-4M\alpha+m+r^{-1}r^{2\alpha-1}\theta^{2\alpha-2}}{r^{2\alpha-2}} \frac{1}{r-2M} \\
[R_{2323}]^\alpha &= \frac{r\theta^{2\alpha-2}}{r-2M} (2\alpha-1)r-4M\alpha+m+r^{-1} \\
[R_{2424}]^\alpha &= g_{2s}(\partial_2\Gamma_{44}^s - \partial_4\Gamma_{24}^s + \Gamma_{2\lambda}^s\Gamma_{42}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^s\Gamma_{24}^\lambda) \\
&= g_{22}(\partial_2\Gamma_{44}^2 - \partial_4\Gamma_{24}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2\Gamma_{42}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^2\Gamma_{24}^\lambda) \\
&= g_{22}(\partial_2\Gamma_{44}^2 - \partial_4\Gamma_{24}^2 + \Gamma_{21}^2\Gamma_{44}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{44}^2 + \Gamma_{23}^2\Gamma_{44}^3 + \Gamma_{24}^2\Gamma_{44}^4 - \Gamma_{41}^2\Gamma_{24}^1 - \Gamma_{42}^2\Gamma_{24}^2 \\
&\quad - \Gamma_{43}^2\Gamma_{24}^3 - \Gamma_{44}^2\Gamma_{24}^4) \\
&= g_{22}(\partial_2\Gamma_{44}^2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{44}^2 - \Gamma_{44}^2\Gamma_{24}^4) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1}}{r-2M} \left( \partial_r \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha-1)r+(3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha} \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \right) r^{-\alpha} \right) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1}\phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} \left( \partial_2 \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right) + \frac{(\alpha-1)r+(3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha} \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right) r^{-\alpha} \right) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1}\phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} \left( \frac{(3\alpha-3)(r-2M)}{r^{4\alpha-3}} + r^{2-4\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha-1)r+(3-2\alpha)M}{(r-2M)r^\alpha} \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right) - \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \right) r^{-\alpha} \right) \\
&= \frac{r^{2\alpha-1}\phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} \left( \frac{(2\alpha-1)r-4M\alpha+M}{r^{4\alpha-3}} + r^{2-4\alpha} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^{2\alpha-1} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} \left( \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right) \\
[R_{2424}]^\alpha &= \frac{r \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta}{r-2M} (2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1} \\
[R_{3131}]^\alpha &= [R_{1313}]^\alpha \\
[R_{3232}]^\alpha &= [R_{2323}]^\alpha \\
[R_{3333}]^\alpha &= g_{3s} (\partial_3 \Gamma_{33}^s - \partial_3 \Gamma_{33}^s + \Gamma_{3\lambda}^s \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^s \Gamma_{33}^\lambda) \\
&= g_{31} (\partial_3 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{3\lambda}^1 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^1 \Gamma_{33}^\lambda) \\
&\quad + g_{32} (\partial_3 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{3\lambda}^2 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^2 \Gamma_{33}^\lambda) \\
&\quad + g_{33} (\partial_3 \Gamma_{33}^3 - \partial_3 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{33}^\lambda) \\
&\quad + g_{33} (\partial_3 \Gamma_{33}^4 - \partial_3 \Gamma_{33}^4 + \Gamma_{3\lambda}^4 \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^4 \Gamma_{33}^\lambda) = 0 \\
[R_{3434}]^\alpha &= g_{3s} (\partial_3 \Gamma_{44}^s - \partial_4 \Gamma_{34}^s + \Gamma_{3\lambda}^s \Gamma_{44}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^s \Gamma_{34}^\lambda) \\
&= g_{33} (\partial_3 \Gamma_{44}^3 - \partial_4 \Gamma_{34}^3 + \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{44}^\lambda - \Gamma_{4\lambda}^3 \Gamma_{34}^\lambda) \\
&= g_{33} (\partial_3 \Gamma_{44}^3 - \partial_4 \Gamma_{34}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{44}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{44}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{44}^3 + \Gamma_{34}^3 \Gamma_{44}^4 - \Gamma_{41}^3 \Gamma_{34}^1 - \Gamma_{42}^3 \Gamma_{34}^2 \\
&\quad - \Gamma_{43}^3 \Gamma_{34}^3 - \Gamma_{44}^3 \Gamma_{34}^4) \\
&= g_{33} (\partial_3 \Gamma_{44}^3 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{44}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{44}^3 - \Gamma_{44}^3 \Gamma_{34}^4) \\
&= r^2 \theta^{2\alpha-2} \left( \partial_\theta \left( -\frac{\sin \theta \cos \theta \phi^{2\alpha-2}}{\theta^{3\alpha-3}} \right) + r^{-\alpha} \left( -\frac{r-2M}{r^{3\alpha-3}} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha-1}{\theta^\alpha} \left( -\frac{\sin \theta \cos \theta \phi^{2\alpha-2}}{\theta^{3\alpha-3}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( -\frac{\sin \theta \cos \theta \phi^{2\alpha-2}}{\theta^{3\alpha-3}} \right) \theta^{1-\alpha} \cot \theta \right) \\
&= r^2 \theta^{2\alpha-2} \phi^{2\alpha-2} \left( \partial_\theta \left( -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\theta^{3\alpha-3}} \right) + \left( -\frac{r-2M}{r^{4\alpha-3}} \sin^2 \theta \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{(\alpha-1) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{4\alpha-3}} \right) - \left( -\frac{\cos^2 \theta}{\theta^{4\alpha-2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \theta^{2\alpha-2} \phi^{2\alpha-2} \left( -\frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\theta^{-4\alpha-4}} - \frac{(3\alpha - 3) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{4\alpha-3}} \right. \\
&\quad \left. + \left( -\frac{r - 2M}{r^{4\alpha-3}} \sin^2 \theta \right) + \left( -\frac{(\alpha - 1) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{4\alpha-3}} \right) - \left( -\frac{\cos^2 \theta}{\theta^{4\alpha-2}} \right) \right) \\
&= r^2 \theta^{2\alpha-2} \phi^{2\alpha-2} \left( \sin^2 \theta (\theta^{4\alpha-4} + (r - 2M)r^{-4\alpha+3}) + \frac{(3 - 2\alpha) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{4\alpha-3}} \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 \theta (\theta^{2-4\alpha} - \theta^{4\alpha-3}) \right) \\
&= r^2 \theta^{6\alpha-6} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta + \theta^{2\alpha-2} \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta (r - 2M)r^{-2\alpha+3} \\
&\quad + r^2 \phi^{2\alpha-2} \frac{(3 - 2\alpha) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{2\alpha-1}} + r^2 \phi^{2\alpha-2} \cos^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5}) \\
&= \phi^{2\alpha-2} \sin^2 \theta (r^2 \theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2} (r - 2M)r^{-2\alpha+3}) \\
&\quad + r^2 \phi^{2\alpha-2} \left( \frac{(3 - 2\alpha) \sin \theta \cos \theta}{\theta^{2\alpha-1}} + \cos^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5}) \right)
\end{aligned}$$

