

**ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL *PREDATOR-PREY*
BAZYKIN**

SKRIPSI

**OLEH:
SITI KHANIFAH
NIM. 18610080**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024**

**ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL *PREDATOR-PREY*
BAZYKIN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Siti Khanifah
NIM. 18610080**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024**

ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL *PREDATOR-PREY* BAZYKIN

SKRIPSI

Oleh
Siti Khanifah
NIM. 18610080

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 18 Desember 2024

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001


Erna Herawati, M.Pd
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika




Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS BIFURKASI PADA MODEL *PREDATOR-PREY* BAZYKIN

SKRIPSI

Oleh
Siti Khanifah
NIM. 18610080

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 23 Desember 2024

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 1 : Juhari, M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Khanifah

NIM : 18610080

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Bifurkasi pada Model *Predator-Prey* Bazykin

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Desember 2024
Yang membuat pernyataan,



Siti Khanifah
NIM. 18610080

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang berjudul “Analisis Bifurkasi Pada Model *Predator-Prey* Bazykin”, dengan lancar. Kedua, sholawat dan salam semoga terus terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengarahkan umatnya dari masa kegelapan menuju masa yang terang-benderang seperti sekarang ini.

Penulis menyadari bahwa dalam menyelesaikan skripsi banyak yang berpartisipasi dengan merelakan waktu, pikiran serta tenaga dalam membantu peneliti. Pada kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, dan doa sehingga penelitian dapat terselesaikan dengan baik.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan berbagi pengetahuan kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si selaku Dosen Penguji 1 yang telah memberikan arahan, saran, dan masukan berharga untuk menyempurnakan penulisan skripsi ini.
7. Juhari, M.Si selaku Dosen Penguji 2 yang dengan penuh perhatian memberikan bimbingan, koreksi, serta kontribusi penting dalam proses menyempurnakan skripsi ini.
8. Ria Dhea Layla Nur Karisma, M.Si., selaku Dosen Wali selama masa kuliah yang telah memberikan arahan dan semangat dalam perkuliahan.

9. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Mauana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu.
10. Orang tua dan seluruh keluarga yang memberikan doa, dukungan dan semangat lahir maupun batin.
11. Semua pihak yang telah berkontribusi, baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan penyusunan skripsi, baik melalui dukungan emosional maupun dukungan finansial tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis telah menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan harapan bahwa tulisan ini dapat memberikan manfaat serta kontribusi bagi pembaca dan dunia ilmiah. Penulis mohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan yang ada. Semoga langkah kita selanjutnya selalu dilimpahi oleh rahmat dan keberkahan-Nya

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Malang, 23 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR SIMBOL	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN TEORI	6
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	6
2.2 Titik Keseimbangan	8
2.3 Nilai Eigen dan Vektor eigen	9
2.4 Analisis Kestabilan	10
2.5 Bifurkasi	12
2.6 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits	14
BAB III METODE PENELITIAN	20
3.1 Jenis Penelitian	20
3.2 Tahapan Penelitian	20
BAB IV PEMBAHASAN	22
4.1 Analisis Dinamik Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Bazykin	22
4.1.1 Titik Keseimbangan Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Bazykin	23
4.1.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Bazykin	27
4.1.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$	28
4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_2^* = (x_3^*, y_3^*)$	29
4.1.5 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$	30
4.1.6 Simulasi Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Bazykin Dan Interpretasi	31
4.2 Analisis Bifurkasi Model Matematika <i>Predator-Prey</i> Bazykin	39
4.3 Kajian Islam	40
BAB V PENUTUP	42
5.1 Kesimpulan	42

5.2 Saran.....	42
DAFTAR PUSTAKA.....	44
LAMPIRAN.....	45
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	52

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Variabel dan Nilai Parameter yang digunakan.....	22
Tabel 4.2	Hasil Simulasi Numerik dari Solusi y terhadap Waktu	33
Tabel 4.3	Hasil Simulasi Numerik dari Solusi x terhadap Waktu	35
Tabel 4.4	Hasil Simulasi Numerik dari Solusi x dan y terhadap Waktu	37

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Bifurkasi 3 Model Populasi terhadap Parameter b	13
Gambar 4.1	Grafik Banyaknya <i>Predator</i> terhadap Waktu.....	32
Gambar 4.2	Grafik Banyaknya <i>Prey</i> terhadap Waktu.....	34
Gambar 4.3	Grafik Banyaknya <i>Predator</i> dan <i>Prey</i> terhadap Waktu	36
Gambar 4.4	Grafik Bifurkasi <i>Prey</i> terhadap Parameter b	39

DAFTAR SIMBOL

$x(t)$	: Banyaknya populasi <i>prey</i> terhadap waktu t
$y(t)$	: Banyaknya populasi <i>predator</i> pada waktu t
r	: Laju pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>
K	: Daya dukung (<i>carrying capacity</i>) lingkungan
a	: Laju serang <i>predator</i> terhadap <i>prey</i>
b	: Efisiensi konversi <i>prey</i> ke <i>predator</i>
h	: Konstanta <i>half saturation</i>
m	: Laju kematian alami <i>predator</i>
γ	: Persaingan intraspesifik antara <i>predator</i>

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Script Matlab Interpretasi Grafik Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> , dan <i>Predator-Prey</i> Pada Saat $t = [0, 100]$	45
Lampiran 2	Script Matlab Interpretasi Grafik Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> , dan <i>Predator-Prey</i> Pada Saat $t = [0, 1000]$	46
Lampiran 3	RSTUDIO x terhadap b	47
Lampiran 4	Perhitungan Maple untuk Titik Keseimbangan Model <i>Predator-Prey</i>	48

ABSTRAK

Khanifah, Siti. 2024. **Analisis Bifurkasi Pada Model *Predator-Prey* Bazykin**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Bifurkasi, Model *Predator-Prey*, Model Logistik.

Skripsi ini membahas analisis bifurkasi pada model *predator-prey* Bazykin yang merupakan pengembangan dari model Rosenzweig-MacArthur dengan mempertimbangkan kompetisi intraspesifik antar *predator*. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan titik kesetimbangan. Selanjutnya dilakukan analisis bifurkasi akibat adanya perubahan dalam perilaku sistem. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki tiga titik kesetimbangan dengan syarat kestabilannya masing-masing $E_1^* = (0,0)$, $E_2^* = (K, 0)$ dan $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$. Berdasarkan hasil analisis kestabilan menunjukkan bahwa perubahan parameter b mempengaruhi perilaku sistem. Kemudian berdasarkan analisis bifurkasi, ketika parameter b melampaui nilai kritis ($b > 1.1667$) maka dapat terjadi bifurkasi *saddle node* yang mengakibatkan perubahan kualitatif kestabilan sistem.

ABSTRACT

Khanifah, Siti. 2024. **Bifurcation Analysis on the Bazykin Predator-Prey Model.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Bifurcation, Predator-Prey Model, Logistic Model.

This thesis discusses bifurcation analysis in the Bazykin predator-prey model which develops the Rosenzweig-MacArthur model by considering intraspecific competition between predators. The dynamic analysis includes determining and analyzing the stability of the equilibrium point. Furthermore, bifurcation analysis is carried out due to changes in the behavioral system. The results of the dynamic analysis show that the model has three equilibrium points with their respective stability conditions $E_1^* = (0,0)$, $E_2^* = (K, 0)$, and $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$. The results of the stability analysis show that changes in parameter b influence the behavior of the system. Then, based on the bifurcation analysis, when parameter b exceeds the critical value ($b > 1.1667$), a saddle-node bifurcation may occur, leading to qualitative changes in the system's stability.

مستخلص البحث

حنيفة، سيتي. ٢٠٢٤. تحليل التشعب في نموذج بازيكين المفترس-الفريسة. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف:
(١) عثمان باجالاي، الماجستير. المشرفة (٢) إيرناهيراواني، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: التشعب، نموذج المفترس والفريسة، النموذج اللوجستي.

ناقش هذا البحث تحليل التشعب في نموذج بازيكين المفترس والفريسة والذي يعد تطويراً لنموذج روزنزويج-ماك آرثر من خلال النظر في المنافسة بين الأنواع بين الحيوانات المفترسة. تضمن التحليل الديناميكي الذي تم إجراؤه تحديد نقطة التوازن وتحليل استقرار نقطة التوازن. بعد ذلك، تم إجراء تحليل التشعب بسبب التغيرات في سلوك النظام. ظهرت نتائج التحليل الديناميكي أن النموذج يحتوي على ثلاث نقاط توازن مع شروط الاستقرار الخاصة بها $E_1^* = (0,0)$ ، $E_2^* = (K, 0)$ ، $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$ ، وبناءً على نتائج تحليل الاستقرار تبين أن التغيرات في المعلمة b تؤثر على سلوك النظام. بناءً على تحليل التشعب، عندما تتجاوز المعلمة b القيمة الحرجة ($b > 1.1667$) يمكن أن يحدث تشعب عقدة السرج مما يؤدي إلى تغيير النوع في استقرار النظام.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di kehidupan terdapat interaksi di antara makhluk hidup, baik itu interaksi positif maupun negatif. Salah satu interaksi tersebut adalah predasi atau pemangsaan, yaitu terjadinya hubungan antara pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*). Pemangsa adalah organisme yang menjadikan sesuatu sebagai sumber makanannya, contohnya buaya. Sedangkan mangsa adalah organisme yang ditangkap dan dimangsa oleh pemangsa, contohnya rusa. Interaksi antara pemangsa dan mangsa disebut dengan *predator-prey* dan dapat dimodelkan menggunakan model matematika. Model matematika digunakan untuk menyederhanakan dan menggambarkan fenomena dalam kehidupan nyata sehingga permasalahan lebih mudah dipahami (Ndii, 2018).

Dalam ekologi, salah satu model matematika yang pertama kali diperkenalkan adalah model *predator-prey* Lotka-Volterra. Model ini dikembangkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1920 dan kemudian Vito Volterra pada tahun 1926, Model Lotka-Volterra adalah suatu model *predator-prey* sederhana yang belum mempertimbangkan waktu yang dibutuhkan pemangsa dalam mencerna makanan dan juga belum mempertimbangkan fakta bahwa makanan mangsa yang terbatas sehingga model Lotka-Volterra memiliki asumsi yang tidak realistis. Setelah kemunculan model *predator-prey* Lotka-Volterra, selanjutnya muncul model *predator-prey* Rosenzweig-MacArthur (RM) yang merupakan model yang lebih realistis. Populasi *prey* dalam model RM *predator*

prey memperhitungkan daya dukung populasi *prey* dan menggunakan fungsi respon holling tipe II untuk menggambarkan interaksi antara *predator* dan *prey* (Adhikary, Mukherjee, & Ghost, 2021).

