

**STUDI PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DENGAN ADANYA MEDAN
LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU DI ALAM SEMESTA
ANISOTROPIK BIANCHI I: KASUS $q = 1$**

SKRIPSI

Oleh:
NILA PERMATASARI
NIM. 19640035



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PENGAJUAN

**STUDI PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DENGAN ADANYA MEDAN
LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU DI ALAM SEMESTA
ANISOTROPIK BIANCHI I: KASUS $q = 1$**

SKRIPSI

**Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
NILA PERMATASARI
NIM. 19640035**

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PERSETUJUAN

**STUDI PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DENGAN ADANYA MEDAN
LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU DI ALAM SEMESTA
ANISOTROPIK BIANCHI I: KASUS $q = 1$**

SKRIPSI

Oleh:
NILA PERMATASARI
NIM. 19640035

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 18 November 2024

Pembimbing I,



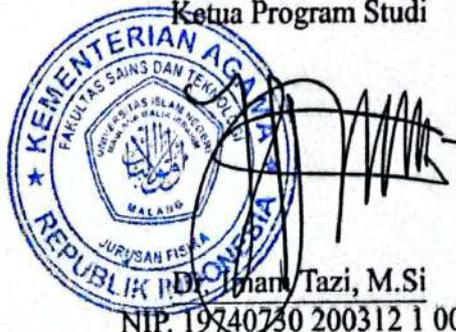
Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II,



Dr. Erna Hastuti, M.Si
NIP. 19811119 200801 2 009

Mengetahui,
Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

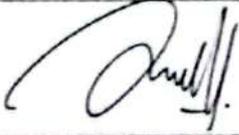
HALAMAN PENGESAHAN

STUDI PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DENGAN ADANYA MEDAN
LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU DI ALAM SEMESTA
ANISOTROPIK BIANCHI I: KASUS $q = 1$

SKRIPSI

NILA PERMATASARI
NIM. 19640035

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 19 Desember 2024

Penguji Utama	: <u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Ketua Penguji	: <u>Dr. Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	: <u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	: <u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740703 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nila Permatasari

NIM : 19640035

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Penciptaan Partikel Skalar Dengan Adanya Medan Listrik Yang Bergantung Waktu Di Alam Semesta Anisotropik Bianchi I: Kasus $q = 1$

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila hasil dari penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2024
Yang Membuat Pernyataan



Nila Permatasari
NIM. 19640035

MOTTO

*Jangan merasa sombong atas kebaikan yang telah Anda lakukan. Anda bisa
berbuat baik karena kehendak Allah. Bukan atas kehendak diri sendiri.*

- Gus Baha' -

HALAM PERSEMBAHAN

Karya yang sederhana ini saya persembahkan untuk Bapak dan Ibu yang telah mendukung secara materi maupun non materi, yang selalu memberikan doa dan cinta dengan tulus dan ikhlas tanpa henti

Selanjutnya untuk kakak-kakakku dan adek-adekku. Kalian penyemangatku, bersedia meluangkan waktu untuk mendengar keluh kesahku

Tidak lupa untuk diriku. Kau hebat telah berjuang dan bertahan hingga akhir dengan kemenangan penuh haru. Terima kasih untuk kerja kerasnya sepanjang waktu

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, penulis panjatkan puji syukur atas kehadiran Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Studi Penciptaan Partikel Skalar Dengan Adanya Medan Listrik Yang Bergantung Waktu Di Alam Semesta Anisotropik Bianchi I: Kasus $q = 1$ ”**. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Agung Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat, dan dzuriyyahnya serta pengikut setianya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini dapat tersusun dan terselesaikan dengan baik berkat doa dan dukungan serta bantuan yang diberikan oleh seluruh pihak kepada penulis. Penulis menyadari bahwa ucapan terima kasih saja tidak cukup. Namun, hanya sebuah ucapan terima kasih yang dapat penulis ucapkan kepada:

1. Prof. Dr. H. Muhammad Zainuddin, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Arista Romadani, M.Sc selaku Dosen pembimbing skripsi yang telah bersedia meluangkan waktu untuk membimbing.
5. Dr. Muhammad Taufiqi, M.Si selaku Dosen fisika teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran di bidang fisika teori.
6. Dr. Erna Hastuti, M.Si selaku Dosen wali yang senantiasa membimbing dan memberi arahan serta motivasi.
7. Seluruh jajaran dosen Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang sangat bermanfaat guna membantu dalam penulisan skripsi ini.

8. Segenap staf dan pegawai di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu melancarkan dan memberikan pelayanan yang baik.
9. Bapak, Ibu, dan seluruh keluarga yang senantiasa mendoakan dan memberikan dukungan selama penulisan skripsi ini.
10. Tidak lupa untuk seluruh kakak tingkat Fisika Teori yang selalu memberikan masukan dan selalu dimintai bantuan dalam penyusunan proposal skripsi ini serta memberikan ilmu yang sangat bermanfaat.
11. Teman-teman fisika angkatan 2019, khususnya Fisika Teori 2019 yang telah memberikan semangat.
12. Serta semua pihak yang memberikan dukungan dan dorongan secara langsung maupun tidak selama proses penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan, arahan, dan bimbingan serta motivasi dari semua pihak, skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Penulis juga menyadari banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Untuk itu, penulis berharap memperoleh kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan penelitian ini.

Malang, 24 Agustus 2023

Penulis

DAFTAR ISI

COVER	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
مستخلص البحث	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Lagrangian	7
2.1.1 Lagrangian Medan Skalar	8
2.1.2 Persamaan Klein-Gordon dengan adanya Medan Listrik	10
2.2 Hamilton Jacobi	12
2.2.1 Hamilton Jacobi untuk Partikel Relativistik	13
2.3 Partikel	15
2.3.1 Kajian Partikel dalam Al Quran	15
2.3.2 Penciptaan Partikel	17
2.3.3 Partikel Skalar	18
2.3.4 Densitas Jumlah Partikel	19
2.4 Teori Medan Kuantum	21
2.4.1 Persamaan Schrödinger	22
2.4.2 Persamaan Klein-Gordon	23
2.4.3 Persamaan Dirac	24
2.5 Geometri Ruang-Waktu Melengkung	26
2.5.1 Metrik	26
2.5.2 Simbol Christoffel	29
2.5.3 Tensor Kelengkungan Riemann	33
2.5.4 Tensor Ricci dan Skalar Ricci	34
2.5.5 Model Alam Semesta Bianchi I	34

3.1	Solusi Hamilton Jacobi Saat $t \rightarrow 0$	40
3.2	Solusi Hamilton Jacobi Saat $t \rightarrow \infty$	41
BAB IV SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DI RUANG-WAKTU BIANCHI I DENGAN ADANYA MEDAN LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU		
4.1	Geometri Ruang-Waktu Bianchi I	44
4.1.1	Simbol Christoffel	44
4.1.2	Tensor Ricci dan Skalar Ricci	48
4.2	Solusi Persamaan Klein-Gordon	50
BAB V PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DI RUANG-WAKTU BIANCHI I DENGAN ADANYA MEDAN LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU		
5.1	Probabilitas Partikel Tunggal yang Tercipta	60
5.2	Densitas Jumlah Partikel yang Tercipta	76
5.3	Penciptaan Partikel sebagai Awal Pembentukan Alam Semesta Menurut Al Quran	84
BAB VI PENUTUP		
6.1	Kesimpulan	89
6.2	Saran	91
DAFTAR PUSTAKA		
LAMPIRAN		
A.	Persamaan Whittaker	96
B.	Hasil Numerik Densitas Partikel untuk Medan Listrik Kuat dan Lemah	100
C.	Hasil Numerik Densitas Partikel Tanpa Medan Listrik	105

DAFTAR GAMBAR

Gambar 5.1	Densitas partikel yang tercipta ketika medan listrik lemah dan kuat	82
Gambar 5.2	Densitas partikel yang tercipta tanpa adanya medan listrik	83

ABSTRAK

Permatasari, Nila. 2024. **Studi Penciptaan Partikel Skalar Dengan Adanya Medan Listrik Yang Bergantung Waktu di Alam Semesta Anisotropik Bianchi I: Kasus $q = 1$** . Skripsi. Prodi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Erna Hastuti, M.Si.

Kata Kunci: Ruang-waktu kosmologi, Transformasi Bogoliubov, Penciptaan partikel.

Penciptaan partikel di ruang vakum dapat terjadi karena adanya medan listrik yang menyebabkan ruang vakum tidak stabil terhadap penciptaan partikel. Dalam penelitian ini dikaji terkait penciptaan partikel skalar di ruang-waktu anisotropik Bianchi I dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu, khususnya pada kasus $q = 1$, yang merepresentasikan alam semesta tidak statis. Dan metrik dari model alam semesta ini memiliki singularitas saat $t = 0$. Dengan menggunakan pendekatan semi-klasik untuk menghitung keadaan frekuensinya dan menggunakan transformasi Bogoliubov untuk menghitung densitas partikel yang tercipta. Kemudian dianalisis untuk memahami proses penciptaan partikel di ruang vakum dan distribusi partikel yang tercipta ketika dipengaruhi medan listrik yang berubah-ubah seiring waktu. Hasil penelitian menunjukkan bahwa distribusi partikel yang tercipta menjadi termal ketika tidak ada interaksi dengan medan listrik. Dan ketika medan listriknya kuat, penciptaan partikel dalam ruang vakum menjadi signifikan. Namun, ketika medan listriknya mendekati nilai tak hingga, tidak terjadi penciptaan partikel. Hal ini mengindikasikan bahwa ruang vakum tidak stabil terhadap penciptaan partikel ketika terganggu oleh medan listrik.

ABSTRACT

Permatasari, Nila. 2024. **Study of Scalar Particle Creation in a Time-Varying Electric Field within a Bianchi Type I Anisotropic Universe: Case of $q = 1$** . Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisors: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Dr. Erna Hastuti, M.Si.

Keywords: Cosmological space-time, Bogoliubov transformation, Particle production.

Particle creation in vacuum can occur due to the presence of an electric field that causes the vacuum to be unstable against particle creation. This study investigates the creation of scalar particles in a Bianchi Type I anisotropic spacetime with a time-dependent electric field, specifically for the case of $q = 1$, which represents a non-static universe. The metric of this universe model has a singularity at $t = 0$. Using a semi-classical approach to calculate the frequency states and the Bogoliubov transformation to calculate the created particle density, an analysis is conducted to understand the process of particle creation in vacuum and the distribution of created particles when influenced by a time-varying electric field. The results show that the distribution of created particles becomes thermal when there is no interaction with the electric field. And when the electric field is strong, the creation of particles in vacuum becomes significant. However, when the electric field approaches infinity, no particle creation occurs. This indicates that the vacuum is unstable against particle creation when disturbed by an electric field.

مستخلص البحث

بيرماتاساري، نيلا. 2024. دراسة حول تكوين الجسيمات العددية مع وجود مجالات كهربائية تعتمد على الوقت في الكون متباين الخواص بيانكي I: الحالة $q = 1$. بحث جامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانج. المشرف: (I) أريستا روماضي، الماجستير (II) الدكتور إيرنا هاستوتي، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: علم الكونيات الزمكان، تحول بوغوليوبوف، إنشاء الجسيمات.

يمكن أن يحدث تكوين الجسيمات في غرفة مفرغة بسبب وجود مجال كهربائي يتسبب في أن تكون غرفة التفريغ غير مستقرة لتكوين الجسيمات. في هذه الدراسة، تمت دراسة إنشاء الجسيمات العددية في الزمكان غير القابل للخواص بيانكي I مع وجود مجال كهربائي يعتمد على الوقت، خاصة في حالة $q = 1$ ، والذي يمثل الكون غير الساكن. ومقياس هذا النموذج للكون له تفرد عندما $t = 0$. يستخدم نمحا شبه كلاسيكي لحساب حالة التردد ويستخدم تحويل Bogoliubov لحساب كثافة الجسيمات التي تم إنشاؤها. ثم تم تحليله لفهم عملية تكوين الجسيمات في غرفة مفرغة وتوزيع الجسيمات التي تم إنشاؤها عند تآثرها بمجال كهربائي يتغير بمرور الوقت. تظهر النتائج أن توزيع الجسيمات المتكونة يصبح حراريا عندما لا يكون هناك تفاعل مع المجال الكهربائي. وعندما يكون المجال الكهربائي قويا، يصبح تكوين الجسيمات في الفضاء الفراغي مهما. ومع ذلك، عندما يقترب المجال الكهربائي من قيمة لا نهائية، لا يحدث أي تكوين للجسيمات. يشير هذا إلى أن غرفة التفريغ غير مستقرة لتكوين الجسيمات عند إزعاجها بواسطة مجال كهربائي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut teori medan kuantum (TMK), partikel merupakan sebuah gelombang dari medan-medan kuantum yang menyebar di seluruh jagat raya. Gelombang dari medan kuantum tersebut berkumpul dan membentuk gumpalan energi yang berbeda-beda mengikuti hukum mekanika kuantum. Gumpalan energi yang berbeda-beda itulah yang disebut sebagai partikel, seperti proton, elektron, dan sebagainya.

Dalam Al Quran telah disinggung mengenai partikel yang merupakan struktur terkecil yaitu di dalam QS. Yunus: ayat 61

وَمَا تَكُونُ فِي شَأْنٍ وَمَا تَتْلُوا مِنْهُ مِنْ قُرْآنٍ وَلَا تَعْمَلُونَ مِنْ عَمَلٍ إِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ شُهُودًا إِذْ تُفِيضُونَ فِيهِ وَمَا يَعْزُبُ عَنْ رَبِّكَ مِنْ مِثْقَالِ ذَرَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ ﴿٦١﴾

Artinya: “Kamu tidak berada dalam suatu keadaan dan tidak membaca suatu ayat dari Al Quran dan kamu tidak mengerjakan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi saksi atasmu di waktu kamu melakukannya. Tidak luput dari pengetahuan Rabbmu walaupun sebesar dzarrah (atom) di bumi atau pun di langit. Tidak ada yang lebih kecil dan tidak (pula) yang lebih besar daripada itu, melainkan (semua tercatat) dalam Kitab yang nyata (Lauhul Mahfuzh)”. (QS. Yunus [10]: 61).

Menurut M. Quraish Shihab dalam Tafsir al-Mishbah, Zarah dipahami oleh beberapa mufassir dalam berbagai arti, diantaranya semut yang sangat kecil, kepala semut, dan debu yang berterbangan yang hanya terlihat di celah matahari. Karena pada saat sebelum ditemukan atom, pengguna bahasa menggunakan kata tersebut untuk menunjuk segala sesuatu yang berukuran kecil. Setelah ditemukannya atom, para pakar bahasa Arab mengartikan Zarah sebagai atom. Karena pada saat itu atom diketahui sebagai unsur terkecil yang tidak dapat dibagi lagi (Isnanto, 2018).

Namun, tidak dapat dipungkiri bahwa ilmu pengetahuan akan terus berkem-

bang seiring waktu, termasuk kajian terkait partikel dan atom. Dalam penelitian selanjutnya, bahwa atom bukan lagi objek terkecil. Karena di dalam atom masih terdapat komponen-komponen penyusunnya, yakni elektron, proton, neutron. Lebih jauh lagi, penelitian di bidang fisika partikel mengungkapkan bahwa proton dan neutron dalam atom tersusun atas partikel elementar yang dinamakan quark. Quark merupakan sub-partikel yang tidak tersusun dari partikel lain, yang memiliki ukuran sekitar 10^{-18} m. Penelitian terbaru menemukan bahwa partikel Higgs Boson merupakan partikel terkecil di alam semesta. Kondisi ini sejalan dengan pemakaian *dzarrah* sebagai benda yang paling kecil. Secara implisit, istilah *dzarrah* dalam ayat di atas memberikan gambaran bahwa Alla SWT Maha Teliti terhadap makhluk ciptaan-Nya (Qomariyah, 2021).

Penciptaan partikel merupakan salah satu efek kuantum yang disebabkan oleh ketidakstabilan vakum akibat medan kuat seperti medan listrik. Beberapa dekade terakhir telah dilakukan berbagai macam upaya untuk memahami proses kuantum dalam medan kuat. Medan kuat dalam teori medan kuantum dapat menyebabkan ketidakstabilan vakum dan memicu proses penciptaan partikel-antipartikel. Proses penciptaan pasangan partikel dari fluktuasi kuantum dalam vakum biasanya bersifat virtual. Namun, pasangan partikel virtual tersebut dapat menjadi pasangan partikel nyata apabila dipengaruhi medan kuat yang menyediakan energi yang diperlukan untuk menciptakan partikel-antipartikel baru.

Konsep penciptaan pasangan partikel berawal dari pengembangan persamaan Dirac relativistik pada tahun 1928 oleh Paul Dirac. Studi lebih lanjut dilakukan Sauter terkait persamaan Dirac dengan adanya medan listrik statis dan menemukan kemungkinan yang tidak biasa dari penerobosan elektron melalui penghalang tinggi sembarang yang dibentuk oleh medan eksternal. Heisenberg dan Euler kemudian memperluas pemahaman ini dengan menyelidiki efek medan elektromagnetik yang konstan terhadap vakum kuantum. Mereka menemukan bahwa ruang vakum menjadi tidak stabil dalam kondisi tersebut. Sehingga memungkinkan terjadinya pen-

ciptaan pasangan partikel-antipartikel. Schwinger kemudian mengkuantifikasi fenomena ini lebih lanjut. Hasilnya menunjukkan bahwa ketika ruang hampa terganggu oleh kombinasi antara medan listrik dan medan magnet yang keduanya konstan, terdapat kemungkinan (tidak nol) untuk menciptakan partikel. Sementara, dengan hanya medan magnet kemungkinan untuk menciptakan partikel adalah nol. Hasil ini mengindikasikan bahwa medan listrik memainkan peran krusial dalam proses penciptaan pasangan partikel, sementara medan magnet sendiri tidak cukup untuk memicu fenomena tersebut. Temuan-temuan ini memiliki implikasi yang signifikan dalam kosmologi, khususnya dalam memahami mekanisme penciptaan partikel di alam semesta awal dan dalam ruang-waktu melengkung.

Lengkungan ruang-waktu merupakan akibat dari keberadaan medan gravitasi. Karena fenomena penciptaan partikel di ruang-waktu melengkung melibatkan gravitasi, yang diketahui hingga sekarang teori yang menjelaskan tentang efek kuantum yang melibatkan medan gravitasi masih kurang lengkap. Untuk mengatasi hal ini, para fisikawan mencoba untuk mengembangkan pendekatan alternatif dengan menggabungkan teori medan kuantum dengan medan gravitasi tanpa teori gravitasi kuantum, yaitu menggunakan sebuah medan gravitasi klasik yang diberikan sebagai sebuah metrik Lorentz $g_{\mu\nu}$ (Pimentel & Pineda, 2021). Pendekatan ini memungkinkan untuk menggeneralisasi teori kuantum ke dalam ranah gravitasi tanpa harus sepenuhnya mengadopsi kerangka teori medan kuantum gravitasi yang kompleks. Studi tentang efek kuantum seperti efek Unruh, radiasi Hawking, dan penciptaan partikel di alam semesta awal merupakan konsekuensi dari teori medan kuantum di ruang-waktu melengkung. Maka dari itu, dibutuhkan metode yang dapat menjelaskan fenomena penciptaan partikel di ruang-waktu melengkung.

Terdapat beberapa metode yang digunakan untuk mempelajari mekanisme penciptaan partikel dengan latar belakang kosmologi seperti, pendekatan adiabatik, metode integral lintas Feynman, teknik diagonalisasi hamiltonian, dan metode semi-klasik, serta pendekatan fungsi Green (Rezki & Zaim, 2022). Metode ini di-

gunakan untuk mengkaji penciptaan partikel di alam semesta anisotropik dengan singularitas awal karena metode dari teori medan kuantum dengan latar belakang gravitasi gagal menjelaskannya. Sehingga dibutuhkan pendekatan yang berbeda (Pimentel & Pineda, 2021).

Penelitian terkait efek kuantum dengan latar belakang gravitasi dilakukan oleh Villalba dan Greiner (2002). Dalam makalahnya, Villalba dan Greiner mengkaji tentang penciptaan partikel Dirac dengan adanya medan listrik konstan di alam semesta anisotropik Bianchi I dengan menggunakan metode semi-klasik. Hasilnya menunjukkan bahwa densitas partikel Dirac yang diciptakan berperilaku seperti distribusi Fermi-Dirac. Selain itu, penelitian ini juga mengungkapkan bahwa ketika interaksi listrik diabaikan, distribusi partikel mendekati termal.

Metode semi-klasik juga digunakan dalam skenario yang berbeda yaitu penelitian terkait penciptaan partikel di alam semesta anisotropik dengan singularitas awal yang dilakukan oleh Pimentel dan Pineda. Dalam makalahnya, Pimentel mengkaji penciptaan partikel berspin 0 dan $1/2$ menggunakan metode pendekatan semi-klasik di alam semesta yang berekspansi dengan dua model alam semesta anisotropik Bianchi tipe I, yaitu pada saat $q = 0$ yang merepresentasikan ruang waktu datar dan $q = 1$ yang merepresentasikan ekspansi alam semesta homogen. Hasil dari penelitiannya menunjukkan bahwa, untuk partikel skalar hasilnya sama dengan yang diperoleh oleh (Duru, 1994) dengan metode integral lintas yaitu densitas partikel yang tercipta memenuhi distribusi Bose-Einstein, sedangkan partikel berspin $1/2$ memenuhi distribusi Fermi-Dirac. Perhitungan ini menguatkan bahwa metode semi-klasik selaras dengan integral lintas yang lebih canggih untuk menentukan keadaan vakum dalam relativitas umum, yang membuatnya efisien dan dapat diakses dalam banyak kasus yang menarik (Pimentel & Pineda, 2021).