Tensor ricci:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{\mu\beta} R_{\mu 1 \beta 1} \\
&= g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} + g^{44} R_{4141} \\
&= g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} + g^{44} R_{4141}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \left( -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{(r-2M)r^{2\alpha+1}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\theta^{2(\alpha-1)}} \left( \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\phi^{2(\alpha-1)}\sin^2\theta} \left( \phi^{2\alpha-2}\sin^2\theta (r^2\theta^{6\alpha-6} \right. \\
&\quad + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+3}) \\
&\quad + r^2\phi^{2\alpha-2}((3-2\alpha)\sin\theta\cos\theta\theta^{-2\alpha+1} \\
&\quad \left. + \cos^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right) \\
&= -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{r^{4\alpha}} + \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha}} \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \left( \sin^2\theta (r^2\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+3}) \right. \\
&\quad \left. + r^2((3-2\alpha)\sin\theta\cos\theta\theta^{-2\alpha+1} + \cos^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right) \\
&= \frac{t^{2\alpha-2}(M(r-2M) - (\alpha M - M^2)) - (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{r^{4\alpha}} \\
&\quad + \frac{\sin^2\theta (r^2\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+3})}{r^2\sin^2\theta} \\
&\quad + \frac{r^2((3-2\alpha)\sin\theta\cos\theta\theta^{-2\alpha+1} + \cos^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5}))}{r^2\sin^2\theta} \\
&= t^{2\alpha-2}r^{-4\alpha}(M(r-2M) - (\alpha M - M^2)) - (\alpha-1)M(r-2M)r^{-3\alpha}t^{\alpha-2} \\
&\quad + (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \\
&\quad + ((3-2\alpha)\cot\theta\theta^{-2\alpha+1} + \cot^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5}))
\end{aligned}$$

$$R_{22} = g^{\mu\beta}R_{\mu 2\beta 2}$$

$$= g^{11}R_{1212} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3232} + g^{44}R_{4242}$$