Seiring pemahaman tentang ekosistem nyata yang telah dikembangkan, muncul kebutuhan untuk mengembangkan model yang lebih kompleks dan realistis. Salah satu model yang berkembang dari model dasar tersebut adalah model *predator-prey* (Bazykin, 1976) memodifikasi model RM dengan memasukkan istilah kompetisi intraspesifik di antara *predator*. Dimana menjadi model yang lebih kompleks dan mampu menggambarkan dinamika yang lebih realistis, termasuk persaingan antara *predator* dalam memperebutkan *prey* dalam model Bazykin. Model Bazykin mencerminkan perubahan penting dalam pemahaman dinamika populasi dengan mempertimbangkan elemen-elemen yang lebih sesuai dengan ekosistem nyata. Dinamika antara *predator* dan *prey* menjadi lebih kompleks, di mana perubahan kecil dalam parameter dapat menyebabkan perubahan drastis dalam stabilitas sistem. Hal ini dikenal sebagai bifurkasi, yaitu fenomena penting dalam sistem dinamik yang menggambarkan perubahan kualitatif dalam perilaku sistem ketika parameter tertentu diubah. Dalam konteks model *predator-prey*, bifurkasi bisa terjadi ketika perubahan kecil dalam parameter menyebabkan perubahan drastis, seperti transisi dari keadaan stabil menuju osilasi populasi atau bahkan kepunahan spesies. Bifurkasi juga bisa menunjukkan munculnya titik-titik kesetimbangan baru atau hilangnya titik-titik kesetimbangan yang ada.

Penelitian yang dilakukan oleh (Adhikary, Mukherjee, & Ghost, 2021) membahas tentang bifurkasi dan efek hydra dalam model *predator-prey* Bazykin.

Efek hydra menggambarkan peningkatan populasi *predator* meskipun ada peningkatan angka kematian, yang dapat terjadi dalam kondisi tertentu akibat bifurkasi. Dalam analisis sistem dinamik, bifurkasi membantu memahami bagaimana perubahan parameter seperti laju pemangsaan atau tingkat kematian dapat mempengaruhi kestabilan sistem dan berkontribusi pada perubahan perilaku populasi dalam jangka panjang. Dalam penelitian ini, fokus utama adalah menganalisis bifurkasi pada model *predator-prey* Bazykin dengan memvariasikan parameter b . Langkah-langkah yang dilakukan meliputi menentukan titik kesetimbangan sistem, melakukan linearisasi menggunakan matriks Jacobi, dan menghitung nilai eigen untuk menentukan kestabilan titik-titik tersebut. Bifurkasi terjadi ketika perubahan dalam parameter menyebabkan titik kesetimbangan sistem berubah dari stabil menjadi tidak stabil, atau munculnya osilasi.

Dalam firman Allah SWT dalam Q.S Al-Qamar ayat 49 yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”

Berdasarkan Tafsir Ibnu Katsir, ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah SWT sudah pasti terukur dan Dia memberi petunjuk kepada semua makhluk-Nya. Hal tersebut berkaitan dengan kita sebagai makhluk hidup diberi petunjuk untuk mencari dan memahami fenomena di alam semesta. Dalam konteks ini, pencarian bifurkasi dalam model matematika dapat dipahami sebagai upaya untuk memahami bagaimana keseimbangan ekosistem dapat dipertahankan, agar tidak terjadi kepunahan salah satu spesies.

Penelitian ini dilakukan untuk memberikan pemahaman yang lebih dalam mengenai teori ekologi, khususnya dalam kebijakan konservasi dan pengelolaan

perikanan, melalui analisis bifurkasi pada model *predator-prey* Bazykin. Dengan demikian, penelitian ini mengusung judul “Analisis Bifurkasi pada Model *Predator-Prey* Bazykin”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis dinamik dari model *predator-prey* Bazykin?
2. Bagaimana analisis bifurkasi dari model *predator-prey* Bazykin?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Melakukan analisis dinamik pada model *predator-prey* Bazykin.
2. Menganalisis bifurkasi dari model *predator-prey* Bazykin.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang didapat dengan adanya penelitian ini adalah untuk memberikan kontribusi dalam meningkatkan pemahaman mengenai analisis dinamika dan bifurkasi pada model *predator-prey* Bazykin, baik bagi penulis maupun pembaca. Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat teoritis dan praktis. Secara teoritis, penelitian ini dapat memperluas pemahaman tentang dinamika model *predator-prey* Bazykin, termasuk pola interaksi antara *predator* dan *prey* serta kondisi-kondisi yang memengaruhi kestabilan sistem, sekaligus

menambah wawasan tentang teori bifurkasi dalam sistem dinamis. Secara praktis, hasil penelitian ini dapat digunakan untuk memprediksi dan mengelola dinamika populasi dalam ekosistem nyata, membantu mengambil kebijakan merancang strategi konservasi atau pengelolaan sumber daya alam, serta meminimalkan risiko kepunahan spesies atau ledakan populasi yang tidak terkendali.

1.5 Batasan Masalah

Untuk memastikan penelitian tetap terarah dan tidak meluas ke luar lingkup yang telah ditentukan, diperlukan batasan masalah. Adapun batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Model yang digunakan merujuk pada Adhikary, Mukherjee, & Ghost (2021)

sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - \frac{ax(t)y(t)}{h + x(t)}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{bax(t)y(t)}{h + x(t)} - my(t) - \gamma y(t)^2$$

2. Populasi *prey* bertumbuh secara logistik karena adanya keterbatasan sumber daya ekosistem.
3. Populasi *predator* bertambah karena memangsa populasi *prey*.
4. Populasi *predator* berkurang karena kematian alami dan juga akibat kompetisi antar sesama spesies *predator*.
5. Interaksi pemangsaan *prey* dan *predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe II.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan jika suatu persamaan dalam bentuk diferensial (misalnya $\frac{dy}{dt}$ atau $\frac{dy}{dx}$), oleh karena itu persamaan tersebut dikatakan sebagai persamaan diferensial. Dalam bentuk diferensial $\frac{dy}{dx}$, x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel terikat. Persamaan diferensial merupakan ungkapan untuk menggambarkan dan memprediksi fenomena alam. Dengan kata lain, persamaan diferensial merupakan representasi matematis dari model yang menggambarkan fenomena fisika, kimia, atau biologi. Secara umum, bentuk persamaan diferensial adalah fenomena yang mengilustrasikan antara objek yang diamati (variabel terikat) dengan waktu (t) dan atau ruang (x, y, z) (Sasongko, 2010).

Model matematika biologi atau yang biasa disebut dengan ekologi adalah model matematis yang digunakan untuk mendeskripsikan dan menganalisis dinamika populasi organisme hidup serta interaksi mereka dengan lingkungan. Model-model ini penting dalam memahami fenomena kompleks seperti pertumbuhan populasi, interaksi *predator-prey*, kompetisi antarspesies, penyebaran penyakit, serta dinamika ekosistem secara keseluruhan. Contoh dibawah ini menunjukkan model *predator-prey*.

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{h + x} \quad (2.1)$$

Persamaan pertumbuhan *prey* diatas, menggambarkan dinamika pertumbuhan populasi *prey* dengan dua faktor utama. Pertama, komponen $rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ merepresentasikan pertumbuhan *prey* secara logistik, di mana r adalah laju pertumbuhan intrinsik dan K adalah daya dukung lingkungan yang membatasi populasi. Kedua, populasi *prey* berkurang karena dimakan oleh *predator*, yang diwakili oleh suku $-\frac{axy}{h+x}$. Laju predasi ini mengikuti pola respon Holling Tipe II, di mana *predator* tidak dapat memakan lebih banyak mangsa jika populasi *prey* sangat tinggi. Dalam hal ini, parameter a menggambarkan seberapa efektif predator memangsa *prey*, y adalah populasi *predator*, dan h merupakan konstanta *half-saturation* yang melambatkan laju predasi saat populasi mangsa kecil. Dengan demikian, populasi mangsa menurun seiring dengan peningkatan predasi oleh *predator*. Kombinasi dari kedua faktor ini pertumbuhan alami dan interaksi predasi menentukan dinamika pertumbuhan dan penurunan populasi mangsa dalam ekosistem.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{baxy}{h+x} - my - \gamma y^2 \quad (2.2)$$

Kemudian persamaan pertumbuhan *predator*, menjelaskan dinamika pertumbuhan populasi *predator*. Bagian pertama, $\frac{baxy}{h+x}$ menggambarkan pertumbuhan *predator* yang bergantung pada ketersediaan *prey*, di mana b adalah efisiensi transfer energi dari *prey* ke *predator*, dan a adalah laju serangan *predator* terhadap *prey*. Semakin banyak mangsa yang tersedia, semakin tinggi potensi pertumbuhan *predator*. Namun, *predator* juga menghadapi laju kematian alami yang digambarkan oleh $-my$, di mana m adalah laju kematian yang mengurangi populasi *predator* seiring waktu. Selain itu, terjadi kompetisi intraspesifik antara

predator yang diwakili oleh $-\gamma y^2$, di mana γ menunjukkan tingkat persaingan internal. Kompetisi ini membatasi laju pertumbuhan predator saat sumber daya mangsa berkurang atau populasi *predator* terlalu besar. Kombinasi faktor pertumbuhan dari ketersediaan *prey*, kematian alami, dan persaingan internal menentukan dinamika populasi *predator* dalam sistem ini. Oleh karena itu, pemahaman terhadap interaksi ini sangat penting untuk merencanakan pengelolaan dan konservasi ekosistem secara berkelanjutan.

2.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah titik di mana sistem tidak mengalami perubahan terhadap waktu, artinya tidak mengalami perubahan dalam jangka waktu tertentu. Misalkan diberikan suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

dan persamaan (1) memiliki titik keseimbangan ketika memenuhi :

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ dan } g(x^*, y^*) = 0.$$

Misalkan : $u = x - x^*$ dan $v = y - y^*$, maka didapatkan :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f(x^* + u, y^* + v), \\ \dot{v} &= g(x^* + u, y^* + v).\end{aligned}$$

Dengan menggunakan pendekatan ekspansi Taylor dua variabel, maka sistem yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \\ \dot{v} &= u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Karena $O(u^2, v^2, uv) \rightarrow 0$ artinya nilai dari $O(u^2, v^2, uv)$ mendekati nol, maka nilainya dapat diabaikan. Persamaan (2) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Matriks $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$ merupakan matriks Jacobi yang dievaluasi di titik

kesetimbangan (x^*, y^*) (Strogatz, 1994).

2.3 Nilai Eigen dan Vektor eigen

Misal A adalah suatu matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut sebagai vektor eigen dari matriks A bila terdapat skalar λ sehingga berlaku:

$$Ax = \lambda x$$

Skalar λ disebut nilai eigen / nilai karakteristik dari matriks A . Sedangkan x dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks A dapat menulisnya sebagai berikut :

$$(A - \lambda I) = 0 \quad (2.5)$$

dengan I adalah matriks identitas. Maka persamaan (2.5) memiliki solusi tak nol jika $\det(A - \lambda I) = 0$. Persamaan tersebut disebut polinom karakteristik dari matriks A (Mursita, 2010).

