SIFAT–SIFAT RUANG QUASI METRIK

SKRIPSI

OLEH
TIRTA ROSA NURFADILA
NIM. 200601110048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT–SIFAT RUANG QUASI METRIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Tirta Rosa Nurfadila
NIM. 200601110048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT-SIFAT RUANG QUASI METRIK

SKRIPSI

Oleh:
Tirta Rosa Nurfadila
NIM. 2006011100048

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 10 Desember 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Evawati Alisah, M.Pd.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19471129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT RUANG QUASI METRIK

SKRIPSI

Oleh:
Tirta Rosa Nurfadila
NIM. 200601110048

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 24 Desember 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Evawati Alisah, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19471129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Tirta Rosa Nurfadila
NIM	: 200601110048
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Ruang Quasi Metrik

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudin hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatam tersebut.

Malang, 24 Desember 2024

Yang membuat pernyataan,

Tirta Rosa Nurfadila

NIM. 200601110048

MOTO

"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnhya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(QS. Al-Insyirah 5-6).

PERSEMBAHAN

الرحيم الرحمن الله بسم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Ayah Sumanto, Almh. Bunda Wiji Kanipah, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta untuk adik Raganta Arizqika Mahawira Arjuna yang selalu menantikan kelulusan S1 penulis.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillaahirobbil'alamiin, penulis ucapkan kepada Allah SWT atas rahmat dan pertolongan-Nya, sehingga penyusunan proposal skripsi yang berjudul "Sifat-Sifat Ruang Quasi Metrik" ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah memberikan uswatun hasanah kepada kita dalam menjalankan kehidupan ini. Semoga kita tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya di hari akhir kelak, Amiin.

Penulis sadar bahwa terdapat beberapa pihak yang membantu dalam proses penyelesaian proposal skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Ibu Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Bapak Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
5. Ibu Evawati Alisah, M.Pd., selaku dosen pembimbing II Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan dukungan dan saran pada penyusunan proposal skripsi ini.
7. Ayah Sumanto dan Almh. Bunda Wiji Kanipah serta seluruh keluarga yang telah mendo'akan sekaligus memberi dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

yang telah berproses bersama selama penulis menempuh Pendidikan di Universitas ini.

9. Pihak-pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Berkah dan ridlo dari Allah-lah penyusunan proposal skripsi ini dapat terselesaikan. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati memohon saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat untuk penelitian selanjutnya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Wassalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Malang, 24 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\forall$	: Untuk semua
$\exists$	: Terdapat
$\rightarrow$	: Menuju
$\in$	: Elemen dari
ε	: Epsilon
α	: Alfa
β	: Beta
γ	: Gamma
δ	: Delta
μ	: Mu
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
(X, d)	: Ruang Metrik pada himpunan X dengan metrik d
$\{X_n\}$	: Suatu barisan
$x \in A$	: x anggota himpunan A

ABSTRAK

Nurfadila, Tirta Rosa. 2024. **Sifat-Sifat Ruang Quasi Metrik**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Ruang Metrik, Ruang Quasi Metrik, Sifat-sifatnya, Interval, Cover

Ruang metrik adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu. Ruang metrik digeneralisasikan lebih lanjut menjadi ruang quasi metrik. Ruang quasi metrik merupakan perumuman dari ruang metrik yaitu dengan hilangnya sifat simetri pada ruang metrik.

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan hubungan antara ruang metrik dengan ruang quasi metrik dan menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada ruang quasi metrik.

Berdasarkan pembahasan diperoleh bahwa ruang quasi metrik memiliki sifat-sifat sebagai berikut: Setiap ruang metrik adalah ruang quasi metrik, setiap barisan konvergen dalam ruang quasi metrik

adalah barisan Cauchy, setiap sub urutan dari barisan Cauchy adalah barisan Cauchy, barisan konvergen adalah Cauchy, limit barisan di ruang quasi metrik bernilai Tunggal, barisan konvergen di suatu ruang metrik mempunyai titik limit tunggal, setiap barisan quasi metrik yang konvergen ke titik x_0 adalah konvergen ke x_0, limit dalam ruang quasi metrik adalah unik. Semua sifat-sifat ruang quasi metrik telah dibuktikan pada penelitian ini.

ABSTRACT

Nurfadila, Tirta Rosa. 2024. **Properties of quasi metric space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Supervisor: (1) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Metric Space, Metric Quasi Space, Properties, Interval, Cover

A metric space is an empty set that comes with a specific metric. The metric space is further generalized into the metric quasi space. The quasimetric space is a generalization of the metric space, namely with the loss of symmetry in the metric space.

The purpose of this study is to explain the relationship between metric space and quasimetric space and explain the properties that apply to quasimetric space.

Based on the discussion, it is obtained that the metric quasi space has the following properties: Each metric space is a metric quasi space, each convergent row in a metric quasi space is a Cauchy row, each sub-order of the Cauchy line is the Cauchy line, the convergent line is the Cauchy, limit rows in a single-value metric quasi space, a convergent row in a metric space has a single limit point, any metric quasi space that converges to a point is a convergence to x_0x_0, limits in the metric quasi space are unique. All the properties of metric quasi space have been proven in this study.

مستخلص البحث

نورفاديلا ، تيرتا روزا. ٢٠٢٤. **خصائص شبه الفضاء المتري**. اطروحه. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، مالانج. المشرف: (١) د. حير الرحمن، M.Si (II) إيفاواتي أليسة، عضو البرلمان

الكلمات الدالة: الفضاء المتري ، شبه الفضاء المتري ، خصائصه ، الفاصل الزمني ، الغطاء

مساحة القياس هي مجموعة فارغة تأتي مع مقياس معين. يتم تعميم المساحة المترية بشكل أكبر في شبه الفضاء المتري. الفضاء شبه المتري هو تعميم للمساحة المترية ، أي مع فقدان التماثل في الفضاء المتري.

الغرض من هذه الدراسة هو شرح العلاقة بين الفضاء المتري والفضاء شبه القياسي وشرح الخصائص التي تنطبق على الفضاء شبه المقياسي.

بناء على المناقشة ، تم الحصول على أن الفضاء شبه القياسي له الخصائص التالية: كل مساحة مترية عبارة عن مساحة شبه متقاربة ، كل صف متقارب في الفضاء شبه المتقارر

هو صف كوشي ، كل تسلسل فرعي لصف كوشي هو صف كوشي ، الصف المتقارب هو كوشي ، حد الصف في شبه الفضاء المتري هو قيمة مفرد ، الصف المتقارب في مساحة متري له نقطة حد واحدة ، كل صف شبه متري يتقارب إلى النقطة متقارب x_0x_0، الحد في شبه الفضاء المتري فريد من نوعه. تم إثبات جميع خصائص الفضاء شبه القياسي في هذه الدراسة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1906 Maurice Frechet memperkenalkan konsep jarak pada himpunan yang tak kosong. Himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu disebut ruang metrik. Lebih jelasnya, himpunan X yang tak kosong dilengkapi metrik d ditulis (X, d) disebut ruang metrik, kemudian anggota-anggota himpunan X disebut titik-titik pada ruang metrik, sedangkan anggota-anggota himpunan X disebut titik-titik pada ruang metrik yang termuat dalam bilangan riil $d(x, y)$ yaitu jarak titik x dan y di dalam (X, d) (Bahtiar,2012).