Penelitian ini akan mengkaji mengenai penciptaan partikel skalar di alam semesta anisotropik yang dilatarbelakangi oleh kosmologi menggunakan ruang-waktu Bianchi I dengan kehadiran medan listrik yang bergantung waktu yang me-

triknya diwakili oleh $ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + t^{-2}dz^2$. Metrik tersebut memiliki singularitas saat $t = 0$. Sehingga pendekatan adiabatik tidak dapat digunakan untuk mengidentifikasi keadaan partikel. Maka, digunakan metode semi-klasik dalam mengkaji fenomena penciptaan partikel berdasarkan metrik tersebut. Metode ini merupakan metode yang dapat mendefinisikan masalah kosmologi dengan baik (Rezki & Zaim, 2022). Metode ini terdiri dari: pertama, mengidentifikasi keadaan frekuensi positif dan negatif ketika $t \rightarrow 0$ dan $t \rightarrow \infty$ dengan menyelesaikan persamaan Hamilton-Jacobi. Kedua, dicari solusi dari persamaan Klein-Gordon pada ruang-waktu Bianchi I dan diidentifikasi tingkat energi positif dan negatifnya dengan membandingkan solusi dari persamaan Hamilton-Jacobi dan solusi persamaan Klein-Gordon. Ketiga, menggunakan transformasi Bogoliubov untuk menghitung densitas jumlah dari partikel skalar yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di alam semesta Bianchi I dan dianalisis terkait pengaruh medan listrik yang berubah seiring waktu terhadap distribusi dari partikel yang tercipta.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas didapat beberapa rumusan masalah, yaitu:

1. Bagaimana solusi persamaan Klein-Gordon di ruang waktu Bianchi I dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu?
2. Bagaimana probabilitas partikel tunggal yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di ruang waktu Bianchi I?
3. Bagaimana densitas jumlah dari partikel yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di ruang waktu Bianchi I?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah:

1. Untuk mencari solusi persamaan Klein-Gordon di ruang waktu Bianchi I dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu.
2. Untuk mengetahui probabilitas partikel tunggal yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di ruang waktu Bianchi I.
3. Untuk menghitung densitas jumlah dari partikel yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di ruang waktu Bianchi I.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah diharapkan dapat memberikan petunjuk penelitian selanjutnya terkait mekanisme penciptaan partikel yang dilatarbelakangi kosmologi khususnya di alam semesta anisotropik dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji secara teoritik densitas jumlah dari partikel skalar yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di alam semesta anisotropik Bianchi I kasus $q = 1$.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Lagrangian

Lagrangian merupakan persamaan gerak klasik untuk sistem yang lebih kompleks yang dirumuskan oleh Joseph Louis Lagrange. Lagrangian berfungsi untuk memberikan alternatif terhadap pendekatan persamaan gerak Newton dengan mendeskripsikan sistem fisik dalam istilah energi daripada gaya. Lagrangian didefinisikan sebagai

$$L = T - V \tag{2.1}$$

dimana T adalah energi kinetik dan V adalah energi potensial. Persamaan di atas merupakan lagrangian untuk kasus sederhana pada partikel tunggal dengan potensial V . Persamaan gerak dalam fisika mematuhi hukum *least action principle* atau prinsip aksi terkecil yang menyatakan bahwa untuk setiap sistem terdapat integral S tertentu yang disebut aksi, yang mempunyai nilai minimum untuk gerak sebenarnya (Landau & Lifshitz, 1980). Artinya partikel bergerak dari sistem tertentu ke sistem yang lain dengan sedemikian rupa sehingga jumlah tindakan yang diperlukan untuk mencapai perubahan ini adalah minimum. Aksi didefinisikan sebagai

$$S = \int dt L(q, \dot{q}; t) \tag{2.2}$$

dengan $q(t)$ merupakan posisi partikel sebagai fungsi waktu dan $\dot{q}(t)$ adalah kecepatannya. Dengan mempertimbangkan variasi kecil $\delta q(t)$ pada lintasan $q(1)$ ke $q(2)$ dapat diartikan sebagai batas awal dan akhir sama, maka dengan prinsip aksi terkecil $\delta S = 0$, persamaan aksi menjadi

$$\delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan $\delta\dot{q}(t) = d(\delta q(t))/dt$ dan integralkan bentuk kedua dengan integral parsial. Maka, persamaan (2.3) menjadi

$$\delta S = \int \delta q(t) \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right] \quad (2.4)$$

Karena menginginkan batas awal dan akhir sama maka berlaku syarat

$$\delta q(A) = \delta q(B) = 0 \quad (2.5)$$

Dengan prinsip aksi terkecil yaitu $\delta S = 0$, maka

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) merupakan persamaan Euler Lagrangian.

2.1.1 Lagrangian Medan Skalar

Untuk menggunakan pendekatan Lagrangian pada sebuah medan, yaitu berangkat dari kasus klasik dimana persamaan aksinya dirumuskan sebagai

$$S = \int dt L \quad (2.7)$$

Dimana dalam kasus 1 dimensi, lagrangian dirumuskan sebagai

$$L = \int dx \mathcal{L} \quad (2.8)$$

Dimana \mathcal{L} merupakan densitas lagrangian dan bergantung pada $\partial\phi/\partial x$ serta ϕ dan $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$. Dengan menggunakan prinsip dasar yang sama yaitu $\delta S = 0$, maka persamaan aksinya adalah (Aitchison & Hey, 2013)

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right] dx \quad (2.9)$$

Integralkan $\delta\dot{\phi}$ dengan integral parsial terhadap t , dan $\delta(\partial\phi/\partial x)$ terhadap x , persamaan (2.15) menjadi

$$\delta S = \int dt \int dx \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} - \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right] \quad (2.10)$$

Dengan membuat batas permukaan yang dihasilkan, maka persamaan (2.10) menjadi (Aitchison & Hey, 2013)

$$\delta S = \int dt \int dx \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right] \quad (2.11)$$

Karena $\delta\phi$ adalah fungsi yang berubah-ubah dan $\delta S = 0$, maka persamaan (2.11) menjadi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) merupakan persamaan medan Euler-Lagrangian. Dan generalisasi untuk 3 dimensi adalah

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) dapat ditulis ulang dalam bentuk unvarian relativistik

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (2.14)$$

dimana $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Begitu pula dengan aksinya

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L} \quad (2.15)$$

Lagrangian medan skalar yang paling sederhana adalah

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.16)$$

Lagrangian di atas memiliki sifat skalar, observable, suku kuadratnya merupakan turunan orde pertama, dan terdapat suku kuadratik. Maka Euler-Lagrangian untuk lagrangian di atas adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi) \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \partial_\beta \phi + \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \phi) \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\beta} \partial_\beta \phi + \eta^{\alpha\mu} \partial_\alpha \phi) \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) \\
&= \partial^\mu \phi
\end{aligned}$$

maka

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) = \square \phi \quad (2.17)$$

maka persamaan Euler-Lagrangiannya adalah

$$\square \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.18)$$

Yang mana persamaan (2.18) merupakan persamaan Klein-Gordon (KG).

2.1.2 Persamaan Klein-Gordon dengan adanya Medan Listrik

Partikel juga dapat berperilaku seperti gelombang, sehingga memiliki kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Akibatnya, efek relativitas khusus tidak dapat diabaikan. Hal ini menyiratkan bahwa perlu dilakukannya perlakuan relativistik karena persamaan Schrodinger non-relativistik tidak dapat menjelaskan perilaku partikel relativistik dengan baik. Sehingga diperlukan persamaan relativistik yang dapat menjelaskan perilaku partikel tersebut. Persamaan yang dimaksud yaitu persamaan Klein-Gordon (untuk kasus partikel berspin nol) atau persamaan Dirac (untuk kasus partikel berspin setengah bilangan bulat).

Versi relativistik dari persamaan Schrodinger yaitu persamaan Klein-Gordon.

Persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan yang mendeskripsikan partikel Boson, yaitu partikel berspin nol. Persamaan Klein-Gordon hadir karena adanya efek relativistik yang diperhitungkan ($v \approx c$). Dalam bentuk linearnya, persamaan ini adalah persamaan diferensial parsial orde dua yang berfungsi sebagai fungsi gelombang relativistik, memodelkan dinamika partikel elementer pada skala relativistik (Romadani,2023).

Persamaan Klein-Gordon dapat diturunkan melalui hubungan persamaan energi-momentum relativistik

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.19)$$

Dengan menggunakan aturan satuan unit berlaku untuk selanjutnya yaitu $c = 1$ dan $\hbar = 1$, serta kuantisasi-kuantisasi seperti

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla$$

Persamaan (2.19) menjadi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= (-\nabla^2 + m^2) \phi \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) dalam bentuk operator D'Alembert,

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.21)$$

Dimana operator D'Alembert didefinisikan dengan

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.22)$$

Persamaan (2.21) merupakan persamaan Klein-Gordon (KG) untuk kasus partikel skalar yaitu partikel dengan spin nol. Persamaan (2.21) pertama kali diperoleh

oleh Schrodinger pada tahun 1926 sebelum dia mengembangkan persamaan non-relativistik yang menggunakan Namanya. Untuk kasus partikel yang bermuatan dan berada pada medan elektromagnetik eksternal, persamaan Klein-Gordon harus diubah ke bentuk momentum minimal (Commins, 2014)

$$E \rightarrow E - q\Phi \quad p \rightarrow p - \frac{q}{c}A$$

Kemudian disubstitusikan ke persamaan (2.19) menjadi

$$(i\partial_t - q\Phi)^2\phi = \left(-i\nabla - \frac{q}{c}A\right)^2\phi + m^2\phi \quad (2.23)$$

Dalam bentuk notasi kovarian, persamaan (2.23) menjadi

$$(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi + m^2\phi = 0 \quad (2.24)$$

2.2 Hamilton Jacobi

Persamaan Hamilton Jacobi merupakan persamaan yang melibatkan penyelesaian persamaan diferensial parsial untuk besaran S yang disebut “fungsi utama Hamilton”. Masalah penyelesaian seluruh sistem persamaan gerak direduksi menjadi penyelesaian persamaan diferensial parsial tunggal untuk fungsi S (Hamill, 2014). Persamaan Hamilton Jacobi merupakan cara untuk menyelesaikan persamaan kanonik hamilton gerak untuk sistem. Pada dasarnya, persamaan Hamilton-Jacobi mengerahkan seluruh upaya untuk menemukan fungsi umum yang menghasilkan transformasi kanonik yang dapat dilakukan dengan mengubah variabel.

$$(q, p) \xrightarrow{F} (Q, P), \quad H = H(q, p, t) \xrightarrow{F} K = K(Q, P, t)$$

di mana

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

dan

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

Dengan menggunakan fungsi pembangkit $F = F(q, Q, t) = S(q, Q, t)$ dan $p_i = \partial S / \partial q_i$, $P_i = -\partial S / \partial Q_i$ (Hand & Finch, 1998). maka persamaan (2.25) menjadi

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

Maka hamiltonian dalam bentuk S adalah

$$H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, Q, t), t \right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, Q, t) = 0 \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) merupakan persamaan umum Hamilton Jacobi.

2.2.1 Hamilton Jacobi untuk Partikel Relativistik

Membangung persamaan Hamilton Jacobi untuk partikel relativistik yang bermassa diam dan bermuatan e dalam medan elektromagnetik dengan potensial A_μ dapat dimulai dengan menggunakan aksi S (Landau & Lifshitz, 1980)

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (2.28)$$

Berdasarkan prinsip aksi terkecil, maka persamaan (2.28) menjadi

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds = 0 \quad (2.29)$$

Dengan $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$ maka

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = -mc \int_a^b u_\mu d\delta x^\mu \quad (2.30)$$

Kemudian menggunakan integral parsial, didapatkan

$$\delta S = -m c u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b + m c \int_a^b \delta x^\mu \frac{d u_\mu}{d s} d s \quad (2.31)$$

u_μ merupakan konstanta kecepatan, maka $du_\mu/ds = 0$ dan $(\delta x^\mu)_a = 0$. Sehingga persamaan (2.31) menjadi

$$\delta S = -m c u_\mu \delta x^\mu \quad (2.32)$$

Dan momentum 4-vektor

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \quad (2.33)$$

Karena komponen kovarian dari 4-momentum adalah $p_\mu = (E/c, -P)$, sehingga komponen kovariannya adalah (Landau & Lifshitz, 1980)

$$p^\mu = (E/c, P) \quad (2.34)$$

Dari persamaan (2.32) bahwa komponen 4-momentum untuk partikel bebas adalah

$$p^\mu = -m c u^\mu \quad (2.35)$$

Dari definisi persamaan (2.35) dan identitas $u^\mu u_\mu = 1$, maka diperoleh kuadrat dari 4-momentum untuk partikel bebas

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad (2.36)$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (2.33) ke persamaan (2.36), menjadi

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) + m^2 c^2 = 0 \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) merupakan persamaan Hamilton Jacobi relativistik, yang mana di sini dan seterusnya akan digunakan satuan alami untuk $c = 1$ dan $\hbar = 1$.

Untuk persamaan Hamilton Jacobi relativistik dengan adanya medan elektromagnetik momentumnya adalah (Landau & Lifshitz, 1980)

$$P_\mu = p_\mu + eA_\mu \quad (2.38)$$

Kemudian disubstitusikan ke persamaan (2.37). Maka persamaannya menjadi

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu \right) + m^2 c^2 = 0 \quad (2.39)$$

Persamaan (2.39) merupakan persamaan Hamilton Jacobi untuk partikel relativistik dengan adanya medan elektromagnetik. Dalam kasus ini, potential vektor A_μ didefinisikan sebagai

$$A_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} \right) \quad (2.40)$$

2.3 Partikel

2.3.1 Kajian Partikel dalam Al Quran

Partikel merupakan objek terkecil di alam semesta. Al Quran menggunakan kata Zarrah untuk sesuatu yang paling kecil, dan makna lazim dari kata ini adalah semut kecil atau partikel debu kecil. Karena makna Zarrah dikaitkan dengan objek kecil dan paling kecil, sedangkan pengertian objek terkecil merujuk pada atom. Oleh sebab itu, Zarrah diartikan sebagai atom. Atom pertama kali dikemukakan oleh Democritus sebagai suatu objek yang paling kecil dan tidak dapat dibagi lagi (Purwanto, 2015).

Allah SWT menyebut kata Zarrah dalam Al Quran di beberapa surat. Seperti di surat Saba (34:3)

وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ قُلْ بَلَىٰ وَرَبِّي لَتَأْتِيَنَّكُمْ عِلْمُ الْغَيْبِ لَا يُعْزَبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِي السَّمَوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ وَلَا أَصْغَرُ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرُ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ ﴿٣٠﴾

Artinya: *Dan orang kafir berkata, “Hari kiamat tidak akan datang kepada kita” Katakanlah, “Tidak, bahkan demi Tuhanku dia pasti mendatangi kamu, (Dia) Yang Maha Mengetahui yang gaib. Tidak yang tersembunyi bagi-Nya seberat Zarrah pun yang ada di langit dan tidak pula yang ada di bumi dan tidak ada juga yang lebih kecil dari itu dan lebih besar, melainkan ada dalam Kitab yang nyata”.* (QS. Saba [34]: 3)

Al-Qurthubi dalam kitabnya tafsir al jami’ li ahkam AlQur’an menafsirkan kata Zarrah dalam surat Saba ayat 3 sebagai semut kecil (Al-Qurtubi, 2009). Pendapat yang sama oleh Imam Fakhruddin Ar-Razi dalam kitab Mafatih al-Ghaib terkait istilah Zarrah bahwasanya memiliki makna semut kecil dengan maksud sesuatu yang sangat ringan timbangannya (Isnanto, 2018).

Selain ditafsirkan sebagai semut kecil, dalam surat Az-Zalzalah (99:7-8) kata Zarrah ditafsirkan sebagai debu

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ۗ وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ۗ

Artinya: *Maka barang siapa yang mengerjakan kebaikan seberat Zarrah niscaya dia akan melihatnya. Dan barang siapa yang mengerjakan kejahatan seberat Zarrah, niscaya dia akan melihatnya pula.* (QS. Az-Zalzalah [99]:7-8)

Sebagian pakar bahasa Arab menyebutkan bahwa Zarrah ditafsirkan sebagai debu yang menempel pada tangan seseorang ketika menepukkan tangannya ke tanah. Demikian seperti yang dikatakan Ibnu Abbas, “jika engkau meletakkan tanganmu di atas tanah lalu engkau mengangkatnya, setiap satu debu yang melekat pada tangan maka itulah Zarrah.” Menurut Hamka dalam karya tafsirnya, yaitu tafsir al-Azhar, menjelaskan lafal Zarrah dalam ayat ke 7 dan 8 surah Al-Zalzalah tersebut dengan debu (Isnanto, 2018).

Kata Zarrah digunakan Al Quran untuk menunjuk sesuatu yang sangat kecil. Dahulu, kata Zarrah dipahami oleh masyarakat Jahiliyyah dalam arti *semut yang kecil pada awal kehidupannya* atau *kepala semut*. Atau *telur semut*. Ada juga yang mengartikan sebagai *debu* yang terlihat berterbangan di bawah sorotan cahaya matahari yang masuk melalui lubang atau jendela. Pada masa kini, kata tersebut digunakan dalam arti *atom*. Sedangkan firman-Nya yang lebih kecil dari Zarrah adalah

proton dan neutron yang merupakan dua unsur atom (Shihab, 2002).

Pendapat lain mengatakan *Zarrah* berarti *Khardala* (biji sawi), seperti firman Allah SWT dalam surat Al-Anbiya' (21:47)

وَنَضَعُ الْمَوَازِينَ الْقِسْطَ لِيَوْمِ الْقِيَامَةِ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْئًا وَإِنْ كَانَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِنْ خَرْدَلٍ
 أَتَيْنَا بِهَا وَكَفَىٰ بِنَا حَسِيبِينَ ﴿٤٧﴾

Artinya: *Dan Kami akan memasang timbangan yang tepat pada hari Kiamat, maka tidak seorang pun dirugikan walau sedikit; sekalipun hanya seberat biji sawi, pasti Kami mendatangkannya (pahala). Dan cukuplah Kami yang membuat perhitungan.* (QS. Al-Anbiya' [21]:47).

Biji sawi memiliki ukuran yang sangat kecil. Quraish Shihab mengutip dari Tafsir Al Muntakhab terkait penjelasan kata (*khardal*), dinyatakan bahwa satu kilogram biji *khardal/moster* terdiri atas 913000 butir. Dengan demikian, berat satu biji *moster* hanya sekitar 1/1000 g, atau setara dengan ± 1 mg, dan merupakan biji-bijian teringan yang diketahui umat manusia sampai sekarang. Oleh karena itu, biji ini sering digunakan Al Quran untuk menunjuk sesuatu yang sangat kecil dan halus (Shihab, 2002).

2.3.2 Penciptaan Partikel

Telah diketahui selama beberapa dekade bahwa medan listrik yang kuat atau perluasan struktur struktur ruang-waktu dapat menyebabkan ketidakstabilan dalam ruang hampa. Sebagaimana diketahui, ketidakstabilan ini memberikan peluang untuk diskusi tentang banyak proses fisik seperti penciptaan partikel. Studi Schwinger yang menyelidiki kemungkinan terciptanya partikel dari ruang hampa dalam lingkup formalisme waktu yang tepat dengan adanya medan elektromagnetik eksternal adalah salah satu studi pertama di bidang ini. Hasil signifikan berikut diperoleh dalam penelitian ini (Bilim et al., 2023):

1. Medan magnet tidak bisa sendirian menciptakan partikel dari ruang hampa.
2. Jika medan listrik mengganggu ruang hampa, medan magnet dapat memva-

riasikan kemungkinan memproduksi partikel.

Penciptaan partikel kosmologis dari sebuah ruang hampa berdasarkan medan elektromagnetik eksternal atau ekspansi alam semesta memiliki sejarah yang panjang. Konsep ini pertama kali diperkenalkan di fisika oleh Schrodinger. Kontribusi pertama terhadap penelitian ini telah lama diabaikan hingga datang sebuah bukti dari Parker pada tahun 1968 bahwa perluasan alam semesta dapat menghasilkan pasangan partikel. Dalam studi penting ini, terbukti bahwa medan yang memenuhi persamaan gelombang yang tetap invarian secara menyeluruh tidak menghasilkan partikel apa pun karena karakteristik model Robertson–Walker (RW) yang datar secara keseluruhan. Selain itu, Parker menyimpulkan bahwa simetri model RW harus dipatahkan oleh anisotropi yang umumnya dikaitkan dengan ketergantungan waktu dari metrik yang menggambarkan geometri alam semesta agar proses penciptaan partikel terjadi. Sebagaimana yang diketahui saat ini, meskipun laju pengembangan alam semesta tidak cukup untuk melakukan proses penciptaan partikel, namun laju pengembangan pada saat awal alam semesta cukup untuk terjadinya proses tersebut. Hal yang sama juga berlaku untuk medan eksternal, yang dibuktikan dengan CMB sebesar $2.7K$ yang dianggap sebagai bukti kuatnya medan listrik pada tahap awal alam semesta (Bilim et al., 2023).

2.3.3 Partikel Skalar

Segala sesuatu yang ada di alam semesta tersusun dari partikel-partikel elementer, dan perilaku dari alam semesta secara keseluruhan tergantung pada sifat-sifat dari partikel tersebut. Berdasarkan spinnya, partikel elementer dibagi menjadi dua yaitu partikel dasar boson dan partikel dasar fermion. Partikel dasar boson merupakan partikel subatomik yang memiliki spin nol, sedangkan partikel dasar fermion merupakan partikel subatomik yang memiliki spin setengah bilangan bulat.

Partikel dasar boson disebut sebagai partikel pembawa gaya dan memenuhi

statistik Bose-Einstein. Nama boson diberikan oleh Paul Dirac berdasarkan penemunya, yaitu Satyendra Nath Bose (1894-1974). Bose merupakan seorang fisikawan dan matematikawan asal India yang menemukan statistik Bose-Einstein pada tahun 1920 yang menjadi dasar penemuan partikel boson dalam mekanika kuantum. Karena partikel boson tidak memenuhi larangan Pauli, maka tidak ada batasan jumlah partikel boson dapat menempati keadaan kuantum yang sama dalam suatu sistem. Karena tidak memenuhi larangan Pauli juga, sistem tidak akan berubah apabila dua partikel boson ditukar fungsi gelombangnya. Hal ini berbeda dengan partikel fermion yang memenuhi statistik Fermi-Dirac dan larangan Pauli. Karena partikel fermion memenuhi larangan Pauli, maka hanya ada satu partikel fermion yang dapat menempati keadaan kuantum tertentu dalam suatu sistem. Artinya, dalam satu sistem kuantum tidak boleh terdapat dua atau lebih partikel fermion dengan keadaan kuantum yang identik, termasuk spin yang identik.

Berdasarkan model standar, partikel dasar boson dibagi menjadi dua yaitu gauge boson dan skalar boson. Gauge boson sendiri terdiri dari gluon (g), foton (γ), boson W^\pm dan boson Z . Sedangkan skalar boson hanya terdiri dari boson higgs (H).

2.3.4 Densitas Jumlah Partikel

Densitas jumlah dari suatu partikel merupakan jumlah suatu partikel dalam volume tertentu. Jika energi rata-rata per partikel adalah E , maka densitas jumlah partikel sebanding dengan densitas energi (Liddle, 2015)

$$\epsilon = n \times E \quad (2.41)$$

Densitas jumlah partikel sangat berguna karena dalam sebagian besar keadaan, jumlah partikel dipertahankan. Misalnya, jika interaksi dapat diabaikan, maka sebuah elektron yang tiba-tiba lenyap tidak dapat diabaikan, dan hal yang sama juga berlaku untuk foton cahaya. Jumlah partikel dapat berubah melalui sebuah interaksi,

misalnya sebuah elektron berinteraksi dengan positron dan akhirnya saling memusnahkan sehingga menciptakan dua foton. Namun, jika tingkat interaksinya tinggi, maka alam semesta diperkirakan berada dalam keadaan kesetimbangan termal. Dengan demikian, maka jumlah partikel tetap sama bahkan dalam keadaan interaksi yang tinggi, karena menurut definisi kesetimbangan termal berarti bahwa setiap interaksi yang dapat mengubah densitas jumlah suatu jenis partikel tertentu harus berlangsung dengan kecepatan yang sama, baik dalam arah maju maupun mundur. Sehingga setiap perubahan dibatalkan (Liddle, 2015).

Jadi, kecuali dalam jangka waktu yang singkat dimana kesetimbangan termal tidak terpenuhi, maka dapat diperkirakan jumlah partikel akan tetap. Satu-satunya hal yang dapat mengubah densitas jumlah partikel adalah volumenya yang semakin besar, sehingga partikel ini tersebar dalam volume yang lebih besar. Hal ini menyiratkan (Liddle, 2015)

$$n \propto \frac{1}{\alpha^3} \quad (2.42)$$

Hal ini seperti perilaku dari materi, tetapi juga berlaku untuk radiasi.

Karena energi dari partikel non-relativistik adalah didominasi oleh sisa energi massa yang konstan, sehingga (Liddle, 2015)

$$\rho_{\text{mat}} \propto \epsilon_{\text{mat}} \propto n_{\text{mat}} \times E_{\text{mat}} \propto \frac{1}{\alpha^3} \times \text{kons} \propto \frac{1}{\alpha^3} \quad (2.43)$$

Tetapi, foton kehilangan energi karena alam semesta yang mengembang dan panjang gelombangnya meregang. Jadi, energi dari foton adalah $E_{\text{rad}} \propto 1/\alpha$. Jadi,

$$\rho_{\text{rad}} \propto \epsilon_{\text{rad}} \propto n_{\text{rad}} \times E_{\text{rad}} \propto \frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\alpha} \propto \frac{1}{\alpha^4} \quad (2.44)$$

Meskipun densitas energi materi dan radiasi berkembang dengan cara yang berbeda, jumlah partikel berkembang dengan cara yang sama. Jadi, terlepas dari waktu dimana asumsi kesetimbangan termal gagal, densitas jumlah dari partikel

yang relatif berbeda (misalnya elektron dan foton) tidak berubah ketika alam semesta mengembang (Liddle, 2015).