2.4 Analisis Kestabilan

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial memiliki bentuk seperti berikut :

$$\dot{x} = ax + by,$$

$$\dot{y} = cx + dy.$$

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks

A berukuran 2×2 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Berdasarkan persamaan (2.6), maka persamaan karakteristiknya menjadi:

$$\det = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan :

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

Dengan

$$\tau = \text{trace}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Delta = \det(A) = ad - bc = \lambda_1\lambda_2.$$

Dengan demikian diperoleh nilai eigen dari adalah :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

1. Kasus I

Jika $\Delta < 0$, maka kedua nilai eigen real berbeda tanda, sehingga titik kesetimbangan merupakan *saddle node*.

2. Kasus II

Jika $\Delta > 0$, maka nilai eigen dapat berupa bilangan real dengan tanda yang sama (titik tetap berupa simpul) atau bilangan kompleks *conjugate* (titik kesetimbangan bersifat *spiral* atau *center*).

- $\tau^2 - 4\Delta > 0$
 - Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai eigen real bernilai positif maka titik kesetimbangan bersifat simpul tak stabil.
 - Jika $\tau < 0$ dan kedua nilai eigen real bernilai negatif maka titik kesetimbangan bersifat simpul stabil.
- $\tau^2 - 4\Delta < 0$
 - Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai eigen imajiner ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) maka titik kesetimbangan bersifat *spiral* tak stabil.
 - Jika $\tau < 0$ dan kedua nilai eigen imajiner ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) maka titik kesetimbangan bersifat *spiral* stabil.
 - Jika $\tau = 0$ dan kedua nilai eigen imajiner murni ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) maka titik kesetimbangan bersifat *center*.

- $\tau^2 - 4\Delta = 0$

Parabola $\tau^2 - 4\Delta = 0$ adalah garis batas antara simpul dan spiral. *Star node* atau *degenerate node* terletak pada parabola ini. Jika kedua nilai eigen bernilai sama maka titik kesetimbangan bersifat simpul stabil untuk $\tau < 0$ atau simpul tak stabil untuk $\tau > 0$.

3. Kasus III

Jika $\Delta = 0$, maka setidaknya ada satu nilai eigen yang sama dengan nol, maka titik kesetimbangan merupakan titik tak terisolasi (Strogatz, 1994).

2.5 Bifurkasi

Bifurkasi merujuk pada perubahan dalam kuantitas atau sifat kestabilan titik-titik kesetimbangan dalam suatu sistem dinamik. Saat terjadi bifurkasi, nilai parameter tertentu yang mempengaruhi sistem menyebabkan perubahan kualitatif dalam perilaku sistem tersebut. Nilai parameter di mana bifurkasi terjadi disebut titik bifurkasi. Terdapat beberapa macam bifurkasi diantaranya bifurkasi *saddle-node*, bifurkasi *transcritical*, bifurkasi *pitchfork*, dan bifurkasi *hopf*

Bifurkasi *saddle-node* terjadi ketika dua titik tetap yang sebelumnya terpisah bertemu dan saling menghilang, di mana satu titik tetap stabil dan lainnya tidak stabil. Pada bifurkasi ini, titik tetap yang tidak stabil dan stabil tersebut bergerak mendekat dan akhirnya menghilang, sering kali mengarah pada hilangnya solusi stabil dalam sistem. Selanjutnya bifurkasi *transcritical* terjadi ketika dua titik tetap, yang satu stabil dan yang lainnya tidak stabil, bertukar stabilitasnya, di mana titik tetap yang stabil menjadi tidak stabil dan yang tidak stabil menjadi stabil, sering kali mengarah pada perubahan drastis dalam keseimbangan sistem.

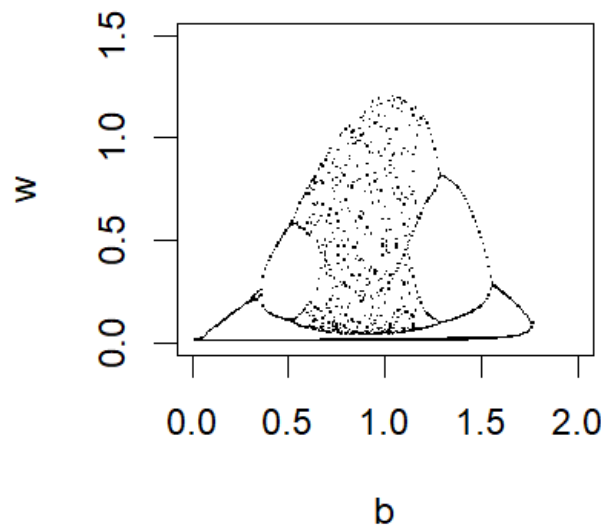
Kemudian bifurkasi *pitchfork* terjadi ketika satu titik tetap stabil terpecah menjadi dua titik tetap yang simetris atau sebaliknya, dua titik tetap yang sebelumnya simetris bergabung menjadi satu. Bifurkasi ini sering muncul dalam sistem yang memiliki simetri, menggambarkan bagaimana perubahan parameter dapat menyebabkan solusi yang lebih kompleks dan simetris. Terakhir, bifurkasi *hopf* terjadi ketika titik tetap stabil berubah menjadi siklus limit atau sebaliknya, bertransisi dari perilaku tetap menjadi osilasi saat parameter sistem melewati titik kritis. Bifurkasi *hopf* penting dalam menggambarkan transisi dari keadaan stabil

ke perilaku periodik atau osilasi yang lebih kompleks dalam sistem dinamis, seperti dalam model ekologi atau mekanika. Keempat bifurkasi ini mencerminkan bagaimana perubahan parameter dalam sistem dinamis dapat menyebabkan perubahan kualitatif dalam perilaku (Wiggins, 2003).

Terdapat model terdiri dari tiga populasi: sumber daya tumbuhan u , herbivora v , dan karnivora w . Kumpulan persamaan diferensial yang menggambarkan sistem adalah:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= au - \alpha_1 f_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} &= -bv + \alpha_1 f_1(u, v) - \alpha_2 f_2(v, w) \\ \frac{dw}{dt} &= -c(w - w^*) + f_2(v, w)\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan istilah interaksi logistik karena Holling $f_i(x, y) = \frac{xy}{1+k_1x}$. Istilah interaksi ini, karena mencakup saturasi, mungkin lebih realistis daripada model sederhana Lotka–Volterra $f_i(x, y) = xy$. Ditunjukkan diagram bifurkasi dari sistem (2.7) dengan b sebagai parameter bifurkasi (Bloomfield, 2014).



Gambar 2.1 Diagram Bifurkasi 3 Model Populasi terhadap Parameter b

2.6 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Penciptaan manusia, tugas-tugasnya, keistimewaan serta kelemahannya bermula pada Q.S. Al-Baqarah ayat 30.

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلَائِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي الْأَرْضِ خَلِيفَةً ۖ قَالُوا أَتَجْعَلُ فِيهَا مَنْ يُفْسِدُ فِيهَا وَيَسْفِكُ
الدِّمَآءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ ۗ قَالَ إِنِّي أَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٣٠﴾

“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat, “Sesungguhnya Aku hendak menjadikan satu khalifah di muka bumi.” Mereka berkata, “Apakah Engkau hendak menjadikan di bumi itu siapa yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji-Mu menyucikan nama-Mu?” Tuhan berfirman, “Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui” (Q.S. Al-Baqarah:30)

Allah SWT berfirman kepada malaikat tentang menciptakan manusia yang diberi tugas sebagai khalifah di bumi. Khalifah yang berarti menggantikan atau pengganti, dalam memakmurkan bumi. Khalifah adalah seorang atau kelompok yang ditugasi memelihara, membina, mengatur sesuatu menuju tujuan penciptaan (Shihab, 2000). Konsep ini diperjelas di dalam Q.S surah Al-An'am ayat 165,

وَهُوَ الَّذِي جَعَلَكُمْ خَلَائِفَ الْأَرْضِ وَرَفَعَ بَعْضَكُمْ فَوْقَ بَعْضٍ دَرَجَاتٍ لِّيَبْلُوَكُمْ فِي مَا آتَاكُمْ ۚ إِنَّ رَبَّكَ
سَرِيعُ الْعِقَابِ وَإِنَّهُ لَغَفُورٌ رَحِيمٌ ﴿١٦٥﴾

“Dan Dia yang menjadikan kamu khalifah-khalifah di bumi dan Dia meninggikan sebagian kamu atas sebagian (yang lain) beberapa derajat, untuk menguji kamu melalui apa yang diberikan-Nya kepada kamu. Sesungguhnya Tuhanmu amat cepat siksa-Nya. Sesungguhnya Dia Maha Pengampun lagi Maha Penyayang” (Q.S. Al-An'am : 165)

"Dan Dia yang menjadikan kamu khalifah-khalifah di bumi" ayat tersebut menegaskan kembali bahwa manusia adalah khalifah. Sesuai dengan Al-Baqarah ayat 30 seorang khalifah diberi tanggung jawab untuk menjadi pengelola yang baik atas bumi dan semua isinya. Ini adalah tanggung jawab yang diberikan secara langsung oleh Allah SWT kepada umat manusia sebagai bentuk kepercayaan-Nya kepada mereka (Shihab, 2002).

Selanjutnya menerapkan konteks memelihara kepada manusia berarti yang dimaksud adalah melalui reproduksi dan memelihara keturunan. Hal tersebut juga merupakan tugas manusia sebagai khalifah. Namun keadaan jepang sekarang berkebalikan dalam memenuhi tugas tersebut. Fenomena menurunnya tingkat kelahiran menjadi perhatian serius. Banyak pasangan memilih untuk tidak memiliki keturunan karena berbagai alasan, seperti masalah ekonomi, karier, perubahan gaya hidup, dan faktor sosial lainnya. Hal ini telah menyebabkan penurunan populasi, penuaan populasi, dan masalah-masalah terkait seperti beban bagi sistem kesehatan dan kesejahteraan sosial. Dalam mengatasi masalah menurunnya tingkat kelahiran, islam mendorong pasangan untuk menjalankan perintah Allah SWT dan Rasul-Nya dalam memperbanyak keturunan, dengan menikah dan membangun keluarga yang sakinah, mawaddah, wa rahmah (penuh ketenangan, kasih sayang, dan rahmat). Islam juga menganjurkan untuk memberikan pendidikan agama dan moral yang baik kepada keturunan, sehingga mereka dapat tumbuh menjadi generasi yang berkualitas dan berkontribusi positif bagi masyarakat.

Rasulullah Muhammad SAW telah menekankan pentingnya memiliki keturunan yang baik dan shalih, yang akan membawa berkah bagi umat manusia. Sebagaimana berdasarkan buku Mukhtashar Shahih Muslim karya Imam Abu Husain Muslim bin Hajjaj al Qusyairi An-Naisaburi yang diterjemahkan oleh Abu Hasan bin Usman yang diriwayatkan oleh Abu Hurairah ra., bahwa Rasulullah SAW bersabda:

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ : إِذَا مَاتَ الْإِنْسَانُ انْقَطَعَ عَنْهُ عَمَلُهُ إِلَّا مِنْ ثَلَاثَةٍ إِلَّا مِنْ صَدَقَةٍ جَارِيَةٍ أَوْ عِلْمٍ يُنْتَفَعُ بِهِ أَوْ وَلَدٍ صَالِحٍ يَدْعُو لَهُ (رواه مسلم).