Kajian tentang metrik merupakan salah satu konsep dasar penting yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika. terutama dalam memahami konsep jarak dan kedekatan antara titik-titik dalam ruang. Ruang metrik adalah jarak di antara pasangan elemen yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu positifitas, definitas, simetri dan ketaksamaan segitiga. Namun, terdapat situasi di mana definisi jarak yang lebih lemah diperlukan, sehingga muncul konsep ruang quasi metrik.

Pada perkembangan analisis semakin banyak orang yang meneliti mengenai ruang quasi metrik. Ruang quasi metrik adalah generalisasi dari ruang metrik yang memungkinkan adanya ketidaksetaraan dalam pengukuran jarak, tetapi tetap mempertahankan beberapa sifat dasar yang relevan. Pada tahun 1914 Hausdorff mengenalkan jarak asimetri, yang merupakan bagian penting dari pembahasan quasi metrik karena perbedaan antara ruang metrik dengan ruang quasi metrik terletak pada sifat simetrinya. Hal ini dapat diketahui dari tidak adanya simetri pada ruang quasi metrik, sedangkan sifat-sifat lainnya pada ruang metrik terdapat pada ruang quasi metrik (Firdaus, dkk., 2013).

Dalam Al-Qur'an dijelaskan mengenai jarak yaitu terdapat pada QS. Al-Baqarah dalam ayat 186 yang artinya: (Kemenag RI, 2024)

وَإِذَا سَأَلَكَ عِبَادِي عَنِّي فَإِنِّي قَرِيبٌ أُجِيبُ دَعوَةَ ٱلدَّاعِ إِذَا دَعَانِ فَليَستَجِيبُواْ لِي وَليُؤمِنُواْ بِي لَعَلَّهُم يَرشُدُونَ ١٨٦

"Dan apabila hamba-hambaku bertanya kepadamu (Muhammad) tentang Aku, maka sesungguhnya Aku dekat. Aku kabulkan permohonan orang yang berdoa apabila dia berdoa kepada-Ku. Hendaklah mereka itu memenuhi (perintah)-Ku dan beriman kepada-Ku agar mereka memperoleh kebenaran" (Ql Al-Baqarah:186).

Berdasarkan Kemenag (2022), ayat ini menjelaskan tentang kedekatan Allah SWT kepada hamba-hamba-Nya. Meskipun secara fisik AllahSWT tidak dapat dilihat, namun Dia selalu dekat dengan hamba-Nya yang berdoa dan memohon kepada-Nya. Allah SWT akan mengabulkan doa hamba-Nya dengan penuh keyakinan (Kemenag RI, 2022).

Berdasarkan hal tersebut, jarak antara kedekatan Allah SWT kepada hamba-hamba-Nya sangatlah dekat. Allah menekankan pentingnya ketaatan dan iman kepada Allah SWT dengan memenuhi perintah-Nya dan beriman kepada-Nya, manusia akan mendapatkan petunjuk dan hidayah dalam hidupnya (Kemenag RI, 2022).

Pada skripsi ini akan diteliti seperti apakah konsep dasar ruang quasi metrik. Konsep dasar yang dimaksud adalah menjelaskan definisi ruang quasi metrik beserta contohnya dan menjelaskan sifat-sifat ruang quasi metrik beserta pembuktian dan contohnya. Sehingga penelitian ini mengambil judul “Sifat-sifat Ruang Quasi Metrik”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ruang quasi metrik?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukan penelitian ini yaitu untuk menunjukkan sifat-sifat yang berlaku pada ruang quasi mmetrik.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang terkandung pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penulis

   Manfaat penelitian ini untuk penulis yaitu menambah pengetahuan dan wawasan mengenai sifat-sifat pada ruang quasi metrik.

2. Pembaca

   Manfaat penelitian ini untuk pembaca yaitu dapat digunakan sebagai sumber referensi, informasi dan menambah wawasan keilmuan terkait sifat-sifat pada ruang quasi metrik.

3. Instansi

   Manfaat penelitian ini untuk instansi yaitu dapat digunakan sebagai sumber literatur dan acuan ke depan di bidang matematika mengenai sifat-sifat pada ruang quasi metrik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini berguna untuk membatasi hal-hal yang dirasa tidak perlu dibahas serta membatasi ruang lingkup penelitian sehingga membuat penelitian menjadi fokus dan terarah. Batasan masalah dalam penelitian ini adalah hanya fokus pada sifat-sifat ruang quasi metrik.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Metrik

Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan riil $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangkan $d(x, y) = |x - y|$ dengan setiap pasang titik $x, y \in \mathbb{R}$. Jadi $\mathbb{R}$ mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dengan jarak $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$ (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1

Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

Selanjutnya pasangan (X, d) disebut ruang metrik (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.1

Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik, sebab

(M1) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$.

Non-negatif: nilai dari $|x-y|$ selalu non-negatif untuk semua x dan y. Ini berarti $d(x,y) \geq 0$.

Ketaksamaan: fungsi ini memenuhi ketaksamaan segitiga, yaitu

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk semua x, y, z.

Identitas: fungsi ini juga memenuhi sifat identitas, yaitu $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

Jadi, $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ adalah pernyataan yang benar dan sesuai dengan sifat-sifat fungsi metrik.

(M2) $d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$d(x,y) = 0$, maka $x = y$.

$d(x,y) = |x-y|$,

$0 = |x-y|$,

$0 = x - y$

$x = y$

$x = y$, maka $d(x,y) = 0$.

$d(x,y) = |x-y|$,

$= |x-x|$,

$d(x,y) = 0$

(M3) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$,

$d(x,y) = |x-y|$,

$= |y-x|$,

$= d(y,x)$.

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) = |x-y| &= |x-z+z-y| \\
&\leq |x-z| + |z-y| \\
&= d(x,z) + d(z,y).
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$ merupakan ruang metrik.

2.1.2 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Suatu barisan akan konvergen dan lengkap apabila beberapa definisi berikut terpenuhi.