2.4 Teori Medan Kuantum

Teori medan kuantum (TMK) merupakan penerapan mekanika kuantum pada sistem medan dinamis yang serupa dengan kuantisasi partikel dalam mekanika kuantum dasar. TMK memainkan peran kunci dalam memahami fisika partikel elementer, serta berperan penting dalam fisika atom, nuklir, dan benda terkondensasi. Kerangka kerja teori medan kuantum adalah menyatukan dua teori fundamental yaitu mekanika kuantum dan relativitas khusus (Mulders, 2003). Tidak sama dengan kasus pada mekanika kuantum yang hanya mengkuantisasi partikel non-relativistik, TMK dalam memahami proses yang terjadi pada skala kuantum (sangat kecil) dan energi yang sangat besar (relativistik) tidak cukup hanya mengkuantisasi partikel relativistik. Yang diperlukan adalah memerlukan kuantisasi medan. Kuantisasi medan diperlukan karena jika hanya menggunakan pendekatan persamaan gelombang relativistik (seperti persamaan Klein-Gordon atau Dirac) dan memperhatikan bahwa persamaan tersebut mengarah pada energi negatif dan inkonsistensi lainnya. Secara intuitif, pendekatan ini tidak berhasil karena tidak semua proses relativistik dapat dijelaskan melalui satu partikel saja. Hal ini disebabkan oleh hubungan Einstein $E = mc^2$ yang memungkinkan terjadinya penciptaan pasangan partikel-antipartikel. Bahkan ketika energi yang tersedia tidak cukup untuk benar-benar menciptakan pasangan partikel nyata, partikel-partikel virtual dapat muncul secara sementara selama interaksi kuantum. Keadaan seperti ini hanya berlangsung dalam waktu yang sangat singkat sesuai dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg $\Delta E \Delta t = \hbar$ (Peskin & Schroeder, 1995).

Karena teori medan kuantum berangkat dari mekanika kuantum dan relativitas khusus, maka perkembangan TMK tidak lepas dari kontribusi persamaan Schrödinger, Klein-Gordon, dan Dirac. Ketiga persamaan ini menjadi dasar bagi

pemahaman tentang fenomena fisika pada tingkat partikel elementer dan energi tinggi.

2.4.1 Persamaan Schrödinger

Persamaan Schrödinger adalah persamaan fundamental dalam mekanika kuantum yang menggambarkan bagaimana keadaan kuantum dari sebuah sistem fisik yang berubah seiring waktu. Persamaan Schrödinger diusulkan oleh Erwin Schrödinger pada tahun 1926. Persamaan ini merupakan tonggak penting dalam pengembangan mekanika kuantum dan menggantikan konsep mekanika klasik untuk menjelaskan fenomena kuantum efek fotolistrik, radiasi benda hitam, dan efek tunneling yang tidak bisa dijelaskan dengan menggunakan konsep mekanika klasik.

Meskipun persamaan Schrödinger sukses dalam menjelaskan fenomena kuantum di atas, akan tetapi persamaan Schrödinger memiliki beberapa kekurangan yaitu:

1. Non-relativistik, persamaan Schrödinger hanya berlaku untuk partikel yang bergerak dengan kecepatan jauh lebih kecil dari kecepatan cahaya. Sehingga untuk partikel yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya, persamaan Schrödinger belum bisa mendefinisikan terkait perilaku dari partikel tersebut.
2. Tidak memuat informasi spin, persamaan Schrödinger tidak memperhitungkan sifat intrinsik partikel yang disebut spin.

Sehingga diperlukan persamaan relativistik yang mampu mendeskripsikan partikel yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya.

2.4.2 Persamaan Klein-Gordon

Persamaan Schrödinger yang dikembangkan pada tahun 1926 oleh Erwin Schrödinger sangat sukses dalam menjelaskan fenomena pada skala atom yang

tidak dapat dijelaskan oleh fisika klasik. Meskipun sangat sukses, persamaan Schrödinger masih bersifat non-relativistik. Artinya, persamaan Schrödinger tidak memperhitungkan efek-efek relativistik yang menjadi penting ketika partikel bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Di sisi lain, teori relativitas khusus yang diajukan oleh Einstein memberikan deskripsi yang akurat tentang ruang, waktu, dan gravitasi untuk kecepatan tinggi. Namun, teori ini tidak mencakup aspek kuantum dari alam. Sehingga, pada tahun yang sama yaitu 1926, Oskar Klein dan Walter Gordon secara independen mengenalkan persamaan gelombang relativistik pertama, yang kini dikenal sebagai persamaan Klein-Gordon. Persamaan Klein-Gordon didapatkan dengan menggeneralisasi hubungan energi-momentum relativistik

$$E^2 = p^2 + m^2 c^4 \quad (2.45)$$

ke dalam bentuk persamaan diferensial parsial, sesuai dengan prinsip mekanika kuantum yang menghubungkan momentum dengan operator spasial dan energi dengan operator waktu

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (2.46)$$

sehingga diperoleh

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (2.47)$$

Meskipun persamaan Klein-Gordon berhasil menjelaskan partikel relativistik, persamaan Klein-Gordon memiliki beberapa kekurangan di antaranya:

1. Persamaan Klein-Gordon tidak memenuhi persamaan kontinuitas. Hal ini terlihat dari definisi probabilitas rapat muatan, yaitu

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.48)$$

dan probabilitas rapat arus

$$J = -i\hbar c^2(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (2.49)$$

menunjukkan bahwa probabilitas rapat muatan tidak selalu bernilai positif. Artinya, kuantitas ini tidak dapat ditafsirkan sebagai nilai kemungkinan untuk mendapatkan partikel.

2. Solusi energi negatif, karena persamaan Klein-Gordon didapatkan dari menggeneralisasi hubungan energi momentum, maka terdapat dua solusi yaitu solusi energi positif dan energi negatif. Solusi energi negatif ini tidak dapat diinterpretasikan secara fisik oleh persamaan Klein-Gordon.
3. Persamaan Klein-Gordon mengandung turunan kedua terhadap waktu, sehingga untuk mencari solusi fungsi gelombangnya dibutuhkan integral dua kali. Hal ini memberikan konsekuensi dua derajat kebebasan yang tidak terdapat pada persamaan Schrödinger.

Selain kekurangan di atas, persamaan Klein-Gordon tidak mencakup partikel dengan spin, sehingga tidak cocok untuk mendeskripsikan elektron atau fermion lainnya.

2.4.3 Persamaan Dirac

Sebelum Dirac, para fisikawan telah berhasil merumuskan persamaan Schrödinger yang sukses menjelaskan perilaku partikel non-relativistik. Namun, persamaan Schrödinger tidak konsisten dengan teori relativitas khusus. Di sisi lain, persamaan Klein-Gordon, yang merupakan upaya pertama untuk merumuskan persamaan gelombang relativistik memiliki masalah interpretasi terkait solusi energi negatif. Untuk mengatasi kelemahan persamaan Klein-Gordon, pada tahun 1928 Paul Dirac mengusulkan persamaan baru untuk partikel relativistik yang memiliki

spin 1/2, yaitu persamaan Dirac. Persamaan ini tidak hanya memprediksi spin, tetapi juga memberikan solusi untuk energi negatif yang kemudian diinterpretasikan sebagai antipartikel.

Persamaan Dirac diperoleh dari hubungan energi-momentum kemudian memodifikasi relasi ini menjadi bentuk yang linear terhadap E dan p agar persamaannya menjadi linear terhadap turunan waktu dan ruang dengan memperkenalkan operator-operator baru yang menghasilkan persamaan linear

$$E = \alpha \mathbf{p}c + \beta mc^2 \quad (2.50)$$

Dengan α dan β adalah matriks-matriks yang belum diketahui. Matriks-matriks ini harus memenuhi hubungan aljabar tertentu agar konsisten dengan relasi energi-momentum relativistik. Dalam usaha merealisasikan persamaan yang seperti ini, Dirac memperkenalkan matriks gamma (γ^μ) yang bertindak pada ruang vektor khusus yang disebut ruang spinor. Dengan menggunakan matriks gamma ini, Dirac menemukan bentuk final dari persamaan gelombang relativistik untuk partikel dengan spin 1/2

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.51)$$

Meskipun sangat sukses, persamaan Dirac memiliki beberapa keterbatasan yaitu

1. Persamaan Dirac hanya dapat mendeskripsikan dinamika partikel tunggal.
2. Persamaan Dirac tidak dapat menjelaskan proses penciptaan dan penghancuran partikel yang merupakan fenomena umum dalam interaksi partikel.
3. Tidak mampu menjelaskan Interaksi kuat dan lemah yang berperan penting dalam fisika nuklir dan partikel, persamaan Dirac dirancang untuk menggambarkan interaksi elektromagnetik.

2.5 Geometri Ruang-Waktu Melengkung

2.5.1 Metrik

Metrik dapat didefinisikan sebagai jarak antara dua titik yang dapat ditunjukkan pada elemen garis ds^2 pada sebuah permukaan melengkung. Contoh sederhana adalah pada permukaan melengkung 2 dimensi. Misal sebuah vektor posisi \vec{r} pada sebuah titik P di permukaan dan kemudian bergeser sangat kecil $d\vec{r}$, sehingga vektor posisi baru dari titik terdekat P' adalah $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$. Maka elemen garisnya menjadi (Xenos, 2020)

$$\begin{aligned} ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right)^2 (dx)^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right)^2 (dy)^2 \\ &= g_{11} dx dx + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy dy \end{aligned}$$

Elemen g_{ij} dalam bentuk matrik adalah

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} & \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}$$

ini dinamakan tensor matrik dan tensor ordo 2. Elemen metrik juga dapat ditulis sebagai (Xenos, 2020)

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \quad (2.52)$$

Karena turunan spasial komut, maka metriknya adalah sebuah tensor simetri (Xenos, 2020)

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (2.53)$$

Indeks atas menunjukkan bentuk tensor kontravarian dan indeks bawah menunjukkan bentuk tensor kovarian. Secara singkatnya medan vektor kontravarian (orde

1) ditransformasi berdasarkan aturan (Xenos, 2020)

$$\tilde{A}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (2.54)$$

Dan medan vektor kovarian ditransformasi berdasarkan aturan (Xenos, 2020)

$$\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu \quad (2.55)$$

Transformasinya terjadi dari bentuk sistem koordinat $x^\mu = (x^1, x^2, \dots)$ menjadi $\tilde{x}^\mu = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots)$ dan juga menggunakan notasi Einstein atau konvensi penjumlahan Einstein dimana sebuah indeks diulang akan menyiratkan jumlah (indeks tersebut disebut indeks dummy. Indeks dummy dapat diubah tanpa mengubah nilai ekspresi). Jadi untuk ruang berdimensi n akan menjadi (Xenos, 2020)

$$A_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=1}^n A_\mu x^\mu = A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$

Metrik tensor menjadi tensor kovarian orde 2 mengikuti aturan transformasi (Xenos, 2020)

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^j} g_{k\lambda}$$

Sehingga elemen garis dapat ditulis sebagai

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.56)$$

Dengan mengganti metrik $g_{\mu\nu}$ menjadi kronecker delta (metrik Euklidean) $\delta_{\mu\nu}$ (yang mana juga merupakan tensor orde 2), dapat ditentukan bahwa dalam ruang 2D adalah $x^\mu = (x, y)$, sehingga elemen garisnya adalah

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 \quad (2.57)$$

Persamaan (2.57) merupakan teorema Pitagoras. Jadi, persamaan (2.56) merupakan persamaan perumuman dari teorema Pitagoras pada ruang melengkung (Xenos, 2020).

Contoh lain yaitu dari Relativitas Khusus (RK) dimana interval ruang waktu antara dua peristiwa diberikan pada persamaan

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

dengan persamaan yang sama dapat pula diturunkan dengan menggunakan metrik $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ pada sistem koordinat $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Ruang waktu di atas disebut dengan ruang Minkowski dan metrik yang sesuai untuk mendefinisikan ruang waktu tersebut adalah metrik Minkowski. Metrik Euclidean dan metrik Minkowski keduanya didefinisikan sebagai ruang waktu datar, yang membedakan yaitu metrik Euklidean adalah Riemannian karena bentuk metriknya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk metrik Minkowski adalah pseudo-Riemannian karena bentuk metriknya adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metriknya juga dapat digunakan untuk menaikkan indeks atau menurunkan indeks

$$g_{\mu\nu}A^\mu = A_\nu$$

2.5.2 Simbol Christoffel

Einstein menyadari betapa pentingnya menggunakan tensor saat berurusan dengan Relativitas Umum (RU). Tensor merupakan perluasan dari vektor, sebagaimana vektor merupakan perluasan dari skalar. Sehingga, tensor memiliki bentuk yang tetap seperti halnya vektor meskipun dilakukan pemilihan kerangka koordinat secara sembarang. Seperti prinsip kesetaraan Einstein, bahwa hukum fisika harus sama di semua pengamat dalam sistem koordinat manapun. Dengan demikian, persamaan-persamaan yang menyatakan hukum alam dengan bentuk tetap dalam memilih koordinat secara sembarang dapat dikonstruksi menggunakan kuantitas tensor. Jadi, ketika ingin menggeneralisasi dari ruang datar ke manifold kelengkungan harus dilakukan dengan cara memastikan entitas fisik memiliki perilaku seperti tensor (Xenos, 2020).

Dengan cara itu, dapat dikatakan bahwa turunan biasa tidak berlaku sebagai tensor. Tinjau transformasi berikut

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$$

Untuk medan skalar $\phi(x^2)$ (tensor orde 0) dapat dilihat transformasinya sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x^\mu)}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi(x^\mu) \rightarrow \partial_{\tilde{x}} \tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi(x^\mu) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial \phi(x^\nu) \end{aligned}$$

Jadi, dalam kasus ini dari turunan biasa akan menghasilkan tensor kovarian orde 1. Namun, ini tidak berlaku untuk tensor dengan orde yang lebih tinggi dan untuk membuktikannya akan dilakukan turunan biasa pada tensor dengan orde 1, yang mana menjadi lebih sederhana. Sebagai contohnya, berikut transformasi (Xenos,

2020)

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu A_\mu(x) \rightarrow \partial_{\tilde{\nu}} \tilde{A}_\mu(x) &= \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho \tilde{A}_\mu(x) \\
 &= \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\mu} A_k(x) \right) \\
 &= \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \partial_\rho \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\mu} A_k(x) + \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\rho A_k(x)
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa karena adanya bentuk pertama, kuantitas $\partial_\nu A_\mu(x)$ bukan merupakan tensor

Sehingga, akan dilakukan generalisasi dari konsep turunan yang nantinya akan selalu menghasilkan sebuah tensor. Cara ini disebut dengan turunan kovarian dan didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
 \nabla_\nu \phi &= \partial_\nu \phi \\
 \nabla_\nu A_\mu &= \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\mu A_\rho \\
 \nabla_\nu A^\mu &= \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu A^\rho
 \end{aligned}$$

Koefisien $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ disebut dengan koefisien koneksi atau simbol Christoffel. Notasi yang biasanya digunakan untuk turunan biasa dan turunan kovarian adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu A_\mu &\equiv A_{\mu,\nu} \\
 \nabla_\nu A_\mu &\equiv A_{\mu;\nu}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Mengingat bahwa simbol Christoffel berubah dengan hukum (dalam cara yang tidak mewakili sebuah tensor) (Xenos, 2020)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^\alpha \partial \tilde{x}^\beta} \tag{2.59}$$

Dapat diperoleh bahwa bentuk $\nabla_\nu A_\mu$ berubah menjadi

$$\nabla_\nu A_\mu \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\mu} \nabla_i A_j$$

yang mana didefinisikan sebagai tensor kovarian orde 2. Ini dapat digeneralisasikan ke tensor dengan orde yang lebih tinggi dan penerapan turunan kovarian ke tensor apa pun akan meningkatkan orde kovariannya satu per satu (Xenos, 2020).

Simbol Christoffel dapat didefinisikan sebagai (Xenos, 2020)

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \partial_\beta e_\alpha = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma e_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (2.60)$$

dengan mengasumsikan manifold (generalisasi dari ruang datar) tanpa torsi sehingga simbol Christoffel adalah simetris dalam indeks yang lebih rendah. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk vektor basis untuk metrik adalah sebagai berikut (Xenos, 2020)

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (2.61)$$

yang mana didapatkan dari persamaan (2.52). Ini juga merupakan generalisasi dari hubungan yang biasa dari vektor basis, yang paling umum adalah salah satu ruang Euklidean (Xenos, 2020)

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

dan dapat ditemukan di relativitas khusus

$$e_\alpha \cdot e_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

Sehingga dapat dituliskan turunan parsial dari metrik

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma (e_\alpha \cdot e_\beta) \\ &= (\partial_\gamma e_\alpha) \cdot e_\beta + e_\alpha \cdot (\partial_\gamma e_\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} e_{\delta} e_{\beta} + e_{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} e_{\delta} \\
&= g_{\delta\gamma}^{\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} + g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Kemudian dilakukan permutasi pada indeks

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} &= \partial_{\alpha} (e_{\gamma} \cdot e_{\beta}) \\
&= (\partial_{\alpha} e_{\beta}) e_{\gamma} + e_{\beta} (\partial_{\alpha} e_{\gamma}) \\
&= \Gamma_{\beta\alpha}^{\delta} e_{\delta} e_{\gamma} + e_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \\
&= g_{\delta\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\delta} + g_{\beta\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
-\partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} &= -\partial_{\beta} (e_{\gamma} \cdot e_{\alpha}) \\
&= -(\partial_{\beta} e_{\gamma}) e_{\alpha} - e_{\gamma} (\partial_{\beta} e_{\alpha}) \\
&= -\Gamma_{\gamma\beta}^{\delta} e_{\delta} e_{\alpha} - e_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} e_{\delta} \\
&= -g_{\delta\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta} - g_{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Kemudian dijumlahkan persamaan (2.62), (2.63), dan (2.64) sehingga diperoleh

$$\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = 2g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} \tag{2.65}$$

Dari persamaan (2.65) dapat diperoleh persamaan untuk simbol Christoffel

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\delta_{\gamma} g_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma}) \tag{2.66}$$

2.5.3 Tensor Kelengkungan Riemann

Tensor kelengkungan Riemann merupakan sebuah entitas yang memberikan deskripsi matematika kelengkungan dari sebuah manifold. Tensor kelengkungan

Riemman didefinisikan sebagai (Xenos, 2020)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\rho = R_{\rho\nu\mu}^k A_k \quad (2.67)$$

dimana $\nabla_\nu A_\rho$ merupakan tensor kovarian orde 2 dan turunan kovariannya adalah

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu A_\rho) = \partial_\mu(\nabla_\nu A_\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\nabla_\lambda A_\rho) - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda(\nabla_\nu A_\lambda)$$

$$\nabla_\nu(\nabla_\mu A_\rho) = \partial_\nu(\nabla_\mu A_\rho) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(\nabla_\lambda A_\rho) - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda(\nabla_\mu A_\lambda)$$

Jadi persamaan (2.67) menjadi

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\rho &= \nabla_\mu(\nabla_\nu A_\rho) - \nabla_\nu(\nabla_\mu A_\rho) \\ &= \partial_\mu(\nabla_\nu A_\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\nabla_\lambda A_\rho) - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda(\nabla_\nu A_\lambda) \\ &\quad - \partial_\nu(\nabla_\mu A_\rho) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(\nabla_\lambda A_\rho) - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda(\nabla_\mu A_\lambda) \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu A_\rho - \Gamma_{\nu\rho}^k A_k) - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda(\partial_\nu A_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^k A_k) \\ &\quad - \partial_\nu(\partial_\mu A_\rho - \Gamma_{\mu\rho}^k A_k) + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda(\partial_\mu A_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^k A_k) \\ &= -\partial_\mu(\Gamma_{\nu\rho}^k)A_k - \Gamma_{\nu\rho}^k \partial_\mu A_k - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \partial_\nu A_\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\mu}^k A_k \\ &\quad + \partial_\nu(\Gamma_{\mu\rho}^k)A_k + \Gamma_{\mu\rho}^k \partial_\nu A_k + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \partial_\mu A_\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^k A_k \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat ditinjau dari beberapa bentuk persamaan di atas

$$\Gamma_{\nu\rho}^\lambda \partial_\mu A_\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^k \partial_\mu A_k = 0 \quad \text{dan} \quad \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \partial_\mu A_\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^k \partial_\nu A_k = 0$$

karena k, λ merupakan indeks *dummy*, jadi didapatkan

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\rho = [\partial_\nu(\Gamma_{\mu\rho}^k) - \partial_\mu(\Gamma_{\nu\rho}^k) + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^k - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^k]A_k$$

dan disubstitusikan dengan definisi tensor Riemann pada persamaan (2.67) didapatkan persamaan

$$R_{\rho\nu\mu}^k = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^k - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^k + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^k - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^k \quad (2.68)$$

Tensor Riemann merupakan tensor campuran orde 4. Namun, dengan mengaplikasikan metrik $g_{\mu\nu}$, tensor Riemann dapat diubah menjadi tensor kovarian orde 4

$$R_{\sigma\rho\nu\mu} \equiv g_{\sigma k} \Gamma_{\rho\nu\mu}^k \quad (2.69)$$

Persamaan (2.69) disebut dengan tensor kelengkungan Riemann.

2.5.4 Tensor Ricci dan Skalar Ricci

Tensor Ricci didapatkan dengan mengkontruksi indeks dari tensor kelengkungan Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k\nu}^k = \partial_k \Gamma_{\mu\nu}^k - \partial_\nu \Gamma_{k\mu}^k + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{k\lambda}^k - \Gamma_{k\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^k \quad (2.70)$$

Selanjutnya dengan menerapkan metrik ke tensor Ricci akan diperoleh skalar Ricci

$$R \equiv R_\mu^\mu = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (2.71)$$

2.5.5 Model Alam Semesta Bianchi I

Alam semesta Bianchi I merupakan model alam semesta spasial yang homogen tetapi anisotropik. Elemen garis alam semesta Bianchi I dideskripsikan sebagai berikut (Pimentel & Pineda, 2021)

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a}(dx^2 + dy^2) + t^{2(1-2a)}dz^2 \quad (2.72)$$

Untuk kasus $q = 0$ merepresentasikan ruang waktu datar, yang mana solusi khususnya dari metrik Kesner. Sedangkan kasus $q = 1$ merepresentasikan ekspansi alam semesta homogen (Pimentel & Pineda, 2021).

Jika $q = 0$ dan $q = 1$ dimasukkan ke persamaan (2.72) maka

$$q = 0, \quad ds^2 = -dt^2 + (dx^2 + dy^2) + t^2 dz^2 \quad (2.73)$$

$$q = 1, \quad ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + t^{-2} dz^2 \quad (2.74)$$

untuk penelitian ini akan menggunakan kasus $q = 1$, yaitu metrik pada persamaan (2.74).

Berdasarkan metrik pada persamaan (2.74), tensor metrik matriks g adalah diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix}$$

dengan invers matriks $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

BAB III
SOLUSI PERSAMAAN HAMILTON JACOBI UNTUK MODEL ALAM
SEMESTA BIANCHI I

Seperti yang telah dibahas dalam latar belakang bahwa proses kuantum di medan kuat dengan latar belakang ruang-waktu melengkung berkaitan erat dengan medan gravitasi. Mengingat gravitasi merupakan manifestasi kelengkungan ruang-waktu, maka proses kuantum seperti produksi partikel dalam ruang-waktu melengkung dapat dikaji menggunakan sebuah metode semiklasik, tanpa perlu merumuskan teori kuantum gravitasi yang lengkap. Metode semi-klasik merupakan salah satu metode yang digunakan untuk membangun teori medan kuantum dalam ruang-waktu melengkung tanpa teori gravitasi kuantum, yaitu dengan menggunakan sebuah medan gravitasi klasik yang diberikan sebagai metrik Lorentz yang merupakan solusi dari persamaan Einstein. Skema ini menggambarkan dinamika dari penyebaran medan kuantum di ruang-waktu melengkung yang dijelaskan oleh manifold Lorentz dengan metrik klasik umum $g_{\mu\nu}$ (Pimentel & Pineda, 2021). Pendekatan ini lebih sederhana dan lebih praktis karena memungkinkan analisis efek kuantum tanpa harus mempertimbangkan semua aspek gravitasi pada tingkat kuantum yang begitu kompleks (Villalba, 1995).