"Apabila seorang telah meninggal dunia maka terputuslahm semua amal perbuatannya, kecuali tiga perkara, yaitu, sedekah jariyah, ilmu yang bermanfaat, anak shalih yang selalu mendoakannya." (Muslim:5/73). (Usman, 2020)

Hadist tersebut menjelaskan bahwa terdapat 3 amalan yang tidak terputus walaupun telah meninggal dunia. Sedekah jariyah adalah sedekah yang terus mengalir dan memberikan manfaat jangka panjang selama manfaatnya masih dirasakan oleh banyak orang. Contohnya termasuk mendirikan infrastruktur seperti sumur bor, masjid, dan sekolah, memberikan beasiswa atau fasilitas pendidikan kepada siswa yang membutuhkan, menyumbangkan dana untuk kesehatan dengan mendirikan klinik atau rumah sakit, serta berinvestasi dalam proyek lingkungan seperti penanaman pohon dan memberikan modal usaha kepada masyarakat untuk mengembangkan ekonomi lokal.

Selanjutnya yang kedua yaitu ilmu yang bermanfaat merupakan ilmu yang diajarkan dan disebarluaskan yang tidak terputus manfaatnya meskipun seseorang telah wafat. Di era digital saat ini melalui penggunaan teknologi informasi dan media sosial memberikan kemudahan. Misalnya, seorang ustadz atau pendakwah dapat membuat dan membagikan video ceramah, kajian, atau tausiyah melalui platform seperti youtube atau media lainnya sehingga dapat meningkatkan pemahaman dan kecintaan terhadap agama. Kemudian anak shalih adalah individu yang patuh kepada Allah SWT dan berperilaku sesuai dengan ajaran-Nya. Mereka menjalankan kewajiban agama dengan sungguh-sungguh dan berusaha untuk berbuat baik kepada sesama serta lingkungan sekitar. Misalnya, mereka aktif dalam kegiatan sosial seperti menghimpun dana untuk membantu yang membutuhkan, membantu pembangunan fasilitas umum, atau terlibat dalam

proyek lingkungan. Tidak lupa tentunya dengan memanfaatkan media sosial atau platform online dalam menyebarkan nilai-nilai agama. (Ngulwiyah, Ilmiah, & Suaidi, 2021) Hadist ini menegaskan bahwa memiliki keturunan yang shalih yang mendoakan orang tua merupakan salah satu amal yang terus memberikan manfaat bahkan setelah seseorang meninggal dunia.

Dalam konteks masalah menurunnya tingkat kelahiran di Jepang, Islam menekankan pentingnya memahami dan menghargai nilai reproduksi serta tanggung jawab dalam memelihara keturunan. Salah satu upaya menangani masalah tersebut yakni dengan menerapkan ajaran islam dalam membentuk keluarga yang kokoh dan mendidik generasi yang berkualitas. Oleh karena itu, menjaga kualitas keturunan menjadi bagian dari tugas manusia sebagai khalifah di muka bumi. Dalam memenuhi tugas ini, manusia diharapkan untuk bertindak dengan penuh kesadaran akan tanggung jawab moral dan spiritualnya, serta menjalankan ajaran agama dalam memelihara keturunan dengan baik.

Allah SWT telah menciptakan jagat raya dengan seimbang, seperti yang tercantum dalam Q.S Al-Mulk ayat 3.

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفْوُتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ ﴿٣﴾

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu melihat sesuatu yang tidak seimbang?”

Dalam, (Shihab, 2016) dijelaskan bahwa Allah SWT memiliki kuasa yang sangat besar dalam menciptakan semesta ini. Allah SWT menciptakan tujuh langit yang saling bertumpuk dengan harmonisasi yang sempurna. Tak peduli siapa pun yang melihatnya, baik sekarang maupun di masa depan, mereka tidak akan

menemukan ketidakseimbangan pada ciptaan-Nya. Coba lihat dan perhatikan sekali lagi, apakah anda bisa menemukan bahkan sedikit keretakan pun dalam ciptaan-Nya? Ulangi pandangan anda berkali-kali, dan anda akan menyadari bahwa tidak menemukan sesuatu yang cacat. Allah SWT menciptakan segala sesuatu dalam kondisi seimbang sebagai anugerah-Nya. Apabila penciptaan-Nya tidak seimbang, akan terjadi kekacauan di antara seluruh makhluk. Dapat dibayangkan betapa buruknya jika planet-planet bertabrakan secara berulang-ulang, atau jika semua makhluk memiliki kebutuhan yang sama.

Syukur Allah SWT telah mengatur kebutuhan kita untuk bernapas dengan udara segar. Lain halnya dengan tumbuhan yang membutuhkan karbon dioksida yang kita hembuskan, sementara mereka menghasilkan oksigen yang kita butuhkan. Begitu juga dengan binatang, mereka juga memerlukan oksigen dan menghasilkan karbon dioksida yang berguna bagi tumbuhan. Allah SWT telah merencanakan dengan sempurna hubungan ini dalam ciptaan-Nya, sehingga setiap bagian dari alam semesta ini bergerak menuju tujuannya tanpa mengganggu bagian lainnya atau mengubah sifatnya.

Berdasarkan ayat diatas, menegaskan bahwa setiap peristiwa memiliki ketentuan yang seimbang, termasuk dalam dinamika ekosistem di mana hubungan *predator-prey* yang seimbang. Namun, seringkali terjadi penyimpangan yang signifikan dalam struktur atau populasi *predator* dan mangsa dan saling memengaruhi. Contohnya, kenaikan jumlah *predator* dapat mengakibatkan penurunan populasi mangsa karena tekanan predasi yang lebih besar, dan sebaliknya. Dampaknya, ketidakseimbangan ini dapat mengakibatkan kerusakan habitat atau kehilangan populasi yang serius. Oleh karena itu bifurkasi dilakukan

agar dapat merencanakan tindakan konservasi atau manajemen yang lebih efektif untuk menjaga stabilitas dan keberlanjutan ekosistem. Dalam penelitian ini, peneliti menganalisis bifurkasi apa yang terdapat pada model *predator-prey* Bazykin.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang penulis gunakan dalam penelitian ini yaitu metode penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif bertujuan untuk memahami fenomena tertentu secara holistik dan mendalam, seperti perilaku, motivasi, persepsi dan tindakan subjek penelitian, melalui penggambaran dengan kata-kata dan bahasa (Moleong, 2019). Pendekatan ini bersifat eksploratif, dimana fokusnya adalah untuk menemukan ide-ide baru, wawasan baru, bahkan mengembangkan teori-teori baru. Penelitian ini tidak selalu berupaya untuk menggeneralisasikan temuan ke konteks lain, karena lebih berfokus pada pemahaman yang khusus dan unik dari fenomena yang dipelajari (Majid, Mohamed, & Norsiah, 2010).

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan menganalisis. Langkah-langkah yang dilakukan penulis adalah:

1. Menentukan titik kesetimbangan, didapatkan dengan membuat semua persamaan pada sistem sama dengan nol.
2. Melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dengan:
 - a. Menentukan matriks Jacobi dari sistem persamaan.
 - b. Menentukan nilai eigen dari matriks Jacobi.
 - c. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan dengan mengevaluasi tanda bagian real dari nilai eigen yang diperoleh.

3. Simulasi numerik, untuk mengilustrasikan perilaku kestabilan di sekitar titik kesetimbangan model diperlukan simulasi numerik. Simulasi numerik juga mengkonfirmasi kesesuaian dengan hasil analisis kestabilan.
4. Tahapan bifurkasi, meliputi:
 - a. Menentukan parameter yang akan divariasikan untuk mempelajari perubahan perilaku dinamis sistem akibat bifurkasi.
 - b. Menganalisis nilai eigen dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan saat parameter divariasikan.
 - c. Mengidentifikasi jenis bifurkasi yang terjadi dengan memperhatikan transisi kestabilan dalam sistem.
 - d. Melakukan simulasi numerik untuk memvisualisasikan perubahan perilaku sistem akibat bifurkasi, seperti munculnya atau hilangnya titik kesetimbangan, siklus limit, atau perubahan pola dinamika lainnya.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model Matematika *Predator Prey Bazykin*

Dalam penelitian ini, penulis akan menganalisis model *predator-prey* Bazykin (Adhikary, Mukherjee, & Ghost, 2021). Berdasarkan model pada (Adhikary, Mukherjee, & Ghost, 2021) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{h+x} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{baxy}{h+x} - my - \gamma y^2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Tabel 4.1 Variabel dan Nilai Parameter yang digunakan

Variabel & Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
$x(t)$	Banyaknya populasi <i>prey</i> pada waktu t	52.2	(Adhikary et al., 2021)
$y(t)$	Banyaknya populasi <i>predator</i> pada waktu t	33.7	(Adhikary et al., 2021)
r	Laju pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>	0.4	(Adhikary et al., 2021)
K	Daya dukung (<i>carrying capacity</i>) lingkungan untuk populasi <i>prey</i>	100	(Adhikary et al., 2021)
a	Laju serang <i>predator</i> terhadap <i>prey</i>	0.9	(Adhikary et al., 2021)
b	Efisiensi konversi <i>prey</i> ke <i>predator</i>	0.9	(Adhikary et al., 2021)
h	Konstanta <i>half saturation</i>	5	(Adhikary et al., 2021)
m	Laju kematian alami <i>predator</i>	0.1	(Adhikary et al., 2021)
γ	Persaingan intraspesifik antara <i>predator</i>	0.025	(Adhikary et al., 2021)

Dalam melakukan analisis dinamik perlu dilakukan analisis titik kesetimbangan, analisis titik kestabilan titik kesetimbangan, dan analisis serta simulasi model. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh nilai eigen matriks Jacobi sistem yang dievaluasi pada titik kesetimbangan tersebut. Proses ini melibatkan substitusi nilai dari titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobi untuk menghitung nilai-nilai eigen, yang digunakan untuk menentukan sifat stabilitas dari titik kesetimbangan.

4.1.1 Titik Kesetimbangan Model Matematika *Predator-Prey* Bazykin

Titik kesetimbangan model *predator-prey* Bazykin diperoleh dengan memisalkan $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{h+x} = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{baxy}{h+x} - my - \gamma y^2 = 0 \quad (4.2b)$$

Kemudian faktorkan persamaan (4.2a)

$$x \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{h+x} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Sehingga diperoleh $x = 0$ atau $r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{h+x} = 0$. Jika $x = 0$

disubstitusikan ke (4.2b) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} -\gamma y^2 - my &= 0 \\ y(-\gamma y - m) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Solusi untuk persamaan (4.2b) dengan $x = 0$ adalah $y = 0$ atau $-\gamma y - m = 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan pertama:

$$x_1^* = 0 \quad y_1^* = 0$$

Selanjutnya solusi (x_1^*, y_1^*) disebut sebagai titik kesetimbangan pertama atau E_1^* . Titik kesetimbangan ini menggambarkan keadaan di mana populasi *predator* dan *prey* mengalami kepunahan. Kondisi dimana populasi *prey* punah, maka populasi *predator* pun akan ikut mengalami kepunahan dikarenakan sumber makanan yang tidak ada.