Definisi 2.2

Barisan (x_n) di ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Dimana notasi x merupakan nilai limit dari (x_n), secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

atau

$$x_n \to x$$

Sedangkan suatu barisan (x_n) yang tidak konvergen maka disebut divergen (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.2

1. Misal (X, d) ruang metrik diskrit, dan barisan (x_n) di X yang konvergen ke $x \in X$ dengan $\varepsilon = 1/2$. Tunjukkan bahwa barisan (x_n) merupakan barisan konvergen di ruang metrik diskrit (X, d).

Karena barisan (x_n) konvergen ke $x, \exists N \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_n, x) < \frac{1}{2}, \forall n \geq N$.

Dapat disimpulkan bahwa barisan konvergen di ruang metrik diskrit adalah barisan konstan (Tyagi B, 2010).

2. Misalkan $(\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right))$ adalah barisan konvergen yang konvergen pada (0,0), di $\mathbb{R}^2$ dengan $\varepsilon > 0$ dan ada $N \in \mathbb{N}$. $d\left(\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), (0,0)\right)$ adalah $d\left(\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), (0,0)\right) = \left[\left(\frac{1}{2n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2n} - 0\right)^2\right]^{1/2} < \varepsilon, \forall n \geq N$ (Tyagi B, 2010).

Definisi 2.3

Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di dalam X (Bartle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.4

Suatu barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $m, n \geq N$ berlaku

$d|x_m - x_n| < \varepsilon$ (Yunus dkk., 2019)

Contoh 2.3

Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dengan $d(x_m, x_n) = |x_m - x_n|$ dan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n = 1,2,3, \ldots$ adalah barisan Cauchy.

Keterangan:

Diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$ untuk $m, n > N$ dan untuk $n > N$ berlaku:

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Lemma 2.1

Setiap barisan konvergen di ruang metrik (X, d) adalah b arisan Cauchy (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Misalkan $x_n \to x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2,$$

Ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Dengan ketaksamaan segitiga, maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian, $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Teorema di atas tidak berlaku sebaliknya.

Definisi 2.5

Misal ruang metrik (X, d) dan himpunan $E \subseteq X$. Himpunan E disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di E memiliki limit di E. Jika X lengkap, maka ruang metrik (X, d) lengkap (Yunus dkk, 2019).

Contoh 2.4

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap. Hal tersebut dapat dibuktikan seperti berikut. Misal

$\{x_n\}$ dengan $x_n = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ dan $n = 1,2,3, \dots$ adalah barisan Cauchy di $(\mathbb{R}, d)$ dengan $\{x_n\}$ konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur’an

Pada bab 1, telah dijelaskan jarak antara kedekatan Allah SWT kepada hamba-hamba-Nya sangatlah dekat. Allah menekankan pentingnya ketaatan dan iman kepada Allah SWT dengan memenuhi perintah-Nya dan beriman kepada-Nya, Pada subbab kajian integrasi ini, Al-Qur’an menjelaskan mengenai sifat-sifat ruang quasi metrik yang sesuai dengan kalam Allah pada Q.S Yunus ayat 5 yang artinya:

هُوَ ٱلَّذِي جَعَلَ ٱلشَّمسَ ضِيَاء وَٱلقَمَرَ نُورا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلحِسَابَ, مَا خَلَقَ ٱللَّهُ
ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلحَقِّ, يُفَصِّلُ ٱلأَيٰتِ لِقَوم يَعلَمُونَ ٥

Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya, Dialah pula yang menetapkan tempat-tempat orbitnya agar kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan demikian itu, kecuali dengan benar. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada kaum yang mengetahui (Q.S Yunus/10:5)

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah menciptakan langit dan bumi, yang berkuasa atas Arsy-Nya. Dia juga membuat matahari bersinar dan bulan bercahaya, yang dengan sinarnya memberikan kehidupan, panas, dan tenaga untuk menggerakkan makhluk-Nya. Dengan cahaya ini, manusia dapat berjalan di malam hari dan beraktivitas.

Hikmah yang dapat diambil dari arti Q.S Yunus ayat 5 adalah Allah SWT

telah memperhitungkan segala sesuatu yang ada di kehidupan manusia. Hal tersebut menjadikan manusia mengetahui sifat-sifat kebesaran Allah SWT, agar manusia dapat memanfaatkan fungsi adanya matahari dan bulan dan dapat memperhitungkan segala sesuatu dengan benar. Memperhitungkan segala sesuatu yang manusia lakukan di bumi sesuai dengan amal baik dan buruknya dengan perhitungan yang teliti dan tidak tertinggal amalnya satu pun. Amal kebaikan yang bisa dilakukan umat muslim sangat banyak. Dari sekian banyak amalan yang ada di dunia, shalat merupakan amal yang pertama kali akan dihisab. Hal ini sebagaimana bunyi hadist shahih tentang hari perhitungan amal berikut bahwa

Abu Hurairah radhiyallahu ‘anhu berkata, Rasulullah SAW bersabda,

” Sesungguhnya amal seorang hamba yang pertama kali dihisab pada hari kiamat adalah shalatnya. Apabila shalatnya baik, sungguh ia telah beruntung dan berhasil. Namun, jika shalatnya rusak, sungguh ia telah gagal dan rugi. Jika ada suatu kekurangan dalam shalat wajibnya, maka Allah Azza wa Jalla berfirman, ‘Lihatlah apakah hamba-Ku memiliki shalat sunnah sehinga bisa disempurnakanlah kekurangan yang ada pada shalat wajibnya. Kemudian seluruh amalnya diberlakukan demikian pula.” (Hadits riwayat At-Tirmidzi).

Sama halnya dengan penelitian skripsi ini yang membuktikan sifat-sifat ruang quasi metrik dengan cara mengkaji teori yang berkaitan erat dengan quasi metrik. Kemudian, meneliti perhitungan yang terlewat dan merekonstruksi rujukan yang dipakai pada penelitian ini. Sehingga penelitian mengenai sifat-sifat ruang quasi metrik menjadi penelitian yang lebih lengkap.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini diawali dengan pembahasan mengenai sifat-sifat ruang quasi metrik. Sebelumnya didefinisikan ruang quasi metrik sebagai berikut.

Definisi 4.1

Diberikan himpunan tidak kosong X dengan quasi metrik d. Ruang quasi metrik adalah pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ yang memenuhi kondisi sebagai berikut

(1) $d(x, y) = d(y, x) = 0$ maka $x = y$, untuk setiap $x, y \in X$

(2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, untuk setiap $x, y, z \in X$

Jika d quasi metrik di X, maka pasangan (X, d) disebut ruang quasi metrik (Doitchinov, 1988).

Lemma 4.1

Setiap ruang metrik adalah ruang quasi metrik (Zeyada dkk, 2006).