Penelitian ini menggunakan elemen garis (2.74) yang merepresentasikan adanya singularitas pada saat $t = 0$. Konsekuensi dari adanya singularitas ini menyebabkan pendekatan adiabatik mengalami kegagalan dalam mendefinisikan keadaan partikel di sekitar singularitas waktu. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan pendekatan semi-klasik. Pendekatan ini dapat mengidentifikasi frekuensi positif dan negatif di sekitar singularitas waktu dalam model kosmologi anisotropik (Villalba, 1997). Metode tersebut juga mampu mendeskripsikan keadaan partikel meskipun alam semesta dan medan elektromagnetiknya tidak statik (Villalba & Greiner, 2001).

Metode semi-klasik terdiri dari menghitung solusi persamaan Hamilton Ja-

cobi untuk model alam semesta Bianchi I yang diberikan oleh metrik (2.74) dalam kasus ini sangat diperlukan. Sebab, untuk mendefinisikan partikel dengan solusi eksak persamaan KG, pendekatan kovarian umum harus digunakan, yang didasarkan pada solusi persamaan hamilton jacobi dalam ruang-waktu masing-masing. Dalam Topik ini yaitu menggunakan model alam semesta Bianchi I (Pimentel & Pineda, 2021). Solusi dari persamaan Hamilton Jacobi kemudian akan dibandingkan dengan solusi dari persamaan medan yaitu persamaan Klein-Gordon.

Dalam kasus metode hamilton jacobi, keadaan positif dan negatif diperoleh sebagai berikut (Pimentel & Pineda, 2021)

$$\varphi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \exp(-iS) & \text{Untuk frekuensi positif} \\ \exp(iS) & \text{Untuk frekuensi negatif} \end{cases} \quad (3.1)$$

Persamaan Hamilton Jacobi untuk partikel relativistik dengan massa diam m dan muatan listrik e dalam medan vakum vektor eksternal ditunjukkan pada persamaan (2.39) (Rezki & Zaim, 2022) yaitu

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu \right) + m^2 c^2 = 0 \quad (3.2)$$

di mana A_μ didefinisikan sebagai 4-potensial elektromagnetik

$$A_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2} \right) \quad (3.3)$$

yang mana menghasilkan medan listrik yang bervariasi sepanjang garis z seiring munculnya invarian medan elektromagnetik (Rezki & Zaim, 2022)

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \neq 0 \quad \text{dan} \quad F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4)$$

mengindikasikan bahwa dalam kasus ini tidak ada medan magnet. Karena elemen

garisnya adalah

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + t^{-2}dz^2 \quad (3.5)$$

dan potential vektor (3.3) hanya bergantung waktu, maka fungsi S dapat ditulis sebagai berikut (Villalba & Greiner, 2001)

$$S = \vec{k} \cdot \vec{r} + F(t) \quad (3.6)$$

Persamaan Hamilton Jacobi pada (3.2) berdasarkan elemen garis (3.5) menjadi

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t} + eA_0\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x} + eA_1\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial y} + eA_2\right)^2 + t^2\left(\frac{\partial S}{\partial z} + eA_3\right)^2 + m^2 = 0 \quad (3.7)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (3.3) ke persamaan (3.7) menjadi

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + t^2\left(\frac{\partial S}{\partial z} + e\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right)\right)^2 + m^2 = 0 \\ & -\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + t^2\left(\frac{\partial S}{\partial z} + \left(\frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right)\right)^2 + m^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

suku $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, dan $\frac{\partial S}{\partial z}$, dapat didefinisikan sebagai (Vanstone, 1962)

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = k_1 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = k_2 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial z} = k_3 \quad (3.11)$$

di mana k_1 , k_2 , k_3 adalah konstanta. Substitusikan persamaan (3.9), (3.10), dan (3.11) ke persamaan (3.8) sehingga menghasilkan

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_1^2}{t^2} + \frac{k_2^2}{t^2} + t^2\left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right)^2 + m^2 = 0 \quad (3.12)$$

selanjutnya mengevaluasi suku $t^2 \left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right)^2$

$$\begin{aligned}
t^2 \left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right)^2 &= t^2 \left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right) \left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t} + \frac{e\beta}{t^2}\right) \\
&= t^2 \left(k_3^2 + \frac{e\alpha}{t}k_3 + \frac{e\beta}{t^2}k_3 + \frac{e\alpha}{t}k_3 + \frac{e^2\alpha^2}{t^2} + \frac{e^2\alpha\beta}{t^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e\beta}{t^2}k_3 + \frac{e^2\alpha\beta}{t^3} + \frac{e^2\beta^2}{t^4}\right) \\
&= t^2 \left(k_3^2 + \frac{2e\alpha}{t}k_3 + \frac{2e\beta}{t^2}k_3 + 3 + \frac{2e^2\alpha\beta}{t^3} + \frac{e\alpha}{t^2} + \frac{e^2\beta^2}{t^4}\right) \\
&= k_3^2 t^2 + 2e\alpha t k_3 + 2e\beta k_3 + \frac{2e^2\alpha\beta}{t} + e\alpha + \frac{e^2\beta^2}{t^2} \\
&= \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right) \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right) \\
&= \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2
\end{aligned}$$

sehingga persamaan (3.12) dapat ditulis ulang menjadi

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 = 0 \quad (3.13)$$

di mana S dan k_{\perp}^2 didefinisikan sebagai

$$S = \vec{k}\vec{r} + F(t) \quad (3.14)$$

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (3.15)$$

Substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.13), maka akan diperoleh persamaan untuk fungsi $F(t)$

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial(\vec{k}\vec{r} + F(t))}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 &= 0 \\
-\left(\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(k_3 t + e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 &= 0
\end{aligned} \quad (3.16)$$

Komponen k_z dapat diasumsikan sama dengan nol. Hal ini karena potensial vektor pada persamaan (3.3) hanya bergantung waktu dan tidak bergantung pada variabel

ruang. Karena komponen ruangnya konstan. Sehingga tidak akan ada perubahan pada sistem bila mengasumsikan $k_z = 0$. Maka persamaan (3.16) menjadi

$$-\left(\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 = 0 \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) selanjutnya akan dicari solusi masing-masing untuk $t \rightarrow 0$ dan $t \rightarrow \infty$, yang mana solusinya nanti akan digunakan untuk mencari fungsi gelombang dari persamaan Hamilton Jacobi.

Persamaan (3.17) dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 + \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 &= 0 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1 Solusi Hamilton Jacobi Saat $t \rightarrow 0$

Dari persamaan (3.18), ketika $t \rightarrow 0$, maka suku $\frac{k_{\perp}^2}{t^2}$ dan suku $\frac{e^2\beta^2}{t^2}$ menjadi dominan. Maka, solusi dari persamaan (3.17) untuk $t \rightarrow 0$ adalah

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2}{t^2} \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2}{t^2}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

suku $\sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2}$ dapat dimisalkan sebagai x . Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \pm \frac{1}{t}x \\ \int dF(t) &= \pm \int \frac{1}{t}x dt \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \pm \frac{1}{t} \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2} \\ F(t) &= \pm x \log t \end{aligned}$$

$$F(t) = \pm \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2 \beta^2} \log t \quad (3.20)$$

Oleh karena itu, fungsi gelombang dari persamaan (3.20) berdasarkan persamaan gelombang pada (3.1) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \exp(iS) \\ &= \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} + F(t))) \\ &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + iF(t)) \\ &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2 \beta^2} \log t) \\ &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\log t^{\pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2 \beta^2}}) \\ \varphi(\vec{r}, t) &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) t^{\pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2 \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2 Solusi Hamilton Jacobi Saat $t \rightarrow \infty$

Dari persamaan (3.18), maka solusi persamaan (3.17) untuk $t \rightarrow \infty$ adalah

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + \left(e\alpha + \frac{e\beta}{t}\right)^2 + m^2 \\ \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 &= \frac{k_{\perp}^2}{t^2} + e^2\alpha^2 + \frac{2e^2\alpha\beta}{t} + \frac{e^2\beta^2}{t^2} + m^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Karena $t \rightarrow \infty$, maka suku $\frac{k_{\perp}^2}{t^2}$ dan $\frac{e^2\beta^2}{t^2}$ bisa diabaikan karena nilainya relatif kecil.

Sehingga persamaan (3.22) dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF(t)}{dt}\right)^2 &= e^2\alpha^2 + m^2 + \frac{2e^2\alpha\beta}{t} \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \pm \sqrt{e^2\alpha^2 + m^2 + \frac{2e^2\alpha\beta}{t}} \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \pm \sqrt{e^2\alpha^2 + m^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}} \end{aligned}$$

Suku $\frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2+m^2)t}$ dapat dimisalkan dengan variabel x , maka

$$\frac{dF(t)}{dt} = \pm\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2} \cdot \sqrt{1+x} \quad (3.23)$$

Kemudian untuk mengevaluasi suku $\sqrt{1+x}$ dapat menggunakan aplikasi dari ekspansi deret Taylor yaitu ekspansi Binomial yang didefinisikan sebagai (Arfken & Weber, 2005)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (3.24)$$

Berdasarkan definisi pada persamaan (3.24), maka persamaan (3.23) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \left(\frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}\right)^2 \\ &+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \left(\frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Suku ketiga dan seterusnya akan bernilai sangat kecil ketika $t \rightarrow \infty$, maka persamaan (3.25) menjadi

$$\left(1 + \frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t} \quad (3.26)$$

Sehingga persamaan (3.23) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \pm\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2} \cdot \left(1 + \frac{e^2\alpha\beta}{(e^2\alpha^2 + m^2)t}\right) \\ \frac{dF(t)}{dt} &= \pm\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2} + \frac{e^2\alpha\beta}{\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}t} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Setelah disederhanakan persamaan diferensialnya, maka solusi integrasi dari

persamaan (3.27) adalah

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \pm \int \left(\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2} + \frac{e^2\alpha\beta}{\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2t}} \right) dt \\
 F(t) &= \pm \sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}t \pm \frac{e^2\alpha\beta}{\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}} \log t
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sehingga fungsi gelombangnya adalah

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}, t) &= \exp(iS) \\
 &= \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} + F(t))) \\
 &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + iF(t)) \\
 &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm i\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}t) \exp(\log t^{\pm ie^2\alpha\beta/\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}}) \\
 \varphi(\vec{r}, t) &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm i\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}t) t^{\pm ie^2\alpha\beta/\sqrt{e^2\alpha^2 + m^2}}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

BAB IV

SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DI RUANG-WAKTU BIANCHI I DENGAN ADANYA MEDAN LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU

4.1 Geometri Ruang-Waktu Bianchi I

Alam semesta anisotropik Bianchi I diwakili oleh metrik

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(dx^2 + dy^2) + t^{-2}dz^2 \quad (4.1)$$

maka tensor metrik matriks g berupa matriks diagonal

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

dengan matriks inverse $g^{\alpha\beta}$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.1 Simbol Christoffel

Simbol Christoffel didefinisikan sebagai

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \quad (4.4)$$

Maka simbol Christoffel untuk semua komponen dari metrik (4.1) adalah sebagai berikut

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mu = 0; \quad \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{00} + \partial_0g_{00} - \partial_0g_{00}) = 0 \\ \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{10} + \partial_1g_{00} - \partial_0g_{01}) = 0 \\ \Gamma_{02}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{20} + \partial_2g_{00} - \partial_0g_{02}) = 0 \\ \Gamma_{03}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{30} + \partial_3g_{00} - \partial_0g_{03}) = 0 \\ \mu = 1; \quad \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{00} + \partial_0g_{01} - \partial_0g_{10}) = 0 \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{10} + \partial_1g_{01} - \partial_0g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}(-1) \left(-\frac{\partial}{\partial t}t^2 \right) = t \\ \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{20} + \partial_2g_{01} - \partial_0g_{12}) = 0 \\ \Gamma_{13}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{30} + \partial_3g_{01} - \partial_0g_{13}) = 0 \\ \mu = 2; \quad \Gamma_{20}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{00} + \partial_0g_{02} - \partial_0g_{20}) = 0 \\ \Gamma_{21}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{10} + \partial_1g_{02} - \partial_0g_{21}) = 0 \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{20} + \partial_2g_{02} - \partial_0g_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(-1) \left(-\frac{\partial}{\partial t}t^2 \right) = t \\ \Gamma_{23}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{30} + \partial_3g_{02} - \partial_0g_{23}) = 0 \\ \mu = 3; \quad \Gamma_{30}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{00} + \partial_0g_{03} - \partial_0g_{30}) = 0 \\ \Gamma_{31}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{10} + \partial_1g_{03} - \partial_0g_{31}) = 0 \\ \Gamma_{32}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{20} + \partial_2g_{03} - \partial_0g_{32}) = 0 \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{30} + \partial_3g_{03} - \partial_0g_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(-1) \left(-\frac{\partial}{\partial t}t^{-2} \right) = -t^{-3} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mu = 0; \quad \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{01} + \partial_0g_{10} - \partial_1g_{00}) = 0 \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{11} + \partial_1g_{10} - \partial_1g_{01}) \\ &= \frac{1}{2}(t^{-2}) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) = t^{-1} \\ \Gamma_{02}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{21} + \partial_2g_{10} - \partial_1g_{02}) = 0 \\ \Gamma_{03}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{31} + \partial_3g_{10} - \partial_1g_{03}) = 0 \\ \mu = 1; \quad \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{01} + \partial_0g_{11} - \partial_1g_{10}) \\ &= \frac{1}{2}(t^{-2}) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) = t^{-1} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} + \partial_1g_{11} - \partial_1g_{11}) = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{21} + \partial_2g_{11} - \partial_1g_{12}) = 0 \\ \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{31} + \partial_3g_{11} - \partial_1g_{13}) = 0 \\ \mu = 2; \quad \Gamma_{20}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{01} + \partial_0g_{12} - \partial_1g_{20}) = 0 \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{11} + \partial_1g_{12} - \partial_1g_{21}) = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{21} + \partial_2g_{12} - \partial_1g_{22}) = 0 \\ \Gamma_{23}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{31} + \partial_3g_{12} - \partial_1g_{23}) = 0 \\ \mu = 3; \quad \Gamma_{30}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{01} + \partial_0g_{13} - \partial_1g_{30}) = 0 \\ \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{11} + \partial_1g_{13} - \partial_1g_{31}) = 0 \\ \Gamma_{32}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{21} + \partial_2g_{13} - \partial_1g_{32}) = 0 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{31} + \partial_3g_{13} - \partial_1g_{33}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mu = 0; \quad \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{02} + \partial_0g_{20} - \partial_2g_{00}) = 0 \\ \Gamma_{01}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{12} + \partial_1g_{20} - \partial_2g_{01}) = 0 \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{22} + \partial_2g_{20} - \partial_2g_{02}) \\ &= \frac{1}{2}(t^{-2}) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) = t^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{32} + \partial_3g_{20} - \partial_2g_{03}) = 0 \\
\mu = 1; & \quad \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{02} + \partial_0g_{21} - \partial_2g_{10}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{12} + \partial_1g_{21} - \partial_2g_{11}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{22} + \partial_2g_{21} - \partial_2g_{12}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{32} + \partial_3g_{21} - \partial_2g_{13}) = 0 \\
\mu = 2; & \quad \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{02} + \partial_0g_{22} - \partial_2g_{20}) \\
& \quad = \frac{1}{2}(t^{-2}) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^2 \right) = t^{-1} \\
& \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{12} + \partial_1g_{22} - \partial_2g_{21}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{22} + \partial_2g_{22} - \partial_2g_{22}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{32} + \partial_3g_{22} - \partial_2g_{23}) = 0 \\
\mu = 3; & \quad \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{02} + \partial_0g_{23} - \partial_2g_{30}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{12} + \partial_1g_{23} - \partial_2g_{31}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{22} + \partial_2g_{23} - \partial_2g_{32}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} + \partial_3g_{23} - \partial_2g_{33}) = 0 \\
\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\
\mu = 0; & \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{03} + \partial_0g_{30} - \partial_3g_{00}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{13} + \partial_1g_{30} - \partial_3g_{01}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{23} + \partial_2g_{30} - \partial_3g_{02}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{33} + \partial_3g_{30} - \partial_3g_{03}) \\
& \quad = \frac{1}{2}(t^2) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^{-2} \right) = -t^{-1} \\
\mu = 1; & \quad \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{03} + \partial_0g_{31} - \partial_3g_{10}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{13} + \partial_1g_{31} - \partial_3g_{11}) = 0 \\
& \quad \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{23} + \partial_2g_{31} - \partial_3g_{12}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0 \\
\mu = 2; \quad \Gamma_{20}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20}) = 0 \\
\Gamma_{21}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{32} - \partial_3 g_{21}) = 0 \\
\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0 \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0 \\
\mu = 3; \quad \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) \\
&= \frac{1}{2}(t^2) \left(\frac{\partial}{\partial t} t^{-2} \right) = -t^{-1} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{31}) = 0 \\
\Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{32}) = 0 \\
\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0
\end{aligned}$$

Kesimpulan, komponen $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ yang bernilai tidak nol adalah

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \Gamma_{22}^0 = t \\
\Gamma_{33}^0 &= -t^{-3} \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = t^{-1} \\
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = -t^{-1}
\end{aligned}$$

4.1.2 Tensor Ricci dan Skalar Ricci

Tensor Ricci didapatkan dengan mengkontruksi indeks dari tensor kelengkapan Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k \nu}^k = \partial_k \Gamma_{\mu\nu}^k - \partial_\nu \Gamma_{k\mu}^k + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{k\lambda}^k - \Gamma_{k\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^k \quad (4.5)$$

Berdasarkan dari simbol Christoffel yang bernilai tidak nol, komponen tensor Riccinya ada sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_k \Gamma_{11}^k - \partial_1 \Gamma_{k1}^k + \Gamma_{11}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^0 - \Gamma_{01}^\lambda \Gamma_{1\lambda}^0 \\
R_{11} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{k1}^k + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{03}^0 \\
&\quad - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{13}^0 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} t - t^{-1} \times t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_k \Gamma_{22}^k - \partial_2 \Gamma_{k2}^k + \Gamma_{22}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^0 - \Gamma_{02}^\lambda \Gamma_{2\lambda}^0 \\
R_{22} &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{k2}^k + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{03}^0 \\
&\quad - \Gamma_{02}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{23}^0 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} t - t^{-1} \times t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_k \Gamma_{33}^k - \partial_3 \Gamma_{k3}^k + \Gamma_{33}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^0 - \Gamma_{03}^\lambda \Gamma_{3\lambda}^0 \\
R_{33} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{k3}^k + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{03}^0 \\
&\quad - \Gamma_{03}^0 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{31}^0 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{32}^0 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{33}^0 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (-t^{-3}) - (-t^{-1})(-t^{-3}) \\
&= 2t^{-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_1 \Gamma_{01}^1 - \partial_1 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{10}^3 \Gamma_{13}^1 \\
&\quad - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{10}^3 \Gamma_{13}^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$R_{01} = R_{10} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{02} &= \partial_2 \Gamma_{02}^2 - \partial_2 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{20}^0 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{20}^3 \Gamma_{23}^2 \\
&\quad - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{23}^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$R_{02} = R_{20} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{03} &= \partial_3 \Gamma_{03}^3 - \partial_3 \Gamma_{k0}^k + \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^3 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^3 \\
&\quad - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^3 \\
&= 0 \\
R_{03} &= R_{30} = 0
\end{aligned}$$

Tensor Ricci dapat dikontraksikan sekali lagi untuk memperoleh skalar Ricci, yang dapat memberikan informasi mengenai kelengkungan ruangwaktu. Sehingga skalar Riccinya adalah

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (4.6)$$

Selanjutnya tensor Ricci yang bernilai tidak nol memberikan skalar kurvatur R sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= g^{33} R_{33} \\
&= t^2 \times 2t^{-4} \\
&= 2t^{-2} \\
R &= \frac{2}{t^2} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

4.2 Solusi Persamaan Klein-Gordon

Aksi untuk sebuah medan skalar dengan adanya medan listrik di ruang-waktu melengkung

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [\Xi (g^{\mu\nu} (D_\mu \varphi)^\dagger D_\nu \varphi + \xi R \varphi^\dagger \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi)] \quad (4.8)$$

dimana

$$\Xi = \sqrt{|\det g|} = t \quad (4.9)$$

yang mana determinan tensor metrik $g^{\mu\nu}$ berdasarkan dengan elemen garis pada persamaan (4.1) dan $D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$ yang merupakan turunan kovarian gauge, R merupakan skalar Ricci, dan ξ adalah konstanta kopling tak berdimensi yang mana bernilai $\xi = 0$ dalam kasus kopling minimal dan $\xi = 1/6$ konformal kopling dipertimbangkan (Villalba & Greiner, 2001). Maka persamaan lagrangian untuk medan skalar di ruang-waktu Bianchi Idengan adanya medan listrik adalah

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\Xi(g^{\mu\nu}(D_\mu\varphi)^\dagger D_\nu\varphi + \xi R\varphi^\dagger\varphi + m^2\varphi^\dagger\varphi)] \quad (4.10)$$

dengan persamaan Euler-Lagrangian

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - D_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\varphi)}\right) = 0 \quad (4.11)$$

Kemudian untuk menghitung Euler-Lagrangian dari (4.10), pertama menghitung turunan parsial untuk suku kedua dan ketiga

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}(\Xi\xi R\varphi^\dagger\varphi + \Xi m^2\varphi^\dagger\varphi) \\ &= \Xi\xi R\varphi + \Xi m^2\varphi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Kemudian turunan untuk suku pertama adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\varphi)} &= \frac{\partial}{\partial(D_\mu\varphi)}(\Xi g^{\mu\nu}(D_\mu\varphi)^\dagger D_\nu\varphi) \\ &= \Xi g^{\mu\nu} D_\nu\varphi \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sehingga

$$D_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_\mu\varphi)}\right) = D_\mu\Xi g^{\mu\nu} D_\nu\varphi \quad (4.14)$$

Kemudian persamaan (4.12) dan (4.14) disubstitusikan ke persamaan (4.11) yaitu persamaan Euler-Lagrangian, menjadi

$$\Xi \xi R \varphi + \Xi m^2 \varphi - D_\mu \Xi g^{\mu\nu} D_\nu \varphi = 0 \quad (4.15)$$

Selanjutnya membagi persamaan (4.15) dengan Ξ , maka persamaannya menjadi

$$\xi R \varphi + m^2 \varphi - \frac{1}{\Xi} D_\mu \Xi g^{\mu\nu} D_\nu \varphi = 0 \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis dalam bentuk operator d'Alembert

$$(-\square + m^2 + \xi R) \varphi = 0 \quad (4.17)$$

di mana operator d'Alembert didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\Xi} D_\mu (\Xi g^{\mu\nu} D_\nu) \\ &= \frac{1}{\Xi} (\partial_\mu - ieA_\mu) (\Xi g^{\mu\nu} (\partial_\nu - ieA_\nu)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Persamaan (4.18) dapat disubstitusikan ke persamaan (4.17), sehingga persamaan Klein-Gordon dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} 0 &= (\square - m^2 - \xi R) \varphi \\ 0 &= \left(-\frac{1}{\Xi} (\partial_\mu - ieA_\mu) (\Xi g^{\mu\nu} (\partial_\nu - ieA_\nu)) \right) \varphi \\ 0 &= \left(-\frac{1}{\Xi} [\partial_\mu (\Xi g^{\mu\nu} (\partial_\nu - ieA_\nu)) - ieA_\mu (\Xi g^{\mu\nu} (\partial_\nu - ieA_\nu))] \right) \varphi \\ &\quad + (m^2 + \xi R) \varphi \\ 0 &= \left(-\frac{1}{\Xi} \underbrace{(\partial_\mu (\Xi g^{\mu\nu} \partial_\nu))}_{\text{evaluasi 1}} - \underbrace{ie \partial_\mu (\Xi g^{\mu\nu} A_\nu)}_{\text{evaluasi 2}} - ie \Xi g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu - e^2 \Xi g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right) \varphi \\ &\quad + (m^2 + \xi R) \varphi \end{aligned} \quad (4.19)$$

Suku $\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ dan suku $ie\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} A_\nu)$ pada persamaan (4.19) akan dievaluasi sebagai berikut

Evaluasi 1 suku $\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} \partial_\nu)$

$$\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} \partial_\nu) = \underbrace{\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu})}_{0} \partial_\nu + \Xi g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

suku $\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu}) \partial_\nu$ bernilai 0 karena turunan kovarian metrik $\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$.