$$= g^{11}R_{1212} + g^{33}R_{3232} + g^{44}R_{4242}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{r}{(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} \left( -\frac{(\alpha M - M^2)t^{2\alpha-2} + (\alpha-1)M(r-2M)r^\alpha t^{\alpha-2}}{(r-2M)r^{2\alpha+1}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\theta^{2(\alpha-1)}} \left( \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} \right) \\
&\quad + \left( \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r(r-2M)} \right) \\
&= \frac{(\alpha M - M^2)}{(r-2M)^2 r^{2\alpha}} + \frac{(\alpha-1)Mt^{-1}}{(r-2M)r^\alpha} + \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-4}} \\
&\quad + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r(r-2M)}
\end{aligned}$$

$$R_{33} = g^{\mu\beta} R_{\mu 3\beta 3}$$

$$= g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{33}R_{3333} + g^{44}R_{4343}$$

$$= g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{44}R_{4343}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{-(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} \left( \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} \right) \\
&\quad + \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \left( \frac{r\theta^{2\alpha-2}}{r-2M} (2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\phi^{2(\alpha-1)}\sin^2} \left( \phi^{2\alpha-2}\sin^2\theta (r^2\theta^{6\alpha-6} \right. \\
&\quad + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+3}) \\
&\quad + r^2\phi^{2\alpha-2}((3-2\alpha)\sin\theta\cos\theta\theta^{-2\alpha+1} \\
&\quad \left. + \cos^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{M\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-3}} + \frac{\theta^{2\alpha-2}(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \\
&\quad + \left( (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right. \\
&\quad \left. + ((3-2\alpha)\cot\theta\theta^{-2\alpha+1} + \cot^2\theta(\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right)
\end{aligned}$$

$$R_{44} = g^{\mu\beta} R_{\mu 4 \beta 4}$$

$$= g^{11}R_{1414} + g^{22}R_{2424} + g^{33}R_{3434} + g^{44}R_{4444}$$

$$= g^{11}R_{1414} + g^{22}R_{2424} + g^{33}R_{3434}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi^{2\alpha-2} \left( \sin^2\theta \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\theta^{4\alpha-4} + (r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \cos\theta\theta^{-4\alpha+2}((3-2\alpha)\sin\theta\theta^{-3} + \cos\theta(1-\theta^{8\alpha-6})) \right) \right)
\end{aligned}$$

### Skalar ricci

$$R^\alpha = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44}$$

$$\begin{aligned}
R^\alpha = & \left( -\frac{r}{(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} t^{2\alpha-2} r^{-4\alpha} (M(r-2M) - (\alpha M - M^2)) \right. \\
& - \frac{r}{-(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} (\alpha-1)M(r-2M)r^{-3\alpha} t^{\alpha-2} \\
& + \frac{r}{-(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} (\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \\
& + \frac{r}{-(r-2M)t^{2(\alpha-1)}} (\cot \theta (3-2\alpha)\theta^{-2\alpha+1} \\
& \left. + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5})) \right) \\
& + \frac{r-2M}{r^{2\alpha-1}} \left( \frac{(\alpha M - M^2)}{(r-2M)^2 r^{2\alpha}} + \frac{(\alpha-1)Mt^{-1}}{(r-2M)r^\alpha} + \frac{M(r-2M)t^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-4}} \right. \\
& \left. + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r(r-2M)} \right) \\
& + \frac{1}{r^2 \theta^{2(\alpha-1)}} \left( -\frac{M\theta^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-3}} + \frac{\theta^{2\alpha-2}(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} \right. \\
& + ((\theta^{6\alpha-6} + \theta^{2\alpha-2}(r-2M)r^{-2\alpha+1}) \\
& \left. + ((3-2\alpha)\cot \theta \theta^{-2\alpha+1} + \cot^2 \theta (\theta^{-2\alpha} - \theta^{6\alpha-5}))) \right) \\
& + \frac{1}{r^2 \phi^{2(\alpha-1)} \sin^2} \left( \phi^{2\alpha-2} \left( \sin^2 \theta \left( \frac{M}{r^{4\alpha-3}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(2\alpha-1)r - 4M\alpha + m + r^{-1}}{r^{2\alpha-2}} + (\theta^{4\alpha-4} + (r-2M)r^{-2\alpha+1}) \right) \right) \\
& \left. + (\cos \theta \theta^{-4\alpha+2} ((3-2\alpha)\sin \theta \theta^{-3} + \cos \theta (1 - \theta^{8\alpha-6}))) \right)
\end{aligned}$$