Selanjutnya berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh:

$$\begin{aligned} -m &= \gamma y \\ y &= \frac{-m}{\gamma} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan kedua:

$$\begin{aligned} x_2^* &= 0 \\ y_2^* &= \frac{-m}{\gamma} \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan ini tidak memenuhi kepositifan solusi sehingga titik kesetimbangan (x_2^*, y_2^*) bukan merupakan titik kesetimbangan model.

Akan ditentukan x_3^*, y_3^* untuk titik kesetimbangan kedua. Dari persamaan (4.2a) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) &= 0 \\ 1 - \frac{x}{K} &= 0 \\ x_3^* &= K \end{aligned}$$

Solusi untuk sistem persamaan adalah

$$\begin{aligned} x_3^* &= K \\ y_3^* &= 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya titik (x_3^*, y_3^*) disebut sebagai titik kesetimbangan kedua atau E_2^* . Titik kesetimbangan ini mewakili keadaan di mana *prey* tumbuh hingga batas kapasitas lingkungan (K), sementara *predator* tidak mampu bertahan dan punah.

Akan ditentukan x_4^*, y_4^* untuk titik kesetimbangan ketiga. Dari persamaan (4.2a), diperoleh:

$$r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{h+x} = 0$$

Dengan mengubah penyebut dari persamaan tersebut menjadi suku yang sama diperoleh:

$$\frac{r\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x+h) - ay}{x+h} = 0$$

Selanjutnya dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{r\left(-\frac{x^2}{K} - \frac{xh}{K} + x + h\right) - ay}{x+h} &= 0 \\ -\frac{rx^2}{K} - \frac{rxh}{K} + rx + rh - ay &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Solusi persamaan tersebut harus memenuhi persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ dimana

$$A = -\frac{r}{K}, B = r - \frac{rh}{K}, C = rh - ay$$

Sehingga diskriminan dari persamaan (4.5) adalah

$$D = -\frac{4ary}{K} - \frac{r^2(K^2 + 2hK + h^2)}{K^2}$$

Persamaan (4.5) memiliki solusi sebagai berikut:

$$x^* = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \tag{4.6}$$

Persamaan (4.6) memiliki akar rill apabila $D = 0$ atau $D > 0$.

1. Jika $D = 0$ maka persamaan (4.6) memiliki dua akar kembar yakni $x_{4,5}^* = \frac{-b}{2a}$, dan $x_{4,5}^* > 0$ apabila $b > 0$.
2. Jika $D > 0$ maka
 - Jika $b > 0, c > 0$ maka $\frac{-b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} > 0$. Artinya persamaan (4.5) memiliki 2 akar rill negatif dan berbeda
 - Jika $b > 0, c < 0$ maka $\frac{-b}{a} < 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$. Artinya persamaan (4.5) memiliki 2 akar rill berbeda yang saling berlawanan.
 - Jika $b < 0, c < 0$ maka $\frac{-b}{a} > 0$ dan $\frac{c}{a} < 0$. Artinya persamaan (4.5) memiliki 2 akar rill berbeda saling berlawanan.
 - Jika $b < 0, c > 0$ maka $\frac{-b}{a} > 0$ dan $\frac{c}{a} > 0$. Artinya persamaan (4.5) memiliki 2 akar rill positif dan berbeda.

Demikian dapat disimpulkan bahwa persamaan (4.5) memiliki akar rill positif yang tunggal dengan syarat $c < 0$, yakni $hr - ay < 0$ atau $hr < ay$.

Dimana y adalah y^* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{abx^*}{x^* + h} - m - \gamma y^* = 0$$

$$-\gamma y^* = m - \frac{abx^*}{x^* + h}$$

$$y^* = \frac{m - \frac{abx^*}{x^* + h}}{-\gamma}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan ketiga yaitu $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$ dimana x_4^*

adalah solusi dari persamaan (4.6) dengan syarat $c < 0$ dan $y_4^* = \frac{m - \frac{abx}{x+h}}{-\gamma}$. Titik

kesetimbangan ini menggambarkan keadaan ketika populasi *prey* dan *predator* dapat hidup secara berdampingan, tanpa mengalami kepunahan.

4.1.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model Matematika *Predator-Prey* Bazykin

Ketika melakukan analisis titik keseimbangan, langkah yang diambil adalah menggunakan matriks Jacobi untuk menghitung nilai eigen. Matriks Jacobi ini disusun berdasarkan persamaan. Hasilnya matriks Jacobi dapat diuraikan sebagai berikut. Misalkan terdapat himpunan n persamaan $y = f(x)$ dalam n variabel x, y yang dituliskan sebagai:

$$y = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Atau secara lebih eksplisit sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, y) \\ y_2 &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Maka matriks Jacobi didefinisikan sebagai:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Sehingga dapat diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{rx}{K} - \frac{ay}{h+x} + \frac{axy}{(h+x)^2} & -\frac{ax}{h+x} \\ \frac{bay}{h+x} - \frac{baxy}{(h+x)^2} & \frac{bax}{h+x} - m - 2\gamma y \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangan E_1^* , E_3^* , dan E_4^* disajikan dalam sub bab 4.1.3, 4.1.4, dan 4.1.5 berikut.

4.1.3 Analisis kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$

Pada tahap ini, matriks Jacobi pada persamaan (4.10) dievaluasi disekitar titik kesetimbangan $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$ dimana, $x_1^* = 0$ dan $y_1^* = 0$. sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(E_1^*) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan ditentukan kestabilan pada titik kesetimbangan pada kondisi $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$ dengan menggunakan matriks Jacobi

$$\det(J(E_1^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -m - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Persamaan karakteristik untuk titik kesetimbangan E_1^* adalah

$$p(\lambda) = (r - \lambda)(-m - \lambda) = 0 \quad (4.11)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik diperoleh :

$$\lambda_1 = r$$

$$\lambda_2 = -m$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh kedua nilai eigen berbeda tanda, sehingga kestabilan titik kesetimbangan $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$ merupakan *saddle node*.

4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E_2^* = (x_3^*, y_3^*)$

Pada tahap berikutnya, matriks Jacobi pada persamaan (4.10) dievaluasi disekitar titik keseimbangan $E_2^* = (x_3^*, y_3^*)$ dimana, $x_3^* = K$ dan $y_3^* = 0$. sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(E_2^*) = \begin{bmatrix} -r & -\frac{aK}{h+K} \\ 0 & \frac{baK}{h+K} - m \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan ditentukan kestabilan pada titik keseimbangan pada kondisi $E_2^* = (x_3^*, y_3^*)$ dengan menggunakan matriks Jacobi.

$$\det(J(E_2^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -r & -\frac{aK}{h+K} \\ 0 & \frac{baK}{h+K} - m \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -r & -\frac{aK}{h+K} \\ 0 & \frac{baK}{h+K} - m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -r - \lambda & -\frac{aK}{h+K} \\ 0 & \frac{baK}{h+K} - m - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik untuk titik keseimbangan E_2^* sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (-r - \lambda) \left(\frac{baK}{h+K} - m - \lambda \right) = 0 \quad (4.12)$$

Nilai eigen $E_2^* = (x_3^*, y_3^*)$ dari matriks di atas diperoleh sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -r$$

$$\lambda_2 = \frac{baK}{h+K} - m$$

Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh berlaku kondisi sebagai berikut:

1. Jika $\lambda_2 < 0$ maka sistem stabil.
2. Jika $\lambda_2 > 0$ maka $b > \frac{m(h+K)}{aK}$ sehingga kestabilan titik kesetimbangan E_2^* bersifat *saddle node*.

4.1.5 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$

Pada tahap berikutnya, matriks Jacobi pada persamaan (4.10) dievaluasi disekitar titik kesetimbangan $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$ dimana x_4^* adalah solusi dari persamaan (4.6) dengan syarat $c < 0$ dan $y_4^* = \frac{m - \frac{abx}{x+h}}{-\gamma}$ sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(E_3^*) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{h+x^*} \\ \frac{bay^*}{h+x^*} - \frac{baxy^*}{(h+x^*)^2} & \frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks $J(E_3^*)$ dapat diperoleh dengan menghitung $\det(J(E_3^*) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut:

$$\det(J(E_3^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{h+x^*} \\ \frac{bay^*}{h+x^*} - \frac{baxy^*}{(h+x^*)^2} & \frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* \end{bmatrix} - \lambda I \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} & -\frac{ax^*}{h+x^*} \\ \frac{bay^*}{h+x^*} - \frac{baxy^*}{(h+x^*)^2} & \frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} - \lambda & -\frac{ax^*}{h+x^*} \\ \frac{bay^*}{h+x^*} - \frac{baxy^*}{(h+x^*)^2} & \frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0$$

dengan

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \left(r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} \right) + \left(\frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* \right)$$

$$c_2 = \left(\left(r \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay^*}{h+x^*} + \frac{ax^*y^*}{(h+x^*)^2} \right) \left(\frac{bax^*}{h+x^*} - m - 2\gamma y^* \right) \right) - \left(\left(-\frac{ax^*}{h+x^*} \right) \left(\frac{bay^*}{h+x^*} - \frac{baxy^*}{(h+x^*)^2} \right) \right)$$

Sehingga didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}$$

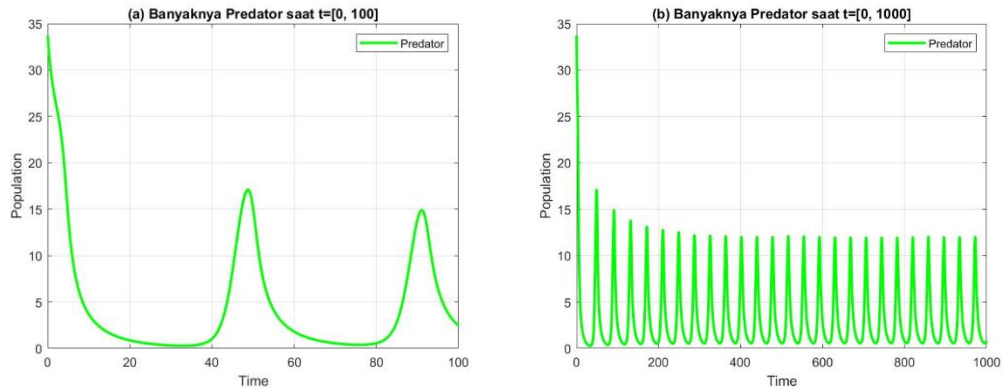
Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh berlaku kondisi sebagai berikut:

1. Jika $c_1 < 0$ dan $c_2 > 0$ maka sistem stabil.
2. Jika $c_2 < 0$ maka bersifat *saddle node*.

4.1.6 Simulasi Model Matematika *Predator-Prey* Bazykin Dan Interpretasi

Simulasi numerik model *predator-prey* Bazykin dilakukan dengan menggunakan parameter-parameter yang telah disebutkan sebelumnya dengan nilai awal sebagai berikut, $x(0) = 52.2$, $y(0) = 33.7$, $r = 0.4$, $K = 100$, $a =$

0.9 , $b = 0.9$, $h = 5$, $m = 0.1$, $\gamma = 0.025$. Berdasarkan parameter tersebut, maka dipeoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 4.1 Grafik Banyaknya *Predator* terhadap Waktu

Gambar 4.1 merupakan dinamika populasi *predator*, pada gambar 4.1 (a) ketika $t = 0$ populasi *predator* 33.7 sedangkan untuk $t = 100$ populasi *predator* 16,3275. Kemudian berdasarkan gambar 4.1 (b) saat rentang t diperpanjang 1000 populasi *predator* sebesar 10,9795. Berdasarkan simulasi tersebut dapat dilihat bahwa ketika waktu diperpanjang sifat dari solusi sistem tidak stabil menuju titik tertentu. Grafik saat $t = 100$ dan $t = 1000$ untuk melihat perilaku dari sistem tersebut, dapat dilihat ketika t diperpanjang menunjukkan bahwa populasi *predator* berfluktuasi secara periodik.