Evaluasi 2 suku $ie\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} A_\nu)$

$$ie\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu} A_\nu) = \underbrace{ie\partial_\mu(\Xi g^{\mu\nu})}_{0} A_\nu + ie\Xi g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + ie\Xi g^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu$$

suku $ie\Xi g^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu$ dapat diubah dengan memanipulasi variabel menjadi $ie\Xi g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu$.

Kemudian disusun ulang persamaan (4.19)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{1}{\Xi} (\Xi g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - (ie\Xi g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + ie\Xi g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu)) \right) \varphi \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\Xi} (-ie\Xi g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu - e^2 \Xi g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) \right) \varphi + (m^2 + \xi R) \varphi \\ 0 &= (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + ieg^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + ieg^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu + ieg^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu + e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \\ &\quad + e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) \varphi + (m^2 + \xi R) \varphi \\ 0 &= (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + ieg^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + 2ieg^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu + m^2 + \xi R) \varphi \\ 0 &= (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2 - \xi R) \varphi - (ieg^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + 2ieg^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu) \varphi \end{aligned} \tag{4.20}$$

Persamaan (4.20) merupakan persamaan Klein-Gordon setelah perluasan dari persamaan (4.17).

Berdasarkan matriks persamaan (4.3) dan potensial vektor (2.40), masing-masing suku pada persamaan (4.20) dapat didefinisikan sebagai berikut

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = g^{00} \partial_0 \partial_0 + g^{11} \partial_1 \partial_1 + g^{22} \partial_2 \partial_2 + g^{33} \partial_3 \partial_3$$

$$\begin{aligned}
&= g^{00}\partial_0^2 + g^{11}\partial_1^2 + g^{22}\partial_2^2 + g^{33}\partial_3^2 \\
&= -\partial_0^2 - \frac{1}{t}\partial_0 + \frac{1}{t^2}\partial_1^2 + \frac{1}{t^2}\partial_2^2 + t^2\partial_3^2 \\
&= -\partial_0^2 - \frac{1}{t}\partial_0 + \frac{1}{t^2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + t^2\partial_3^2
\end{aligned} \tag{4.21}$$

dan

$$\begin{aligned}
2ieg^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu &= \underbrace{ieg^{00}A_0\partial_0}_0 + \underbrace{ieg^{11}A_1\partial_1}_0 + \underbrace{ieg^{22}A_2\partial_2}_0 + ieg^{33}A_3\partial_3 \\
&= iet^2\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right)\partial_3 \\
&= 2ie(\alpha t + \beta)\partial_3
\end{aligned} \tag{4.22}$$

dan

$$\begin{aligned}
e^2g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu &= \underbrace{e^2g^{00}A_0A_0}_0 + \underbrace{e^2g^{11}A_1A_1}_0 + \underbrace{e^2g^{22}A_2A_2}_0 + e^2g^{33}A_3A_3 \\
&= e^2t^2\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right)\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right) \\
&= e^2(\alpha t + \beta)\left(\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right) \\
&= e^2\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{t} + \frac{\beta}{t^2}\right) \\
&= e^2\left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right)\left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right) \\
&= \left[e\left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right)\right]^2
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Jika semua suku di atas yang telah dijabarkan disubstitusikan ke persamaan (4.20), maka persamaannya menjadi

$$\begin{aligned}
0 &= \left[-\partial_0^2 - \frac{1}{t}\partial_0 + \frac{1}{t^2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + t^2\partial_3^2 - m^2 - \xi R\right]\varphi \\
&\quad - \left[2ie(\alpha t + \beta)\partial_3 + e^2\left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right)^2\right]\varphi
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Karena persamaan (4.24) komutatif dengan komponen operator momentum $\vec{p} =$

$-i\nabla$, sehingga fungsi gelombang φ dapat dinyatakan sebagai (Rezki & Zaim, 2022)

$$\varphi = t^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.25)$$

Selanjutnya untuk mencari solusi dari persamaan (4.24) perlu mensubstitusikan persamaan (4.25) yang mana nantinya persamaan (4.24) menjadi persamaan diferensial orde kedua. Hal ini perlu dilakukan agar untuk mempermudah dalam mencari solusinya (Villalba & Greiner, 2001), maka didapatkan

$$0 = \left[-\partial_0^2 - \frac{1}{t}\partial_0 + \frac{1}{t^2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + t^2\partial_3^2 - m^2 - \xi R \right] t^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - \left[2ie(\alpha t + \beta)\partial_3 + e^2 \left(\alpha + \frac{\beta}{t} \right)^2 \right] t^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.26)$$

distribusi turunan dari sestiap suku adalah

$$\partial_0(\varphi) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + t^{-1/2}\frac{d}{dt}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_1(\varphi) = t^{-1/2}ik_x\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_2(\varphi) = t^{-1/2}ik_y\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_3(\varphi) = t^{-1/2}ik_z\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_0^2(\varphi) = \frac{3}{4}t^{-5/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - t^{-3/2}\frac{d}{dt}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + t^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_1^2(\varphi) = t^{-1/2}(ik_x)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_2^2(\varphi) = t^{-1/2}(ik_y)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\partial_3^2(\varphi) = t^{-1/2}(ik_z)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

kemudia semua hasil turunan disubstitusikan ke persamaan (4.26)

$$0 = - \left(\frac{3}{4}t^{-5/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - t^{-3/2}\frac{d}{dt}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + t^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) - \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2}t^{-3/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + t^{-1/2}\frac{d}{dt}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{t^2}(t^{-1/2}(ik_x)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + t^{-1/2}(ik_y)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}) + t^2t^{-1/2}(ik_z)^2\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \\
& - m^2t^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - \xi Rt^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - 2ie(\alpha t + \beta)t^{-1/2}ik_z\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \\
& - e^2\left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right)^2 t^{-1/2}\omega(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

karena di setiap suku terdapat $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ maka dapat dihilangkan dengan cara membaginya dengan $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ dan masing-masing suku dibagi dengan $t^{-1/2}$, maka persamaan (4.27) menjadi

$$\begin{aligned}
0 & = -\left(\frac{3}{4}t^{-2}\omega(t) - t^{-1}\frac{d}{dt}\omega(t) + \frac{d^2}{dt^2}\omega(t)\right) - \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\omega(t) + \frac{d}{dt}\omega(t)\right) \\
& + \frac{1}{t^2}(-k_x^2 - k_y^2)\omega(t) - t^2k_z^2\omega(t) - m^2\omega(t) - \xi R\omega(t) + 2e(\alpha t + \beta)k_z\omega(t) \\
& - e^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{t^2} + \frac{2\alpha\beta}{t}\right)\omega(t) \\
& = -\frac{3}{4t^2}\omega(t) + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\omega(t) - \frac{d^2}{dt^2}\omega(t) + \frac{1}{2t^2}\omega(t) - \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\omega(t) - \frac{1}{t^2}(k_x^2 + k_y^2)\omega(t) \\
& - t^2k_z^2\omega(t) - m^2\omega(t) - \xi R\omega(t) + 2e(\alpha t + \beta)k_z\omega(t) \\
& - e^2\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{t^2} + \frac{2\alpha\beta}{t}\right)\omega(t) \\
& = -\frac{d^2}{dt^2}\omega(t) - \frac{1}{4t^2}\omega(t) - \frac{1}{t^2}(k_x^2 + k_y^2)\omega(t) - t^2k_z^2\omega(t) - m^2\omega(t) - \xi R\omega(t) \\
& + 2e(\alpha t + \beta)k_z\omega(t) - \left(e^2\alpha^2 + \frac{e^2\beta^2}{t^2} + \frac{2e^2\alpha\beta}{t}\right)\omega(t) \\
& = \frac{d^2}{dt^2}\omega(t) + \frac{1}{4t^2}\omega(t) + \frac{1}{t^2}(k_x^2 + k_y^2)\omega(t) + t^2k_z^2\omega(t) + m^2\omega(t) + \xi R\omega(t) \\
& - 2e(\alpha t + \beta)k_z\omega(t) + \left(e^2\alpha^2 + \frac{e^2\beta^2}{t^2} + \frac{2e^2\alpha\beta}{t}\right)\omega(t) \\
& = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k_x^2 + k_y^2 + e^2\beta^2 + \frac{1}{4} + 2\xi}{t^2} + 2\frac{e^2\alpha\beta}{t}\right]\omega(t) \\
& + [t^2k_z^2 - 2e(\alpha t + \beta)k_z + m^2 + e^2\alpha^2]\omega(t) \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Dengan mengasumsikan $k_z = 0$ yang artinya bahwa gerak partikel dibatasi, sehingga partikel hanya bergerak di arah sumbu x dan y , dan $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ maka

persamaannya menjadi

$$0 = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + \frac{1}{4} + 2\xi}{t^2} + 2\frac{e^2\alpha\beta}{t} + m^2 + e^2\alpha^2 \right] \omega(t) \quad (4.29)$$

Persamaan (4.29) bisa disederhanakan dengan menerapkan transformasi variabel t ke variabel ρ . Tujuan dari transformasi ini adalah untuk menyederhanakan bentuk persamaan diferensial yang kompleks menjadi bentuk persamaan yang lebih umum. Dengan definisi ρ adalah (Rezki & Zaim, 2022)

$$\rho = -2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t \quad (4.30)$$

Persamaan (4.30) menunjukkan bahwa ρ merupakan fungsi linier dari t . Sehingga, ketika ρ diturunkan terhadap t , maka turunan pertama dan keduanya adalah

$$\frac{d\rho}{dt} = -2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2} \quad (4.31)$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = 0 \quad (4.32)$$

Selanjutnya, mendefinisikan turunan pertama terhadap t dalam bentuk ρ yaitu

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{d}{d\rho} = -2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2} \frac{d}{d\rho} \quad (4.33)$$

maka, turunan kedua terhadap t dalam bentuk ρ adalah

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d\rho^2}{dt^2} \frac{d^2}{d\rho^2} = -4(m^2 + e^2\alpha^2) \frac{d^2}{d\rho^2} \quad (4.34)$$

Berdasarkan definisi ρ pada persamaan (4.30), maka t dapat didefinisikan sebagai

$$t = -\frac{\rho}{2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}} \quad (4.35)$$

Kemudian disubstitusikan semua suku ke persamaan awal yaitu persamaan (4.29)

$$0 = \left[-4(m^2 + e^2\alpha^2) \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + \frac{1}{4} + 2\xi}{\left(-\frac{\rho}{2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}} \right)^2} + \frac{2e^2\alpha\beta}{-\frac{\rho}{2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}}} \right. \\ \left. + m^2 + e^2\alpha^2 \right] \omega(\rho)$$

$$0 = \left[-4(m^2 + e^2\alpha^2) \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{4(m^2 + e^2\alpha^2)}{\rho^2} \left(k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + \frac{1}{4} + 2\xi \right) \right. \\ \left. - \frac{4i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}}{\rho} e^2\alpha\beta + m^2 + e^2\alpha^2 \right] \omega(\rho)$$

Selanjutnya membagi semua suku dengan $-4(m^2 + e^2\alpha^2)$, persamaannya menjadi

$$0 = \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + \frac{1}{4} + 2\xi}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{ie^2\alpha\beta}{\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}} - \frac{1}{4} \right] \omega(\rho) \quad (4.36)$$

dengan mendefinisikan ulang suku-suku persamaan (4.36) dengan variabel baru yaitu

$$\mu = i\sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + 2\xi} \quad (4.37)$$

$$\lambda = i \frac{e^2\alpha\beta}{\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}} \quad (4.38)$$

maka persamaan (4.36) menjadi

$$0 = \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right] \omega(\rho) \quad (4.39)$$

Persamaan (4.39) merupakan persamaan Whittaker. Persamaan Whittaker adalah sebuah persamaan diferensial orde dua yang merupakan salah satu bentuk dari fungsi hipergeometrik konfluen yang didefinisikan sebagai (Abramowitz & Stegun, 1970)

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{(\frac{1}{4} - \mu^2)}{z^2} \right] \omega(z) = 0 \quad (4.40)$$

Persamaan Whittaker memiliki solusi berupa kombinasi fungsi Whittaker $M_{k,\mu}(z)$

dan $W_{k,\mu}(z)$ yaitu

$$\omega(z) = C_1 M_{k,\mu}(z) + C_2 W_{k,\mu}(z) \quad (4.41)$$

Sehingga, berdasarkan definisi terkait persamaan Whittaker, maka solusi dari persamaan (4.39) dapat ditulis sebagai kombinasi dari fungsi Whittaker $M_{\lambda,\mu}(\rho)$ dan $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ (Rezki & Zaim, 2022)

$$\omega(\rho) = C_1 M_{\lambda,\mu}(\rho) + C_2 W_{\lambda,\mu}(\rho) \quad (4.42)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta normalisasi dan $M_{\lambda,\mu}(\rho)$ didefinisikan sebagai (Rezki & Zaim, 2022)

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\mu}(\rho) = & e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^{\frac{1}{2}+\mu} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)1!} \rho + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{3}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)(2 + 2\mu)2!} \rho^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{3}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{5}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)(2 + 2\mu) + (3 + 2\mu)3!} \rho^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

dan $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ didefinisikan sebagai (Olver dkk, 2010)

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda,\mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \quad (4.44)$$

Apabila persamaan (4.42) disubstitusikan ke fungsi gelombang φ pada persamaan (4.25), maka solusi dari persamaan (4.29) adalah

$$\varphi = t^{-1/2} [C_1 M_{\lambda,\mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2 t}) + C_2 W_{\lambda,\mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2 t})] e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.45)$$

Persamaan (4.45) merupakan solusi umum dari persamaan Klein-Gordon pada persamaan (4.24) dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di ruang-waktu Bianchi (ruang-waktu anisotropik). Fungsi gelombang φ merepresentasikan dinamika dari partikel relativistik karena evolusi ruang-waktu yang disebabkan oleh alam semesta yang berekspansi dan $\alpha\beta$ sebagai parameter medan listrik yang mempengaruhi penciptaan partikel.

BAB V

PENCIPTAAN PARTIKEL SKALAR DI RUANG-WAKTU BIANCHI I DENGAN ADANYA MEDAN LISTRIK YANG BERGANTUNG WAKTU

Pada bagian ini akan dilakukan perhitungan probabilitas untuk partikel tunggal yang tercipta yang mana nantinya akan digunakan untuk mencari densitas dari jumlah partikel yang tercipta. Selanjutnya akan dilakukan analisis terkait partikel yang tercipta dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu.

5.1 Probabilitas Partikel Tunggal yang Tercipta

Pertimbangkan setiap kasus di mana partikel diciptakan sedemikian rupa sehingga operator penciptaan dan pemusnahan waktu akhir $a_{\vec{k}}$ berhubungan dengan operator waktu awal $A_{\vec{k}}$ melalui suatu transformasi linear (Parker & Toms, 2009)

Mode k

$$a_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} A_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}^\dagger \quad (5.1)$$

$$a_{\vec{k}}^\dagger = \alpha_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{\vec{k}} A_{-\vec{k}} \quad (5.2)$$

Mode $-\vec{k}$

$$a_{-\vec{k}} = \alpha_{-\vec{k}} A_{-\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^* A_{\vec{k}}^\dagger \quad (5.3)$$

$$a_{-\vec{k}}^\dagger = \alpha_{-\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} A_{\vec{k}} \quad (5.4)$$

dengan sifat simetri transformasi bogoliubov yaitu

$$\alpha_{\vec{k}} = \alpha_{-\vec{k}}, \quad \beta_{\vec{k}} = \beta_{-\vec{k}}$$

Transformasi linear di atas disebut sebagai transformasi Bogoliubov dengan α dan β adalah koefisien Bogoliubov. Transformasi Bogoliubov memungkinkan untuk

trik atau ekspansi alam semesta berubah) dengan operator pada waktu yang lebih baru (setelah perubahan terjadi). Ini penting karena medan yang bergantung waktu atau ekspansi alam semesta dapat mengubah kondisi vakum kuantum, menghasilkan penciptaan partikel. Dengan hubungan komutasi pada boson adalah (Parker & Toms, 2009)

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (5.5)$$

Kemudian menghitung distribusi probabilitas dari partikel-partikel yang tercipta, dengan mengasumsikan tidak ada partikel yang hadir pada waktu awal. Sehingga vektor keadaannya adalah $|0\rangle$, didefinisikan oleh (Parker & Toms, 2009)

$$A_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \text{ untuk semua } \vec{k} \quad (5.6)$$

dan untuk keadaan vakum pada waktu akhir, didefinisikan oleh

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \text{ untuk semua } \vec{k} \quad (5.7)$$

Ruang Fock pada waktu akhir dibangun dengan menerapkan operator $a_{\vec{k}}^\dagger$ pada vektor keadaan $|0\rangle$, sebagaimana didefinisikan sebagai berikut (Mandl & Shaw, 2010)

$$|n(\vec{k})\rangle = \frac{(a_{\vec{k}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (5.8)$$

$$|n(-\vec{k})\rangle = \frac{(a_{-\vec{k}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (5.9)$$

sehingga

$$|n_1(\vec{k}_1), n_2(\vec{k}_2), \dots\rangle \equiv (n_1! n_2! \dots)^{-1/2} (a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{n_1} (a_{\vec{k}_2}^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle \quad (5.10)$$

Berdasarkan persamaan (5.8) dan (5.9), maka amplitudo probabilitas untuk

menemukan keadaan $|n(\vec{k}), n(-\vec{k})\rangle$, dengan n partikel dalam mode \vec{k} dan mode $-\vec{k}$ adalah

$$\begin{aligned} \langle n(\vec{k}), n(-\vec{k})|0\rangle &= \left(\frac{(a_{\vec{k}}^\dagger)^n (a_{-\vec{k}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!} \sqrt{n!}} |0\rangle \right)^\dagger |0\rangle \\ &= (n!)^{-1} \langle 0|(a_{-\vec{k}})^n (a_{\vec{k}}^n)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.11)$$

Jika persamaan (5.1) diterapkan ke vakum state, maka didapatkan

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = \alpha_{\vec{k}} A_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}^\dagger |0\rangle \quad (5.12)$$

karena $A_{\vec{k}}|0\rangle = 0$, maka persamaan (5.12) menjadi

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = \beta_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}^\dagger |0\rangle \quad (5.13)$$

Kemudian dari persamaan (5.4), operator penciptaan pada waktu awal dapat didefinisikan sebagai

$$A_{-\vec{k}}^\dagger = \frac{a_{-\vec{k}}^\dagger}{\alpha_{\vec{k}}^*} - \frac{\beta_{\vec{k}} A_{\vec{k}}}{\alpha_{\vec{k}}^*} \quad (5.14)$$

sehingga operator penciptaan waktu awal dapat disubstitusikan ke persamaan (5.13) menjadi

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = \beta_{\vec{k}}^* (\alpha_{\vec{k}}^*)^{-1} a_{-\vec{k}}^\dagger |0\rangle \quad (5.15)$$

Selanjutnya persamaan (5.15) disubstitusikan ke persamaan (5.11)

$$\langle n(\vec{k}), n(-\vec{k})|0\rangle = (n!)^{-1} (\beta_{\vec{k}}^* / \alpha_{\vec{k}}^*)^n \langle 0|(a_{-\vec{k}})^n (a_{-\vec{k}}^\dagger)^n |0\rangle \quad (5.16)$$

untuk memperoleh bentuk bra-nya, maka digunakan adjoint dari persamaan (5.9)

$$\begin{aligned} (|n(-\vec{k})\rangle)^\dagger &= \left(\frac{(a_{-\vec{k}}^\dagger)^{n!}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right)^\dagger \\ \langle n(-\vec{k})| &= \langle 0| \frac{(a_{-\vec{k}})^n}{\sqrt{n!}} \\ (n!)^{1/2} \langle n(-\vec{k})| &= \langle 0|(a_{-\vec{k}})^n \end{aligned} \quad (5.17)$$

Jika disubstitusikan ke persamaan (5.16), maka persamaannya menjadi

$$\langle n(\vec{k}), n(-\vec{k})|0\rangle = (n!)^{-1/2} (\beta_k^*/\alpha_k^*)^n \langle n(-\vec{k})|(a_{-\vec{k}}^\dagger)^n|0\rangle \quad (5.18)$$

Selanjutnya yaitu mendefinisikan suku $(n(-\vec{k})|(a_{-\vec{k}}^\dagger)^n$. Persamaan aksi operator anhilasi $a_{-\vec{k}}$ pada keadaan $|n(-\vec{k})\rangle$ didefinisikan sebagai (Mandl & Shaw, 2010)

$$a_{-\vec{k}}|n(-\vec{k})\rangle = \sqrt{n}|(n-1)(-\vec{k})\rangle \quad (5.19)$$

bentuk adjointnya adalah

$$\begin{aligned} (a_{-\vec{k}}|n(-\vec{k})\rangle)^\dagger &= (\sqrt{n}|(n-1)(-\vec{k})\rangle)^\dagger \\ \langle n(-\vec{k})|a_{-\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{n}\langle(n-1)(-\vec{k})| \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sekarang, dengan menggunakan persamaan (5.20) berulang hingga n kali

$$\begin{aligned} n = 1, \quad \langle 1(-\vec{k})|a_{-\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{1}\langle 0| \\ n = 2, \quad \langle 2(-\vec{k})|a_{-\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{2}\langle(2-1)(-\vec{k})| \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1}\langle 0| \\ &= \sqrt{2!}\langle 0| \\ n = 3, \quad \langle 3(-\vec{k})|a_{-\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{3}\langle(3-1)(-\vec{k})| \\ &= \sqrt{3}\sqrt{2}\langle 0| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3!} \langle 0| \quad (5.21)$$

hingga n kali maka

$$\langle n(-\vec{k})| a_{-\vec{k}}^\dagger = \sqrt{n!} \langle 0| \quad (5.22)$$

kemudian disubstitusikan ke persamaan (5.18) didapatkan

$$\begin{aligned} \langle n(\vec{k}), n(-\vec{k})|0\rangle &= (n!)^{-1/2} (\beta_{\vec{k}}^*/\alpha_{\vec{k}}^*)^n \sqrt{n!} \langle 0|0\rangle \\ \langle n(\vec{k}), n(-\vec{k})|0\rangle &= (\beta_{\vec{k}}^*/\alpha_{\vec{k}}^*)^n \langle 0|0\rangle \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dengan demikian, partikel-partikel diciptakan dalam pasangan dengan momentum yang sama tetapi berlawanan. Karena operator pencipta dan penghancur dalam mode yang berbeda saling komutatif, maka dapat disimpulkan bahwa keadaan umum pada waktu akhir yang memiliki elemen matriks tidak nol dengan $|0\rangle$ (keadaan vakum) adalah produk tensor-yaitu gabungan keadaan kuantum pada berbagai mode menjadi satu keadaan kuantum gabungan-dari keadaan $|n(\vec{k}), n(-\vec{k})\rangle$ di berbagai mode \vec{k} yang berbeda. Singkatnya, dengan merepresentasikan suatu keadaan sistem sebagai $|\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle$ dengan n_1 pasangan, masing-masing dengan satu partikel dalam mode \vec{k} dan partikel lainnya dalam mode $-\vec{k}$, pasangan n_2 dalam mode $(\vec{k}_2, -\vec{k}_2)$, dan seterusnya. Sehingga, untuk persamaan (5.23) diperoleh

$$|\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle |0\rangle = \prod_j \left(\beta_{\vec{k}_j}^*/\alpha_{\vec{k}_j}^* \right)^{n_j} \langle 0|0\rangle \quad (5.24)$$

Ini memberikan semua elemen matriks yang tidak nol antara basis Fock (adalah basis yang terdiri dari keadaan dengan jumlah partikel tertentu dalam setiap mode) pada waktu akhir dan keadaan $|0\rangle$. Elemen matriks antara keadaan Fock waktu akhir dan vakum awal hanya tidak nol jika keadaan akhir berupa pasangan partikel-

antipartikel dengan momentum yang berlawanan. Artinya, partikel selalu diciptakan dalam pasangan dengan momentum yang berlawanan, yaitu \vec{k} dan $-\vec{k}$. Dalam mekanika kuantum, jika $|e_n\rangle$ merupakan basis orthonormal (Griffiths, 2005)

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{mn} \quad (5.25)$$

maka

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = 1 \quad (5.26)$$

Persamaan (5.26) merupakan operator identitas. Jika operator identitas ini bertindak pada sebuah vektor $|\alpha\rangle$, maka perluasan dari $|\alpha\rangle$ pada basis $|e_n\rangle$ adalah

$$\sum_n |e_n\rangle \langle e_n | \alpha \rangle = |\alpha\rangle \quad (5.27)$$

Dalam konteks ini menggunakan basis keadaan Fock waktu akhir, yaitu $|\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle$ yang mencakup semua kemungkinan jumlah partikel-antipartikel di mode \vec{k}_j . Maka operator identitasnya dapat ditulis sebagai

$$1 = \sum_{\{n_j(\vec{k}_j)\}} |\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle \langle \{n_j(\vec{k}_j)\}| \quad (5.28)$$

Jika operator identitas pada persamaan (5.28) bertindak pada ruang vakum $|0\rangle$, maka perluasan dari $|\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle$ adalah

$$|0\rangle = \sum_{\{n_j(\vec{k}_j)\}} |\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle \langle \{n_j(\vec{k}_j)\}| 0 \rangle \quad (5.29)$$

yang diketahui bahwa jumlah tersebut mencakup semua kemungkinan set $\{n_j(\vec{k}_j)\}$.