Definisi 4.2

Diberikan ruang quasi metrik (X, d) dan barisan $(x_n) \subseteq X$. Barisan (x_n) dikatakan konvergen di ruang quasi metrik ke $x \in X$ apabila

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

Selanjutnya barisan (x_n) yang konvergen di ruang quasi metrik ke x dapat dinotasikan dengan $x_n \to x$. Dalam hal ini x disebut sebagai limit barisan di ruang quasi metrik (Zeyada dkk, 2006).

Definisi 4.3

Diberikan ruang quasi metrik (X, d) dan barisan $(x_n) \subseteq X$. Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy apabila setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ atau $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ (Sharma dan Thakur, 2013).

Definisi 4.4

Diberikan (X, d) adalah ruang quasi metrik. Barisan (x_n) pada X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $H \in \mathbb{N}$ maka $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk semua, $n, m \geq H$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Teorema 4.1

Setiap barisan konvergen dalam ruang quasi metrik (X, d) adalah barisan Cauchy (D. Doitchinov, 1988).

Teorema 4.2

Setiap sub urutan dari barisan Cauchy adalah barisan Cauchy (D. Doitchinov, 1988).

Lemma 4.2

Barisan konvergen adalah Cauchy (Hutahaean, 1994).

Definisi 4.5

Ruang quasi metrik (X, d) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy didalamnya konvergen di ruang quasi metrik (Zeyada dkk, 2006).

Lemma 4.3

Limit barisan di ruang quasi metrik bernilai tunggal (Sharma dan Thakur, 2013).

Lemma 4.4

Barisan konvergen di suatu ruang metrik mempunyai titik limit Tunggal (Hutahaean, 1994).

Lemma 4.3

Limit barisan di ruang quasi metrik bernilai tunggal (Sharma dan Thakur, 2013).

Lemma 4.4

Barisan konvergen di suatu ruang metrik mempunyai titik limit Tunggal (Hutahaean, 1994).

Lemma 4.5

Setiap barisan quasi metrik yang konvergen ke titik x_0 adalah konvergen ke x_0 (Zeyada dkk, 2006).

Lemma 4.6

Limit dalam ruang quasi metrik adalah unik (Zeyada dkk, 2006).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan cara studi literatur yaitu dengan menggabungkan semua teori-teori pendukung melalui berbagai sumber seperti artikel, buku, paper, jurnal, dan referensi lain terkait topik yang akan dibahas.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang akan ditempuh penulis sebelum melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dan mengumpulkan informasi yang relevan melalui berbagai sumber seperti artikel, buku, paper, jurnal, dan referensi lainnya.
2. Menentukan topik.
3. Menentukan rumusan masalah.
4. Menentukan tujuan dan manfaat diadakannya penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan ditempuh penulis pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dan mengkaji buku refrensi utama.
2. Mencari sumber atau refrensi lain untuk memaparkan konsep dan teori yang relevan.
3. Memaparkan dan mengkaji integrasi terkait norma pada ayat-ayat Al-Qur’an.

4. Membuktikan sifat-sifat ruang quasi metrik.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibuktikan mengenai sifat-sifat ruang quasi metrik.

4.1 Sifat-Sifat Ruang Quasi Metrik

Untuk membuktikan sifat-sifat ruang quasi metrik, yang pertama akan dipaparkan mengenai definisi ruang quasi metrik sebagai berikut.

Definisi 4.1

Diberikan himpunan tidak kosong X dengan quasi metrik d. Ruang quasi metrik adalah pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ yang memenuhi kondisi sebagai berikut

(1) $d(x, y) = d(y, x) = 0$ maka $x = y$, untuk setiap $x, y \in X$

(2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, z)$, untuk setiap $x, y, z \in X$

Jika d quasi metrik di X, maka pasangan (X, d) disebut ruang quasi metrik (D. Doitchinov, 1988).

Ruang quasi metrik merupakan perluasan dari ruang metrik. Hal ini dapat diketahui dari tidak adanya simetri pada ruang quasi metrik, sedangkan sifat-sifat lainnya pada ruang metrik terdapat pada ruang quasi metrik (Firdais, dkk., 2013).

Contoh 4.1

Diberikan himpunan $X = \{x, y, z\}$ jika fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$ didefinisikan dengan:

$$d(x, y) = d(z, x) = d(z, y) = \frac{1}{8},$$

$$d(y, x) = d(x, z) = d(y, z) = \frac{1}{6},$$

$$d(x, x) = \frac{1}{7}, d(y, y) = 0, d(z, z) = \frac{1}{4}.$$

Untuk $x, y, z \in X$, maka fungsi d adalah quasi metrik.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in X$.

(i) Akan dibuktikan bahwa jika $d(a,b) = d(b,a) = 0$, maka $a = b$.

Diketahui bahwa $d(a,b) = 0$, berarti $d(a,b) = d(y,y)$ dengan kata lain $a = b = y$.

Selanjutnya diketahui bahwa $d(b,a) = 0$ berarti $d(b,a) = d(y,y)$ dengan kata lain $a = b = y$.

Karena $d(a,b) = d(b,a) = 0$ maka diperoleh bahwa $a = b$.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$. Terdapat enam kemungkinan yang harus dipenuhi untuk membuktikan kondisi tersebut.

- Apabila memenuhi kondisi tersebut:

$$d(x,y) = \frac{1}{8},$$

$$d(x,z) = \frac{1}{6},$$

$$d(z,y) = \frac{1}{8},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{8} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

- Apabila memenuhi kondisi berikut:

$$d(y,x) = \frac{1}{6},$$

$$d(y,z) = \frac{1}{6},$$

$$d(z,x) = \frac{1}{8},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{6} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

- Apabila memenuhi kondisi berikut:

$$d(z,x) = \frac{1}{8},$$

$$d(z,y) = \frac{1}{8},$$

$$d(y,x) = \frac{1}{6},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{8} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$$

- Apabila memenuhi kondisi berikut:

$$d(z,y) = \frac{1}{8},$$

$$d(z,x) = \frac{1}{8},$$

$$d(x,y) = \frac{1}{8},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{8} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

- Apabila memenuhi kondisi berikut:

$$d(x,z) = \frac{1}{6},$$

$$d(x,y) = \frac{1}{8},$$

$$d(y,z) = \frac{1}{6},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{6} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$$

- Apabila memenuhi kondisi berikut:

$$d(y,z) = \frac{1}{6},$$

$$d(y,x) = \frac{1}{6},$$

$$d(x,z) = \frac{1}{6},$$

Maka diperoleh:

$$\frac{1}{6} = d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Karena keenam kemungkinan terpenuhi, maka terbukti bahwa $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ untuk setiap $a,b,c \in X$. Karena d memenuhi kedua kondisi quasi metrik, maka d adalah quasi metrik pada himpunan X, lebih lanjut pasangan (X,d) merupakan ruang quasi metrik. Berdasarkan definisi ruang quasi metrik dapat ditarik suatu hubungan yang menyatakan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang quasi metrik namun tidak berlaku sebaliknya, pernyataan tersebut disajikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.1

Setiap ruang quasi metrik adalah ruang metrik (Zeyada dkk, 2006).