Pada awal simulasi, populasi *predator* mencapai puncak pertama. Puncak ini terjadi karena pada fase awal, *predator* memiliki cukup mangsa untuk dimakan sehingga populasinya meningkat pesat. Setelah itu, populasi *predator* mulai menurun karena berkurangnya mangsa atau karena saturasi kapasitas lingkungan untuk mendukung jumlah *predator* yang tinggi. Penurunan ini terus berlanjut sampai pada titik di mana populasi *predator* hampir mencapai nilai minimum, karena mangsa yang ada sudah sangat sedikit sehingga *predator* kesulitan

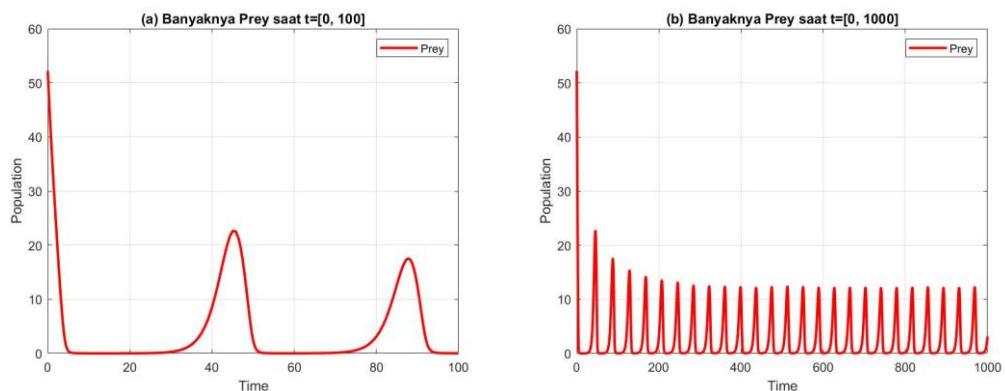
bertahan hidup. Setelah jumlah *predator* menurun, jumlah mangsa kembali meningkat, yang menyebabkan siklus populasi predator kembali naik.

Berdasarkan gambar 4.1 menunjukkan perbedaan yang signifikan dalam hasil simulasi numerik dari solusi y terhadap waktu (t) berdasarkan persamaan (4.2) pada tabel berikut.

Tabel 4.2 Hasil Simulasi Numerik dari Solusi y terhadap Waktu

<i>Waktu (t)</i>	<i>Predator (y)</i>
0	33,7
10	25,77074143
20	16,54650307
30	11,76389982
40	7,73041499
50	4,48013905
60	1,64523725
70	0,44467538
80	0,37803318
90	6,56402876
100	16,81008451
110	10,48621275
120	6,77649080
130	3,54976128
140	1,19249923
150	0,40632692
160	1,47053117
170	11,63627261
180	13,31764045
190	8,88407979
200	5,31727769

Dari data, terlihat bahwa populasi *predator* mengalami fluktuasi, dimulai dari nilai awal $y(0) = 33.7$ pada $t = 0$. Populasi turun drastis hingga titik minimum di sekitar $t = 80$, saat jumlahnya hampir nol. Ketika populasi *prey* sangat rendah, *predator* kekurangan sumber makanan, menyebabkan kematian yang signifikan di antara *predator*. Namun, setiap kali populasi *prey* meningkat pada $t = 90$ dan seterusnya, *predator* juga mulai pulih. Misalnya, pada $t = 90$, populasi *predator* meningkat signifikan menjadi 6,564028767, mengikuti kenaikan jumlah *prey*. Pola ini menunjukkan bahwa *predator* sangat bergantung pada *prey* untuk kelangsungan hidupnya, dengan puncak populasi *predator* terjadi setelah *prey* pulih, yang merupakan ciri khas dari model interaksi *predator-prey*.



Gambar 4.2 Grafik Banyaknya *Prey* terhadap Waktu

Pada gambar 4.2 (a) merupakan hasil simulasi populasi *prey* ketika $t = 100$ dan gambar 4.2 (b) saat $t = 1000$. Pada awal gambar 4.2 (a) ketika nilai $t = 0$ populasi *prey* sebesar 52.2 sedangkan pada $t = 100$ populasi *prey* menurun menjadi 6,1107. Kemudian untuk gambar 4.2 (b) saat t diperpanjang hingga 1000 populasi *prey* berada pada nilai 8,9801. Dapat dilihat bahwa sistem juga menunjukkan tidak stabil ketika t diperpanjang menuju titik tertentu.

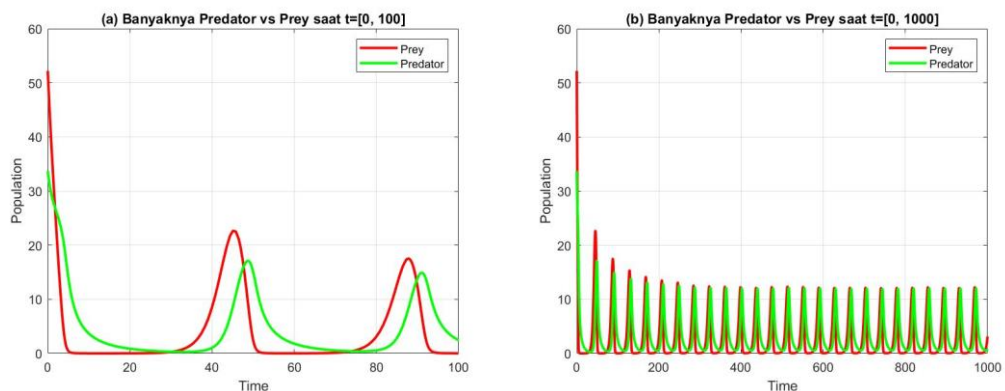
Pada awalnya, populasi *prey* menurun drastis. Penurunan ini disebabkan oleh banyaknya *predator* yang memakan *prey* pada fase awal. Ketika *predator* berada di puncak populasi (berdasarkan grafik pada Gambar 4.1), mereka sangat efektif dalam memangsa *prey*, menyebabkan populasi *prey* menurun tajam. Setelah populasi *prey* menurun ke tingkat yang rendah, populasi *predator* juga mulai menurun karena kekurangan makanan. Pada fase ini, *prey* mulai pulih karena tekanan predasi berkurang, dan pertumbuhan alami menjadi dominan, sehingga populasi *prey* kembali naik. Siklus ini berulang dengan periode tertentu.

Tabel 4.3 Hasil Simulasi Numerik dari Solusi x terhadap Waktu

<i>Waktu (t)</i>	<i>Prey (x)</i>
0	52.2
10	20,7928317
20	1,13081917
30	0,20419629
40	0,03865016
50	0,00896589
60	0,00520919
70	0,07442809
80	2,70121457
90	21,66488014
100	6,11066982
110	0,34724138
120	0,06778401
130	0,01642609
140	0,01989962
150	0,40626770
160	8,55281206
170	15,96018029
180	2,06603324

Waktu (t)	Prey (x)
190	0,27699727
200	0,05366178

Populasi *prey* juga menunjukkan pola fluktuasi. Pada awalnya, *prey* memiliki populasi $x(0) = 52.2$, tetapi segera menurun ketika *predator* mulai memangsa mereka, mencapai titik terendah di sekitar $t = 60$. Namun, begitu tekanan predasi berkurang karena populasi *predator* menurun, *prey* mulai pulih. Ini terlihat pada $t = 80$ ketika populasi *prey* kembali naik signifikan menjadi 2,70121457. Pola fluktuasi *prey* ini menunjukkan fase pemulihan yang terjadi setelah periode predasi yang intens, dan kenaikan *prey* sering kali mendahului kenaikan *predator*, mencerminkan hubungan siklus antara kedua populasi.



Gambar 4.3 Grafik Banyaknya *Predator* dan *Prey* terhadap Waktu

Berdasarkan gambar 4.3 (a) grafik ini menampilkan populasi *prey* (merah) dan *predator* (hijau) ketika $t = 0$ populasi *prey* sebesar 52.2 dan *predator* sebesar 33.7 yang kemudian pada saat $t = 100$ populasi . Di fase awal (sekitar $t = 0$), *prey* memiliki populasi yang lebih besar dari *predator*. Pada gambar 4.3 (b) diperpanjang hingga interval $t = 1000$. Ketika *predator* mulai memangsa *prey*, populasi *prey* turun drastis sementara populasi *predator* mulai meningkat.

Ini karena *predator* memperoleh lebih banyak makanan dan bertahan hidup serta berkembang biak.

Grafik ini menggambarkan siklus *predator prey* yang lebih stabil dan periodik. *Predator* dan *prey* menunjukkan pola fluktuasi yang lebih cepat dan stabil seiring berjalannya waktu. Hal ini menunjukkan bahwa sistem mencapai keadaan siklik stabil, dimana setiap siklus *predator* dan *prey* berulang dalam pola serupa.

Tabel 4.4 Hasil Simulasi Numerik dari Solusi x dan y terhadap Waktu

<i>Waktu (t)</i>	<i>Prey (x)</i>	<i>Predator (y)</i>
0	52.2	33.7
10	20,7928317	25,77074143
20	1,1308191	16,54650307
30	0,2041962	11,76389982
40	0,03865016	7,73041499
50	0,00896589	4,48013905
60	0,00520919	1,64523725
70	0,07442809	0,44467538
80	2,70121457	0,37803318
90	21,66488014	6,56402876
100	6,11066982	16,81008451
110	0,34724138	10,48621275
120	0,06778401	6,77649080
130	0,01642609	3,54976128
140	0,01989962	1,19249923
150	0,40626770	0,40632692
160	8,55281206	1,47053117
170	15,96018029	11,63627261
180	2,06603324	13,31764045
190	0,27699727	8,88407979
200	0,05366178	5,31727769

Berdasarkan tabel yang menunjukkan perkembangan populasi *predator* dan *prey* dari waktu ke waktu, terlihat adanya pola fluktuasi yang khas dari dinamika *predator prey*. Pada awalnya populasi *predator* dan *prey* cukup tinggi, dengan nilai $x(0) = 52.2$ untuk *prey* dan $y(0) = 33.7$ untuk *predator*. Seiring waktu populasi *prey* menurun drastis mencapai kepunahan pada sekitar $t = 50$ ketika nilainya hanya 0.06, sementara populasi *predator* juga turun signifikan menjadi 3.61. Ini menunjukkan bahwa *predator* bergantung pada *prey* untuk kelangsungan hidupnya, ketika populasi *prey* menurun *predator* juga kesulitan mempertahankan populasinya.