Dengan mengalikan persamaan (5.29) dengan $\langle 0|$ diperoleh

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle &= \sum_{\{n_j(\vec{k}_j)\}} \langle 0|\{n_j(\vec{k}_j)\}\rangle \langle \{n_j(\vec{k}_j)\}|0\rangle \\ 1 &= \sum_{\{n_j(\vec{k}_j)\}} \left| \langle \{n_j(\vec{k}_j)\}|0\rangle \right|^2\end{aligned}\quad (5.30)$$

Substitusikan persamaan (5.24) ke persamaan (5.30), maka diperoleh

$$1 = \left(\sum_{\{n_j(\vec{k}_j)\}} \prod_j \frac{|\beta_{k_j}|^{2n_j}}{|\alpha_{k_j}|^{2n_j}} \right) |\langle 0|0\rangle|^2 \quad (5.31)$$

Sekarang $\sum_{\{n_j\}} \prod_j x^{n_j}$, dengan jumlah yang mencakup semua set bilangan bulat $\{n_j\}$, adalah sama dengan $\prod_j (\sum_{n_j=0}^{\infty} x^{n_j})$, dengan asumsi konvergensi jumlah dan produk. (Ini mudah diperiksa dalam kasus ketika j dan n_j memiliki rentang yang terbatas). Oleh karena itu

$$1 = |\langle 0|0\rangle|^2 \prod_j \sum_{n_j} \frac{|\beta_{k_j}|^{2n_j}}{|\alpha_{k_j}|^{2n_j}} \quad (5.32)$$

$\sum_{n_j} |\beta_{k_j}|^{2n_j} / |\alpha_{k_j}|^{2n_j}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan rasio r . Sehingga dapat dihitung dengan menggunakan rumus geometri yaitu

$$\sum_{n_j} r^{n_j} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{k_j}|^{2n_j}}{|\alpha_{k_j}|^{2n_j}}} \quad (5.33)$$

dan menggunakan relasi komutasi pada persamaan (5.5)

$$\begin{aligned}1 &= \langle 0|0\rangle^2 \prod_j \left(1 - \frac{|\beta_{k_j}|^2}{|\alpha_{k_j}|^2} \right)^{-1} \\ 1 &= \langle 0|0\rangle^2 \prod_j \left(1 - \frac{|\alpha_{k_j}|^2 - 1}{|\alpha_{k_j}|^2} \right)^{-1} \\ 1 &= \langle 0|0\rangle^2 \prod_j |\alpha_{k_j}|^2\end{aligned}$$

$$\langle 0|0\rangle^2 = \prod_j |\alpha_{k_j}|^{-2} \quad (5.34)$$

dan dari persamaan (5.24) diperoleh probabilitasnya adalah

$$\left| \langle \{n_j(\vec{k}_j)\} | 0 \rangle \right|^2 = \prod_j \left(\frac{|\beta_{k_j}|^{2n_j}}{|\alpha_{k_j}|^{2n_j}} |\alpha_{k_j}|^{-2} \right) \quad (5.35)$$

Dengan demikian, produksi pasangan dalam mode yang berbeda adalah peristiwa independen (Parker & Toms, 2009). Artinya, penciptaan partikel dalam satu mode tidak mempengaruhi penciptaan partikel dalam mode lainnya. Setiap mode memiliki dinamika penciptaan partikelnya sendiri yang tidak bergantung pada mode-mode lain. Sehingga dalam kasus ini, penciptaan pasangan boson dalam mode-mode yang berbeda dianggap sebagai peristiwa yang tidak saling bergantung. Probabilitas mengamati pada waktu akhir n dari boson-boson ini dalam mode \vec{k} adalah

$$P_n(\vec{k}) = \frac{|\beta_k|^{2n}}{|\alpha_k|^{2n}} |\alpha_k|^{-2} \quad (5.36)$$

Namun, alih-alih menggunakan probabilitas pada persamaan (5.36), dalam skripsi ini probabilitas yang akan digunakan adalah probabilitas dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu

$$P_n(\vec{k}) = \frac{|\beta_k|^{2n}}{|\alpha_k|^{2n}} \quad (5.37)$$

Faktor $|\alpha_k|^{-2}$ pada persamaan (5.36) menunjukkan adanya normalisasi tambahan yaitu pada persamaan (5.34). Faktor ini dapat diinterpretasikan sebagai koreksi yang diterapkan untuk memastikan bahwa probabilitas tetap terdefinisi dengan baik, khususnya dalam situasi di mana $|\alpha_k|^{-2}$ memiliki variasi yang kompleks. Secara khusus, jika $|\alpha_k|^{-2}$ kecil (misalnya, dalam kasus di mana penciptaan partikel mendominasi), faktor tambahan ini bisa memiliki dampak signifikan pada hasil akhir,

dan memastikan bahwa probabilitas total tetap terukur. Persamaan (5.37) menunjukkan rasio antara probabilitas sistem menciptakan partikel yaitu β dengan α yaitu probabilitas sistem mempertahankan keadaan awal (tidak ada penciptaan partikel). Variabel n menunjukkan jumlah partikel yang tercipta.

Menggunakan persamaan (5.5), maka diperoleh (Parker & Toms, 2009)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\vec{k}) = 1 \quad (5.38)$$

dan

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle_{t \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(\vec{k}) = |\beta|^2 \quad (5.39)$$

Di mana $\langle N_{\vec{k}} \rangle_{t \rightarrow \infty}$ merupakan jumlah rata-rata partikel dalam mode \vec{k} pada volume $(La_2)^3$ (Parker & Toms, 2009).

Pada kasus ini, solusi dari persamaan Klein-Gordon pada persamaan (4.45) adalah berupa fungsi Whittaker. Fungsi Whittaker $M_{\lambda,\mu}(\rho)$ dan $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ pada persamaan (4.43) dan (4.44) mengikuti batas asimtot sebagai berikut (Olver dkk, 2010): untuk $\rho \rightarrow 0$

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) \sim \rho^{\mu+1/2} \quad (5.40)$$

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) \sim \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \rho^{-\mu+1/2} \quad (5.41)$$

dan untuk $\rho \rightarrow \infty$

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) \sim \frac{\Gamma(1 + 2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \rho^{-\lambda} \exp(\rho/2) \quad (5.42)$$

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) \sim e^{-\rho/2} \rho^{\lambda} \quad (5.43)$$

Berdasarkan definisi Fungsi Whittaker dengan batas asimtot $\rho \rightarrow 0$ dan $\rho \rightarrow$

∞ , maka solusi dari persamaan (4.45) untuk batas $\rho \rightarrow 0$ adalah

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\mu}(\rho) &\sim \rho^{\mu+1/2} \\ M_{\lambda,\mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t) &\sim t^i \sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + 2\xi + 1/2} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Jika dibandingkan dengan solusi asimtot persamaan Hamilton Jacobi (3.21) pada $t \rightarrow 0$, persamaan (5.44) memiliki konsistensi dengan solusi kuasi klasik. Artinya, metode pendekatan kuasi klasik memungkinkan untuk menghitung energi positif dan energi negatif, bahkan ketika ruangwaktu dan elektromagnetik tidak statik (Villalba & Greiner, 2001). Sehingga solusi dari persamaan (4.42) yang berupa keadaan frekuensi positif adalah

$$\omega_0^+ = C_0^+ M_{\lambda,\mu}(\rho) \quad (5.45)$$

sementara, keadaan frekuensi negatif didefinisikan sebagai konjugat kompleks dari persamaan (5.45) (Pimentel & Pineda, 2021)

$$\begin{aligned} \omega_0^- &= (\omega_0^+)^* \\ \omega_0^- &= C_0^+ (e^{i\pi})^{-\mu+1/2} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Di mana C_0^+ adalah konstanta normalisasi.

Sedangkan solusi dari persamaan (4.45) untuk batas asimtot $t \rightarrow \infty$ adalah

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}(\rho) &\sim e^{-\rho/2} \rho^\lambda \\ W_{\lambda,\mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t) &\sim e^{i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t} t^{ie^2\alpha\beta/\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Sama halnya dengan solusi dari persamaan (4.45) saat $t \rightarrow 0$ yang konsisten dengan solusi kuasi klasik saat $t \rightarrow 0$, solusi dari persamaan (4.45) saat $t \rightarrow \infty$ juga konsisten dengan solusi kuasi klasik saat $t \rightarrow \infty$. Maka, keadaan frekuensi positif

dan negatifnya adalah

$$\omega_{\infty}^{+} = C_{\infty}^{+} W_{\lambda, \mu}(\rho) \quad (5.48)$$

$$\omega_{\infty}^{-} = C_{\infty}^{-} W_{-\lambda, \mu}(-\rho) \quad (5.49)$$

Di mana C_{∞}^{+} dan C_{∞}^{-} adalah konstanta normalisasi.

Mode frekuensi pada $\rho \rightarrow \infty$ dapat dinyatakan dalam bentuk mode frekuensi positif ω_0^{+} dan negatif ω_0^{-} melalui transformasi Bogoliubov (Villalba & Greiner, 2001)

$$\omega_{\infty}^{+} = \alpha \omega_0^{+} + \beta \omega_0^{-} \quad (5.50)$$

Untuk mendapatkan koefisien Bogoliubov α dan β , persamaan (5.48) dapat disubstitusikan ke persamaan (5.50) serta mode frekuensi positif ω_0^{+} dan negatif ω_0^{-} . Sehingga, persamaan (5.50) menjadi

$$C_{\infty}^{+} W_{\lambda, \mu}(\rho) = \alpha C_0^{+} M_{\lambda, \mu}(\rho) + \beta C_0^{+} (e^{i\pi})^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \quad (5.51)$$

Berdasarkan persamaan (4.44), persamaan (5.51) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} C_{\infty}^{+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(\rho) + C_{\infty}^{+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \\ = \alpha C_0^{+} M_{\lambda, \mu}(\rho) + \beta C_0^{+} (e^{i\pi})^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sehingga, dari persamaan (5.52) koefisien Bogoliubov α dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} C_{\infty}^{+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(\rho) &= \alpha C_0^{+} M_{\lambda, \mu}(\rho) \\ \alpha &= \frac{C_{\infty}^{+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(\rho)}{C_0^{+} M_{\lambda, \mu}(\rho)} \\ \alpha &= \frac{C_{\infty}^{+}}{C_0^{+}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

sehingga $|\alpha|^2$ adalah

$$\begin{aligned}
 |\alpha|^2 &= \alpha \cdot \alpha^* \\
 &= \left(\frac{C_\infty^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \right) \cdot \left(\frac{C_\infty^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \right) \\
 &= \left(\frac{C_\infty^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \right)^2 \\
 |\alpha|^2 &= \left| \frac{C_\infty^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \right|^2 \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

dan β adalah

$$\begin{aligned}
 C_\infty^+ \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(\rho) &= \beta C_0^+ (e^{i\pi})^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \\
 \beta &= \frac{C_\infty^+ \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(\rho)}{C_0^+ (e^{i\pi})^{-\mu + \frac{1}{2}} M_{\lambda, -\mu}(\rho)} \\
 \beta &= \frac{C_\infty^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \exp(i\pi(\mu - 1/2)) \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan teorema bilangan Euler, bahwa untuk setiap bilangan nyata x (Dunham, 1999)

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \tag{5.56}$$

sehingga suku $\exp(i\pi(\mu - 1/2))$ menjadi

$$\begin{aligned}
 \exp(i\pi(\mu - 1/2)) &= \exp(i\pi\mu) \cdot \frac{1}{\exp(i\pi/2)} \\
 &= \exp(i\pi\mu) \cdot \frac{1}{\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)} \\
 &= \exp(i\pi\mu) \cdot \frac{1}{i} \\
 &= -i \exp(i\pi\mu) \tag{5.57}
 \end{aligned}$$

berdasarkan definisi μ pada persamaan (4.37) yang menunjukkan bilangan kom-

pleks sehingga

$$\begin{aligned}
 -i \exp(i\pi\mu) &= -i \exp[i\pi(i\sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + 2\xi})] \\
 &= -i \exp[-i\pi(\sqrt{k_{\perp}^2 + e^2\beta^2 + 2\xi})] \\
 &= -i \exp(-\pi\mu)
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

maka β menjadi

$$\beta = -i \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \exp(-\pi\mu) \tag{5.59}$$

dan untuk $|\beta|^2$ adalah

$$\begin{aligned}
 |\beta|^2 &= \beta \cdot \beta^* \\
 &= \left(-i \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \exp(-\pi\mu) \right) \cdot \left(i \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \exp(-\pi\mu) \right) \\
 &= \left(\frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right)^2 \exp(-2\pi\mu) \\
 |\beta|^2 &= \left| \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right|^2 \exp(-2\pi\mu)
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{\left| \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} \right|^2 \exp(-2\pi\mu)}{\left| \frac{C_{\infty}^+}{C_0^+} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} \right|^2} \\
 &= \frac{|\Gamma(2\mu)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)|^2}{|\Gamma(-2\mu)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)|^2} \exp(-2\pi\mu) \\
 &= \frac{\Gamma(2\mu)\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-2\mu)\Gamma(2\mu)} \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)|^2} \exp(-2\pi\mu)
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Karena μ merupakan bilangan kompleks, maka untuk menyelesaikan suku pertama menggunakan sifat-sifat fungsi Gamma untuk fungsi kompleks yaitu (Abramowitz

& Stegun, 1970)

$$\Gamma(iy)\Gamma(-iy) = |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y} \quad (5.62)$$

Sehingga persamaan (5.61) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{\frac{\pi}{\mu \sinh(\pi\mu)} |\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)|^2}{\frac{\pi}{\mu \sinh(\pi\mu)} |\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)|^2} \exp(-2\pi\mu) \\ &= \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)|^2} \exp(-2\pi\mu) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Kemudian menggunakan identitas fungsi Gamma (Abramowitz & Stegun, 1970)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)} \quad (5.64)$$

Maka persamaan (5.63) adalah

$$\begin{aligned} \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + \lambda\right)} \exp(-2\pi\mu) \\ &= \frac{\frac{\pi}{\cosh[\pi(\mu+\lambda)]}}{\frac{\pi}{\cosh[\pi(\mu-\lambda)]}} \exp(-2\pi\mu) \\ &= \frac{\pi}{\cosh[\pi(\mu + \lambda)]} \frac{\cosh[\pi(-\mu - \lambda)]}{\pi} \exp(-2\pi\mu) \\ \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{\cosh[\pi(\mu - \lambda)]}{\cosh[\pi(\mu + \lambda)]} \exp(-2\pi\mu) \end{aligned} \quad (5.65)$$

Persamaan (5.65) dapat disederhanakan dengan menggunakan identitas hiperbolik untuk fungsi $\cosh(x)$ yaitu (Abramowitz & Stegun, 1970)

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad (5.66)$$

Jika identitas hiperbolik untuk fungsi $\cosh(x)$ diterapkan ke dalam persamaan (5.65)

maka

$$\cosh [\pi(\mu - \lambda)] = \frac{\exp [\pi(\mu - \lambda)] + \exp [-\pi(\mu - \lambda)]}{2} \quad (5.67)$$

$$\cosh [\pi(\mu + \lambda)] = \frac{\exp [\pi(\mu + \lambda)] + \exp [-\pi(\mu + \lambda)]}{2} \quad (5.68)$$

Substitusikan persamaan (5.67) dan (5.68) ke persamaan awal, yaitu persamaan (5.65). Didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{\frac{\exp [\pi(\mu - \lambda)] + \exp [-\pi(\mu - \lambda)]}{2}}{\frac{\exp [\pi(\mu + \lambda)] + \exp [-\pi(\mu + \lambda)]}{2}} \exp (-2\pi\mu) \\ &= \frac{\exp [\pi(\mu - \lambda) - 2\pi\mu] + \exp [-\pi(\mu - \lambda) - 2\pi\mu]}{\exp [\pi(\mu + \lambda)] + \exp [-\pi(\mu + \lambda)]} \\ &= \frac{\exp (-\pi\mu - \pi\lambda) + \exp (-3\pi\mu + \pi\lambda)}{\exp [\pi(\mu + \lambda)] + \exp [-\pi(\mu + \lambda)]} \\ &= \frac{\exp [-\pi(\mu + \lambda)] + \exp (-3\pi\mu + \pi\lambda)}{\exp [\pi(\mu + \lambda)] + \exp [-\pi(\mu + \lambda)]} \\ &= \frac{\exp [-\pi(\mu + \lambda)] \left(1 + \exp [-2\pi(\mu - \lambda)] \right)}{\exp [-\pi(\mu + \lambda)] \left(1 + \exp [2\pi(\mu + \lambda)] \right)} \\ \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} &= \frac{1 + \exp [-2\pi(\mu - \lambda)]}{1 + \exp [2\pi(\mu + \lambda)]} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Maka, probabilitas untuk menciptakan partikel tunggal di ruang vakum dalam mode \vec{k} berdasarkan persamaan probabilitas pada (5.37) adalah

$$P(\vec{k}) = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{1 + \exp [-2\pi(\mu - \lambda)]}{1 + \exp [2\pi(\mu + \lambda)]} \quad (5.70)$$

Persamaan (5.70) menunjukkan bahwa β merupakan probabilitas untuk menciptakan partikel dan α menunjukkan probabilitas untuk mempertahankan keadaan awal (tanpa penciptaan partikel). Jika rasio bernilai besar, artinya partikel yang diciptakan berjumlah banyak. Namun, jika rasio bernilai kecil, maka partikel yang tercipta berjumlah sedikit. Jika rasio yang dihasilkan kecil dan jumlah partikel yang ingin diamati adalah lebih dari satu, maka nilai probabilitas untuk menemukan ba-

nyak partikel semakin kecil. Artinya, semakin sulit untuk menemukan kemungkinan adanya banyak partikel yang tercipta. Hal ini menunjukkan bahwa tidak mungkin terjadi penciptaan partikel secara masal di keadaan kuantum yang stabil. Namun dalam kasus ini, medan kuantum terganggu oleh medan kuat yaitu medan listrik yang mampu memberikan energi tambahan untuk dapat menciptakan partikel nyata secara masal. Sehingga Probabilitas untuk menemukan banyak partikel yang tercipta semakin meningkat karena koefisien β semakin besar. Namun, dalam situasi ini persamaan probabilitas harus tetap ternormalisasi yaitu total menemukan suatu partikel di seluruh sistem harus sama dengan 1. Ketika probabilitasnya 0, artinya tidak ada partikel dalam sistem tersebut.

Untuk mengetahui $P(\vec{k}) \approx 1$ dan $P(\vec{k}) \approx 0$ pada persamaan (5.70), maka dilakukan nilai pendekatan pada parameter μ dan λ .

Ketika $\mu \rightarrow \infty$ dan $\lambda \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} P(\vec{k}) &\approx \frac{1 + \exp[-2\pi(\infty - 1)]}{1 + \exp[2\pi(\infty + 1)]} \\ &\approx \frac{1 + \exp(-\infty)}{1 + \exp(\infty)} \\ &\approx 0 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Ketika $\mu \rightarrow 1$ dan $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(\vec{k}) &\approx \frac{1 + \exp[-2\pi(1 - \infty)]}{1 + \exp[2\pi(1 + \infty)]} \\ &\approx \frac{1 + \exp(\infty)}{1 + \exp(\infty)} \\ &\approx 1 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Sehingga, nilai probabilitas $P(\vec{k}) \approx 1$ ketika $\mu \rightarrow 1$ dan $\lambda \rightarrow \infty$. Namun, ketika $\mu \rightarrow \infty$ dan $\lambda \rightarrow 1$, probabilitas $P(\vec{k}) \approx 0$.

5.2 Densitas Jumlah Partikel yang Tercipta

Setelah diperoleh probabilitas untuk menciptakan partikel tunggal dalam mode \vec{k} dari ruang vakum, selanjutnya yaitu menghitung densitas partikel n_k yang dihasilkan oleh efek dari medan listrik yang bergantung waktu. Sehingga berdasarkan persamaan (5.38) dan (5.39), densitas partikel yang dihasilkan dalam mode \vec{k} adalah

$$n_k = |\beta|^2 \quad (5.73)$$

dengan menggunakan relasi komutasi pada persamaan (5.5)

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 - |\beta|^2 &= 1 \\ |\alpha|^2 &= 1 + |\beta|^2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

dan definisi probabilitas pada persamaan (5.37),

$$P_n(\vec{k}) = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} \quad (5.75)$$

Substitusikan definisi $|\alpha|^2$ pada persamaan (5.74) ke persamaan (5.75), diperoleh

$$\begin{aligned} P_n(\vec{k}) &= \frac{|\beta|^2}{1 + |\beta|^2} \quad (5.76) \\ P_n(\vec{k}) + P_n(\vec{k})|\beta|^2 &= |\beta|^2 \\ P_n(\vec{k}) &= |\beta|^2 - P_n(\vec{k})|\beta|^2 \\ P_n(\vec{k}) &= |\beta|^2(1 - |\beta|^2) \\ |\beta|^2 &= \frac{P_n(\vec{k})}{1 - P_n(\vec{k})} \end{aligned} \quad (5.77)$$

maka persamaan densitas persamaan (5.73) menjadi

$$n_k = \frac{P_n(\vec{k})}{1 - P_n(\vec{k})} \quad (5.78)$$

Kemudian, untuk menghitung densitas jumlah partikel yang dihasilkan oleh efek dari medan listrik yang bergantung waktu, substitusikan persamaan (5.70) ke persamaan (5.78)

$$\begin{aligned}
n_k &= \frac{\frac{1+\exp[-2\pi(\mu-\lambda)]}{1+\exp[2\pi(\mu+\lambda)]}}{1 - \frac{1+\exp[-2\pi(\mu-\lambda)]}{1+\exp[2\pi(\mu+\lambda)]}} \\
&= \frac{\frac{1+\exp[-2\pi(\mu-\lambda)]}{1+\exp[2\pi(\mu+\lambda)]}}{\frac{1+\exp[2\pi(\mu+\lambda)] - (1+\exp[-2\pi(\mu-\lambda)])}{1+\exp[2\pi(\mu+\lambda)]}} \\
&= \frac{1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]}{1 + \exp[2\pi(\mu + \lambda)]} \cdot \frac{1 + \exp[2\pi(\mu + \lambda)]}{\exp[2\pi(\mu + \lambda)] - \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]} \\
n_k &= \frac{1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]}{\exp[2\pi(\mu + \lambda)] - \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]} \tag{5.79}
\end{aligned}$$

Persamaan (5.79) merupakan densitas jumlah dari partikel yang tercipta dalam bentuk fungsi eksponensial. Persamaan densitas jumlah partikel pada persamaan tersebut juga bisa diubah dalam bentuk fungsi hiperbolik

$$\begin{aligned}
n_k &= \frac{1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]}{\exp[2\pi(\mu + \lambda)] - \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]} \\
&= \frac{1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]}{\exp(2\pi\lambda) \left(\exp(2\pi\mu) - \exp(-2\pi\mu) \right)} \\
&= \frac{\left(1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)] \right) \exp(-2\pi\lambda)}{\exp(2\pi\mu) - \exp(-2\pi\mu)} \\
&= \frac{\exp(-2\pi\lambda) + \exp(-2\pi\mu)}{\exp(2\pi\mu) - \exp(-2\pi\mu)} \\
&= \frac{\exp[-\pi(\lambda + \mu)] \left(\exp[\pi(-\lambda + \mu)] + \exp[-\pi(-\lambda + \mu)] \right)}{\exp(2\pi\mu) - \exp(-2\pi\mu)} \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Selanjutnya menerapkan identitas hiperbolik pada persamaan (5.80) sebagai berikut

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \tag{5.81}$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \tag{5.82}$$

Sehingga persamaan (5.80) menjadi

$$n_k = \exp[-\pi(\lambda + \mu)] \frac{\cosh[\pi(-\lambda + \mu)]}{\sinh(2\pi\mu)} \quad (5.83)$$

Selanjutnya yaitu mengamati perubahan densitas jumlah dari partikel yang tercipta berubah karena fenomena medan listrik lemah dan kuat yang bergantung pada dua parameter yaitu α β . Pertama, asumsikan bahwa $\alpha = 0$ dan $\beta \neq 0$, maka parameter λ yang didefinisikan pada persamaan (4.38) adalah nol. Persamaan (5.79) dapat didefinisikan dan dijabarkan kembali. Sehingga densitas dari partikel yang tercipta pada persamaan (5.83) menjadi

$$\begin{aligned} n_k &= \frac{1 + \exp(-2\pi\mu)}{\exp(2\pi\mu) - \exp(-2\pi\mu)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\exp(2\pi\mu)}}{\exp(2\pi\mu) - \frac{1}{\exp(2\pi\mu)}} \\ &= \frac{\exp(2\pi\mu) + 1}{\exp(2\pi\mu)} \cdot \frac{\exp(2\pi\mu)}{\exp(4\pi\mu) - 1} \\ &= \frac{\exp(2\pi\mu) + 1}{\exp(4\pi\mu) - 1} \\ n_k &= \frac{1}{\exp\left(2\pi\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2\beta^2}\right) - 1} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Persamaan (5.84) menunjukkan bahwa densitas dari partikel yang tercipta adalah termal dan tampak seperti distribusi Bose-Einstein 2 dimensi (Rezki & Zaim, 2022).

Sedangkan untuk medan listrik yang sangat lemah yaitu $\beta \rightarrow 0$, dapat dihitung menggunakan pendekatan deret Taylor. Dari persamaan (5.84)

$$\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2\beta^2} = \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2\beta^2}{k_{\perp}^2 + 2\xi}} \quad (5.85)$$

dengan memisalkan $\frac{e^2\beta^2}{k_{\perp}^2 + 2\xi} = x$ maka fungsi $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Kemudian menghi-

tung turunan fungsi $f(x)$ sebagai berikut

$$f(x) = (1 + x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1 + x)^{-3/2}$$

Selanjutnya evaluasi di titik $x = 0$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}$$

Kemudian menggunakan rumus deret Maclaurin. Deret Maclaurin merupakan deret Taylor di titik asal. Maka deret Maclaurin untuk fungsi $f(x)$ adalah (Boas, 2006)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \dots \quad (5.86)$$

Substitusikan nilai-nilai yang telah dihitung untuk fungsi $f(x)$ di titik $x = 0$ ke persamaan deret Maclaurin

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (5.87)$$

Pendekatan ini digunakan untuk x kecil (mendekati nol). Sehingga untuk suku-suku yang besar seperti x^2, x^3, \dots dapat diabaikan karena terlalu rumit untuk menurunkan fungsi dengan orde yang lebih tinggi terutama pada fungsi yang kompleks (Boas, 2006). Selain itu, suku-suku orde tinggi pada umumnya memiliki nilai yang sangat kecil sehingga dapat diabaikan tanpa memengaruhi keakuratan perhitungan secara signifikan. Semakin jauh dari titik pengembangan, nilainya semakin mendekati nol.

Oleh sebab itu untuk x yang kecil dapat dituliskan sebagai

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (5.88)$$

Sehingga persamaan (5.85) menjadi

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2\beta^2} &\approx \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2\beta^2}{k_{\perp}^2 + 2\xi}} \\ &\approx \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} \cdot \left(1 + \frac{e^2\beta^2}{2(k_{\perp}^2 + 2\xi)}\right) \\ &\approx \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} + \frac{e^2\beta^2}{2\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi}} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Kemudian disubstitusikan ke persamaan (5.84). Maka, persamaan (5.84) dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned} n_k &\approx \frac{1}{\exp \left[2\pi \left(\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} + \frac{e^2\beta^2}{2\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2}} \right) \right] - 1} \\ n_k &\approx \frac{1}{\exp \left[2\pi \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} + \pi \frac{e^2\beta^2}{\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2}} \right] - 1} \end{aligned} \quad (5.90)$$

Sedangkan untuk medan listrik yang sangat kuat, maka suku $e^2\beta^2$ mendominasi $k_{\perp}^2 + 2\xi$. Maka suku $e^2\beta^2$ dapat difaktorkan

$$\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2\beta^2} = e\beta \sqrt{1 + \frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e^2\beta^2}} \quad (5.91)$$

Dengan cara yang sama seperti pada medan listrik lemah, yaitu memisalkan $\frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e^2\beta^2} = x$ Maka, fungsi $f(x) = \sqrt{1+x}$. Kemudian menggunakan pendekatan deret Taylor untuk menghitung fungsi $f(x)$. Karena suku $e^2\beta^2$ mendominasi, maka $x \ll 1$. Sehingga

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (5.92)$$

Maka, persamaan (5.91) menjadi

$$\begin{aligned}\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2\beta^2} &\approx e\beta \left(1 + \frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e^2\beta^2}\right) \\ &\approx e\beta + \frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{2e\beta}\end{aligned}\quad (5.93)$$

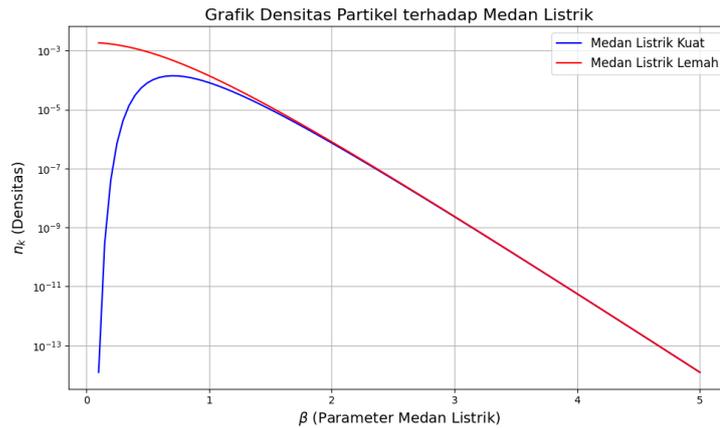
jika disubstitusikan ke persamaan (5.84), maka diperoleh

$$n_k \approx \frac{1}{\exp\left[2\pi\left(e\beta + \frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{2e\beta}\right)\right] - 1}\quad (5.94)$$

Karena $\beta \gg 1$, maka suku -1 tidak mempengaruhi secara signifikan. Sehingga dapat diabaikan. Maka persamaan (5.94) menjadi

$$\begin{aligned}n_k &\approx \frac{1}{\exp\left[\pi\frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e\beta} + 2\pi e\beta\right]} \\ n_k &\approx \exp\left[-\pi\frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e\beta} - 2\pi e\beta\right]\end{aligned}\quad (5.95)$$

Persamaan (5.95) menunjukkan bahwa densitas dari partikel yang tercipta sesuai dengan distribusi termal dengan potensial kimia (ukuran kecenderungan partikel untuk berpindah dari satu keadaan ke keadaan lain) yang berbanding lurus dengan $e\beta$. Bentuk eksponensial dari persamaan menunjukkan bahwa distribusi ini sangat sensitif terhadap perubahan parameter sistem yaitu $e\beta$. Apabila densitas partikel yang tercipta pada persamaan (5.95) dan (5.90) diplot terhadap parameter β yang merupakan representasi dari kekuatan medan listrik, maka akan diperoleh grafik seperti berikut:



Gambar 5.1: Densitas partikel yang tercipta ketika medan listrik lemah dan kuat

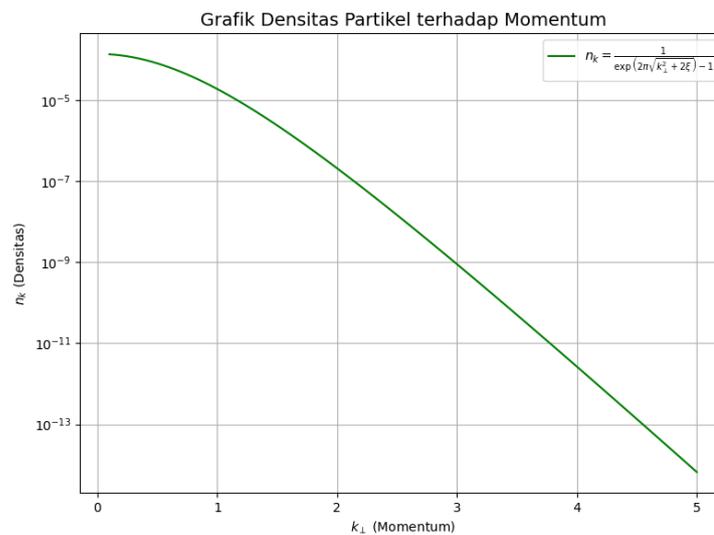
Gambar 5.1 merupakan plot dari persamaan densitas dari partikel yang tercipta ketika medan listrik lemah (5.90) dan persamaan densitas ketika medan listrik kuat (5.95) dengan parameter β yang merepresentasikan kekuatan medan listrik yang divariasikan. Untuk medan listrik yang sangat kuat, grafik menunjukkan adanya peningkatan secara signifikan pada nilai n_k . Ketika $\beta = 0.69$, densitasnya mencapai nilai tertinggi yaitu $n_k = 1.38751 \times 10^{-4}$. Setelah itu, saat $\beta = 0.74$, nilai n_k terus menurun secara eksponensial dengan seiring bertambahnya nilai β . Hal ini menunjukkan bahwa, medan listrik yang kuat berkontribusi secara signifikan terhadap penciptaan partikel di ruang vakum (Villalba & Greiner, 2001). Dan ketika $\beta \rightarrow \infty$, produksi partikel menjadi nol (Rezki & Zaim, 2022). Sedangkan untuk medan listrik lemah, grafik menunjukkan tidak adanya kenaikan secara signifikan. Grafiknya menurun secara eksponensial tanpa adanya titik puncak. Artinya bahwa, medan listrik lemah tidak berkontribusi secara signifikan terhadap penciptaan partikel di ruang vakum. Hal ini menunjukkan bahwa ruang vakum lebih stabil terhadap penciptaan partikel dibanding dengan ruang vakum yang terganggu oleh medan listrik yang sangat kuat yang menyebabkan tidak stabil terhadap penciptaan partikel.

Asumsi kedua yaitu $\alpha \neq 0$ $\beta = 0$, densitas dari jumlah partikel yang tercipta

pada persamaan (5.84) tereduksi menjadi

$$n_k = \frac{1}{\exp\left(2\pi\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi}\right) - 1} \quad (5.96)$$

Persamaan (5.96) menunjukkan bahwa densitas jumlah dari partikel yang tercipta merupakan distribusi Bose-Einstein tanpa adanya medan listrik (Rezki & Zaim, 2022).



Gambar 5.2: Densitas partikel yang tercipta tanpa adanya medan listrik

Grafik (5.2) merupakan plot dari persamaan densitas (5.96) ketika tanpa adanya medan listrik dengan momentum k_{\perp} . Grafik menunjukkan penurunan eksponensial. Nilai n_k maksimum sekitar 1.35327×10^{-4} ketika k_{\perp} sekitar 0.10. Hal ini menunjukkan bahwa Partikel cenderung menempati keadaan energi rendah (k_{\perp} kecil) yang merupakan sifat sistem termal. Kemudian mengalami penurunan secara eksponensial seiring bertambahnya nilai k_{\perp} . Penurunan yang halus dan kontinu menunjukkan sistem dalam keadaan setimbang termal.

5.3 Penciptaan Partikel sebagai Awal Pembentukan Alam Semesta Menurut Al Quran

Partikel pada dasarnya merupakan manifestasi sebuah gelombang dari medan-medan kuantum yang menyebar di seluruh jagat raya. Gelombang tersebut berkumpul membentuk gumpalan energi yang berbeda mengikuti hukum mekanika kuantum. "Gelombang-gelombang" ini tercipta karena adanya ruang vakum (medan kuantum) yang terus berfluktuasi. Sehingga menciptakan pasangan partikel-antipartikel virtual. Pasangan partikel-antipartikel virtual ini dapat diubah menjadi pasangan partikel-antipartikel nyata yang dapat diamati dengan adanya medan kuat. Partikel-partikel inilah yang merupakan dasar dari terbentuknya materi dan struktur alam semesta.

Penciptaan partikel pada awal mula alam semesta terjadi setelah adanya dentuman dahsyat (*Big Bang*). Menurut teori ini, alam semesta pada awalnya hanya sebuah singularitas atau sebuah titik kecil yang sangat padat kemudian meledak dan berekspansi Dalam al quran surat Al-Anbiya' (21:30), Allah berfirman:

أَوَلَمْ يَرَ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: *Dan apakah orang-orang yang kafir tidak melihat bahwa langit dan bumi keduanya dahulu suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan keduanya. Dan Kami jadikan dari air segala sesuatu hidup; maka mengapa mereka tidak beriman?* (QS. Al-Anbiya' [21]:30).

Menurut Quraish Shihab dalam tafsir al Misbah menjelaskan bahwa ayat di atas dipahami oleh sementara ilmuwan sebagai salah satu mukjizat al quran yang mengungkap peristiwa penciptaan planet-planet. Banyak teori ilmiah yang dikemukakan oleh para pakar dengan bukti-bukti yang cukup kuat, yang menyatakan bahwa langit dan bumi tadinya merupakan satu gumpalan atau yang diistilahkan oleh ayat ini dengan *ratqan*, lalu gumpalan itu berpisah sehingga terjadilah pemisahan antara bumi dan langit (Shihab, 2002).

Selanjutnya potongan ayat “Apakah mereka tidak juga hendak beriman?”. Hamka menafsirkan dan menguraikan maksud potongan ayat tersebut dalam tafsirnya yaitu bukankah sudah patutnya kenyataan itu semuanya menyebabkan mereka beriman, percaya bahwa semuanya itu terjadi karena ada yang mengaturnya? Kemudian, Hamka menguraikan maksud penafsirannya tersebut yaitu sekarang ini sangat maju penelitian tentang rahasia alam. Sepatutnya berimanlah mereka dan bertambah iman, jika bertambah penyelidikan. Namun dalam kenyataan mereka bertambah kafir, bertambah sombong (Hendra, 2020).

Tahap selanjutnya penciptaan alam semesta yaitu penciptaan partikel. Setelah terjadi dentuman besar, alam semesta mengalami ekspansi yang sangat cepat dalam waktu singkat. Saat ekspansi inilah partikel-partikel dasar seperti kuark, lepton, dan boson terbentuk dari medan kuat di ruang vakum yang berfluktuasi. Seiring dengan ekspansi, temperatur alam semesta turun hingga pada suhu yang cukup rendah, partikel-partikel bergabung membentuk atom dan gravitasi menarik materi ke daerah-daerah yang sedikit lebih padat yang kemudian berkumpul membentuk awan gas raksasa. Awan gas ini kemudian runtuh membentuk bintang, galaksi dan gugus galaksi. Dalam al quran, proses ini terjadi pada periode ketiga yaitu periode *dukhan* dari enam hari atau periode bagi penciptaan alam raya. Allah berfirman dalam al quran surat Fushshilat (41:11):

ثُمَّ اسْتَوَىٰ إِلَى السَّمَاءِ وَهِيَ دُخَانٌ فَقَالَ لَهَا وَلِلْأَرْضِ ائْتِيَا طَوْعًا أَوْ كَرْهًا قَالَتَا أَتَيْنَا طَائِعِينَ ﴿١١﴾

Artinya: *Kemudian Dia menuju ke langit sedang dia adalah asap, lalu Dia berfirman kepadanya dan kepada bumi: "Datanglah kamu berdua-suka atau terpaksa." Keduanya menjawab: "Kami telah datang dengan suka hati."* (QS. Fushshilat [41]:11).

Mengenai ayat di atas, Hamka menjelaskan dalam tafsirnya bahwa *Sedang dia adalah asap* yang dimaksud disini yaitu bahwa langit itu berupa asap, disebut juga dengan lebih jelas, yaitu masih semacam gas. Di antara langit yang diperlihatkan sekarang menyerupai asap atau gas itu ialah kumpulan bintang yang dinamai

“bintang susu”, kumpulan berjuta bintang yang karena sangat jauhnya dari bumi, hanya terlihat sebagai asap, gas atau sebagai susu (Hendra, 2020).

Quraish Shihab menjelaskan lebih detail dalam tafsir al Misbah terkait kata *dukhan*. Kata *dukhan* biasa diterjemahkan *asap*. Para ilmuwan memahami kata *dukhan* dalam arti satu benda yang terdiri pada umumnya dari gas yang mengandung benda-benda yang sangat kecil namun kukuh. Berwarna gelap atau hitam dan mengandung panas. Sayyid Quthub menulis bahwa terdapat kepercayaan yang menyatakan bahwa sebelum terbentuknya bintang-bintang ada sesuatu yang angkasa raya dipenuhi gas dan asap, dari bahan inilah terbentuk bintang-bintang. Hingga kini, sebagian dari gas dan asap itu masih tersisa dan tersebar di angkasa raya. Dalam kosmologi modern, gas dan asap tersebut dinamakan dengan nebula (Shihab, 2003). Demikianlah awal mula materi di alam semesta terbentuk dari partikel-partikel dasar yang sangat kecil.

Penemuan partikel sebagai unit dasar materi mengungkap keajaiban desain alam semesta. Dari entitas sekecil partikel, terciptalah beragam bentuk materi yang membentuk alam semesta yang luas dan dinamis. Kompleksitas alam semesta, mulai dari partikel subatom hingga struktur kosmik, mengindikasikan adanya keteraturan mendasar yang melampaui pemahaman manusia saat ini. Dalam perspektif keagamaan, penciptaan partikel sebagai unit dasar materi menunjukkan kebijaksanaan Sang Pencipta dan sebagai bukti nyata bahwa Allah bersifat wujud. Melalui partikel, Allah SWT telah menciptakan alam semesta yang begitu indah dan teratur. Keberadaan partikel sebagai entitas terkecil menegaskan bahwa tidak ada ciptaan Allah yang sia-sia, bahkan partikel yang sangat kecil sekalipun memiliki peran penting dalam tatanan alam semesta. Selain itu, fenomena penciptaan partikel juga menegaskan bahwa Allah tidak menciptakan partikel yang menjadi dasar materi dari alam semesta secara percuma dan dengan tanpa alasan. Melainkan semuanya diciptakan oleh Allah dengan haq dan penuh hikmah. Seperti firman Allah dalam al quran surat Al-'Ankabut (29:44):

خَلَقَ اللَّهُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ بِالْحَقِّ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَةً لِّلْمُؤْمِنِينَ ﴿٤٤﴾

Artinya: Allah menciptakan langit dan bumi dengan haq. Sungguh, pada yang demikian itu pasti terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang-orang yang beriman (QS. Al-'Ankabut [29]:44).

Surat Al-'Ankabut ayat 44 merupakan bukti jelas yang menunjukkan bahwa Allah-lah semata Yang Menciptakan dan Yang Mengatur serta Yang menjadi Tuhan. Menurut Kemenag RI/NU Online, Ayat di atas merupakan dalil tentang kebesaran dan keagungan Allah yang terlihat pada ciptaan langit dan bumi. Bagi orang-orang yang beriman dan menggunakan akal pikirannya, bahwa semua ciptaan Allah mengandung hikmah dan pelajaran. Seperti riwayat Ibnu Abid Dun-ya dalam kitab *at-tawakkul wal I'tibar* bahwa segala sesuatu yang dilihat oleh Syaikh Abu Sulaiman ad-Darani merupakan nikmat Allah dan ada pelajaran yang bisa diambil (Alu Syaikh, 2009). Dan ayat tersebut juga menegaskan bahwa tidak ada ciptaan Allah yang dijadikan percuma begitu saja. Kata *haq* dalam ayat di atas mengindikasikan sesuatu yang langgeng, mantap, sehingga tidak akan berubah. Maka, dapat dilihat bahwa kehadiran semua benda yang ada di alam semesta ini mempunyai tujuan. Tidak ada satu benda pun diciptakan Tuhan tanpa mempunyai tujuan sekalipun benda paling kecil yaitu partikel.

Sehingga dari uraian ayat terkait fenomena penciptaan partikel sebagai objek yang sangat kecil pada awal semesta hingga tercipta alam semesta yang sangat luas dan kompleks dapat disimpulkan bahwa Allah memiliki kehendak dan kuasa atas segala sesuatu dan hal ini dapat dilihat pada penciptaan alam semesta. Ketiga ayat tersebut sama-sama menjelaskan kebesaran Allah dan tidak ada yang lebih pantas untuk disembah kecuali Allah. Sehingga tidak ada alasan untuk tidak beriman kepada Allah. Allah menciptakan tujuh langit yang berlapis dan bumi yang terhampar bukan dengan percuma, melainkan dengan haq dan penuh hikmah untuk kebaikan dan kemaslahatan makhluk-Nya. Selain itu, ayat-ayat di atas dapat menjadi refleksi agar manusia merenungkan keindahan dan keteraturan alam sebagai

cara untuk mendekati diri kepada Allah. Maka, fenomena penciptaan partikel ini dapat menjadi sumber inspirasi untuk terus menggali rahasia-rahasia ciptaan Allah dan mengambil hikmah dibalik ciptaan-Nya untuk memperkuat keimanan kepada Allah.

BAB VI PENUTUP

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan yang telah dipaparkan di bab-bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa

1. Solusi dari persamaan Klein-Gordon di ruang waktu Bianchi I dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu berupa kombinasi dari fungsi Whittaker

$$\varphi = t^{-1/2} [C_1 M_{\lambda, \mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t) + C_2 W_{\lambda, \mu}(-2i\sqrt{m^2 + e^2\alpha^2}t)] e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (6.1)$$

dengan $M_{\lambda, \mu}(\rho)$ didefinisikan sebagai

$$M_{\lambda, \mu}(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^{\frac{1}{2} + \mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)_s}{(1 + 2\mu)_s s!} \rho^s \quad (6.2)$$

dan $W_{\lambda, \mu}(\rho)$ didefinisikan sebagai

$$W_{\lambda, \mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(\rho) \quad (6.3)$$

2. Probabilitas untuk menciptakan partikel tunggal di ruang vakum dalam mode \vec{k} adalah

$$P_n(\vec{k}) = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{1 + \exp[-2\pi(\mu - \lambda)]}{1 + \exp[2\pi(\mu + \lambda)]} \quad (6.4)$$

Nilai probabilitas $P(\vec{k}) \approx 1$ ketika $\mu \rightarrow 1$ dan $\lambda \rightarrow \infty$. Namun, ketika $\mu \rightarrow \infty$ dan $\lambda \rightarrow 1$, probabilitas $P(\vec{k}) \approx 0$.

3. Densitas jumlah dari partikel yang tercipta adalah sebagai berikut

$$n_k = \exp [-\pi(\lambda + \mu)] \frac{\cosh [\pi(-\lambda + \mu)]}{\sinh (2\pi\mu)} \quad (6.5)$$

menunjukkan bahwa densitas jumlah partikel yang tercipta tidak menjadi distribusi termal.

Densitas jumlah dari partikel yang tercipta dapat berubah karena adanya fenomena medan listrik lemah dan kuat, tergantung dari parameter α dan β . Untuk medan listrik yang sangat kuat, densitas jumlah partikel yang tercipta adalah sebagai berikut

$$n_k \approx \exp \left[-\pi \frac{k_{\perp}^2 + 2\xi}{e\beta} - 2\pi e\beta \right] \quad (6.6)$$

menunjukkan bahwa densitas dari partikel yang tercipta sesuai dengan distribusi termal dengan potensial kimia (ukuran kecenderungan partikel untuk berpindah dari satu keadaan ke keadaan lain) yang berbanding lurus dengan $e\beta$. Bentuk eksponensial dari persamaan menunjukkan bahwa distribusi ini sangat sensitif terhadap perubahan parameter sistem yaitu $e\beta$.

Untuk medan listrik yang sangat lemah, densitas jumlah dari partikel yang tercipta adalah

$$n_k \approx \frac{1}{\exp \left(2\pi \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} + \pi \frac{e^2 \beta^2}{\sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi + e^2}} \right) - 1} \quad (6.7)$$

dan untuk densitas jumlah dari partikel yang tercipta dengan tidak adanya medan listrik adalah

$$n_k = \frac{1}{\exp \left(2\pi \sqrt{k_{\perp}^2 + 2\xi} \right) - 1} \quad (6.8)$$

menunjukkan bahwa densitas jumlah partikel yang tercipta menjadi distribusi

termal.

6.2 Saran

Penelitian mengenai penciptaan partikel skalar dengan adanya medan listrik yang bergantung waktu di alam semesta anisotropik Bianchi I dapat dikembangkan dengan menggunakan geometri ruang-waktu Bianchi yang lebih kompleks seperti Bianchi II, Bianchi III, dan Bianchi IX.

DAFTAR PUSTAKA

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. 1970. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications.
- Aitchison, I. J. R. & Hey, A. J. G. 2003. *Gauge Theories in Particle Physics*. (3rd Edition, Vol. 1). IOP Publishing Ltd.
- Alu Syaikh, Abdullah bin Muhammad. 2009. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid I (M. Abdul Ghoffar E. M, Terjemahan)*. Jakarta: Pustaka Imam asy-Syafi'i.
- Andrews, G. E., dkk. 1999. *Special Function: Encyclopedia of Mathematics and it's Applications*. New York: Cambridge University Press.
- Arfken, G. B., & Weber, H. J. 2005. *Mathematical Methods for Physicists (6th Edition)*. United States of America: Elsevier Academic Press.
- Bilim, A. B., dkk. 2023. *Particle Production in a Rainbow Background*. *Annals of Physics*, 449,169200.
- Boas, M. L. 2006. *Mathematical Methods in the Physical Science (3rd Edition)*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.
- Commins, E. D. 2014. *Quantum Mechanics: an Experimentalist's Approach (1st edition)*. New York: Cambridge University Press.
- Cuyt, A., dkk. 2008. *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. New York: Springer.
- Dulham, W. 1999. *Euler: The Master of Us All (Dalciani Mathematical Expositions)*. Washington, DC: American Mathematical Society.
- Duru, I. H. 1994. *Particle Production in a Class of Anisotropic Cosmologies*. *General Relativity and Gravitation*, 26(10), 969–978.
- Griffiths, D. J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics (2nd Edition)*. United States of America: Pearson Prentice Hall.
- Hamill, P. 2013. *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians*. New York: Cambridge University Press.
- Hand, L. N., & Finch, J. D. 1998. *Analytical Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
- Hendra, M. 2020. *Konsep Penciptaan Bumi dalam Al-Quran (Studi terhadap QS. Al-Anbiya' [21]: 30) Menurut Hamka dalam Tafsir Al-Azhar*. *Jurnal Tafseer*, Vol. 8. No. 2.

- Isnanto, G. 2018. *Zarrah dalam Perspektif Mufassir dan Sains*. Skripsi: Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang.
- Kangal, E. E., dkk. 2014. *Creation of Vector Bosons by an Electric Field in Curved SpaceTime*. *Annals of Physics Journal*, 343, 40-48.
- Labeledev, N. N. 1965. *Special Functions and Their Applications*. United States of America: Prentice-Hall, Inc.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1980. *The Classical Theory of Field Volume 2 (4th Edition)*. Amsterdam Heidelberg: Butterworth-Heinemann.
- Liddle, A. 2015. *An Introduction to Modern Cosmology (3rd Edition)*. United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd.
- Mandl, F., & Shaw, G. 2010. *Quantum Field Theory (2nd Edition)*. United Kingdom: A John Wiley and Sons, Ltd., Publication.
- Mulders, P. J. 2003. *Introduction to Quantum Field Theory*. Amsterdam: Vrije Universiteit Press.
- Olver, F. W. J., dkk. 2010. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York: Cambridge University Press.
- Parker, L., & Toms, D. 2009. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime-Quantized Field and Gravity*. New York: Cambridge University Press.
- Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. 1995. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Massachusetts, USA: Addison-Wesley Publishing Company.
- Pimental, L. O., & Pineda, F. 2021. *Particle Creation in Some LRS Bianchi I Models*. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 53, No. 7, Hal. 62.
- Purwanto, A. 2015. *Ayat-Ayat Semesta-Sisi-Sisi Alam Semesta yang Terlupakan*. Bandung: PT Mizan Pustaka.
- Qomariyah, N. 2021. *Studi Persamaan Difusi Gerak Brown di Sekitar Bintang Neutron Tidak Berotasi dan Berotasi*. Skripsi: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Rezki, H., & Zaim, S. 2022. *Particle Creation in Cosmological Space-Time by a Time-Dependent Electric Field*. arXiv:2206.14517 [gr-qc].
- Romadani, A. 2023. *Solution of Klein-Gordon equation in F(R) theory of gravity*. *Jurnal ilmiah pendidikan fisika Al-Biruni*, 12(1), 31-41.
- Shihab, Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati.

- Shihab, Q. 2003. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran Volume 12*. Jakarta: Lentera Hati.
- Vanstone, J. R. 1963. *The Hamilton-Jacobi Equation for a Relativistic Charged Particle*. *Canadian Mathematical Bulletin*, Vol. 6, No. 3, Hal. 341-350.
- Villalba, V. M. & Greiner, W. 2001. *Creation of Scalar and Dirac Particles in the Presence of a Time Varying electric Field in an Anisotropic Bianchi Type I Universe*. *Phys. Rev. D*. 65, 025007.
- Villalba, V. M. 1995. *Creation of Spin-1/2 Particles by an Electric Field in de Sitter Space*. *Phys. Rev. D*. Vol. 52, No. 6.
- Villalba, V. M. 1997. *Particle Creation in a Cosmological Anisotropic Universe*. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 36, No. 6.
- Villalba, V. M., & Greiner, W. 2002. *Creation of Dirac Particles in the Presence of a Constant Electric Field in an Anisotropic Bianchi I Universe*. *Mod. Phys. Lett A*, Vol. 17, No. 28, Hal. 1883-1891.
- Xenos, K. 2020. *An Introduction to FRW Cosmology and Dark Energy Models*. Thesis: University of Patras.

LAMPIRAN

A. Persamaan Whittaker

Persamaan diferensial Whittaker adalah bentuk khusus dari persamaan diferensial hipergeometrik konfluens. Persamaan diferensial Whittaker merupakan jenis persamaan diferensial orde dua linear. Persamaan Whittaker diperoleh dari persamaan Kummer yaitu (Andrews dkk, 1999)

$$zy'' + (c - z)y' - ay = 0 \quad (\text{A.1})$$

dengan definisi $y = e^{z/2}z^{-c/2}\omega(z)$ dan turunan pertama serta keduanya adalah

$$y' = e^{z/2}z^{-c/2} \left[\omega'(z) + \frac{1}{2}\omega(z) - \frac{c}{2z}\omega(z) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$y'' = e^{z/2}z^{-c/2} \left[\omega''(z) + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{z} \right) \omega'(z) + \left(\frac{1}{4} - \frac{c}{2z} + \frac{c}{2z^2} \right) \omega(z) \right] \quad (\text{A.3})$$

Kemudian disubstitusikan ke persamaan (A.1) pada setiap suku. Suku xy'' menjadi

$$\begin{aligned} zy'' &= ze^{z/2}z^{-c/2} \left[\omega''(z) + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{z} \right) \omega'(z) + \left(\frac{1}{4} - \frac{c}{2z} + \frac{c}{2z^2} \right) \omega(z) \right] \\ zy'' &= e^{z/2}z^{-c/2} \left[z\omega''(z) + \left(\frac{z}{2} - \frac{c}{z} \right) \omega'(z) + \left(\frac{z}{4} - \frac{c}{2} + \frac{c}{2z} \right) \omega(z) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Untuk suku $(c - z)y'$

$$\begin{aligned} (c - z)y' &= (c - z)e^{z/2}z^{-c/2} \left[\omega'(z) + \frac{1}{2}\omega(z) - \frac{c}{2z}\omega(z) \right] \\ (c - z)y' &= e^{z/2}z^{-c/2} \left[(c - z)\omega'(z) + \frac{(c - z)}{2}\omega(z) - \frac{c(c - z)}{2z}\omega(z) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

dan suku $-ay$ menjadi

$$-ay = -ae^{z/2}z^{-c/2}\omega(z) \quad (\text{A.6})$$

Selanjutnya gabungkan semua suku, maka menjadi

$$e^{z/2}z^{-c/2} \left(z\omega''(z) + \left[\frac{z}{2} - c + c - z \right] \omega'(z) + \left[\frac{z}{4} - \frac{c}{2} + \frac{c}{2z} + \frac{(c-z)}{2} - \frac{c(c-z)}{2z} - a \right] \omega(z) \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Kemudian dapat dibagi dengan $e^{z/2}z^{-c/2}$ dan koefisien dari $\omega'(z)$ adalah

$$\frac{z}{2} - c + c - z = 0 \quad (\text{A.8})$$

dan koefisien dari suku $\omega(z)$ dapat disederhanakan menjadi

$$-\frac{1}{4} + \left(\frac{c}{2} - a \right) \frac{1}{z} + \frac{c}{2} \left(1 - \frac{c}{2} \right) \frac{1}{z^2} \quad (\text{A.9})$$

Maka, persamaan akhir dari (A.1) adalah

$$\omega''(z) + \left[-\frac{1}{4} + \left(\frac{c}{2} - a \right) \frac{1}{z} + \frac{c}{2} \left(1 - \frac{c}{2} \right) \frac{1}{z^2} \right] \omega(z) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Dua solusi independen persamaan ini dapat memiliki bentuk yang lebih simetris jika (Andrews dkk, 1999)

$$c = 1 + 2\mu, \quad \frac{c}{2} - a = \kappa$$

atau

$$\mu = \frac{c-1}{2}, \quad a = \frac{1}{2} + \mu - \kappa$$

Maka persamaan (A.10) menjadi persamaan Whittaker

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)}{z^2} \right] \omega(z) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Solusi dari persamaan diferensial Whittaker berupa kombinasi dari fungsi Whittaker yaitu $M_{\kappa,\mu}(z)$ dan $W_{\kappa,\mu}(z)$

$$\omega(z) = C_1 M_{\kappa,\mu}(z) + C_2 W_{\kappa,\mu}(z) \quad (\text{A.12})$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta. $M_{\kappa,\mu}(z)$ dan $W_{\kappa,\mu}$ merupakan fungsi yang bernilai banyak pada titik $z = 0$ dan $z = \infty$ dengan $M_{\kappa,\mu}(z)$ dan $W_{\kappa,\mu}(z)$ didefinisikan sebagai (Olver dkk, 2010)

$$M_{\kappa,\mu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_s}{(1 + 2\mu)_s s!} z^s \quad (\text{A.13})$$

z adalah variabel kompleks dan μ serta κ dapat berupa bilangan real acak atau nilai kompleks (Labeledev, 1965). Persamaan dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} M_{\kappa,\mu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}+\mu} & \left(\frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_0}{(1 + 2\mu)_0 0!} z^0 + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_1}{(1 + 2\mu)_1 1!} z^1 + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_2}{(1 + 2\mu)_2 2!} z^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_3}{(1 + 2\mu)_3 3!} z^3 + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

persamaan di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan faktorial Pochhammer yang mana didefinisikan sebagai (Cuyt, 2008)

$$(a)_0 := 1$$

$$(a)_1 := a$$

$$(a)_2 := a(a + 1)$$

$$(a)_3 := a(a + 1)(a + 2)$$

$$(a)_n := a(a + 1)\dots(a + n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sehingga menjadi

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^{\frac{1}{2}+\mu} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)1!} \rho + \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{3}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)(2 + 2\mu)2!} \rho^2 \right)$$

$$+ \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{3}{2} + \mu - \lambda) + (\frac{5}{2} + \mu - \lambda)}{(1 + 2\mu)(2 + 2\mu) + (3 + 2\mu)3!} \rho^3 + \dots \Big) \quad (\text{A.15})$$

dan $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ didefinisikan sebagai (Olver dkk, 2010)

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \lambda)} M_{\lambda,\mu}(\rho) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \lambda)} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \quad (\text{A.16})$$

B. Hasil Numerik Densitas Partikel untuk Medan Listrik Kuat dan Lemah

Tabel 1: Densitas untuk medan listrik kuat dan lemah

No.	β	Densitas Partikel yang Tercipta n_k	
		Medan Listrik Kuat	Medan Listrik Lemah
1	0.10	1.23145e-14	1.81893e-03
2	0.15	2.95343e-10	1.75018e-03
3	0.20	4.02019e-08	1.65912e-03
4	0.25	6.82796e-07	1.55012e-03
5	0.30	4.08193e-06	1.42804e-03
6	0.35	1.34199e-05	1.29788e-03
7	0.40	3.03446e-05	1.16439e-03
8	0.45	5.34465e-05	1.03181e-03
9	0.50	7.90218e-05	9.03676e-04
10	0.55	1.02862e-04	7.82757e-04
11	0.59	1.21689e-04	6.71003e-04
12	0.64	1.33752e-04	5.69619e-04
13	0.69	1.38751e-04	4.79160e-04
14	0.74	1.37428e-04	3.99646e-04
15	0.79	1.31094e-04	3.30690e-04
16	0.84	1.21237e-04	2.71616e-04
17	0.89	1.09263e-04	2.21566e-04
18	0.94	9.63533e-05	1.79588e-04
19	0.99	8.34122e-05	1.44701e-04
20	1.04	7.10735e-05	1.15951e-04
21	1.09	5.97365e-05	9.24392e-05
22	1.14	4.96136e-05	7.33455e-05

No.	β	Densitas Partikel yang Tercipta n_k	
		Medan Listrik Kuat	Medan Listrik Lemah
23	1.19	4.07790e-05	5.79394e-05
24	1.24	3.32115e-05	4.55819e-05
25	1.29	2.68298e-05	3.57236e-05
26	1.34	2.15186e-05	2.78982e-05
27	1.39	1.71480e-05	2.17151e-05
28	1.44	1.35864e-05	1.68505e-05
29	1.49	1.07088e-05	1.30381e-05
30	1.54	8.40107e-06	1.00613e-05
31	1.58	6.56269e-06	7.74477e-06
32	1.63	5.10680e-06	5.94767e-06
33	1.68	3.95990e-06	4.55759e-06
34	1.73	3.06069e-06	3.48524e-06
35	1.78	2.35868e-06	2.66010e-06
36	1.83	1.81276e-06	2.02665e-06
37	1.88	1.38971e-06	1.54144e-06
38	1.93	1.06293e-06	1.17053e-06
39	1.98	8.11253e-07	8.87543e-07
40	2.03	6.17943e-07	6.72023e-07
41	2.08	4.69831e-07	5.08162e-07
42	2.13	3.56608e-07	3.83775e-07
43	2.18	2.70240e-07	2.89493e-07
44	2.23	2.04485e-07	2.18129e-07
45	2.28	1.54514e-07	1.64184e-07
46	2.33	1.16603e-07	1.23457e-07
47	2.38	8.78862e-08	9.27442e-08

No.	β	Densitas Partikel yang Tercipta n_k	
		Medan Listrik Kuat	Medan Listrik Lemah
48	2.43	6.61659e-08	6.96095e-08
49	2.48	4.97599e-08	5.22013e-08
50	2.53	3.73839e-08	3.91149e-08
51	2.57	2.80591e-08	2.92867e-08
52	2.62	2.10413e-08	2.19119e-08
53	2.67	1.57653e-08	1.63828e-08
54	2.72	1.18027e-08	1.22408e-08
55	2.77	8.82933e-09	9.14026e-09
56	2.82	6.60028e-09	6.82096e-09
57	2.87	4.93059e-09	5.08725e-09
58	2.92	3.68090e-09	3.79213e-09
59	2.97	2.74625e-09	2.82525e-09
60	3.02	2.04773e-09	2.10384e-09
61	3.07	1.52603e-09	1.56589e-09
62	3.12	1.13663e-09	1.16496e-09
63	3.17	8.46170e-10	8.66305e-10
64	3.22	6.29630e-10	6.43945e-10
65	3.27	4.68288e-10	4.78467e-10
66	3.32	3.48136e-10	3.55375e-10
67	3.37	2.58703e-10	2.63853e-10
68	3.42	1.92167e-10	1.95832e-10
69	3.47	1.42689e-10	1.45297e-10
70	3.52	1.05910e-10	1.07767e-10
71	3.56	7.85840e-11	7.99059e-11
72	3.61	5.82884e-11	5.92298e-11

No.	β	Densitas Partikel yang Tercipta n_k	
		Medan Listrik Kuat	Medan Listrik Lemah
73	3.66	4.32204e-11	4.38909e-11
74	3.71	3.20376e-11	3.25153e-11
75	3.76	2.37410e-11	2.40815e-11
76	3.81	1.75879e-11	1.78306e-11
77	3.86	1.30259e-11	1.31989e-11
78	3.91	9.64464e-12	9.76800e-12
79	3.96	7.13925e-12	7.22722e-12
80	4.01	5.28337e-12	5.34613e-12
81	4.06	3.90900e-12	3.95378e-12
82	4.11	2.89149e-12	2.92344e-12
83	4.16	2.13836e-12	2.16117e-12
84	4.21	1.58105e-12	1.59734e-12
85	4.26	1.16875e-12	1.18038e-12
86	4.31	8.63798e-13	8.72103e-13
87	4.36	6.38290e-13	6.44223e-13
88	4.41	4.71567e-13	4.75806e-13
89	4.46	3.48330e-13	3.51359e-13
90	4.51	2.57254e-13	2.59419e-13
91	4.55	1.89959e-13	1.91507e-13
92	4.60	1.40245e-13	1.41352e-13
93	4.65	1.03526e-13	1.04317e-13
94	4.70	7.64083e-14	7.69743e-14
95	4.75	5.63857e-14	5.67907e-14
96	4.80	4.16041e-14	4.18938e-14
97	4.85	3.06932e-14	3.09005e-14

No.	β	Densitas Partikel yang Tercipta n_k	
		Medan Listrik Kuat	Medan Listrik Lemah
98	4.90	2.26407e-14	2.27891e-14
99	4.95	1.66986e-14	1.68048e-14
100	5.00	1.23145e-14	1.23905e-14

C. Hasil Numerik Densitas Partikel Tanpa Medan Listrik

Tabel 2: Densitas untuk medan listrik kuat dan lemah

No.	k_{\perp} (Momentum)	Densitas n_k
1	0.10	1.35327e-04
2	0.15	1.31679e-04
3	0.20	1.26766e-04
4	0.25	1.20753e-04
5	0.30	1.13835e-04
6	0.35	1.06226e-04
7	0.40	9.81418e-05
8	0.45	8.97967e-05
9	0.50	8.13895e-05
10	0.55	7.30978e-05
11	0.59	6.50732e-05
12	0.64	5.74379e-05
13	0.69	5.02844e-05
14	0.74	4.36766e-05
15	0.79	3.76518e-05
16	0.84	3.22245e-05
17	0.89	2.73899e-05
18	0.94	2.31277e-05
19	0.99	1.94066e-05
20	1.04	1.61871e-05
21	1.09	1.34251e-05
22	1.14	1.10743e-05
23	1.19	9.08835e-06

No.	k_{\perp}	Densitas (n_k)
24	1.24	7.42220e-06
25	1.29	6.03347e-06
26	1.34	4.88305e-06
27	1.39	3.93551e-06
28	1.44	3.15930e-06
29	1.49	2.52667e-06
30	1.54	2.01352e-06
31	1.58	1.59916e-06
32	1.63	1.26600e-06
33	1.68	9.99201e-07
34	1.73	7.86344e-07
35	1.78	6.17132e-07
36	1.83	4.83068e-07
37	1.88	3.77190e-07
38	1.93	2.93824e-07
39	1.98	2.28370e-07
40	2.03	1.77118e-07
41	2.08	1.37090e-07
42	2.13	1.05903e-07
43	2.18	8.16595e-08
44	2.23	6.28556e-08
45	2.28	4.83008e-08
46	2.33	3.70570e-08
47	2.38	2.83873e-08
48	2.43	2.17143e-08
49	2.48	1.65869e-08

No.	k_{\perp}	Densitas (n_k)
50	2.53	1.26533e-08
51	2.57	9.64039e-09
52	2.62	7.33596e-09
53	2.67	5.57589e-09
54	2.72	4.23339e-09
55	2.77	3.21070e-09
56	2.82	2.43258e-09
57	2.87	1.84124e-09
58	2.92	1.39234e-09
59	2.97	1.05193e-09
60	3.02	7.94067e-10
61	3.07	5.98915e-10
62	3.12	4.51364e-10
63	3.17	3.39903e-10
64	3.22	2.55778e-10
65	3.27	1.92338e-10
66	3.32	1.44534e-10
67	3.37	1.08540e-10
68	3.42	8.14580e-11
69	3.47	6.10961e-11
70	3.52	4.57972e-11
71	3.56	3.43098e-11
71	3.56	3.43098e-11
71	3.56	3.43098e-11
72	3.61	2.56898e-11
73	3.66	1.92254e-11

No.	k_{\perp}	Densitas (n_k)
74	3.71	1.43803e-11
75	3.76	1.07510e-11
76	3.81	8.03380e-12
77	3.86	6.00062e-12
78	3.91	4.48001e-12
79	3.96	3.34330e-12
80	4.01	2.49398e-12
81	4.06	1.85967e-12
82	4.11	1.38615e-12
83	4.16	1.03281e-12
84	4.21	7.69265e-13
85	4.26	5.72766e-13
86	4.31	4.26315e-13
87	4.36	3.17205e-13
88	4.41	2.35945e-13
89	4.46	1.75447e-13
90	4.51	1.30422e-13
91	4.55	9.69234e-14
92	4.60	7.20084e-14
93	4.65	5.34832e-14
94	4.70	3.97133e-14
95	4.75	2.94810e-14
96	4.80	2.18795e-14
97	4.85	1.62341e-14
98	4.90	1.20424e-14
99	4.95	8.93096e-15

No.	k_{\perp}	Densitas (n_k)
100	5.00	6.62194e-15