Contoh 4.2

Diberikan himpunan tak kosong $X = [0,1]$ dan pemetaan $d: X \times X \to [0,\infty)$ yang didefinisikan dengan:

$$d(x,y) = |x-y| + |x|$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Pasangan (X,d) merupakan ruang quasi metrik, tetapi bukan merupakan ruang metrik.

Bukti

Sebelum membuktikan bahwa pasangan (X,d) bukan merupakan ruang metrik akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa (X,d) merupakan ruang quasi metrik.

Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

(i) Akan dibuktikan bahwa jika $d(x,y) = d(y,x) = 0$ maka $x = y$.

Diketahui bahwa $d(x,y) = d(y,x) = 0$, berarti $|x-y| + |x| = |y-x| + |y| = 0$.

Berdasarkan sifat nilai mutlak diperoleh bahwa:

$|x-y| + |x| = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \wedge |x| = 0 \Leftrightarrow x = y \wedge x = 0$

$|y-x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |y-x| = 0 \wedge |y| = 0 \Leftrightarrow x = x \wedge y = 0$

Maka diperoleh bahwa $x = y$.

(ii) Akan dibuktikan bahwa $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Menggunakan sifat ketaksamaan segitiga diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| + |x| \\ &= |x-z+z-y| + |x| \\ &\leq |x-z| + |z-y| + |x| \\ &\leq |x-z| + |z-y| + |x| + |z| \\ &= |x-z| + |x| + |z-y| + |z| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Karena d memenuhi kedua kondisi quasi metrik, maka d merupakan quasi metrik pada himpunan X, lebih lanjut pasangan (X, d) merupakan ruang quasi metrik.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pasangan (X, d) bukan merupakan ruang metrik. Fungsi d bukan merupakan metrik pada himpunan X, karena terdapat $1 \in X$ tetapi $d(1,1) = |1-1| + |1| = 1 \neq 0$, dengan kata lain fungsi d tidak memenuhi kondisi metrik. Jadi pasangan (X, d) bukan merupakan ruang metrik.

Berdasarkan uraian definisi ruang quasi metrik dan hubungan antara ruang metrik dengan ruang quasi metrik dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada ruang metrik belum tentu berlaku pada ruang quasi metrik.

Berikut akan diberikan definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan fungsi kontraksi. Serta beberapa teorema yang melekat pada barisan konvergen dari barisan Cauchy di ruang quasi metrik.

Definisi 4.2

Diberikan ruang quasi metrik (X, d) dan barisan $(x_n) \subseteq X$. Barisan (x_n) dikatakan konvergen di ruang quasi metrik ke $x \in X$ apabila

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

Selanjutnya barisan (x_n) yang konvergen di ruang quasi metrik ke x dapat dinotasikan dengan $x_n \to x$. Dalam hal ini x disebut sebagai limit barisan di ruang quasi metrik (Zeyada dkk, 2006).

Contoh 4.3

Diberikan himpunan tak kosong $X = [0,1]$ dan ruang quasi metrik (X, d) dengan definisi pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ yaitu:

$$d(x,y) = |x-y| + |x|$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Jika barisan $(x_n) \subset X$ didefinisikan dengan:

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan (x_n) konvergen di ruang quasi metrik ke $0 \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Akan dibuktikan barisan (x_n) konvergen di ruang quasi metrik ke $0 \in \mathbb{R}$ dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} d(0, x_n) = 0$.

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) &= \lim_{n\to\infty} |x_n - 0| + |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x_n| + |x_n| = \lim_{n\to\infty} 2|x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{n}{n^2+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(0, x_n) &= \lim_{n\to\infty} |0 - x_n| + |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} |-x_n| + |x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n| + |x_n| = \lim_{n\to\infty} 2|x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{n}{n^2+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maka diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} d(0, x_n) = 0$. Jadi terbukti bahwa barisan (x_n) konvergen di ruang quasi metrik ke $0 \in \mathbb{R}$.

Definisi 4.3

Diberikan ruang quasi metrik (X, d) dan barisan $(x_n) \subseteq X$. Barisan (x_n) dikatakan barisan Cauchy apabila setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ atau $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ (Sharma dan Thakur, 2013).

Contoh 4.4

Diberikan himpunan tak kosong $X = [0,1]$ dan ruang quasi metrik (X, d) dengan definisi pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ yaitu:

$$d(x, y) = |x - y| + |x|$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Jika barisan $(x_n) \subset X$ didefinisikan dengan:

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan (x_n) adalah barisan Cauchy.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, berdasarkan hukum Archimedes maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu untuk setiap $n, m \geq n_0$ dengan asumsi $m > n$ diperoleh:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= |x_n, x_m| + |x_n| \\ &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{m-n}{nm} + \frac{1}{n} \\ &< \frac{m}{nm} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < 2\frac{1}{n_0} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

Definisi 4.4

Diberikan (X, d) adalah ruang quasi metrik. Barisan (x_n) pada X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $H \in \mathbb{N}$ maka $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk semua, $n, m \geq H$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

Teorema 4.1

Setiap barisan konvergen dalam ruang quasi metrik (X, d) adalah barisan Cauchy (D. Doitchinov, 1988).

Bukti:

Misalkan x_n adalah barisan konvergen dalam (X, d) dan $x_n \to x$. Ini berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat N sedemikian rupa sehingga untuk semua $n \geq N$, kita punya $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sekarang, perhatikan dua suku barisan x_n, yaitu x_m dan x_n dengan $m, n \geq N$. Ditunjukkan bahwa $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Dengan menggunakan sifat segitiga dalam ruang quasi metrik, kita punya $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n)$ karena $m, n \geq N$, maka kita punya $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat N sedemikian rupa sehingga untuk semua $m, n \geq N$, kita punya $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Ini menunjukkan bahwa x_n adalah barisan Cauchy.

Teorema 4.2

Setiap sub urutan dari barisan Cauchy adalah barisan Cauchy (D. Doitchinov, 1988).

Bukti:

Misalkan x_n adalah barisan Cauchy dan x_{n_k} adalah sub urutan dari x_n. Kita perlu menunjukkan bahwa x_{n_k} adalah barisan Cauchy. Karena x_n adalah barisan

Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat N sedemikian rupa sehingga untuk semua $m, n \geq N$, kita memiliki $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Sekarang, perhatikan bahwa untuk setiap $k, l \geq N$, kita memiliki $n_k, n_l \geq N$. Oleh karena itu, kita memiliki $|x_{n_k} - x_{n_l}| < \varepsilon$. Ini menunjukkan bahwa x_{n_k} adalah barisan Cauchy.