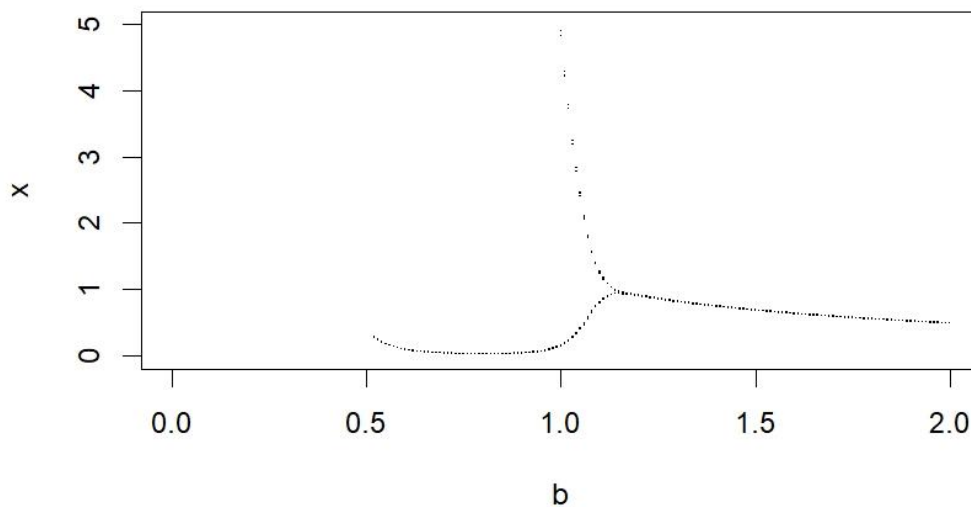
Puncak populasi *prey* terjadi ketika *predator* mengalami penurunan atau berada pada fase pertumbuhan lambat sekitar $t = 90$. Pada fase ini *predator* tidak dapat memangsa *prey* sebanyak sebelumnya, sehingga *prey* tumbuh secara eksponensial dengan tingkat pertumbuhan $r = 0.4$. *prey* mendekati kapasitas dukung lingkungan $K = 100$, tetapi tidak mencapai nilai tersebut karena predasi.

Puncak populasi *predator* mencapai puncaknya setelah *prey* menurun sekitar $t = 100$, yaitu ketika *predator* memiliki makanan yang cukup untuk berkembang biak. Namun, setelah *prey* menurun drastis, *predator* mulai kekurangan makanan yang mengakibatkan populasi *predator* menurun.

Penurunan populasi terjadi ketika populasi *prey* menurun drastis karena dimangsa oleh *predator*, populasi *predator* juga mulai menurun karena kekurangan makanan. Penurunan ini terjadi secara bertahap, dengan *predator* membutuhkan waktu untuk merasakan dampak kekurangan *prey* sebelum mengalami kematian massal.

4.2 Analisis Bifurkasi Model Matematika *Predator-Prey*

Dengan memasukkan nilai parameter pada Tabel 4.1 ke syarat kestabilan E_2^* , diperoleh λ_2 sebesar $0.6712 > 0$ sehingga $b > 1.1667$ akibatnya kestabilan titik kesetimbangan E_2^* bersifat *saddle node*. Berdasarkan definisi bifurkasi *saddle node*, ketika nilai $b > 1.1667$ akan eksis dua titik kesetimbangan E_2^* seperti pada gambar 4.4. Hasil ini diperjelas dengan titik kesetimbangan yang diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter tersebut. Titik kesetimbangan tersebut antara lain $E_1^* = (0,0)$, $E_2^* = (100,0)$ dan $E_3^* = (1.321295902, 0.772343501)$. Kestabilan titik E_1^* *saddle node* dikarenakan $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = -0.1$. Kestabilan titik E_2^* *saddle node* dikarenakan $\lambda_1 = -0.4$, $\lambda_2 = 0.6714$. Kestabilan titik E_3^* *saddle node* dikarenakan $\lambda_1 = 0.00395 + 0.2179I$, $\lambda_2 = 0.00395 - 0.2179I$.



Gambar 4.4 Grafik Bifurkasi *Prey* terhadap Parameter b

Grafik bifurkasi ini menunjukkan bagaimana populasi *prey* x berubah seiring dengan variasi nilai parameter b , yang berhubungan dengan efisiensi konversi *prey* ke *predator*. Pada grafik, terlihat bahwa ketika nilai b meningkat dari 0 hingga sekitar 1, populasi *prey* mengalami penurunan secara bertahap.

Namun, setelah nilai b melewati angka 1.1667, terjadi perubahan signifikan pada populasi *prey* dengan munculnya bifurkasi muncul pada nilai tersebut.

Perubahan ini mencerminkan adanya ketidakstabilan dalam sistem *predator-prey*. Pada nilai b yang rendah, *predator* kurang efisien mengubah *prey* menjadi sumber daya yang mendukung populasinya, menyebabkan *prey* lebih stabil atau bahkan meningkat. Namun, ketika b mencapai nilai tertentu mendekati atau melampaui nilai kritis, *predator* lebih efektif dalam mengonsumsi *prey*, yang mengarah pada perubahan drastis dalam dinamika populasi *prey*. Efisiensi konversi yang meningkat ini menyebabkan fluktuasi atau ketidakstabilan pada *prey*, yang dalam jangka panjang memengaruhi kestabilan ekosistem secara keseluruhan.

4.3 Kajian Islam

Dari kajian tentang penciptaan manusia dan perannya sebagai khalifah di bumi, jelas bahwa Allah SWT menugaskan manusia untuk menjaga dan mengelola ekosistem secara bijaksana, termasuk dalam interaksi antara *predator* dan *prey*. Ayat-ayat dalam Al-Qur'an, seperti Q.S. Al-Baqarah ayat 30 dan Q.S. Al-An'am ayat 165, menegaskan tanggung jawab ini dan menunjukkan bahwa manusia memiliki posisi istimewa dalam menjaga keseimbangan di bumi.

Penelitian tentang model *predator-prey* Bazykin mengungkapkan bifurkasi yang terjadi dalam populasi *predator* dan *prey*. Dalam konteks ini, kesadaran manusia sebagai khalifah menjadi sangat penting, karena setiap perubahan dalam parameter populasi dapat berdampak signifikan pada kestabilan ekosistem. Misalnya, efisiensi konversi *prey* berpengaruh langsung pada dinamika populasi,

mencerminkan bahwa pengelolaan yang baik dan bijaksana diperlukan untuk memelihara keseimbangan ini.

Lebih jauh lagi, tantangan yang dihadapi dalam menurunnya tingkat kelahiran, terutama di negara seperti Jepang, menunjukkan perlunya tindakan yang sesuai untuk memastikan keberlanjutan generasi mendatang. Islam mendorong umatnya untuk membangun keluarga yang sakinah dan mendidik anak-anak agar menjadi generasi yang berkualitas, yang dapat berkontribusi pada keseimbangan ekosistem.

Dengan memahami interaksi *predator-prey* dan konsep bifurkasi, umat manusia diharapkan dapat merencanakan langkah-langkah konservasi yang lebih efektif, menjaga kestabilan populasi, dan mengelola sumber daya alam secara bijaksana, sejalan dengan ajaran agama. Kesimpulannya, manusia sebagai khalifah memiliki tanggung jawab moral dan spiritual untuk memelihara keseimbangan ekosistem, memastikan keberlanjutan, dan berkontribusi pada kehidupan yang harmonis di bumi sesuai dengan kehendak Allah SWT.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian yang telah dijelaskan pada Bab I dan hasil yang disajikan pada Bab IV, dapat dirumuskan kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *predator-prey* Bazykin memiliki 3 titik kesetimbangan, yaitu $E_1^* = (0,0)$, $E_2^* = (K, 0)$ dan $E_3^* = (x_4^*, y_4^*)$. Titik E_1^* bersifat *saddle node*, untuk E_2^* bersifat stabil dengan kondisi $\lambda_2 < 0$ dan bersifat *saddle node* dengan kondisi $\lambda_2 > 0$ maka $b > \frac{m(h+K)}{aK}$. Kemudian pada E_3^* bersifat stabil dengan kondisi $c_1 < 0$ dan $c_2 > 0$ atau bersifat *saddle node* dengan kondisi $c_2 < 0$. Hasil analisis kestabilan menunjukkan adanya pengaruh nilai parameter b pada perilaku sistem.
2. Analisis bifurkasi pada model *predator-prey* Bazykin dengan diberikan perturbasi parameter b . Berdasarkan analisis sistem mengalami bifurkasi *saddle node* ketika $b > 1.1667$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil simulasi dan analisis bifurkasi model matematika *predator-prey* Bazykin dalam penelitian ini, terdapat beberapa saran untuk penelitian lanjutan :

1. Pengembangan Model dengan Variabel Ekologis Tambahan.
2. Simulasi dengan Parameter Stokastik.

3. Analisis Efek Intervensi Manusia.
4. Optimisasi Parameter melalui Pendekatan Machine Learning.
5. Studi Eksperimental Lapangan.
6. Eksplorasi Model Nonlinier Lainnya.

Saran-saran ini diharapkan dapat memberikan kontribusi lebih lanjut dalam penelitian dinamika populasi *predator-prey* dan aplikasinya dalam ekosistem nyata.

DAFTAR PUSTAKA

- Adhikary, P. D., Mukherjee, S., & Ghosh, B. (2021). Bifurcations and hydra effects in Bazykin's predator-prey model. *Theoretical Population Biology*.
- Bazykin, A. D. (1976). Structural and Dynamic Stability of Model Predator-Prey Systems. *Theoretical Population Biology*.
- Bloomfield, V. A. (2014). *Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering*. New York: CRC Press.
- Majid, A. A., Mohamed, Z. M., & Norsiah. (2010). *Tapping New Possibilities in Accounting Research, Qualitative Research in Accounting- Malaysian Cases*. Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Moleong, L. J. (2019). *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Mursita, D. (2010). *Aljabar Linear*. Bandung: Rekayasa Sains.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Yogyakarta: CV Budi Utama.
- Ngulwiyah, I., Ilmiah, W., & Suaidi. (2021). Pola Asuh Keluarga Dalam Penguatan Aqidah Anak. *Jurnal Pendidikan Karakter JAWARA*, 7(2), 13.
- Sasongko, S. B. (2010). *Metode numerik dengan scilab*. Yogyakarta: C.V ANDI OFFSET.
- Shihab, M. Q. (2000). *Tafsir Al Mishbah : pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an 1*. Jakarta: Lantera Hati.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al Misbah : pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lantera Hati.
- Shihab, M. Q. (2016). *Tafsir Al Mishbah : pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an*. Ciputat: Lantera Hati.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos : with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books.
- Usman, A. b. (2020). *Ringkasan Shahih Muslim*. Hikam Pustaka.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- Kementrian Agama RI. (2019). *Quran Kemenag*. Lajnah Pentashih Mushaf Al-Quran.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Script matlab Interpretasi Grafik Populasi *Prey*, *Predator*, dan *Predator Prey* Pada Saat $t = [0, 100]$

```
function dxdt = dxdt_func(t, x)
    dxdt = zeros(2, 1);
    X = x(1);
    Y = x(2);
    r = 0.4;
    K = 100;
    a = 0.9;
    b = 0.9;
    h = 5;
    g = 0.025;
    m = 0.1;
    dxdt(1) = (r*X*(1-(X/K)))-((a*X*Y)/(h+X));
    dxdt(2) = ((b*a*X*Y)/(h+X))-m*Y-g*Y^2;
end

initial_X = 52.2;
initial_Y = 33.7;
tspan = [0 100];
x0 = [initial_X; initial_Y];
[t, x] = ode45(@dxdt_func, tspan, x0);

% Menampilkan hasil plot
figure;
plot(t, x(:, 2), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Predator');
title('(a) Banyaknya Predator saat t=[0, 100]')
grid on;

% Menampilkan hasil plot
figure;
plot(t, x(:, 1), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Prey');
title('(a) Banyaknya Prey saat t=[0, 100]')
grid on;

% Menampilkan hasil plot
figure;
plot(t, x(:, 1), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
```

```

plot(t, x(:, 2), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Prey', 'Predator');
title('(a) Banyaknya Predator vs Prey saat t=[0, 100]')
grid on;

```

Lampiran 2. Script matlab Interpretasi Grafik Populasi *Prey*, *Predator*, dan *Predator Prey* Pada Saat $t = [0, 1000]$

```

function dxdt = dxdt_func(t, x)
    dxdt = zeros(2, 1);
    X = x(1);
    Y = x(2);
    r = 0.4;
    K = 100;
    a = 0.9;
    b = 0.9;
    h = 5;
    g = 0.025;
    m = 0.1;
    dxdt(1) = (r*X*(1-(X/K)))-((a*X*Y)/(h+X));
    dxdt(2) = ((b*a*X*Y)/(h+X))-m*Y-g*Y^2;
end
initial_X = 52.2;
initial_Y = 33.7;
tspan = [0 1000];
x0 = [initial_X; initial_Y];
[t, x] = ode45(@dxdt_func, tspan, x0);

% Menampilkan hasil plot
figure;
plot(t, x(:, 2), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Predator');
title('(b) Banyaknya Predator saat t=[0, 1000]')
grid on;

% Menampilkan hasil plot
figure;
plot(t, x(:, 1), 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Prey');
title('(b) Banyaknya Prey saat t=[0, 1000]')
grid on;
% Menampilkan hasil plot

```

```

figure;
plot(t, x(:, 1), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, x(:, 2), 'g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time');
ylabel('Population');
legend('Prey', 'Predator');
title('(b) Banyaknya Predator vs Prey saat t=[0, 1000]')
grid on;

```

Lampiran 3. RSTUDIO x terhadap b

```

library(deSolve)

model = function(t, xx, parms) {
  u = xx[1] # plant resource
  v = xx[2] # herbivore
  with(as.list(parms),{
    du = r*u*(1-u/k)-(a*u*v/(h+u))
    dv = (b*a*u*v)/(h+u)-m*v-g*v^2
    list(c(du, dv))
  })
}

times = seq(0, 200, 0.01)
parms = c(r=0.4, k=100, a=0.9, b=0.9, h=5, g=0.025, m=0.1)
xstart = c(u=52.2, v=33.7)
out = lsoda(xstart, times, model, parms)

t = out[,1]
u = out[,2]
v = out[,3]

par(mfrow=c(1,3))
plot(t, u, type="l", lty=1)
plot(t, v, type="l", lty=1)

par(mfrow = c(1,1))
peaks = function(x) {
  l = length(x)

```

```

xm1 = c(x[-1], x[l])
xp1 = c(x[1], x[-l])
x[x > xm1 & x > xp1 | x < xm1 & x < xp1] # Max or min
}
plot(0,0, xlim=c(0,2), ylim=c(0,5), type="n", xlab="b", ylab="u")
for (b in seq(0.02,1.8,0.01)) {
  parms["b"] = b
  out = as.data.frame(lsoda(xstart, times, model, parms, hmax=0.1))
  l = length(out$u) %/% 3
  out = out[(2*l):(3*l),]
  p = peaks(out$u)
  l = length(out$u)
  xstart = c(u=out$u[l], v=out$v[l])
  points(rep(b, length(p)), p, pch=".")
}

```

Lampiran 4. Perhitungan Maple untuk Titik Keseimbangan Model *Predator Prey*

```

> restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
  unprotect(γ) : DFE :

> dX := r·X·(1 - X/K) - a·X·Y/h + X;
      dX := r X (1 - X/K) - a X Y/h + X

> dY := b·a·X·Y/h + X - m·Y - γ·Y2;
      dY := b a X Y/h + X - m Y - γ Y2

> fixpoint := solve( {dX, dY}, {X, Y} ) :
> fixpoint1 := fixpoint[1];
      fixpoint1 := {X=0, Y=0}

> fixpoint2 := fixpoint[2];
      fixpoint2 := {X=0, Y=-m/γ}

> fixpoint3 := fixpoint[3];

```

$$\text{fixpoint3} := \{X=K, Y=0\}$$

> $\text{fixpoint4} := \text{fixpoint}[4];$

$$\text{fixpoint4} := \left\{ X = \text{RootOf}\left(-\gamma r _Z^3 + (K \gamma r - 2 \gamma h r) _Z^2 + (-K a^2 b + 2 K \gamma h r - \gamma h^2 r + K a m) _Z + K \gamma h^2 r + m h K a\right), Y = \frac{1}{K a} \left(r \left(K \text{RootOf}\left(-\gamma r _Z^3 + (K \gamma r - 2 \gamma h r) _Z^2 + (-K a^2 b + 2 K \gamma h r - \gamma h^2 r + K a m) _Z + K \gamma h^2 r + m h K a\right) + K h - \text{RootOf}\left(-\gamma r _Z^3 + (K \gamma r - 2 \gamma h r) _Z^2 + (-K a^2 b + 2 K \gamma h r - \gamma h^2 r + K a m) _Z + K \gamma h^2 r + m h K a\right)^2 - \text{RootOf}\left(-\gamma r _Z^3 + (K \gamma r - 2 \gamma h r) _Z^2 + (-K a^2 b + 2 K \gamma h r - \gamma h^2 r + K a m) _Z + K \gamma h^2 r + m h K a\right) h \right) \right\}$$

> $\text{Jacobian} := \text{Matriks}(\text{jacobian}([dX, dY], [X, Y]));$

$$\text{Jacobian} := \text{Matriks} \left(\begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{r X}{K} - \frac{a Y}{h + X} + \frac{a X Y}{(h + X)^2} & -\frac{a X}{h + X} \\ \frac{b a Y}{h + X} - \frac{b a X Y}{(h + X)^2} & \frac{b a X}{h + X} - m - 2 Y \gamma \end{bmatrix} \right)$$

> $\text{Jacobian1} := \text{subs}(\text{fixpoint1}, \text{Jacobian});$

$$\text{Jacobian1} := \text{Matriks} \left(\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \right)$$

> $\text{Jac1} := \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix};$

$$\text{Jac1} := \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}$$

> $\text{eigen1} := \text{eigenvalues}(\text{Jac1})$

$$\text{eigen1} := r, -m$$

> $\text{Jacobian2} := \text{subs}(\text{fixpoint2}, \text{Jacobian});$

$$\text{Jacobian2} := \text{Matriks} \left(\begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix} \right)$$

> $\text{Jac2} := \begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix};$

$$\text{Jac2} := \begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix}$$

> $eigen2 := eigenvalues(Jac2)$

$$eigen2 := \frac{\gamma h r + a m}{\gamma h}, m$$

> $Jacobian2 := subs(fixpoint2, Jacobian);$

$$Jacobian2 := \text{Matriks} \left(\begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix} \right)$$

$$> Jac2 := \begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix};$$

$$Jac2 := \begin{bmatrix} r + \frac{a m}{\gamma h} & 0 \\ -\frac{b a m}{\gamma h} & m \end{bmatrix}$$

> $eigen2 := eigenvalues(Jac2);$

$$eigen2 := \frac{\gamma h r + a m}{\gamma h}, m$$

> $Jacobian3 := subs(fixpoint3, Jacobian);$

$$Jacobian3 := \text{Matriks} \left(\begin{bmatrix} -r & -\frac{a K}{h + K} \\ 0 & \frac{b a K}{h + K} - m \end{bmatrix} \right)$$

$$> Jac3 := \begin{bmatrix} -r & -\frac{a K}{h + K} \\ 0 & \frac{b a K}{h + K} - m \end{bmatrix};$$

$$Jac3 := \begin{bmatrix} -r & -\frac{a K}{h + K} \\ 0 & \frac{b a K}{h + K} - m \end{bmatrix}$$

> $eigen3 := eigenvalues(Jac3)$

$$eigen3 := -r, \frac{K a b - K m - h m}{h + K}$$

> $Jacobian4 := subs(fixpoint4, Jacobian);$

RIWAYAT HIDUP



Siti Khanifah, lahir di Kabupaten Pinrang pada tanggal 7 April 2000. Penulis bertempat tinggal di Kabupaten Bojonegoro, Jawa Timur. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Hanah dan Ibu Siti Isyaroh.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 1 Kalitidu dan lulus pada tahun 2012. Setelah itu, penulis melanjutkan ke jenjang pendidikan menengah pertama di SMPN 1 Bojonegoro dan berhasil lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, pendidikan menengah atas ditempuh di SMAN 1 Bojonegoro dan diselesaikan pada tahun 2018. Setelah menyelesaikan pendidikan tersebut, penulis melanjutkan studi ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan memilih Program Studi Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswa di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, penulis bergabung dalam Ikatan Mahasiswa Bojonegoro.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Khanifah
NIM : 18610080
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Bifurkasi Pada Model *Predator-Prey* Bazykin
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	16 Februari 2024	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	2.
3.	20 Februari 2024	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	3.
4.	20 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	27 Februari 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	6 Maret 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	7 Maret 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	8 Maret 2024	ACC Seminar Proposal	8.
9.	20 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	17 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	10.
11.	25 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	11.
12.	25 Oktober 2024	ACC Seminar Hasil	12.
13.	28 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	13.
14.	28 Oktober 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	14.
15.	21 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	18 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	16. —→
17.	23 Desember 2024	ACC Keseluruhan	17. —→

Malang, 23 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



[Handwritten Signature]
Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005