Terbukti, bahwa setiap sub urutan dari barisan Cauchy adalah barisan Cauchy.

Lemma 4.2

Barisan konvergen adalah barisan Cauchy (Hutahaean, 1994).

Bukti:

Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ dan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada H sehinhgga $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ jika $n > H$.

Jika $m > H$ dan $n > H$, maka ada $d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sehingga, $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + (x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Berarti (x_n) adalah barisan Cauchy.

Definisi 4.5

Ruang quasi metrik (X, d) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen di ruang quasi metrik (Zeyada dkk, 2006).

Contoh 4.5

Diberikan himpunan tak kosong $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dan pemetaan $d: X \times X \to [0, \infty)$ yang didefinsikan dengan:

$$d(x, y) = |x - y| + |x|$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Pasangan (X, d) merupakan ruang quasi metrik lengkap

Bukti:

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa pasangan (X, d) merupakan ruang quasi metrik. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pasangan (X, d) merupakan ruang quasi metrik lengkap.

Ambil sebarang barisan Cauchy $(x_n) \subset X$. Karena (x_n) adalah barisan Cauchy berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$|x_n, x_m| + |x_n| < \varepsilon$$

Karena $|x_n - x_m| + |x_n| < \varepsilon$ maka $|x_n - x_m| < \varepsilon$, dengan kata lain $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, misalkan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x. Jelas $x \in X$, karena barisan $\{x_n\} \subset X$ merupakan himpunan tertutup.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ konvergen di ruang quasi metrik $x \in X$, dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$.

Karena $\{x_n\} \subset X$ merupakan barisan Cauchy, maka diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) &= \lim_{n\to\infty} |x_n - x| + |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| x_n - \lim_{n\to\infty} x_m \right| + |x_n| \\
&= \lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| + |x_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} |x - x_n| + |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\lim_{m\to\infty} x_m - x_n\right| + \lim_{m\to\infty} |x_m|$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} |x_m - x_n| + |x_m|$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n)$$

$$= 0$$

Maka diperoleh

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (x, x_n) = 0$, dengan kata lain barisan $\{x_n\}$ konvergen di ruang quasi metrik ke $x \in X$. Jadi terbukti bahwa (X, d) adalah ruang quasi metrik lengkap.

Lemma 4.3

Limit barisan di ruang quasi metrik bernilai tunggal (Sharma dan Thakur, 2013).

Bukti

Ambil sebarang ruang quasi metrik (X, d), dan barisan konvergen di ruang quasi metrik $(x_n) \subseteq X$. Misalkan barisan (x_n) konvergen di ruang quasi metrik ke x dan y. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $x = y$. Karena barisan (x_n) konvergen di ruang quasi metrik ke x dan y, maka berdasarkan Definisi 4.2 berarti:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = \lim_{n\to\infty} d(y, x_n) = 0$$

Berdasarkan Definisi 4.1 (ii) perhatikan bahwa:

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

Dengan demikian maka:

$$\lim_{n\to\infty} d(x, y) < \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

Oleh karena itu berdasarkan Definisi 4.2 maka diperoleh $d(x, y) = 0$.

Selanjutnya berdasarkan Definisi 4.2 (ii) perhatikan bahwa:

$$d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x)$$

Dengan demikian maka:

$$\lim_{n\to\infty} d(y,x) < \lim_{n\to\infty} d(y,x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n,x)$$

Oleh karena itu maka diperoleh $d(y,x) = 0$.

Karena diperoleh $d(x,y) = d(y,x) = 0$, maka berdasarkan Definisi 4.2 (i) diperoleh bahwa $x = y$, dengan kata lain terbukti bahwa nilai limit barisan di ruang quasi metrik (X,d) Tunggal.

Berikut ini akan diberikan definisi fungsi kontraksi pada ruang quasi metrik.

Lemma 4.4

Barisan konvergen di suatu ruang metrik mempunyai titik limit tunggal (Hutahaean, 1994).

Bukti:

Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, $\lim_{n\to\infty} x_n = q, p \neq q$, maka $d(p,q) > 0$.

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang ada H sehingga $d(x_n,p) < \frac{\varepsilon}{2}, d(x_n,q) < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $n > n_0$.

$0 \leq d(p,q) \leq d(p,x_n) + d(x_n,q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sehingga $d(p,q) = 0$ ini bertentangan dengan $p \neq q$. Jadi $\lim_{n\to\infty} x_n$ adalah tunggal.

Lemma 4.5

Setiap barisan quasi metrik yang konvergen ke titik x_0 adalah konvergen ke x_0 (Zeyada dkk, 2006).

Bukti

Misalkan barisan $x_n = \frac{n}{n+1}$. Barisan ini konvergen ke 1, karena Ketika n mendekati tak terhingga, x_n mendekati 1. Namun $x_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$ tidak konvergen ke 1. Ketika mendekati 1, tetapi tidak benar-benar konvergen ke 1. Ini berarti bahwa kita tidak dapat mengasumsikan bahwa jika suatu barisan konvergen ke x_0, maka juga konvergen ke $x_{0.}$

Lemma 4.6

Limit dalam ruang quasi metrik adalah unik (Zeyada dkk, 2006).

Bukti

Kita dapat menggunakan sifat yang menyatakan bahwa jarak antara dua titik dalam ruang quasi metrik tidak lebih besar dari jumlah jarak antara titik tersebut dan titik lain dalam urutan tersebut. Dengan kata lain, jika kita memiliki dua limit x dan y, untuk urutan (x_n), kita dapat menulis: $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \rightarrow 0$ ketika $n \rightarrow \infty$ ini berarti bahwa jarak antara x dan y semakin kecil Ketika n semakin besar. Karena x dan y adalah limit dari urutan (x_n), kita tahu bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, ada N sedemikian rupa sehingga untuk semua $n > N$, memiliki: $d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ dan $d(x_n,y) < \frac{\epsilon}{2}$ dengan menggabungkan kedua ketidaksetaraan ini, kita medapatkan: $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < \epsilon$ karena ϵ adalah nilai absolut apa pun, kita dapat mengambil nilai absolut dari kedua sisi ketidaksetaraan ini untuk mendapatkan: $d(x,y) \geq -\epsilon$ karena x dan y adalah limit dari urutan (x_n), kita tahu bahwa untuk setiap $\epsilon > 0,$ ada N sedemikian rupa sehingga untuk semua $n > N$, kita memiliki: $d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ dan $d(x_n,y) < \frac{\epsilon}{2}$ dengan menggabungkan kedua ketidaksetaraan ini, kita medapatkan: $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < \epsilon$. Maka jarak antara kedua titik tersebut harus nol. Oleh karena itu, kedua limit tersebut harus sama, yang berarti limit dalam ruang quasi metrik adalsh unik.■

4.2 Kajian Penerapan Integrasi Topik Dengan Al-Qur’an

Allah SWT menciptakan jarak agar manusia dapat belajar dan memahami proses kehidupan. Jarak merupakan konsep terkait posisi manusia yang berada di ruang dan waktu. Bahkan ibadah yang ditetapkan Allah SWT seperti salat lima waktu dan puasa memiliki jarak. Jarak yang diciptakan Allah SWT mengandung Pelajaran bahwa hidup kita selalu berproses.

Sebagai makhluk Allah SWT, manusia dituntut untuk menjalani kehidupan dengan proses yang benar dan mengisi proses kehidupan dengan sebaik-baiknya. Salah satu contoh terkait menjalani kehidupan dengan proses yang benar dan sebaik mungkin dijelaskan pada Al-Qur’an yaitu terkait perhitungan amal baik dan buruk manusia di Bumi saat yaumul hisab nanti. Secara eksplisit, perhitungan amal baik dan buruk manusia di Bumi pada saat yaumul hisab nanti dijelaskan pada firman Allah SWT sebagai berikut.

QS. Al-Ghasyiyah:26

ثُمَّ إِنَّ عَلَيْنَا حِسَابَهُم ٢٦

Yang artinya: “kemudian, sesungguhnya Kamilah yang berhak melakukan hisab (perhitungan) atas mereka” (QS. Al-Ghasyiyah:26).

Pada ayat diatas, dijelaskan mengenai Allah SWT akan menghisab manusia atas perbuatan yang telah diperbuat di dunia dan kemudian menjatuhkan hukuman-Nya. Allah SWT juga memberikan peringatan kepada manusia tentang hari pertemuan, di mana segala sesutu akan terlihat dengan jelas, tanpa ada yang bisa menyembunyikan apapun. Hal ini menegaskan bahwa pada hari pertemuan tersebut, dengan firman Allah SWT, “Pada hari itu, hari pertemuan, setiap jiwa akan diberi balasan sesuai dengan perbuatannya di dunia. Pada hari itu tidak ada yang akan dirugikan atau dianiaya, karena Allah SWT Yang Maha Bijaksana akan melakukan perhitungan dengan sangat cepat (Kemenag, 2022).

Allah SWT akan selalu berlaku adil terhadap hamba-hamba-Nya. Di akhirat, setiap manusia akan menerima balasan berdasarkan usaha dan perbuatan mereka di dunia. Pada hari itu, tidak ada seorang pun yang akan dianiaya dan dirugikan. Orang yang berbuat baik akan menerima balasan baik tanpa pengurangan, dan orang yang berbuat jahat akan menerima balasan yang setimpal dengan kejahatannya. Balasan dari kejahatannya tidak akan ditambah sedikit pun. Hisab dan perhitungan amal tidak akan ditunda atau ditangguhkan untuk siapapun. Allah SWT juga menjelaskan bahwa saat hari perhitungan, ketika manusia dibangkitkan dari kubur dan diarahkan ke Padang Mahsyar, setiap orang akan diadili di hadapan-Nya sesuai dengan janji-Nya (Kemenag, 2022).

Allah SWT menekankan bahwa semua kenikmatan di surga merupakan janji bagi hamba-hamba Allah SWT yang bertakwa, yang pasti akan terwujud setelah seluruh manusia dibangkitkan dari kubur, dan diadili di Padang Mahsyar. Kenikmatan di surga bukanlah kenikmatan biasa, tetapi kenikmatan yang kekal (Kemenag, 2022).

Berdasarkan pemaparan ayat di atas, secara eksplisit dijelaskan mengenai besaran amal yang akan hisab dikarekan disebutkan akan perhitungan amal dan peringatan akan balasan-Nya. Perhitungan amal ini menunjukkan suatu besaran amal. Kemudian, Terkait perhitungan amal baik dan buruk manusia di Bumi pada saat yaumul hisab nanti dijelaskan pada firman Allah SWT yaitu pada QS. Al-Zalzalah pada ayat 7-8 sebagai berikut.

لَهَا يَومَئِذ مِثقَالَ ذَرَّةٍ خَيرا يَرَهُۥ ٧ وَمَن يَعمَل مِثقَالَ ذَرَّة شَرّا يَرَهُۥ ٨

yang artinya: *"Siapa yang mengerjakan kebaikan seberat zarah, dia akan melihat (balasan)-nya; siapa yang mengerjakan kejahatan seberat zarah, dia akan melihat (balasan)-nya" (QS. Al-Zalzalah:7-8).*

Pada ayat di atas, dijelaskan bahwa setiap manusia akan mengetahui nasibnya sendiri. Siapapun mengerjakan kebaikan sekecil zarrah akan melihatnya dalam catatan amalnya dan menerima pahalanya. Dia akan merasa senang dan bahagia karena perbuatannya tidak sia-sia. Sebaliknya, siapapun yang melakukan kejahatan sekecil zarrah dan menganggapnya remeh juga akan melihatnya dalam catatan amalnya dan menerima balasannya. Ini merupakan bukti keadilan Allah SWT, yang tidak menzalimi siapa pun (Kemenag, 2022).

Allah SWT menjelaskan secara rinci balasan untuk setiap amal manusia. Siapapun yang beramal baik, meskipun seberat atom, pasti akan menerima balasannya. Begitu pula dengan yang beramal jahat, meskipun hanya sebesar atom, akan merasakan balasannya. Amal kebajikan orang-orang kafir tidak dapat menolong atau membebaskan mereka dari siksa karena kekafirannya. Mereka akan tetap menderita selama-lamanya di neraka. Dalam hal ini, kebaikan dan kejahatan akan diperhitungkan walaupun seberat zarah. Sehingga, konsep perhitungan dalam matematika berkaitan erat dengan konsep-konsep ukuran dalam Al-Quran.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada bab IV, dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang quasi metrik, namun tidak berlaku sebaliknya. Sifat ketunggalan limit barisan di ruang metrik berlaku pula di ruang quasi metrik. Tidak semua sifat barisan yang berlaku di ruang metrik berlaku di ruang quasi metrik, hal tersebut berdasarkan hubungan antara ruang metrik dengan quasi metrik. Pemetaan f serta terdefinisi pada ruang quasi metrik (X, d) mempunyai titik tetap yang tunggal. Dalam membuktikan teorema tersebut mengabaikan sifat kekontinuan fungsi, dan memanfaatkan sifat kelengkapan pada ruang quasi metrik.

Harapan penulis, penelitian ini dapat menjadi kontribusi penting di masa mendatang untuk memberikan pemahaman terkait ruang quasi metrik, sekaligus memperkaya rujukan terkait sifat-sifat raung quasi metrik. Selain itu, penelitian ini memiliki potensi untuk memberikan informasi yang dapat digunakan untuk menganalisis berbagai jenis data.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya berfokus menuliskan sifat-sifat ruang quasi metrik. Oleh karena itu peneliti memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini, harapannya penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi pada pengembangan teori ruang quasi metrik, tetapi juga membuka jalur penelitian lebih lanjut yang dapat diterapkan dalam konteks yang lebih luas.

DAFTAR PUSTAKA

Bahtiar, A.R. 2012. *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Yogyakarta: Jurusan Matematika F. Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory functional analysis with applications*. Willey Classic Library, New York.

Firdaus, F., Sunarsini, dan Sadjidon. 2013. Konvergensi dan kelengkapan pada Ruang Quasi Metrik $\mathbb{R}^2$. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, 2, (1):1-6.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed). Amerika Serikat: Wiley.

Bahtiar, A.R. 2012. *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Yogyakarta: Jurusan Matematika F. Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

Firdaus, F., Sunarsini, dan Sadjidon. 2013. Konvergensi dan kelengkapan pada Ruang Quasi Metrik $\mathbb{R}^2$. *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, 2, (1):1-6.

Kelly, J.C.: Bitopological spaces. Proc Lond. Math. Soc. S3-13(1), 71-89 (1963).

Aminpour, A.M.: Some results in asymmetric metric spaces. Math. Aterna 2(6), 533-540 (2012).

Brattka, V.: Generated quasi-metric hyper and function space. Topol. Appl. 127, 355-373 (2003).

Cobzas, S.: Completeness in quasi metric spaces and Ekeland variational principle. Topol. Appl. 158, 1073-1084 (2011).

Collins, J., Zimmer, J.: An asymmetric Arzela-Ascoli theorem. Topol. Appl. 154, 2312-2322 (2007).

Gaba, Y.U.: Startpoints and α, γ-contractions in quasi-pseudometric spaces. J. Math. 2014, Article ID 709253 (2014).

Khorshidvandpour, S., Mosaffa, M., Mousavi, S.M.: Some fixed Point theorems in asymmetric metric space. Sci. Magna 9(2), 13-17 (2013).

Kunzi, H.P.A.: A note on sequentially compact quasi-pseudo-metric spaces. Monatshefte Math. 95(3), 219-220 (1983).

Piri, H., Kumam, K.: Some fixedPoint theorems concerning F-contraction in complete metric space. Fixed Point Theory Appl. 2014, 210 (2014).

Reilly, I.I., Subrahmanyam, P.V., Vamanamurthy, M.K.: Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric space. Monatshefte Math. 93, 127-140 (1982).

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Mesir: Willey.

Tyagi, B, dkk (2010).

Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. 3th. USA: John Wiley and Sons.

Abidin, Yunus. 2019. *Konsep Dasar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Bumi Aksara.

Doitchinov. Topology and its Applications 30 (1988) 127-148.

Zeyada, F. M., Hassan, G.H., and Ahmed, M.A. A *Generalization of A Fixed Point Theorem Due to Hizler and Seda in Dislocated Quasi Metric Spaces*. The Arabian Journal for Science and Engineering (2006) 111-114.

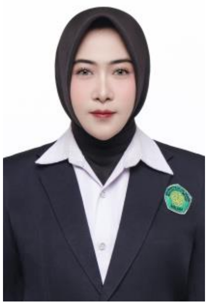
Sharma, Rajinder and Thakur, Deepti. *Fixed Point Theorems without Continuity of any Mapping in Dislocated Quasi Metric Space*. Int. Journal of Math. Analysis (2013) 59-64.

Bartle, R. G and Sherbert, D.R (2010). Introduction to Real Analysis. Fourth Edition, New York: John Willey & Sons, Inc.

Hutahaean, E. 1994. *Fungsi Riil*. Bandung Penerbit ITB.

Kemenag. (2022). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/. Diakses pada tanggal 20 Mei 2024.

RIWAYAT HIDUP



Tirta Rosa Nurfadila, lahir di Makassar pada tanggal 4 Maret 2001. Putri ke satu dari dua bersaudara dari Ayah Sumanto dan Bunda Almh. Wiji Kanipah. Ia dibesarkan di rumah sederhana yang terletak di RT.002 RW.002 Dusun Kempleng Desa Kempleng Kecamatan Purwoasri Kabupaten Kediri.

Perempuan dengan sapaan Oca ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari taman kanak-kanak di TK Dharma Wanita yang lulus pada tahun 2008, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN Kempleng 1. Setelah lulus SD pada tahun 2014, ia melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Kunjang yang lulus pada tahun 2017, kemudian di SMA Negeri 1 Kertosono yang lulus pada tahun 2020. Pada saat SMP dan SMA, ia juga menempuh pendidikan non-formal di Pondok Pesantren Tarbiyatul Qur'an Ulin Nuha Malang selama 1 tahun. Pada tahun 2020, ia tercatat sebagai mahasiswi di Jurusan Matematika murni Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Perempuan asal Kediri ini mulai aktif mengikuti organisasi sejak SMP. Ia mengikuti organisasi Ikatan Pelajar Putri Nahdlatul Ulama dalam 2 periode. Periode pertama, ia hanya sebagai anggota dan periode kedua ia menjabat sebagai pengurus divisi. Saat SMA pun ia juga mengikuti organisasi yang sama, yakni Ikatan Pelajar Putri Nahdlatul Ulama yang menjabat sebagai ketua pengurus dan pada organisasi Sie Kerohanian Islam, ia menjabat sebagai Sekretaris. Kemudian ia juga mengikuti organisasi Pengurus Anak Cabang Kecamatan Purwoasri ia menjabat sebagai pengurus divisi. Saat kuliah, ia juga mengikuti organisasi Senyum Anak Nusantara Chapter Kediri. Selanjutnya ia juga pernah mengikuti organisasi kepanitian KOMET selama 3 tahun dan organisasi HMJ Integral Matematika yang menjabat sebagai anggota pengurus divisi Internal Public Relations.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Tirta Rosa Nurfadila
NIM	: 200601110048
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Ruang Quasi Metrik
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II	: Evawati Alisah, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Januari 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	2 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	27 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	5 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	13 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	27 Maret 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	1 April 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	12 April 2024	ACC Seminar Proposal	8.
9.	1 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	9.
10.	6 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	19 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	1 Juli 2024	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	24 Juli 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	13.
14.	2 Agustus 2024	ACC Bab IV dan V	14.
15.	12 September 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	15.
16.	18 Oktober 2024	ACC Seminar Hasil	16.

Dipindai dengan CamScanner

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	19 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	17.
18.	20 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	18.
19.	10 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	19.
20.	24 Desember 2024	ACC Keseluruhan	20.

Malang, 24 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner