SIFAT-SIFAT DASAR RUANG BERNORMA RIESZ

NASKAH SKRIPSI

OLEH:

HALIMAH TUSAADIAH

NIM. 210601110063

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

2024

SIFAT-SIFAT DASAR RUANG BERNORMA RIESZ

NASKAH SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH:
Halimah Tusaadiah
NIM. 210601110063

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT-SIFAT DASAR RUANG BERNORMA RIESZ

SKRIPSI

Oleh
Halimah Tusaadiah
Nim. 210601110063

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 21 November 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT DASAR RUANG BERNORMA RIESZ

SKRIPSI

Oleh
Halimah Tusaadiah
Nim. 210601110063

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Seminar Hasil Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperloleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 20 Desember 2024

Ketua Penguji:	Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji 1	Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 2	Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Halimah Tusaadiah
NIM	: 210601110063
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Dasar Ruang Bernorma Riesz

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudin hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatam tersebut.

Malang, 20 Desember 2024

Yang membuat pernyataan,

Halimah Tusaadiah

NIM. 210601110063

MOTO

“Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya.”

(QS. Al-Baqarah [286]:2).

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini untuk: Alm. Ayah Muhamad, Ibu Fatimah, yang senantiasa dengan ikhlas melangitkan doa-doanya, memberi nasihat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta untuk kakak Khairunnisa dan kakak Zulfa yang selalu membantu serta menyemangati setiap harinya dalam proses menyelesaikan tugas akhir.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Segala puji dan syukur atas kehadirat Allah SWT dengan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan alam, Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing umat manusia keluar dari zaman jahiliah menuju cahaya terang yaitu agama islam. Skripsi ini disusun sebagai bagian dari pemenuhan sks untuk menyelesaikan mata kuliah Skripsi Matematika pada Fakultas Sains dan Teknolog Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selesainya penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dorongan bermacam pihak, sebab itu ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua sekaligus dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, dan nasihat selama menyusun proposal skripsi.
4. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, dan pengetahuan selama Menyusun proposal skripsi.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen wali yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, dan pengetahuan selama Menyusun proposal skripsi.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
7. Almarhum ayah Muhamad, Ibu Fatimah, Kakak Khairunisah, Kakak Zulfa dan keluarga besar di Bima yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan motivasi.

8. Puji, Utari, Tita, Qosi dan Vivi yang selalu mendukung, mendoakan serta memberikan motivasi.
9. Seluruh mahasiswa angkatan 2021 yang saling mendukung dan mendoakan antar sesama.

Wassalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Malang, 20 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\cap$	: Irisan
$\vee$	: *meet*
$\wedge$	: Join
$\|.\|$	: Norm
$\sum$	: Sigma/penjumlahan berulang
$\rightarrow$	: Menuju
$\sup(S)$	: Supremum dari Himpunan S
$\inf(S)$	: Infimum dari Himpunan S
$\forall$	: Untuk semua
$\exists$	: Terdapat
$\in$	: Elemen dari
K	: *Cone*
α	: Alfa
β	: Beta
ρ	: Semi-norm
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}^3$	: Himpunan bilangan real pada dimensi 3
$\|a\|$	: Nilai mutlak dari a
$(M, \leq)$	: Himpunan Terurut M
V	: Ruang Vetor
V_+	: *Cone* Positif pada Ruang Vektor
E	: Ruang Riesz
E_+	: *Cone* Positif pada Ruang Riesz
s^+	: *Positive Part*
s^-	: *Negative Part*
$\lim_{n\to\infty} s_n$	: Limit barisan
$(E, \|.\|)$	: Ruang Bernorma Riesz

ABSTRAK

Tusaadiah, Halimah. 2024. **Sifat-Sifat Dasar Ruang Bernorma Riesz**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: *Cone*, *Cone* positif, lattice, norm, Ruang Vektor, Ruang Riesz, Ruang Bernorma Riesz.

Ruang Bernorma Riesz merupakan konsep perluasan dari Ruang Vektor yang memenuhi syarat keterurutan, lattice dan norm. Keterurutan yang dimaksudkan dalam hal ini adalah relasi $\leq$ yang memenuhi syarat refleksif, antisimetri dan transitif. Lattice adalah suatu himpunan terurut yang memiliki batas atas terkecil atau supremum dan batas bawah terbesar atau infimum. Seperti halnya Ruang Vektor yang memiliki sifat-sifat dasar yaitu tertutup, komutatif, assosiatif, identitas, invers maupun distributif, Ruang Bernorma Riesz juga memiliki beberapa sifat-sifat dasar yang dibahas dalam penelitian ini. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa operasi lattice pada Ruang Bernorma Riesz bersifat kontinu, *cone* positif yang bersifat tertutup dan nilai limit sama dengan nilai supremum.

ABSTRACT

Tusaadiah, Halimah. 2024. **Basic Properties of Normed Riesz space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Supervisor: (1) Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Cone, lattice, norm, Positive Cone, Riesz Space, Normed Riesz Space, Vector Space.

Normed Riesz Space is an extended concept of Vector Space that satisfies the conditions of order, lattice and norm. The order referred to in this case is the ≤ relation that satisfies the reflexive, antisymmetry and transitive conditions. Lattice is an ordered set that has the smallest upper limit or supremum, and the largest lower limit or infimum. Like Vector Space which has basic properties such as closed, commutative, associative, identity, inverse and distributive, Normed Riesz Space also has some basic properties which are discussed in this research. The results of this study show that the lattice operation on Normed Riesz Space is continuous, a positive cone that is closed and the limit value is equal to the supremum value.

مستخلص البحث

توسعدية ، حليمة. ٢٠٢٤. **الخصائص الأساسية للفضاءريزالمعياري**. البحث العلمي. قسم الرياضيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ، مالانج. المشرف: (١) إيلي سوسانتي،الما جستيرة،المشرف الثاني (٢) إران هياوايت،املاجستية

الكلمات المفتحية: *مخروط، مخروط موجي، شبكلة، معيار،* فضاء متجه، فضاءريز، فضاءريزالمعياري

فضاءريزالمعياري هو مفهوم موسع للفضاء المتجه الذي يحقق شروط الرتبة والشبكة والقاعدة. الرتبة المشار إليها في هذه الحالة هي العلاقة $\preceq$ التي تحقق الشروط الانعكاسية وغير المتماثلة والمتعدية. الشبكة الشبكية هي مجموعة مرتبة لها الحد الأعلى الأصغر أو سوبريموم الحد الأعلى والحد الأدنى الأكبر أو انفيموم. وعلى غرار الفضاء المتجه الذي يتمتع بخصائص أساسية مثل المغلق والإبدالي والتجميعي والجمعي، والهوية والعكس والتوزيع، فإن فضاءريزالمعياري له بعض الخصائص الأساسية التي نوقشت في هذا البحث.
طهرت نتيجة هذا البحث أن العملية الشبكية على فضاء ريز العددي متواصلة، مخروطية موجبة ومغلقة وقيمة النهاية تساوي قيمة القمة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang Vektor V atas lapangan real $\mathbb{R}$ adalah himpunan tak kosong yang terdiri dari elemen-elemen vektor $s, t \in V$ dan disertai dua operasi aljabar, operasi ini adalah penjumlahan antar vektor dan perkalian vektor dengan skalar, dan skalar anggota dari lapangan real $\mathbb{R}$ (Kreyszig, 1979). Ruang Vektor memiliki beberapa sifat dalam operasinya, antara lain bersifat tertutup terhadap penjumlahan, komutatif, assosiatif, identitas, dan invers vektor terhadap penjumlahan. Sedangkan dalam operasi perkalian skalar dengan vektor memiliki beberapa sifat, antara lain bersifat tertutup terhadap perkalian, assosiatif, identitas, distributif perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor dan distributif penjumlahan terhadap perkalian skalar (Anton & Rorres, 2017).

Ruang Vektor E atas lapangan real $\mathbb{R}$ dikatakan Ruang Vektor terurut apabila urutan dan struktur Ruang Vektor adalah kompatibel, artinya untuk $h, i \in E$ dengan $h \leq i$, memenuhi $h + j \leq i + j$ untuk setiap $j \in E$ dan $mh \leq mi$ untuk bilangan real m tak negatif. Apabila $(E, \leq)$ adalah lattice, maka E dikatakan Ruang Riesz (W.A.J, 1971). Dalam hal ini akan disepakati E sebagai Ruang Riesz. Lattice adalah suatu himpunan terurut yang memiliki batas atas terkecil atau supremum dan batas bawah terbesar atau infimum. Sedangkan himpunan terurut adalah himpunan tak kosong M dengan relasi $\leq$ yang memenuhi syarat refleksif, antisimetri dan transitif.

Ruang Riesz memiliki banyak cabang, salah satunya Ruang Bernorma Riesz. Ruang Bernorma Riesz merupakan Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm. Norm merupakan suatu fungsi bernilai real dalam Ruang Vektor yang nilainya dilambangkan dengan $\|.\|$ dan memiliki beberapa sifat antara lain non-negatif, identitas definit, linearitas skalar atau homogenitas dan ketaksamaan segitiga (Kreyszig, 1979). Apabila semi-norm p pada E memenuhi $p(h) \leq p(i)$ ketika $|h| \leq |i|$ maka dikatakan lattice semi-norm dan p dikatakan lattice norm apabila p adalah norm. Dalam kasus lain $(E, ||.||)$ dikatakan Ruang Bernorma Riesz (Meyer-Nieberg, 1991). Semi norm adalah suatu fungsi pada Ruang Vektor V yang memiliki tiga sifat yaitu non-negatif, identitas definit dan ketaksamaan segitiga (Pedro, 1995).

Ruang Bernorma Riesz memiliki beberapa sifat-sifat dasar seperti operasi latticenya bersifat kontinu, *cone* positif yang bersifat tertutup dan nilai limit sama dengan nilai supremum. *cone* positif adalah himpunan setiap elemen dalam Ruang Riesz yang memenuhi tiga syarat yaitu *positive part*, *negative part* dan *absolute value* (Schaefer, 1974).

Seperti dijelaskan dalam hadis Rasulullah Saw, setiap manusia lahir dalam keadaan suci, dalam artian setiap individu pada dasarnya mempunyai sifat fitrah pada dirinya, sama halnya dengan Ruang Bernorma Riesz yang juga memiliki sifat-sifat dasar yang nantinya akan dijelaskan pada penelitian ini. Berikut hadis Rasulullah Saw yang menjelaskan mengenai sifat dasar yang dimiliki manusia:

حَدَّثَنَا زُهَيْرُ بْنُ حَرْبٍ حَدَّثَنَا جَرِيرٌ عَنْ الْأَعْمَشِ عَنْ أَبِي صَالِحٍ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ مَا مِنْ مَوْلُودٍ إِلَّا يُولَدُ عَلَى الْفِطْرَةِ فَأَبَوَاهُ يُهَوِّدَانِهِ وَيُنَصِّرَانِهِ وَيُشَرِّكَانِهِ

Artinya:"*Telah menceritakan kepada kami Zubair bin Harb telah menceritakan kepada kami Jarir dari Al A'masy dan Abu Shalih dari Abu Hurairah dia berkata, Rasulullah Saw bersabda: Tidaklah seorang bayi yang dilahirkan melainkan dalam* *keadaan fitrah, maka bapaknyalah yang menjadikannya Yahudi, atau Nasrani atau Musyrik*" (HR. Muslim 4805).

Hadis tersebut menjelaskan bahwa setiap manusia pada dasarnya lahir dalam keadaan suci, yang menyebabkan manusia itu bisa melakukan hal-hal negatif maupun jauh dari norma-norma agama adalah karena lingkungan, baik lingkungan keluarga, teman maupun lingkungan masyarakat.

Berdasarkan beberapa penjelasan mengenai Ruang Bernorma Riesz dan integrasinya dalam al-qur'an, maka penelitian ini akan membahas tentang sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz disertai dengan pembuktiannya.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz dan pembuktiannya?.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dan membuktikan sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi penelitian-penlitian selanjutnya yang berkaitan dengan sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz, dengan domainnya Ruang Vektor atas lapangan Real.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Vektor

   Ruang Vektor V atas lapangan Real adalah himpunan tak kosong yang terdiri dari elemen-elemen vektor s, t yang disertai dengan dua operasi aljabar, operasi ini adalah penjumlahan terhadap vektor dan perkalian vektor terhadap skalar (Anton & Rorres, 2017).

2. Definisi Lattice

   Lattice adalah suatu himpunan memiliki supremum dan infimum (Aliprantis, 2003).

3. Definisi *Cone* Positif

   Cone positif adalah elemen dalam Ruang Riesz yang memenuhi syarat *positive part, negative part* dan *absolute value* (Meyer-Nieberg, 1991).

4. Definisi Ruang Riesz (Vektor lattice)

   Ruang Riesz adalah Ruang Vektor terurut yang memenuhi syarat lattice dan *cone* positif (W.A.J, 1971).

5. Ruang Bernorma

   Ruang Bernorma adalah Ruang Vektor disertai dengan sebuah norm yang memiliki beberapa sifat antara lain non-negatif, identitas definit, linearitas skalar dan ketaksamaan segitiga (Kreyszig, 1979).

6. Definisi Ruang Bernorma Riesz

   Ruang Bernorma Riesz adalah adalah Ruang Riesz yang disertai dengan norm (Meyer-Nieberg, 1991).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Vektor

Ruang Vektor adalah himpunan yang terdiri dari dua elemen dan disetrai dengan dua operasi aljabar. Ruang Vektor memberikan pemahaman penting sebelum mempelajari sifat-sifat Ruang Bernorma Riesz. Sehingga, dalam penelitian ini perlu mendefinisikan tentang Ruang Vektor terlebih dahulu.

Definisi 2.1 (Anton & Rorres, 2017)

Ruang Vektor V atas lapangan Real $\mathbb{R}$ adalah himpunan tak kosong yang terdiri dari elemen-elemen $s, t \in V$ (dikatakan vektor) apabila disertai dua operasi aljabar, operasi ini adalah penjumlahan terhadap vektor dan perkalian vektor terhadap skalar (Anton & Rorres, 2017).

Operasi penjumlahan vektor memiliki beberapa sifat sebagai berikut.

1. Tertutup terhadap penjumlahan

$$\forall\, s, t \in V \text{ berlaku } (s + t \in V)$$

2. Komutatif terhadap penjumlahan

$$\forall\, s, t \in V \text{ berlaku } (\, s + t = t + s)$$

3. Assosiatif terhadap penjumlahan

$$\forall\, s, t, u \in V \text{ berlaku } \ (\, s + (t + u) = (s + t) + u)$$

4. Identitas terhadap penjumlahan

$$\exists\, 0 \in V \ni 0 + s = s + 0 = s,\ \forall\, s \in V$$

5. Invers vektor terhadap penjumlahan

$$\exists\,(-s) \in V \ni s + (-s) = (-s) + s = 0$$

Operasi perkalian skalar dengan vektor memiliki beberapa sifat sebagai berikut.

1. Tertutup terhadap perkalian

$$\forall\, s \in V \text{ dan } k \in \mathbb{R} \text{ berlaku } (ks \in V)$$

2. Assosiatif

$$\forall\, s \in V \text{ dan } k, l \in \mathbb{R} \text{ berlaku } (\ k(ls) = (kl)s)$$

3. Identitas terhadap perkalian

$$\exists\, 1 \in \mathbb{R} \ni 1s = s$$

4. Distributif perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor

$$\forall\, s, t \in V \text{ dengan } k \in \mathbb{R} \text{ maka berlaku } (k(s+t) = ks + kt)$$

5. Distributif penjumlahan terhadap perkalian skalar

$$\forall\, s \in V \text{ dan } k, l \in \mathbb{R} \text{ maka berlaku } \big((k+l)s = ks + ls\big).$$

Contoh 2.1

Buktikan $\mathbb{R}^2$ adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Bukti:

Diambil sebarang $e, f, g \in \mathbb{R}^2$, $k, l \in \mathbb{R}$ dan $1 \in \mathbb{R}$ dengan $e = (e_1, e_2)$, $f = (f_1, f_2)$ dan $g = (g_1, g_2)$.

Akan dibuktikan:

Penjumlahan vektor:

1. $e + f \in \mathbb{R}^2$ (Tertutup)

   Perhatikan:

$$e + f = (e_1, e_2 + f_1, f_2)$$

$= (e_1 + f_1, e_2 + f_2) \in \mathbb{R}^2$

2. $e + f = f + e$

   Perhatikan bahwa:

   $e + f = (e_1, e_2) + (f_1, f_2)$

   $= (e_1 + f_1, e_2 + f_2)$

   Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

   $= (f_1 + e_1, f_2 + e_2)$

   $= (f_1, f_2) + (e_1, e_2)$

   $= f + e$

3. $e + (f + g) = (e + f) + g$

   Perhatikan bahwa:

   $e + (f + g) = (e_1, e_2) + ((f_1, f_2) + (g_1, g_2))$

   $= (e_1, e_2) + (f_1 + g_1, f_2 + g_2)$

   $= (e_1 + f_1 + g_1, e_2 + f_2 + g_2)$

   $= ((e_1 + f_1) + g_1, (e_2 + f_2) + g_2))$

   $= (e_1 + f_1, e_2 + f_2) + (g_1, g_2)$

   $= ((e_1, e_2) + (f_1, f_2)) + (g_1, g_2)$

   $= (e + f) + g$

4. $0 + e = e + 0 = e$

   Perhatikan bahwa:

   Ada $0 \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $e \in \mathbb{R}^2$ sehingga $0 + e = e + 0 = e$,

   $0 + e = (0,0) + (e_1, e_2)$

   $= (0 + e_1, 0 + e_2)$

   Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

$$= (e_1 + 0, e_2 + 0)$$

$$= (e_1, e_2)$$

$$= o$$

5. $e + (-e) = 0$

   Perhatikan bahwa:

   Terdapat $-e \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $e \in \mathbb{R}^2$ sehingga $e + (-e) = e + (-e) = 0$

$$e + (-e) = (e_1, e_2) + (-e_1, -e_2)$$

$$= (e_1 + (-e_1), e_2 + (-e_2))$$

   Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

$$= ((-e_1) + e_1, (-e_2) + e_2)$$

$$= (0,0)$$

$$= 0$$

Perkalian terhadap skalar:

6. $ke \in \mathbb{R}^2$ (Tertutup)

   Perhatikan bahwa:

$$ke = k(e_1, e_2)$$

$$= (ke_1, ke_2) \in \mathbb{R}^2$$

7. $(k + l)e = ke + le$

   Perhatikan bahwa:

$$(k + l)\, e = (k + l)(e_1, e_2)$$

$$= (ke_1, ke_2) + (le_1, le_2)$$

$$= (ke_1 + le_1, ke_2 + le_2)$$

$$= ke + le$$

8. $k(e+f) = ke + kf$

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
k(e+f) &= k(e+f) \\
&= k((e_1, e_2) + (f_1, f_2)) \\
&= k(e_1 + f_1, e_2 + f_2) \\
&= (k(e_1 + f_1), k(e_2 + f_2)) \\
&= (ke_1 + kf_1, ke_2 + kf_2) \\
&= ke + kf
\end{aligned}
$$

9. $(kl)e = k(le)$

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(kl)e &= (kl)(e_1, e_2) \\
&= (kle_1, kle_2) \\
&= k(le_1, le_2) \\
&= k(le)
\end{aligned}
$$

10. $1e = e$

Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
1e &= 1(e_1, e_2) \\
&= (e_1, e_2) \\
&= e
\end{aligned}
$$

Karena $\mathbb{R}^2$ memenuhi sepuluh sifat tersebut, maka terbukti $\mathbb{R}^2$ adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

2.1.2 *Cone*

Cone adalah himpunan bagian tak kosong dari Ruang Vektor yang memenuhi tiga syarat. Berikut definisi lengkap dari *cone*.

Definisi 2.3 (Charalambos & Rabee, 2007)

Himpunan bagian tak kosong K dari Ruang Vektor dikatakan *cone* apabila memenuhi:

1. $K + K \subseteq K$
2. $\alpha K \subseteq K$ untuk setiap $\alpha \geq 0$
3. $K \cap (-K) = \{0\}$

2.1.3 Himpunan Terurut

Himpunan terurut adalah himpunan yang dilengkapi dengan suatu relasi pembanding. Untuk lebih jelasnya, berikut definisi dari himpunan terurut.

Definisi 2.4 (Schaefer, 1974)

Diberikan himpunan tak kosong M dan $e, f, g \in M$. Diberikan relasi $\leq$. relasi $\leq$ dikatakan urutan apabila memenuhi:

1. $e \leq e$ untuk setiap $e \in M$
2. $e \leq f$ dan $f \leq e$ jika dan hanya jika $e = f$ dan
3. $e \leq f$ dan $f \leq g$ jika dan hanya jika $e \leq g$.

$(M, \leq)$ dikatakan himpunan terurut.

Contoh 2.2

Diberikan himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dengan $s, t, u \in \mathbb{Q}$. Himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan terurut dengan relasi $\leq$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$s \leq t$ jika dan hanya jika $s - t$ suatu bilangan non negatif.

Bukti.

1. Ambil sebarang $s, t \in \mathbb{Q}$

   Akan dibuktikan untuk setiap $s \leq s$ untuk setiap $s \in \mathbb{Q}$

   Berdasarkan definisi, $s \leq s$ berarti haruslah bilang positif atau nol

   Karena $s - s = 0$, karena 0 bilangan non-negatif, maka $s \leq s$ untuk setiap $s \in \mathbb{Q}$ terbukti.

2. Akan dibuktikan untuk setiap $s, t \in \mathbb{Q}$ berlaku apabila $s \leq t$ dan $t \leq s$ jika dan hanya jika $s = t$

   Dari definisi relasi, diketahui $s \leq t$, artinya $s - t \geq 0$ mengakibatkan dua kemungkinan, yaitu $s - t = 0$ atau $s - t > 0$.

   Karena $t \leq s$ artinya $t - s \geq 0$ mengakibatkan dua kemungkinan, yaitu $t - s = 0$ atau $t - s > 0$.

   Karena akan dibuktikan $s = t$ maka diambil kemungkinan $s - t = 0$ dan $t - s = 0$.

   Perhatikan bahwa:

   $$s - t = 0$$

   $$s = t$$

   Jadi terbukti bahwa setiap $s, t, u \in \mathbb{Q}$ berlaku apabila $s \leq t$ dan $t \leq s$ jika dan hanya jika $s = t$

3. Akan dibuktikan untuk setiap $s, t, u \in \mathbb{Q}$ berlaku apabila $s \leq t$ dan $t \leq u$ jika dan hanya jika $s \leq u$.

   Ambil sebarang $s, t, u \in \mathbb{Q}$.

   Dari definisi relasi, diketahui $s \leq t$, artinya $s - t \geq 0$ dan $t \leq u$ artinya $t - u \geq 0$

Untuk menunjukan bahwa $s \leq u$, maka akan ditunjukkan $s - u \geq 0$

Perhatikan bahwa:

$$s - u = (s - t) + (t - u)$$

Karena $s - t$ dan $t - u$ non-negatif maka $s - u \geq 0$

Berdasarkan poin 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan terurut dengan relasi $\leq$.

2.1.4 Lattice

Lattice adalah himpunan terurut yang di dalamnnya memiliki supremum dan infimum. Untuk lebih jelasnya, berikut definisi mengenai batas atas, batas bawah, supremum, infimum dan lattice.

Definisi 2.5 (Robert G., 2010)

Misalkan S himpunan tak kosong dan subset pada $\mathbb{R}$. Didefinisikan:

1. Himpunan S dikatakan terbatas di atas apabila terdapat bilangan $u \in \mathbb{R}$ sehingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan u dikatakan batas atas pada S.
2. Himpunan S dikatakan terbatas di bawah apabila terdapat bilangan $w \in \mathbb{R}$ sehingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Bilangan w dikatakan batas bawah pada S.

Definisi 2.6 (Supremum dan Infimum Pada Himpunan Terurut $\boldsymbol{M}$)

Misalkan A himpunan tak kosong. A merupakan subset M.

1. Apabila A terbatas di atas, maka suatu bilangan d dikatakan supremum pada A apabila memenuhi:
   (i) d adalah batas atas dari A, dan
   (ii) Apabila terdapat e batas atas yang lain dari A, maka $d \leq e$.

2. Apabila A terbatas di bawah, maka suatu bilangan f dikatakan infimum pada A apabila:
   (i) f adalah batas bawah pada A
   (ii) Apabila terdapat g batas bawah yang lain dari A, maka $g \leq f$

Contoh 2.3

Misalkan $S = (0,1) \in \mathbb{R}$. Tentukan supremum dari S!

Penyelesaian:

Akan dibuktikan:

1. 1 adalah batas atas dari S

   Himpunan $S = (0,1)$ memiliki batas atas jika $d \geq h$ untuk setiap $h \in (0,1)$.

   Dengan demikian, 1 adalah batas atas dari S, karena:

$$\forall\, h \in (0,1)\ h < 1$$

   Jadi 1 adalah batas atas dari S.

2. Apabila terdapat e batas atas yang lain dari S, maka $d \leq e$.

   Akan dibuktikan $d = 1$ adalah supremum

   Akan ditunjukkan bahwa tidak ada e batas atas dari S yang lebih kecil dari 1.

   Jadi, jika e adalah batas atas dari S, maka:

$$\forall e \text{ (batas atas dari } S) \ (1 \leq e)$$

   Karena 1 adalah batas atas terkecil yang memenuhi syarat, maka $\sup(S) = 1$.

Contoh 2.4

Misalkan $S = (0,1) \in \mathbb{R}$. Tentukan infimum dari S

Penyelesaian:

Akan dibuktikan:

1. 0 adalah batas bawah dari S

   Himpunan $S = (0,1)$ memiliki batas bawah jika $f \leq h$ untuk setiap $h \in (0,1)$. Dengan demikian, 1 adalah batas atas dari S, karena:

   $$\forall\ h\ \in (0,1)\ 0 < h$$

   Jadi, 0 adalah batas bawah dari S.

2. Apabila g batas bawah yang lain dari S, maka $g \leq f$

   Akan dibuktikan $f = 0$ adalah infimum.

   Akan ditunjukkan bahwa tidak ada d batas bawah yang lain dari S yang lebih besar dari 0.

   Jika $g > 0$, maka g adalah bilangan yang lebih besar dari 0 tetapi lebih kecil dari 1 (karena $S = (0,1)$

   Karena untuk setiap $d > 0$, maka akan selalu ada x dalam $(0,1)$ yang lebih kecil dari g. Misalnya, pilih $h = \frac{g}{2}$. Karena $0 < \frac{g}{2} < g < 1$, maka h adalah anggota S dan $h < g$.

   Jadi, jika d adalah batas atas dari S, maka:

   $$\forall g \text{ (batas bawah dari } S) \ (g \leq 0)$$

   Karena 0 adalah batas bawah terbesar yang memenuhi syarat, maka $\inf(S) = 0$.

Definisi 2.6 (W.A.J, 1971)

Himpunan terurut $(M, \leq)$ dikatakan lattice apabila untuk setiap pasangan elemen $(h, i) \in M \times M$, dengan elemen-elemen $h \vee i = \sup(h, i)$ dan $h \wedge i = \inf(h, i)$ ada di M. Lattice memiliki beberapa sifat, sebagai berikut.

1. Idempoten

   $\forall h \in M$, berlaku $h \wedge h = h$, dan $h \vee h = h$

2. Komutatif

   $\forall h, i \in M$, berlaku $h \wedge i = i \wedge h$, dan $h \vee i = i \vee h$

3. Asosiatif

   $\forall h, i, j \in M$, berlaku $(h \wedge i) \wedge \mathrm{j} = h \wedge (i \wedge \mathrm{j})$, dan

   $\forall h, i, j \in M$, berlaku $(h \vee i) \vee \mathrm{j} = h \vee (i \vee \mathrm{j})$

4. Identitas absorsi

   $\forall h, i, j \in M$, berlaku $h \wedge (i \vee \mathrm{j}) = h$, dan $h \vee (i \wedge \mathrm{j}) = h$

Berikut aturan yang dalam $\vee$ dan $\wedge$.

1. Apabila $h \leq i$ maka $\inf(h, i) = h$ artinya $h \wedge i = h$
2. Apabila $h \leq i$ maka $\sup(h, i) = h$ artinya $h \vee i = i$ (George, 1978).

Definisi 2.7 (Schaefer, 1974)

Diberikan S himpunan tak kosong dengan $S \subseteq \mathbb{R}$, untuk setiap $s \in S$ dan $x \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\inf(S) = -\sup(-S)$ dengan $-S = \{-s : s \in S\}$
2. $x + \sup(S) = \sup(x + S)$
3. $x + \inf(S) = \inf(x + S)$

Definisi 2.8 (Schaefer, 1974)

Diberikan M himpunan terurut. M dikatakan lattice distribitif apabila untuk setiap $h, i, j \in M$ berlaku.

$$(h \vee i) \wedge j = (h \wedge i) \vee (h \wedge j)$$

Contoh 2.5

Berdasarkan contoh 2.3 dan 2.4 maka:

1. Supremum dari S adalah 1, berdasarkan definisi lattice, maka dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\sup(S) = 1 \text{ atau } h \vee i = 1$$

2. Infimum dari S adalah 0, berdasarkan definisi lattice, maka dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\inf(S) = 0 \text{ atau } h \wedge i = 0.$$

2.1.5 Ruang Riesz

Ruang Riesz adalah Ruang Vektor terurut yang dilengkapi dengan lattice. Ruang Riesz menjadi pondasi utama dalam penelitian “Sifat-sifat Dasar Ruang Bernorma Riesz”. Sehingga sebelum membahas rinci tentang sifat-sifat tersebut, maka terlebih dahulu dijelaskan mengenai definisi Ruang Riesz secara lengkap.

Definisi 2.9

Ruang Vektor E atas lapangan Real disebut Ruang Vektor terurut apabila E dapat diurutkan sedemikian sehingga struktur Ruang Vektor dan struktur urutannya kompatibel, artinya

1. Apabila $s, t \in E$ sedemikian sehingga $s \leq t$, maka $s + u \leq t + u$ untuk setiap $u \in E$.
2. Apabila $s \geq 0$ maka $\beta s \leq \beta t$ untuk setiap $\beta \geq 0$ di $\mathbb{R}$.

Apabila $(E, \leq)$ adalah lattice, maka E dikatakan Ruang Riesz.

Contoh 2.6

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dan misalkan $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X. Buktikan bahwa $B(X)$ merupakan Ruang Riesz.

Bukti.

Ambil sebarang $s, t \in B(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$.

Diketahui bahwa $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X.

Akan dibuktikan bahwa:

1. $B(X)$ adalah Ruang Vektor

   Karena $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X, maka $s, t \in B(X)$ adalah fungsi terbatas bernilai real pada X.

   Akan dibuktikan $B(X)$ adalah Ruang Vektor, maka harus memenuhi dua operasi, yaitu penjumlahan fungsi dan perkalian fungsi terhadap skalar:

   Diambil sebarang $s, t, u \in B(X)$ $x \in X$

   (i) $s + t \in B(X)$ (Tertutup)

   Perhatikan:

   $(s + t)(x) = s(x) + t(x)$ berdasarkan Definisi 2.11, diperoleh:

   $$= s + t \in B(X)$$

   (ii) Komutatif

   Perhatikan bahwa:

   $$(s + t)(x) = s(x) + t(x)$$

   Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

   $$(s + t)(x) = (t(x) + s(x))$$

   $$= (t + s)(x)$$

   (iii) Asosiatif

   Perhatikan bahwa:

   $$s(x) + ((t + g)(x)) = s(x) + \left(t(x) + g(x)\right)$$

   Dengan menggunakan sifat asosiatif pada bilangan Real maka:

   $$= (s(x) + t(x)) + g(x)$$

(iv) Identitas

Perhatikan bahwa:

Ada $0 \in B(X)$ untuk setiap $s \in B(X)$ sehingga $0 + s = s + 0 = s$,

$0 + s = 0 + s(x)$

Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

$= s(x) + 0$

$= s(x)$

(v) $s + (-s) = 0$

Perhatikan bahwa:

Terdapat $-s \in B(X)$ untuk setiap $s \in B(X)$ sehingga

$s + (-s) = s + (-s) = 0$

$s + (-s) = s(x) + (-s)(x)$

Dengan menggunakan sifat elemen negatif pada bilangan Real maka:

$s + (-s) = 0$

Perkalian terhadap skalar:

(i) $as \in B(X)$ (Tertutup)

Perhatikan bahwa:

$as = as(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$= a(x)s(x) \in B(X)$

(ii) $(a + \beta)s = as + \beta s$

Perhatikan bahwa:

$(a + \beta)s = (a + \beta)(x)s(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$= (a(x) + \beta(x))s(x)$

$= \big(a(x)s(x)\big) + \big(\beta(x)s(x)\big)$

$= as + \beta s$

(iii) $a(s+t) = as + at$

Perhatikan Bahwa:

$a(s+t) = a(x)(s(x)+t(x))$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$= a(x)s(x) + a(x)t(x)$

$= as + at$

(iv) $(a\beta)s = a(\beta s)$

Perhatikan bahwa:

$(a\beta)s = (a\beta)(x)s(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$= a(x)\beta(x)s(x)$

$= a(x)(\beta(x)s(x))$

$= a(\beta s)$

(v) $1s = s$

Perhatikan bahwa:

$1s = 1s(x)$ berdasarkan sifat identitas perkalian pada bilangan real maka:

$= s(x)$

$= s$

Karena $B(X)$ memenuhi sepuluh sifat tersebut, maka terbukti $B(X)$ adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

2. $B(X)$ adalah Ruang Vektor terurut

Berdasarkan definisi Ruang Vektor terurut, maka akan ditunjukkan bahwa: untuk setiap $s, t \in B(X)$ dengan $s \leq t$ memenuhi $s + j \leq t + j$ untuk setiap $j \in B(X)$ dan $\alpha s \leq \alpha t$ untuk bilangan real α tak negatif.

(i) Diambil sebarang $\alpha, s, t \in B(X), \forall x \in X$

Dengan $s \leq t$

$(s + t)(x) = s(x) + t(x)$

Perhatikan bahwa:

$s \leq t = s(x) \leq t(x)$

Untuk setiap $j \in E$

Berdasarkan teorema 2.2, maka:

$s(x) + j(x) \leq t(x) + j(x)$ (terbukti)

(ii) Untuk setiap $\alpha, s, t \in B(X)$, dan $x \in X$

Berdasarkan definisi 2.11, maka:

$(\alpha s)(x) = \alpha(x)s(x)$

Karena diketahui $s(x) \leq t(x)$

Berdasarkan teorema 2.1 (3)

Maka $\forall \alpha \geq 0$

$s(x)\alpha(x) \leq t(x)\alpha(x)$ (terbukti)

Berdasarkan poin (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $B(X)$ adalah Ruang Vektor terurut.

3. $B(X)$ adalah Lattice

Diambil sebarang $s, t \in B(X)$

Berdasarkan definisi lattice maka $B(X)$ memiliki supremum dan infimum.

Karena $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas, berdasarkan definisi himpunan terbatas maka $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga memenuhi:

$|s(x)| \leq M$ dan $|t(x)| \leq M$

Perhatikan bahwa:

$|s(x)| \leq M$, maka $-M \leq s(x) \leq M$

$|t(x)| \leq M$, maka $-M \leq t(x) \leq M$

Sehingga $\sup(s,t) = s \vee t$

Karena diketahui:

$s \leq t$

$s(x) \leq t(x) \leq M$, maka:

$$\sup\big(B(X)\big) = max\{|t(x)|, M\}$$

Dan

$$\inf\big(B(X)\big) = min\{|s(x)|, M\}$$

Karena $B(X)$ memiliki supremum dan infimum, maka terbukti $B(X)$ adalah Lattice.

Berdasarkan poin 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa $B(X)$ merupakan Ruang Riesz.

2.1.6 *Cone* Positif pada Ruang Riesz

Cone positif adalah setiap anggota dari Ruang Riesz yang lebih besar sama dengan nol. Berikut definisi lengkap dari *Cone* positif.

Definisi 2.10 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan E adalah Ruang Riesz, misalkan juga E_+ *cone* positif pada E yaitu himpunan semua $s \in E$ sedemikian sehingga $s \geq 0$.

2.1.7 Ruang Bernorma

Ruang Bernoma adalah Ruang Vektor yang dilengkapi empat syarat. Berikut definisi lengkap dari Ruang Bernorma.

Definisi 2.11 (Carlos, 2000)

Diberikan Ruang Vektor V. Didefinisikan fungsi bernilai real pada V. $\|.\|$ disebut norm apabila $\forall\ s, t \in V$ dan $\beta \in \mathbb{R}$ memenuhi:

(N1) $\| s \| \geq 0$

(N2) $\| s \| = 0$ jika dan hanya jika $s = 0$

(N3) $\| \beta s \| = |\beta| \| s \|$

(N4) $\| s + t \| \leq \| s \| + \| t \|$ (Triangle inequality), dimana s dan t adalah sebarang vektor dalam V dan β adalah sebarang skalar.

Dengan demikian $(V, \|.\|)$ dikatakan Ruang Bernorma

Contoh 2.7

Buktikan bahwa Ruang Euclid $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ adalah Ruang Bernorma dengan norm yang didefinisikan:

$$\| d \| = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2}$$

Bukti:

diambil sebarang $d, e \in \mathbb{R}^n$ dan $\beta \in \mathbb{R}$ dengan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dan $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$

Akan dibuktikan:

(N1) $\| d \| = (\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^{1/2}$

$$\| d \| = |d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_n|^2$$

Karena $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$. maka:

$|d_j| \geq 0$, $\forall j$, $|d_j|^2 \geq 0$ dan $(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2) \geq 0$, sehingga

$(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} \geq 0, \forall j$.

Jadi (N1) Terbukti.

(N2) (bukti ke kiri)

diketahui $d_j = 0,\ \forall j$ akan dibuktikan $\parallel d \parallel = 0$

Selanjutnya

$\parallel d \parallel = (\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^{1/2}$

$\parallel d \parallel = (\sum_{j=1}^{n} |0|^2)^{1/2}$

$\parallel d \parallel = (\sum_{j=1}^{n} 0)^{1/2}$

$\parallel d \parallel = 0^{1/2} = 0$

Jadi $\parallel d \parallel = 0$

(bukti ke kanan)

Diketahui $\parallel d \parallel = 0$ akan dibuktikan $d = 0$

$\parallel d \parallel = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = 0$ (dikuadratkan)

$\parallel d \parallel = \left(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2\right) = 0$

$|d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_n|^2 = 0$

tinjau : $|d_j|^2 \geq 0, \forall j$ jika dan hanya jika $|d_j|^2 > 0,\ \forall j$

Atau $|d_j|^2 = 0, \forall j$

Andaikan $|d_j|^2 > 0$,$\forall j$ akibatnya sigmanya bernilai positif.

Perhatikan $|d_j|^2 = 0, \forall j$ memenuhi $d_j = 0, \forall j$

Jadi (N2) Terbukti.

(N3) Akan dibuktikan $|\beta| \parallel d \parallel$

$\parallel \beta d \parallel = (\sum_{j=1}^{n} |\beta d_j|^2)^{1/2}$ =$(|\beta d_1|^2 + |\beta d_2|^2 + \ldots + |\beta d_n|^2)^{1/2}$ (*)

= $(|\beta d_1|^2 + |\beta d_2|^2 + \ldots + |\beta d_n|^2)^{1/2}$

= $(|\beta|^2 |d_1|^2 + |\beta|^2 |d_2|^2 + \ldots + |\beta|^2 |d_n|^2)^{1/2}$

$= ((|\beta|^2)(|d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_n|^2))^{1/2}$

$= |\beta|^{2^{1/2}} (|d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_n|^2)^{1/2}$

$= |\beta| \; (|d_1|^2 + |d_2|^2 + \ldots + |d_n|^2)^{1/2}$

$= |\beta| \left(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2\right)^{1/2}$

$= |\beta| \parallel d \parallel$

Jadi (N3) terbukti

(N4) Akan dibuktikan:

$$\parallel d + e \parallel \leq \parallel d \parallel + \parallel e \parallel$$

Perhatikan :

$$\parallel d + e \parallel = (\sum_{j=1}^{n} |d_j + e_j|^2)^{1/2} \ldots . (**)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan minkowski

$$(\sum_{j=1}^{n} |d_j + e_j|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |d|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j|^p\right)^{1/p}$$

Untuk $p = 2$ maka $**$ berlaku

$$(\sum_{j=1}^{n} |d_j + e_j|^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2\right)^{1/2}$$

$$\parallel d + e \parallel \leq \parallel d \parallel + \parallel e \parallel$$

Jadi (N4) terpenuhi.

Karena (N1) sampai (N4) terpenuhi maka $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Bernorma dengan normnya.

2.1.8 Ruang Bernorma Riesz

Ruang Bernorma Riesz adalah Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm. Ruang Bernorma Riesz merupakan objek dalam penelitian "Sifat-sifat Ruang Bernorma Riesz". Berikut definisi lengkap dari Ruang Bernorma Riesz.

Definisi 2.12 (Groenewegen, n.d.)

Apabila semi-norm p pada E memenuhi $p(s) \leq p(t)$ dengan $|s| \leq |t|$ maka dikatakan latis semi-norm dan dikatakan lattice norm apabila p adalah norm. Dalam kasus lain $(E, ||.||)$ dikatakan Ruang Bernorma Riesz.

Contoh 2.8

Buktikan bahwa Ruang Euclid $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz dengan norm yang didefinisikan dengan:

$$\| d \| = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2}$$

Bukti.

Diambil sebarang $d, e, f \in \mathbb{R}^n$ dan $\beta \in \mathbb{R}$ dengan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dan $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

Akan dibuktikan $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz.

Untuk membuktikan $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ Ruang Bernorma Riesz, maka akan ditunjukan:

1. $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Riesz

   Karena Ruang Riesz adalah Ruang Vektor terurut yang dilengkapi dengan lattice, maka harus memenuhi syarat-syarat berikut:

   (i) Apabila $d, e \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $d \leq e$, maka $d + f \leq e + f$ untuk setiap $f \in \mathbb{R}^n$.

Misalkan $d \leq e$, maka $d_1 \leq e_1$, $d_2 \leq e_2$,..., $d_\mathrm{n} \leq e_\mathrm{n}$ dapat dikatakan $d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i}$ untuk setiap $\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$

Perhatikan bahwa:

$d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} = d_\mathrm{i} + f_\mathrm{i} - f_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i}$

$d_\mathrm{i} + f_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} + f_\mathrm{i}$ untuk setiap $\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$

$d + f \leq e + f$

(ii) Apabila $d \geq 0$ maka $\beta d \leq \beta e$ untuk setiap $\beta \geq 0$ di $\mathbb{R}$.

Misalkan $d \geq 0$ misalkan pula $d \leq e$

Perhatikan bahwa:

$$d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} = \frac{1d_\mathrm{i}}{1} \leq e_\mathrm{i}$$

$$= \frac{\beta d_\mathrm{i}}{\beta} \leq e_\mathrm{i}$$

$$\beta d_\mathrm{i} \leq \beta e_\mathrm{i}$$

$$\beta d \leq \beta e$$

(iii) Berdasarkan definisi lattice, maka:

$$d \vee e = (\mathrm{maks}(d_1, e_1), \mathrm{maks}(d_2, e_2), \ldots, \mathrm{maks}(d_n, e_n))$$

$$d \wedge e = (\min(d_1, e_1), \min(d_2, e_2), \ldots, \min(d_n, e_n))$$

karena $d \vee e \in \mathbb{R}^n$ dan

$d \wedge e \in \mathbb{R}^n$, maka $(\mathbb{R}^n, \leq)$ adalah lattice.

Dari poin (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Riesz.

2. $(\mathbb{R}^n, \leq)$ adalah lattice norm

Diketahui:

$$\| d \| = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2}$$

Sehingga:

$$\| e \| = (\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2}$$

Misalkan $\| d \| \leq \| e \|$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $|d| \leq |e|$

Karena $\| d \| \leq \| e \|$, maka:

$$(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} \leq (\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2)^{1/2}$$

$$\sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2} \leq \sqrt{|e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2}$$

Karena $d, e \in \mathbb{R}^n$ dan berdasarkan definisi akar kuadrat pada bilangan real maka:

$$|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_n| \leq |e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|$$

$$|d_i| \leq |e_i|$$

$$|d| \leq |e|$$

Dari poin 1 dan 2 maka terbukti bahwa $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz

2.1.9 Sifat Urutan pada $\mathbb{R}$

Berikut ini beberapa sifat urutan pada bilangan real $\mathbb{R}$.

Definisi 2.13 (Robert G., 2010)

Misalkan $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$**.** $\mathbb{P}$ dikatakan himpunan bilangan real positif apabila memenuhi:

1. Apabila $s, t \in \mathbb{P}$, maka $s + t \in \mathbb{P}$
2. Apabila $s, t \in \mathbb{P}$, maka $st \in \mathbb{P}$
3. Apabila $a \in \mathbb{R}$, maka harus memenuhi salah satu syarat berikut:

$s \in \mathbb{P}$, $s = 0$, $-s \in \mathbb{P}$

Definisi 2.12 (Robert G., 2010)

misalkan $s, t \in \mathbb{R}$

1. Apabila $s - t \in \mathbb{P}$, maka $s > t$ atau $t < s$
2. Apabila $s - t \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, maka $s \geq t$ atau $t \leq s$

Teorema 2.1 (Robert G., 2010)

Misalkan $s, t, u \in \mathbb{R}$

1. Jika $s > t$ dan $t < s$, maka $s > u$
2. Jika $s > t$, maka $s + u > t + u$
3. Jika $s > t$ dan $u > 0$, maka $us > ut$
4. Jika $s > t$ dan $u < 0$, maka $us < ut$

Bukti.

1. Ambil sebarang $s, t, u \in \mathbb{R}$

   Apabila $s - t \in \mathbb{P}$, dan $t - u \in \mathbb{P}$ berdasarkan definisi 2.9 (1) maka $(s - t) + (t - s) = s - t + t - u = s - u$, kemudian berdasarakan definisi 2.10 (1), diperoleh:

   $$s > u$$

2. Apabila $s - t \in \mathbb{P}$ dengan menggunakan manipulasi aljabar, maka:

   $s - t = s + u - u - t$

   $= (s + u) - (t + u)$

   $= (s + u) > (t + u)$ (berdasarkan definisi 2.10 (1))

3. Apabila $s - t \in \mathbb{P}$ dan $u \in \mathbb{P}$ berdasarkan definisi 2.9 (2) maka $us - ut = u(s - t)$. Berdasarkan definisi 2.10 (1) sehingga $us > ut$ dengan $u > 0$

4. Apabila $u < 0$ maka $u \in \mathbb{P}$, dengan demikian $ut - us = (-u)(s - t)$ pada $\mathbb{P}$. Maka $ut > us$ dengan $u < 0$.

2.1.10 Operasi Fungsi pada $\mathbb{R}$

Definisi 2.15 (Robert G., 2010)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan f dan g fungsi yang didefinisikan pada A ke $\mathbb{R}$. Didefinisikan penjumlahan $f + g$, selisih $f - g$ dan perkalian fg pada A ke $\mathbb{R}$ adalah fungsi yang diberikan, dengan:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, dan

$(fg)(x) = f(x)g(x)$,

Untuk setiap $x \in A$. Selanjutnya, apabila $b \in \mathbb{R}$, didefinisikan perkalian bf adalah fungsi yang diberikan, dengan:

$(bf)(x) = bf(x)$ untuk setiap $x \in A$.

Maka, apabila $h(x) \neq 0$ untuk $x \in A$, didefinisikan pembagian f/h adalah fungsi yang diberikan, dengan:

$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$ untuk setiap $x \in A$.

2.1.11 Fungsi Kontinu

Definisi 2.16 (Robert G., 2010)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan $f: A \to \mathbb{R}$ dan misalkan $c \in A$. f dikatakan kontinu di c, apabila untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x di A berlaku $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Teorema 2.2 (Robert G., 2010)

Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ adalah kontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap x_n konvergen ke c dan $f(x_n) \to f(c)$

2.1.12 Nilai Mutlak pada Bilangan Real

Definisi. 2.17 (Robert G., 2010)

Nilai mutlak a pada bilangan real dinotasikan dengan $|a|$, didefinisikan sebagai:

$$|a| = \begin{cases} a \ apabila \ a > 0 \\ 0 \ apabila \ a = 0 \\ -a \ apabila \ a < 0 \end{cases}$$

Teorema 2.3 (Robert G., 2010)

$|ab| = |a||b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$.

Bukti.

Perhatikan bahwa:

Misalkan $a = 0, b = 0$, maka:

$|ab| = |(0)(0)| = |0|$

Misalkan $a > 0, b > 0$, maka:

$ab > 0$, sehingga $|ab| = ab = |a||b|$

Misalkan $a > 0, b < 0$, maka:

$ab < 0$, sehingga $|ab| = -ab = |a||b|$

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur’an

Dalam Al-qur’an dijelaskan bahwasanya manusia pada dasarnya dilahirkan dalam keadaan suci. Allah SWT berfirman :

فَاَقِمْ وَجْهَكَ لِدِّ يْنِ حَنِيْفًا فِطْرَتَ اللّٰهِ الَّتِيْ فَطَرَ النَّاسِ عَلَيْهَا لَاتَبْدِيلَ لِخَلْقِ اللّٰهِ ذَلِكَ الدَّيْنُ الْقَيِّمُ وَلَكِنْ
اَكْثَرَ النَّاسِ لَا يَعْلَمُوْنَ ۝٣٠

(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *“Maka, hadapkanlah wajahmu dengan lurus kepada* agama (Islam sesuai) *fitrah (dari) Allah yang telah menciptakan manusia menurut (fitrah) itu. Tidak ada perubahan pada ciptaan Allah (tersebut). Itulah agama yang lurus, tetapi kebanyakan manusia tidak mengetahui.”* (QS. Ar-Rum [30]: 30)

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya setiap manusia diciptakan dalam keadaan fitrah. Fitrah tersebut mencerminkan kesucian dasar yang Allah SWT berikan. Sehingga dalam menjalankan kehidupan setiap individu haruslah berusaha menjaga kesucian dasar yang telah Allah SWT berikan, yaitu dengan berusaha memperbaiki diri dan selalu melakukan kebaikan. Dengan begitu, manusia dapat mencapai puncak kesempurnaan dalam berakhlak dan berperilaku. Seperti halnya dalam konsep supremum, dimana supremum adalah batas atas dari suatu himpunan. Dengan demikian, setiap individu harus terus berusaha untuk memperbaiki diri dalam segala aspek kehidupan, baik dalam hubungan sesama manusia, hubungan dengan Tuhan, dengan lingkungan maupun dengan diri sendiri.

Dalam kehidupan sehari-hari, supremum tercermin pada usaha seseorang melakukan kebaikan dengan sungguh-sungguh. Contohnya menolong orang yang membutuhkan. Contoh tersebut dijelaskan dalam Al-Qur'an, Allah SWT berfirman:

وَتَعَاوَنُوْا عَلَى الْبِرِّ وَالتَّقْوٰى وَلَاتَعَوَنُوْاعَللَى الْإِثْمِ وَالْعُدْوَانِ وَاتَّقُوا اللهَ اِنَّ اللهَ شَدِيْدُالْعِقَابِ ﴿٢﴾

(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan permusuhan. Bertakwalah kepada Allah, sesungguhnya Allah sangat berat siksaan-Nya."* (QS. Al-Maidah [5]: 2)

Dalam ayat tersebut jelas bahwa Allah SWT memerintahkan agar manusia saling menolong dalam kebaikan dan jelas melarang manusia untuk saling tolong-menolong dalam keburukan. Contoh lain konsep supremum yang bisa dilihat dalam kehidupan sehari-hari adalah menghormati orang yang lebih tua dan menyayangi yang lebih muda. Rasulullah SAW bersabda:

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ مَرْزُوقٍ الْبَصْرِيُّ حَدَّثَنَا عُبَيْدُ بْنُ وَاقِدٍ عَنْ زَرْبِيٍّ قَالَ سَمِعْتُ أَنَسَ بْنَ مَالِكٍ يَقُولُ جَاءَ شَيْخٌ يُرِيدُ النَّبِيَّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ فَأَبْطَأَ الْقَوْمُ عَنْهُ أَنْ يُوَسِّعُوا لَهُ فَقَالَ النَّبِيُّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ لَيْسَ مِنَّا مَنْ

لَمْ يَرْحَمْ صَغِيرَنَا وَيُوَقِّرْ كَبِيرَنَا قَالَ وَفِي الْبَاب عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ عَمْرٍو وَأَبِي هُرَيْرَةَ وَابْنِ عَبَّاسٍ وَأَبِي أُمَامَةَ قَالَ أَبُو عِيسَى هَذَا حَدِيثٌ غَرِيبٌ وَزَرْبِيٌّ لَهُ أَحَادِيثُ مَنَاكِيرُ عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ وَغَيْرِهِ

Artinya: *"Telah menceritakan kepada kami Muhammad bin Marzuq Al Bashari, telah menceritakan kepada kami Ubaid bin Waqid dari Zarbi ia berkata, saya mendengar Anas bin Malik berkata; Seorang lelaki tua datang kepada Nabi shallallahu 'alaihi wasallam lantas orang-orang memperlambat untuk memperluas jalan untuknya, maka Nabi shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: "Bukan termasuk dari golongan kami orang yang tidak menyayangi anak kecil kami dan tidak menghormati orang tua (orang dewasa) kami." Hadits semakna diriwayatkan dari Abdullah bin Amr, Abu Hurairah, Ibnu Abbas dan Abu Umamah. Berkata Abu 'Isa: Ini merupakan hadits gharib dan Zarbi memiliki hadits-hadits munkar dari Anas bin Malik dan selainnya."* (HR. At-Tirmidzi 1842)

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, Al-qur'an dan Hadis memberikan petunjuk mengenai supremum dalam kehidupan antar sesama manusia. Namun, tidak hanya itu, dalam Al-Qur'an dan Hadis juga menjelaskan bagaimana supremum antara hubu ngan Allah SWT dengan manusia. Dalam hal ini, supremum bisa diartikan sebagai batas tertinggi dari perilaku dan ketaatan yang bisa dicapai oleh seorang hamba. Perintah Allah SWT seperti kewajiban shalat, puasa, zakat dan haji dapat dikatakan sebagai supremum yang harus diusahakan untuk dicapai oleh setiap muslim.

Supremum tidak hanya mencakup ibadah yang zahir, tetapi supremum juga mencakup ihsan (kesempurnaan dalam beramal), yang merupakan tingkat tertinggi dalam beribadah. Ihsan adalah keadaan dimana seseorang beribadah seakan-akan dia melihat Allah SWT, dan jika dia tidak mampu, maka dia menyadari bahwa Allah SWT selalu melihatnya. Ihsan bisa diartikan sebagai pencapaian akhir dari proses keimanan dan keislaman seseorang, sehingga ihsan dapat dianggap sebagai level tertinggi dalam iman. Orang yang mampu berihsan adalah orang yang sangat baik agamanya. Sebagaimana Allah SWT berfirman:

وَمَنْ أَحْسَنُ دِيْنًا مِّمَّنْ أَسْلَمَ وَجْهَهُ لِلّٰهِ وَهُوَمُحْسِنٌ وَّاتَّبَعَ مِلَّةَ إِبْرٰهِيْمَ حَنِيْفًا وَاتَّخَذَ اللّٰهُ إِبْرَاهِيْمَ خَلِيْلًا ﴿١٢٥﴾

(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Siapakah yang lebih baik agamanya daripada orang yang memasrahkan dirinya kepada Allah, sedangkan dia muhsin (orang yang berbuat kebaikan) dan mengikuti agama ibrahim yang hanif? Allah telah menjadikan ibrahim sebagai kekasih-Nya."* (QS. An-Nisa [4]: 125)

Dalam hal hubungan manusia dengan Allah SWT, infimum dapat diartikan sebagai batas minimal yang harus dijaga oleh manusia agar tetap berada di jalan yang benar dan tidak melanggar perintah-Nya. Batasan ini bisa berupa larangan-larangan seperti larangan membunuh, mencuri, berzina maupun berbuat syirik. Allah SWT menjauhkan manusia dari larangan-Nya untuk melindungi manusia dari perbuatan dosa besar yang bisa menjauhkan mereka dari Rahmat-Nya.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Sebelum menuju ke pembahasan maka perlu didefinisikan tentang Ruang Vektor terurut, Ruang Riesz, *cone* positif dan disjoint terlebih dahulu.

Definisi 2.18 (Meyer-Nieberg, 1991)

Ruang Vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ dikatakan Ruang Vektor terurut E apabila urutan dan struktur Ruang Vektor adalah kompatibel, artinya untuk $h, i \in E$ dengan $h \leq i$, meenuhi $h + j \leq i + j$ untuk setiap $j \in E$ dan $mh \leq mi$ untuk bilangan real m tak negatif. Apabila $(E, \leq)$ adalah lattice, maka E dikatakan Ruang Riesz.

Definisi 2.19 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan E adalah Ruang Riesz, misalkan juga E_+ *cone* positif pada E yaitu himpunan semua $s \in E$ sedemikian sehingga $s \geq 0$. Misalkan:

$s^+ = s \vee 0,\ s^- = (-s) \vee 0$ dan $|s| = s \vee (-s)$ maka dikatakan bagian positif, negatif dan nilai mutlak.

Definisi 2.20 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan E adalah Ruang Riesz dan $s, t \in E$ dikatakan disjoint (dinotasikan dengan $s \perp t$) apabila $|s| \wedge |t| = 0$

Teorema 2.1 (Meyer-Nieberg, 1991)

Untuk setiap $s, t, u \in E$ dan $\beta \in \mathbb{R}$, maka pernyataan berikut ini berlaku:

1. $s + t = s \vee t + s \wedge t$, $\quad s \vee t = -(-s) \wedge (-t)$, $s \vee t + u = (s + u) \vee (t + u)$, dan $s \wedge t + u = (s + u) \wedge (t + u)$
2. $s = s^+ - s^-$
3. $|s| = s^+ - s^-$, $|\beta s| = |\beta||s|$ dan $|s + t| \leq |s| + |t|$
4. $s^+ \perp s^-$ dan dekomposisi dari h menjadi selisih dua unsur positif yang lepas dan *unique*.
5. $s \leq t$ *equivalent* dengan $s^+ \leq t^+$ dan $s^- \leq t^-$
6. $s \perp t$ *equivalent* dengan $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, dimana $|s + t| \leq |s| + |t|$
7. $(s \vee t) \wedge u = (s \wedge t) \vee (t \wedge u)$ dan $(s \wedge t) \vee u = (s \vee t) \wedge (t \vee u)$
8. E memiliki sifat dekomposisi F. Riesz. Jika $s, t, u \in E_+$ dan $0 \leq u \leq s + t$, maka terdapat $a, b \in E_+$ sedemikian sehingga $a \leq s, b \leq t$ dan $u = a + b$
9. Untuk setiap $s, t, u \in E_+$, maka $(s + t) \wedge u \leq s \wedge u + t \wedge u$
10. $|s - t| = s \vee t - s \wedge t$ dan $|s - t| = |s \vee u - t \vee u| + |s \wedge u - t \wedge u|$

Proposisi 2.1 (Meyer-Nieberg, 1991)

Asumsikan A adalah himpunan bagian tak kosong dari E sedemikian sehingga terdapat $\sup(A)$ atau $\inf(A)$. Untuk setiap $s, t \in E$, maka:

$$t + \sup(A) = \sup(\mathrm{s} + \mathrm{t}), \mathrm{t} + \inf(A) = \inf(s + t)$$

$$t \wedge \sup(A) = \sup(\mathrm{s} \wedge \mathrm{t}), \text{dan } \mathrm{t} \vee \inf(A) = \inf(s \vee t)$$

Proposisi 2.2 (Meyer-Nieberg, 1991)

Asumsikan bahwa $s,..,s_n,\ t_1,..,t_n \in E_+$ memenuhi $s_1+\ldots+s_n = t_1+..+t_n$. Terdapat $z_{i,k} \in E_+$ $(i = 1,\ldots,n$ dan $k = 1,\ldots,m)$ sedemikian sehingga

$$s_i = \sum_{k=1}^{m} z_{i,k} \in E_+\ (i = 1,\ldots,n\ )\ dan\ t_k = \sum_{i=1}^{n} z_{i,k} \in E_+\ (k = 1,\ldots,m\ )$$

Proposisi 2.3 (Meyer-Nieberg, 1991)

Suatu Ruang Vektor terurut E adalah Ruang Riesz yang dibuktikan dengan $E = E_+ - E_+$ dan $\sup(\mathrm{s} + \mathrm{t}) = s \vee t$ untuk setiap $s, t \in E_+$

Definisi 2.21 (Meyer-Nieberg, 1991)

Apabila semi-norm p pada E memenuhi $p(s) \leq p(t)$ ketika $|s| \leq |t|$ dikatakan latis semi-norm dan lattice norm apabila p adalah norm. Dalam kasus lain $(E, ||.||)$ dikatakan Ruang Bernorma Riesz.

Berikut proposisi yang berkaitan dengan Ruang Bernorma Riesz.

Proposisi 2.4 (Meyer-Nieberg, 1991)

Untuk suatu Ruang Bernorma Riesz E maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

1. Operasi Lattice adalah kontinu.
2. *Cone* positif E_+adalah tertutup.
3. $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ untuk setiap barisan naik yang konvergen $(s_n)_1^\infty \subset E$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Metode kualitatif merupakan metode penlitian yang lebih menekankan pada aspek pemahaman secara mendalam terhadap suatu masalah (Pedro, 1995). Penelitian ini dilakukan berdasar atas studi pustaka. Studi pustaka adalah proses penyelidikan dan penyusunan ringkasan, analisis, dan sintesis terhadap literatur, artikel ilmiah, buku, dan sumber-sumber lain yang relevan dengan sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.

3.2 Pra Penelitian

Proses Pra penelitian yang dilakukan antara lain mengumpulkan artikel-artikel serta buku-buku yang berkaitan dengan sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz, beberapa buku yang dikumpulkan antara lain buku Banach Lattice karya Peter Meyer-Nieberg, buku Riesz Space karya Luxemburg, Wilhelmus AJ, buku Complations in Riesz Spacw Theory dan buku Introduction Operator Theory Riesz Space karya Adriaan C. Zaneen.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut tahapan-tahapan penelitian yang akan dilakukan, antara lain:

1. Mengumpulkan beberapa buku yang membahas sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.
2. Menganalisa teori pendukung dari sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.

3. Membuktikan beberapa teorema dan proposisi dari sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.
4. Membuat pembahasan dari sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.
5. Membuat kesimpulan dari sifat-sifat dasar Ruang Bernorma Riesz.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Riesz

Ruang Riesz merupakan Ruang Vektor terurut dan memenuhi syarat lattice. Berikut definisi lattice dan Ruang Riesz.

4.1.1 Lattice

Definisi 4.1 (Meyer-Nieberg, 1991)

Suatu himpunan terurut $(M, \leq)$ dikatakan lattice apabila ada elemen $s, t \in M$ memiliki batas atas terkecil yang dinotasikan dengan $s \vee t = \sup\,(s, t)$, di mana $\vee$ disebut *"join"* , dan memiliki batas bawah terbesar yang dinotasikan dengan $s \wedge t = \inf\,(s, t)$, di mana $\wedge$ disebut *"meet"*.

Berikut notasi supremum dan infimum pada himpunan bagian M. Apabila v adalah batas atas terkecil pada $A \subset M$, maka ditulis dengan:

$$v = \sup(A) = \bigvee_{s \in A} s = \sup\,\{s : s \in A\}$$

apabila u adalah batas bawah terbesar pada $A \subset M$, maka ditulis dengan:

$$u = \inf(A) = \bigwedge_{s \in A} s = \inf\,\{s : s \in A\}$$

4.1.2 Ruang Riesz

Definisi 4.2 (Meyer-Nieberg, 1991)

Ruang Vektor E atas lapangan $\mathbb{R}$ dikatakan Ruang Vektor terurut E apabila urutan dan struktur Ruang Vektor kompatibel, artinya untuk setiap $h, i \in E$ dengan $h \leq i$, memenuhi $h + j \leq i + j$ untuk setiap $j \in E$ dan $mh \leq mi$ untuk bilangan real m tak negatif. Apabila $(E, \leq)$ adalah lattice, maka E dikatakan Ruang Riesz.

Contoh 4.1

Misalkan $X \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan tak kosong dan misalkan $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X. Buktikan bahwa $B(X)$ merupakan Ruang Riesz.

Bukti.

Ambil sebarang $s, t \in B(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$.

Diketahui bahwa $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X.

Akan dibuktikan bahwa:

1. $B(X)$ adalah Ruang Vektor

   Karena $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas pada X, maka $s, t \in B(X)$ adalah fungsi terbatas bernilai real pada X.

   Akan dibuktikan $B(X)$ adalah Ruang Vektor, maka harus memenuhi dua operasi, yaitu penjumlahan fungsi dan perkalian fungsi terhadap skalar:

   Diambil sebarang $s, t, u \in B(X)$ $x \in X$

   Penjumlahan fungsi:

   (i) $s + t \in B(X)$ (Tertutup)

   Perhatikan:

   $(s + t)(x) = s(x) + t(x)$ berdasarkan Definisi 2.11, diperoleh:

   $$= s + t \in B(X)$$

   (ii) Komutatif

   Perhatikan bahwa:

   $$(s + t)(x) = s(x) + t(x)$$

   Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

   $$(s + t)(x) = (t(x) + s(x))$$

   $$= (t + s)(x)$$

(iii) Asosiatif

Perhatikan bahwa:

$$s(x) + ((t + g)(x)) = s(x) + \big(t(x) + g(x)\big)$$

Dengan menggunakan sifat asosiatif pada bilangan Real maka:

$$= (s(x) + t(x)) + g(x)$$

(iv) Identitas

Perhatikan bahwa:

Ada $0 \in B(X)$ untuk setiap $s \in B(X)$ sehingga $0 + s = s + 0 = s$,

$0 + s = 0 + s(x)$

Dengan menggunakan sifat komutatif pada bilangan Real maka:

$= s(x) + 0$

$= s(x)$

(v) $s + (-s) = 0$

Perhatikan bahwa:

Terdapat $-s \in B(X)$ untuk setiap $s \in B(X)$ sehingga $s + (-s) =$

$s + (-s) = 0$

$s + (-s) = s(x) + (-s)(x)$

Dengan menggunakan sifat elemen negatif pada bilangan Real maka:

$s + (-s) = 0$

Perkalian terhadap skalar:

(i) $as \in B(X)$ (Tertutup)

Perhatikan bahwa:

$as = as(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$= a(x)s(x) \in B(X)$

(ii) $(a + \beta)s = as + \beta s$

Perhatikan bahwa:

$(a + \beta)s = (a + \beta)(x)s(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$$= (a(x) + \beta(x))s(x)$$

$$= \left(a(x)s(x)\right) + \left(\beta(x)s(x)\right)$$

$$= as + \beta s$$

(iii) $a(s + t) = as + at$

Perhatikan Bahwa:

$a(s + t) = a(x)(s(x) + t(x))$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$$= a(x)s(x) + a(x)t(x)$$

$$= as + at$$

(iv) $(a\beta)s = a(\beta s)$

Perhatikan bahwa:

$(a\beta)s = (a\beta)(x)s(x)$ berdasarkan definisi 2.11 maka:

$$= a(x)\beta(x)s(x)$$

$$= a(x)(\beta(x)s(x))$$

$$= a(\beta s)$$

(v) $1s = s$

Perhatikan bahwa:

$1s = 1s(x)$

berdasarkan sifat identitas perkalian pada bilangan real maka:

$$= s(x)$$

$$= s$$

Karena $B(X)$ memenuhi sepuluh sifat tersebut, maka terbukti $B(X)$ adalah

Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

2. $B(X)$ adalah Ruang Vektor terurut

   Berdasarkan definisi Ruang Vektor terurut, maka akan ditunjukkan bahwa: untuk setiap $s, t \in B(X)$ dengan $s \leq t$ memenuhi $s + j \leq t + j$ untuk setiap $j \in B(X)$ dan $\alpha s \leq \alpha t$ untuk bilangan real α tak negatif.

   (i) Diambil sebarang $\alpha, s, t \in B(X), \forall x \in X$

   Dengan $s \leq t$

   $(s + t)(x) = s(x) + t(x)$

   Perhatikan bahwa:

   $s \leq t = s(x) \leq t(x)$

   Untuk setiap $j \in E$

   Berdasarkan teorema 2.2, maka:

   $s(x) + j(x) \leq t(x) + j(x)$ (terbukti)

   (ii) Untuk setiap $\alpha, s, t \in B(X),$ dan $x \in X$

   Berdasarkan definisi 2.11, maka:

   $(\alpha s)(x) = \alpha(x)s(x)$

   Karena diketahui $s(x) \leq t(x)$

   Berdasarkan teorema 2.1 (3)

   Maka $\forall \alpha \geq 0$

   $s(x)\alpha(x) \leq t(x)\alpha(x)$ (terbukti)

Berdasarkan poin (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $B(X)$ adalah Ruang Vektor terurut.

3. $B(X)$ adalah Lattice

   Diambil sebarang $s, t \in B(X)$

Berdasarkan definisi lattice maka $B(X)$ memiliki supremum dan infimum.

Karena $B(X)$ koleksi fungsi bernilai real terbatas, berdasarkan definisi himpunan terbatas maka $\exists M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga memenuhi:

$|s(x)| \leq M$ dan $|t(x)| \leq M$

Perhatikan bahwa:

$|s(x)| \leq M$, maka $-M \leq s(x) \leq M$

$|t(x)| \leq M$, maka $-M \leq t(x) \leq M$

Sehingga $\sup(s,t) = s \vee t$

Karena diketahui:

$s \leq t$

$s(x) \leq t(x) \leq M$, maka:

$$\sup\big(B(X)\big) = max\{|t(x)|, M\}$$

Dan

$$\inf\big(B(X)\big) = min\{|s(x)|, M\}$$

Karena $B(X)$ memiliki supremum dan infimum, maka terbukti $B(X)$ adalah Lattice.

Berdasarkan poin 1, 2 dan 3 maka terbukti bahwa $B(X)$ merupakan Ruang Riesz.

4.1.3 *Cone* Positif

Definisi 4.3 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan E adalah Ruang Riesz. Misalkan E_+ adalah *cone* positif pada E. Untuk setiap $s, t \in E$ dengan $s \geq 0$. Untuk setiap $s \in E$ didefinisikan:

1. s^+ disebut *positive part* apabila $s^+ = s \vee 0$
2. s^- disebut *negative part* apabila $s^- = (-s) \vee 0$
3. $|s|$ disebut *absolute value* apabila $|s| = s \vee (-s)$

4. $s \perp t$ dikatakan disjoint apabila $|s| \wedge |t| = 0$

Contoh 4.2:

Misalkan $\mathbb{R}^3$ adalah Ruang Riesz. Buktikan bahwa $\mathbb{R}^3{}_+$ *cone* positif pada $\mathbb{R}^3$.

Bukti:

Akan dibuktikan $\mathbb{R}^3{}_+$ adalah *cone* positif pada $\mathbb{R}^3$

Diambil sebarang $s, t, u \in \mathbb{R}^3$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$ dimana $s \geq 0, t \geq 0, u \geq 0$ dengan $s = (s_1, s_2, s_3)$ dan $t = (t_1, t_2, t_3)$ dan $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Berdasarkan definisi 2.3, maka akan ditunjukkan:

1. $\mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

   Perhatikan bahwa:

   $s + t + u \in \mathbb{R}^3$

   Perhatikan bahwa:

   $s + t + u = (s_1, s_2, s_3 + t_1, t_2, t_3 + u_1, u_2, u_3)$

   $= (s_1 + t_1 + u_1, s_2 + t_2 + u_2, s_3 + t_3 + u_3) \in \mathbb{R}^3$

   Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

2. $\alpha\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

   Perhatikan bahwa:

   $\alpha s = \alpha(s_1, s_2, s_3)$

   $= (\alpha s_1, \alpha s_2, \alpha s_2) \in \mathbb{R}^3$

   Jadi, terbukti bahwa $\alpha\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

3. $\mathbb{R}^3 \cap (-\mathbb{R}^3) = \{0\}$

   Misalkan $u \in \mathbb{R}^3 \cap (-\mathbb{R}^3)$, maka:

   $u \in \mathbb{R}^3$ dan $u \in -\mathbb{R}^3$, dapat diartikan bahwa:

   $-\mathbb{R}^3 = \{-u : u \in \mathbb{R}^3\}$

Karena $u \in \mathbb{R}^3$ dan $u \in -\mathbb{R}^3$, maka:

$u_1, u_2, u_3 = -(u_1, u_2, u_3)$

$u_1, u_2, u_3 = -u_1, -u_2, -u_3$

$(u_1 + u_1, u_2 + u_2, u_3 + u_3) = (0,0,0)$

$2(u_1, u_2, u_3) = (0,0,0)$

Karena $2 \neq (0,0,0)$, maka

$(u_1, u_2, u_3) = (0,0,0)$

$u = \{0\}$

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{R}^3 \cap (-\mathbb{R}^3) = \{0\}$

Berdasarkan poin 1,2, dan 3, maka terbukti bahwa ${\mathbb{R}^3}_+$ adalah *cone* positif pada $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.1 (Meyer-Nieberg, 1991)

Untuk setiap $s, t, u, v \in E$ dan $\beta \in \mathbb{R}$, dengan $s \leq t \leq u$ berlaku:

1. (i) $s + t = s \vee t + s \wedge t$

   (ii) $s \vee t = -(-s) \wedge (-t)$,

   (iii) $s \vee t + u = (s + u) \vee (t + u)$

   (iv) $s \wedge t + u = (s + u) \wedge (t + u)$
2. $s = s^+ - s^-$
3. $|s| = s^+ - s^-, |\beta s| = |\beta||s|$ dan $|s + t| \leq |s| + |t|$
4. $s^+ \perp s^-$ dan dekomposisi dari h menjadi selisih dua unsur positif yang lepas dan *unique*.
5. $s \leq t$ *equivalent* dengan $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$
6. $s \perp t$ *equivalent* dengan $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, dimana $|s + t| \leq |s| + |t|$
7. $(s \wedge t) \vee u = (s \vee t) \wedge (t \vee u)$

8. E memiliki sifat dekomposisi F. Riesz. Jika $s, t, u \in E_+$ dan $0 \leq u \leq s + t$, maka terdapat $a, b \in E_+$ sedemikian sehingga $a \leq s, b \leq t$ dan $u = a + b$
9. Untuk setiap $s, t, u \in E_+$, maka $(s + t) \wedge u \leq s \wedge u + t \wedge u$
10. $|s - t| = s \vee t - s \wedge t$ dan $|s - t| = |s \vee u - t \vee u| + |s \wedge u - t \wedge u|$
11. E memiliki sifat dekomposisi F. Riesz. Jika $s_i, t_i, u_i \in E_+$ dengan $i = 1,2, \dots, n$ dan $0 \leq u_i \leq s_i + t_i$, maka terdapat $a_i, b_i \in E_+$ sedemikian sehingga $a \leq s, b \leq t$ dan $u = a + b$

Bukti.

1. Ambil sebarang $s, t, u \in E$ dan $\beta \in \mathbb{R}$, dengan $s \leq t \leq u$

   Akan dibuktikan:

   (i) $s + t = s \vee t + s \wedge t$

   Misalkan $c = (-t) \vee (-s)$ dan $b = s \vee t$ sehingga:

   $c \geq -t$ dan $c \geq -s$. Dengan menggunakan manipulasi aljabar yaitu menambahkan $s + t$ pada kedua sisi $c \geq -t$ maka:

   $c + s + t \geq -t + s + t$

   $c + s + t \geq s$

   Dengan mengunakan manipulasi aljabar yaitu menambahkan $s + t$ pada kedua sisi $c \geq -s$ maka:

   $c + s + t \geq -s + s + t$

   $c + s + t \geq t$, dengan demikian diperoleh:

   $c + s + t \geq s \vee t$

   Perhatikan bahwa:

$c + s + t = s \vee t$

$(-t) \vee (-s) + s + t = s \vee t$

$-(t \wedge s) + s + t = s \vee t$

$s + t = s \vee t + t \wedge s$

$s + t = s \vee t + s \wedge t$

Jadi terbukti bahwa $s + t = s \vee t + s \wedge t$

(ii) $s \vee t = -(-s \wedge -t)$

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan definisi 2.6, yaitu:

$s \wedge t = -(-s \vee -t)$, maka:

$$-(-s \wedge -t) = -(-(-(-s) \vee -(-t)))$$

$$= s \vee t$$

Dengan demikian terbukti bahwa $s \vee t = -(-s) \wedge (-t)$

(iii) $s \vee t + u = (s + u) \vee (t + u)$

Perhatikan bahwa:

$$s \vee t + u = \sup(s, t) + u$$

$$= \sup((s, t) + u)$$

$$= \sup((s + u), (t + u))$$

$$= (s + u) \vee (t + u)$$

Jadi terbukti bahwa $s \vee t + u = (s + u) \vee (t + u)$

(iv) $s \wedge t + u = (s + u) \wedge (t + u)$

Perhatikan bahwa:

$s \wedge t + u = \inf(s, t) + u$

$= \inf((s, t) + u)$

$= \inf((s+u),(t+u))$

$= (s+u) \wedge (t+u)$

Jadi terbukti bahwa $s \wedge t + u = (s+u) \wedge (t+u)$

2. $s = s^{+} - s^{-}$

   Perhatikan bahwa:

   Berdasarkan definisi 4.3 (1) dan (2), maka:

   $s^{+} - s^{-} = (s \vee 0) - (-s \vee 0)$

   Berdasarkan definisi dualitas maka:

   $= (s \vee 0) + (s \wedge 0)$

   $$s^{+} = (s \vee 0) = \begin{cases} s\ jika\ s \geq 0 \\ 0\ jika\ s < 0 \end{cases}$$

   $$s^{-} = (s \wedge 0) = \begin{cases} 0\ jika\ s \geq 0 \\ s\ jika\ s < 0 \end{cases}$$

   Perhatikan bahwa:

   Jika $s \geq 0$, maka:

   $(s \vee 0) + (s \wedge 0) = s + 0 = s$

   Jika $s < 0$, maka:

   $(s \vee 0) + (s \wedge 0) = 0 + s = s$

   Jadi terbukti bahwa $s = s^{+} - s^{-}$.

3. Akan dibuktikan:

   (i) $|s| = s^{+} + s^{-}$

   Perhatikan bahwa:

   Berdasarkan definisi 4.3 (1) dan (2), maka:

   $s^{+} + s^{-} = (s \vee 0) + (-s \vee 0)$

   Perhatikan bahwa:

$$s^+ = (s \vee 0) = \begin{cases} s \; jika \; s \geq 0 \\ 0 \; jika \; s < 0 \end{cases}$$

$$s^- = (-s \vee 0) = \begin{cases} -s \; jika \; s < 0 \\ \;0 \; jika \; s \geq 0 \end{cases}$$

Jika $s \geq 0$, maka:

$(s \vee 0) + (-s \vee 0) = s + 0 = s$

Karena nilai $s^+ + s^- = s$, dengan $s \geq 0$, maka berdasarkan definisi nilai mutlak $s^+ + s^- = |s|$

Jadi terbukti bahwa $|s| = s^+ + s^-$

(ii) $|\beta s| = |\beta||s|$

Perhatikan bahwa:

Karena $s \in E$ dan $\beta \in \mathbb{R}$ dengan $E \subset \mathbb{R}$

Berdasarkan teorema nilai mutlak pada bilangan real, maka:

$|\beta s| = |\beta||s|$

Jadi terbukti bahwa $|\beta s| = |\beta||s|$

(iii) $|s + t| \leq |s| + |t|$

Berdasarkan teorema 4.1 (3.a) maka:

$|s + t| \leq |(s^+ + t^+) - (s^- + t^-)|$

$= |(s^+ + t^+) + (-s^- - t^-)|$

$= |(s^+ - s^-) + (t^+ - t^-)|$ (menggunkan sifat komutatif)

$\leq |(s^+ - s^-)| + |(t^+ - t^-)|$ (menggunakan ketaksamaan segitiga)

$\leq |s| + |t|$

Jadi terbukti bahwa $|s + t| \leq |s| + |t|$

4. $s^+ \perp s^-$

   Berdasarkan definisi 4.3 (3), $s^+ \perp s^-$ dikatakan disjoint apabila $|s^+| \wedge$

   $|s^-| = 0$

   Selanjutnya akan dibuktikan:

   $|s^+| \wedge |s^-| = 0$

   Berdasarkan definisi 4.3 (1) dan (2), maka:

   $|s \vee 0| \wedge |-s \vee 0|$

   Perhatikan bahwa:

   $s^+ = (s \vee 0) = \begin{cases} s \ jika \ s \geq 0 \\ 0 \ jika \ s < 0 \end{cases}$

   $s^- = (-s \vee 0) = \begin{cases} -s \ jika \ s < 0 \\ \ 0 \ jika \ s \geq 0 \end{cases}$

   $(s \wedge 0) = \begin{cases} 0 \ jika \ s \geq 0 \\ s \ jika \ s < 0 \end{cases}$

   Jika $s \geq 0$, maka:

   $|s \vee 0| \wedge |-s \vee 0| = |s| \wedge |0| = 0$

   Jika $s < 0$, maka:

   $|s \vee 0| \wedge |-s \vee 0| = |0| \wedge |-s|$

   Berdasarkan definisi nilai mutlak, dan karena $s \geq 0$ maka:

   $|s \vee 0| \wedge |-s \vee 0| = s \wedge 0 = 0$

   Karena $|s^+| \wedge |s^-| = 0$

   Jadi terbukti bahwa $s^+ \perp s^-$

5. $s \leq t$ *equivalent* dengan $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$

   (i) Bukti ke kanan

      Akan dibuktikan:

      Jika $s \leq t$ maka $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$

Berdasarkan teorema 4.1 (2), maka:

$s = s^+ - s^-$, dan $t = t^+ - t^-$

Perhatikan bahwa:

$s \leq t$

$s - t \leq 0$

$(s^+ - s^-) - (t^+ - t^-) \leq 0$

$(s^+ - t^+) + (-s^- + t^-) \leq 0$, sehingga:

$(s^+ - t^+) \leq 0$ dan $(-s^- + t^-) \leq 0$, diperoleh:

$s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$

Jadi terbukti bahwa, jika $s \leq t$ maka $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$

(ii) Bukti ke kiri

Akan dibuktikan:

Jika $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$ maka $s \leq t$

Berdasarkan teorema 4.1 (2), maka:

$s = s^+ - s^-$, sehingga $t = t^+ - t^-$

Perhatikan bahwa:

$s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$, maka:

$s^+ - t^+ \leq 0$ dan $t^- - s^- \leq 0$, sehingga diperoleh:

$(s^+ - t^+) - (t^- - s^-) \leq 0$

$(s^+ - s^-) - (t^+ - t^-) \leq 0$

$s - t \leq 0$

$s \leq t$

Jadi terbukti bahwa, jika $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$ maka $s \leq t$

Dari poin (i) dan (ii), terbukti bahwa $s \leq t$ *equivalent* dengan $s^+ \leq t^+$ dan $t^- \leq s^-$

6. $s \perp t$ *equivalent* dengan $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s + t| \leq |s| + |t|$

(i) Bukti ke kanan

Akan dibuktikan:

Jika $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s + t| \leq |s| + |t|$, maka $s \perp t$

Misalkan $|s \vee t| = |s| \vee |t|$ dan $|s \wedge t| = |s| \wedge |t|$

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan definisi 4.3 (4), maka:

$s \perp t$ apabila $|s| \wedge |t| = 0$

Berdasarkan teorema 4.1 (3.c), maka:

$|s \vee t| = |s| + |t|$

$|s \vee t| = |s + t|$

$|s \vee t| - |s + t| \ = 0$

Berdasarkan teorema 4.1 (1.a), maka:

$|s \vee t| - |s \vee t + s \wedge t\ | \ = 0$

$|s \vee t - (s \vee t + s \wedge t)| \ = 0$

Bertdasarkan sifat asosiatif, maka:

$|(s \vee t - s \vee t) + s \wedge t| \ = 0$

$|0| + |s \wedge t| \ = 0$

$|s \wedge t| = 0$

$|s| \wedge |t| = 0$, artinya $s \perp t$.

Jadi terbukti bahwa, jika $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s + t| \leq |s| + |t|$, maka $s \perp t$.

(ii) Bukti ke kiri

Jika $s \perp t$ maka $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s+t| \leq |s| + |t|$

Diketahui $|s| \wedge |t| = 0$

Perhatikan bahwa:

$|s| \wedge |t| = 0$

$|s \wedge t| = 0$

Dengan menggunakan manipulasi aljabar, maka:

$|s \wedge t| + |(s \vee t - s \vee t)| \ \ = 0$

Berdasarkan teorema 4.3 (3.c), maka:

$|s \wedge t + (s \vee t - s \vee t)| = 0$

Berdasarkan sifat asosiatif, maka:

$|(s \wedge t + s \vee t) - s \vee t| = 0$

Berdasarkan teorema 4.3 (1.a), maka:

$|(s+t) - (s \vee t)| = 0$

$|s+t| - |s \vee t| \ \ = 0$

$|s+t| = |s \vee t|$ artinya $|s \vee t| = |s+t|$

$|s \vee t| = |s+t|$

$|s| \vee |t| = |s| + |t|$

Jadi terbukti bahwa, jika $s \perp t$ maka $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s+t| \leq |s| + |t|$

Dari poin (i) dan (ii), terbukti bahwa $s \perp t$ *equivalent* dengan $|s| \vee |t| = |s| + |t|$, di mana $|s+t| \leq |s| + |t|$

7. Akan dibuktikan $(s \wedge t) \vee u = (s \vee u) \wedge (t \vee u)$

Misalkan $z = s \vee u$

$$(s \vee u) \wedge (t \vee u) = z \wedge (t \vee u)$$

Dengan definisi distributif lattice, maka:

$$= (z \wedge t) \vee (z \wedge u)$$

$$= ((s \vee u) \wedge t) \vee ((s \vee u) \wedge u)$$

Dengan menggunakan sifat asosiatif pada lattice, maka:

$$= ((s \vee u) \wedge t) \vee (s \vee (u \wedge u))$$

Berdasarkan sifat infimum, maka:

$$= ((s \vee u) \wedge t) \vee (s \vee u)$$

Berdasarkan sifat komutatif pada lattice, maka:

$$= ((s \vee s) \wedge t) \vee (u \vee u)$$

Berdasarkan sifat supremum, maka:

$$= (s \wedge t) \vee (u)$$

$$= (s \wedge t) \vee u$$

Jadi terbukti bahwa $(s \wedge t) \vee u = (s \vee u) \wedge (t \vee u)$

8. Akan dibuktikan:

   Jika $s, t, u \in E_+$ dan $0 \leq u \leq s + t$, maka terdapat $a, b \in E_+$ sedemikian sehingga $a \leq s, b \leq t$ dan $u = a + b$

   Perhatikan bahwa:

   Misalkan $a = \inf(s, u)$ dan $b = u - a$

   (i) Akan ditunjukkan $a \leq s$

   Karena $a = \inf(s, u)$, jadi jelas bahwa $a \leq s$

   (ii) Akan ditunjukkan $b \leq t$

   Diketahui $u \leq s + t$, karena $a = \inf(s, u)$ maka $a \leq u$ dan karena $b = u - a$, maka:

$b = u - a \leq u \leq t$, sehingga $b \leq t$

(iii) Akan ditunjukkan $u = a + b$

Karena $b = u - a$, jelas bahwa $u = a + b$.

Jadi terbukti bahwa terdapat $a, b \in E_+$ sedemikian sehingga $a \leq s, b \leq t$ dan $u = a + b$

9. Untuk setiap $s, t, u \in E_+$, maka $(s + t) \wedge u \leq s \wedge u + t \wedge u$

Perhatikan bahwa:

$s \wedge u + t \wedge u = \inf(s, u + t, u)$

$= \inf((s + t), u)$

$= \inf(s + t) \inf(u)$

$= (s + t) \wedge u$

Jadi terbukti bahwa Untuk setiap $s, t, u \in E_+$, maka $(s + t) \wedge u \leq s \wedge u + t \wedge u$

10. $|s - t| = s \vee t - s \wedge t$ dan $|s - t| = |s \vee u - t \vee u| + |s \wedge u - t \wedge u|$

Perhatikan bahwa:

Berdasarkan poin 3 (a), maka:

$|s - t| = (s^+ - t^+) + (s^- - t^-)$

$= s^+ + s^- - t^+ - t^-$

$= s^+ + s^- - (t^+ + t^-)$

Berdasarkan definisi 4.3 (1) dan (2), maka:

$= \big((s \vee 0) + (-s \vee 0)\big) - ((t \vee 0) + (-t \vee 0))$

Perhatikan bahwa:

$$s^+ = (s \vee 0) = \begin{cases} s \; jika \; s \geq 0 \\ 0 \; jika \; s < 0 \end{cases}$$

$$s^- = (-s \vee 0) = \begin{cases} -s \; jika \; s < 0 \\ 0 \; jika \; s \geq 0 \end{cases}$$

$$t^+ = (t \vee 0) = \begin{cases} t \; jika \; t \geq 0 \\ 0 \; jika \; t < 0 \end{cases}$$

$$t^- = (-t \vee 0) = \begin{cases} -t \; jika \; t < 0 \\ 0 \; jika \; t \geq 0 \end{cases}$$

Jika $s \geq 0$ dan $t \geq 0$

$= (s + 0) - (t + 0)$

$= s - t$

Karena $s \geq 0$ dan $t \geq 0$ dan berdasarkan definisi, maka:

$s - t = |s - t|$

Jadi terbukti bahwa $|s - t| = s \vee t - s \wedge t$ dan $|s - t| = | s \vee u - t \vee u| + | s \wedge u - t \wedge u|$

11. Akan dibuktikan:

Jika $s_i, t_i, u_i \in E_+$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$ dan $0 \leq u_i \leq s_i + t_i$, maka terdapat $a_i, b_i \in E_+$ sedemikian sehingga $a_i \leq s_i, b_i \leq t_i$ dan $u_i = a_i + b_i$

Dengan menggunakan induksi matematika, perhatikan bahwa:

(i) Untuk $n = 1$

artinya $s_1, t_1, u_1 \in E_+$ dengan $0 \leq u_1 \leq s_1 + t_1$

Misalkan $a_1 = \min(s_1, u_1)$ dan $b_1 = u_1 - a_1$, dengan demikian:

Karena $a_1 = \min(s_1, u_1)$ Jelas bahwa $a_1 \leq s_1$

Karena $u_1 \leq s_1 + t_1$ dan $b_1 = u_1 - a_1$, maka $b_i \leq t_i$

(ii) Misalkan pernyataan ini benar untuk $n = j$

Artinya $s_1, \dots, s_j \in E_+$, $t_1, \dots, t_j \in E_+, u_1, \dots, u_j \in E_+$ dengan $0 \leq u_i \leq s_i + t_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, j$ maka terdapat $a_i, b_i \in E_+$ sedemikian sehingga $a_i \leq s_i, b_i \leq t_i$ dan $u_i = a_i + b_i s_{j+1}, u_1$

(iii) Akan ditunjukkan $n = j + 1$ berlaku

Perhatikan bahwa:

$s_{j+1}, t_{j+1}, u_{j+1} \in E_+$ dengan $0 \leq u_{j+1} \leq s_{j+1} + t_{j+1}$

Misalkan $a_{j+1} = \min(s_{j+1}, t_{j+1})$ dan $b_1 = u_1 - a_1$, dengan demikian:

Karena $a_1 = \min(s_1, u_1)$ Jelas bahwa $a_1 \leq s_1$

Karena $u_1 \leq s_1 + t_1$ dan $b_1 = u_1 - a_1$, maka $b_i \leq t_i$

Proposisi 4.1 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan A himpunan bagian tak kosong dari E yang memiliki $\sup(A)$ atau $\inf(A)$.

Untuk setiap $t \in E$, maka:

1. $t + \sup(A) = \sup_{s \in A}(s + t)$
2. $t + \inf(A) = \inf_{s \in A}(s + t)$
3. $t \wedge \sup(A) = \sup_{s \in A}(t \wedge s)$
4. $t \vee \inf(A) = \inf_{s \in A}(t \vee s)$

Bukti.

Ambil sebarang $t \in E$ dan $s \in A$

Diketahui $A \subseteq E$

Akan dibuktikan:

1. $t + \sup(A) = \sup_{s \in A}(s + t)$

Misalkan $B = \{t + s | s \in A\}$

(i) Akan ditunjukkan bahwa $t + \sup(A)$ adalah batas atas dari B.

Karena s $\in A$ dan berdasarkan definisi supremum, maka:

$$s \leq \sup(A)$$

Dengan menggunakan manipulasi aljabar maka:

$$s + t - t \leq \sup(A)$$

$$s + t \leq t + \sup\ (A)$$

Jadi $t + \sup(A)$ adalah batas atas dari B.

(ii) Akan ditunjukan $t + \sup(A)$ adalah batas atas terkecil

Ambil sebarang $a \in A$

Misalkan a batas atas dari B, maka:

$$B \leq a$$

$$s + t \leq a$$

$$s \leq a - t$$

Berdasarkan definisi supremum, maka $\sup(A)$ adalah batas atas terkecil, sehingga:

$$\sup(A) \leq a - t$$

$$\mathrm{t} + \sup(A) \leq a$$

Dari poin (i) dan (ii) terbukti bahwa $\mathrm{t} + \sup(A) = \sup_{s \in A}(\mathrm{s} + \mathrm{t})$.

2. $t + \inf(A) = \inf_{s \in A}(s + t)$

Misalkan $C = \{t + s | s \in A\}$

(i) Akan ditunjukkan bahwa $t + \inf(A)$ adalah batas bawah dari C.

Karena s $\in A$ dan berdasarkan definisi infimum, maka:

$$\inf(A) \leq s$$

Dengan menggunakan manipulasi aljabar maka:

$$\inf(A) \leq s + t - t$$

$$t + \inf(A) \leq s + t$$

$$t + \inf(A) \leq C$$

Jadi $t + \inf(A)$ adalah batas bawah dari C.

(ii) Akan ditunjukan $t + \sup(A)$ adalah batas bawah terbesar

Ambil sebarang $b \in A$

Misalkan b batas bawah dari C, maka:

$$b \leq C$$

$$b \leq s + t$$

$$b - t \leq s$$

Berdasarkan definisi infimum, maka $\inf(A)$ adalah batas bawah terbesar, sehingga:

$$b - t \leq \inf(A)$$

$$b \leq \inf(A) + t$$

Dari poin (i) dan (ii) terbukti bahwa $\mathrm{t} + \inf(A) = \inf_{s \in A}(s + t)$.

3. $t \wedge \sup(A) = \sup_{s \in A}(t \wedge s)$

Misalkan $D = \{t \wedge s : s \in A\}$

Akan ditunjukkan:

(i) $t \wedge \sup(A)$ batas atas dari D

(Kasus 1):

Misalkan $s, t \geq 0$

Perhatikan bahwa:

Karena $\sup(A)$ adalah batas atas dari A dan untuk setiap $s \in A$, maka:

$$s \leq \sup(A)$$

Karena $s, t \geq 0$, maka:

$$s \vee ((0 \wedge t) - (0 \wedge t)) \leq \sup(A)$$

$$s \vee (0 \wedge t) \leq \sup(A) + (0 \wedge t)$$

Berdasarkan sifat asosiatif pada lattice, maka:

$$(s \vee 0) \wedge t \leq (\sup(A) + 0) \wedge t$$

$$s \wedge t \leq \sup(A) \wedge t$$

Berdasarkan sifat komutatif pada lattice, maka:

$$t \wedge s \leq t \wedge \sup(A)$$

(Kasus 2):

Misalkan $s, t < 0$

Perhatikan bahwa:

Karena $\sup(A)$ adalah batas atas dari A dan untuk setiap $s \in A$, maka:

$$s \leq \sup(A)$$

Karena $s, t < 0$, maka:

$$s \wedge ((0 \wedge t) - (0 \wedge t)) \leq \sup(A)$$

$$s \wedge (0 \wedge t) \leq \sup(A) + (0 \wedge t)$$

Berdasarkan sifat asosiatif pada lattice, maka:

$$(s \wedge 0) \wedge t \leq (\sup(A) + 0) \wedge t$$

$$s \wedge t \leq \sup(A) \wedge t$$

Berdasarkan sifat komutatif pada lattice, maka:

$$t \wedge s \leq t \wedge \sup(A)$$

Jadi terbukti $t \wedge \sup(A)$ batas atas dari D untuk setiap $s \in A$.

(ii) $t \wedge \sup(A)$ batas atas terkecil dari D

Misalkan a adalah batas atas lain dari himpunan $t \wedge s$, artinya:

$$t \wedge s \leq a$$

karena $t \wedge s \leq s$ dan $t \wedge s \leq a$, maka:

$$\text{s} \leq a$$

$$\sup(A) \leq a$$

$$t \wedge \sup(A) \leq a$$

Jadi $t \wedge \sup(A)$ batas atas terkecil dari t ∧ s untuk setiap $s \in A$.

Berdasarkan (i) dan (ii), jadi terbukti bahwa $t \wedge \sup(A) = \substack{sup \\ s \in A}(t \wedge s)$.

4. $t \vee \inf(A) = \substack{inf \\ s \in A}(t \vee s)$

Misalkan $G = \{t \vee s : s \in A\}$

Akan ditunjukkan:

(i) $t \vee \inf(A)$ batas bawah dari $t \vee s$

(Kasus 1):

Misalkan $s, t \geq 0$

Perhatikan bahwa:

Karena $\inf(A)$ adalah batas bawah dari A dan untuk setiap $s \in A$, maka:

$$s \geq \inf(A)$$

Karena $s, t \geq 0$, maka:

$$s \vee ((0 \vee t) - (0 \vee t)) \geq \inf(A)$$

$$s \vee (0 \vee t) \geq \inf(A) + (0 \vee t)$$

Berdasarkan sifat asosiatif pada lattice, maka:

$$(s \vee 0) \vee t \geq (\inf(A) + 0) \vee t$$

$$s \vee t \geq \inf(A) \vee t$$

Berdasarkan sifat komutatif pada lattice, maka:

$$t \vee s \geq t \vee \inf(A)$$

(Kasus 2):

Misalkan $s, t < 0$

Perhatikan bahwa:

Karena $\inf(A)$ adalah batas bawah dari A dan untuk setiap $s \in A$, maka:

$$s \geq \inf(A)$$

Karena $s, t < 0$, maka:

$$s \wedge ((0 \vee t) - (0 \vee t)) \geq \inf(A)$$

$$s \wedge (0 \vee t) \geq \inf(A) + (0 \vee t)$$

Berdasarkan sifat asosiaif pada lattice, maka:

$$(s \wedge 0) \vee t \geq (\inf(A) + 0) \vee t$$

$$s \vee t \geq \inf(A) \wedge t$$

Berdasarkan sifat komutatif pada lattice, maka:

$$t \vee s \geq t \vee \inf(A)$$

(ii) $t \vee \inf(A)$ batas bawah terbesar dari $t \vee s$untuk setiap $s \in A$

Diketahui $s \leq t \vee s$

Misalkan a adalah batas bawah lain dari $t \vee s$, artinya:

$$a \leq t \vee s$$

karena $s \leq t \vee s$ dan $t \leq t \vee s$, maka:

$$a \leq s$$

$$a \leq \inf(A)$$

$$a \leq t \vee \inf(A)$$

$t \vee \inf(A)$ batas bawah terbesar dari t ∨ s untuk setiap $s \in A$

Berdasarkan (i) dan (ii), jadi terbukti bahwa $t \vee \inf(A) = \underset{s\in A}{inf}(t \vee s)$.

Proposisi 4.2 (Meyer-Nieberg, 1991)

Misalkan bahwa $s_1, s_2, \ldots, s_n,\ t_1, t_2, \ldots, t_m \in E_+$ memenuhi $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$ maka terdapat $z_{i,k} \in E_+$ $(i = 1, \ldots, n$ dan $k = 1, \ldots, m)$ sedemikian hingga $s_i = \sum_{k=1}^{m} z_{i,k} \in E_+$ $(i = 1, \ldots, n\,)$ dan $t_k = \sum_{i=1}^{n} z_{i,k} \in E_+$ $(k = 1, \ldots, m\,)$

Bukti.

Diketahui $s_i, t_k \in E_+$ dengan $s_i = s_1, s_2, \ldots, s_n$, dan $t_k = t_1, t_2, \ldots, t_m$ memenuhi $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$.

Karena $s_i, t_k \in E_+$, maka berdasarkan teorema 4.1 (11), terdapat $t_0 \in E_+$ sedemikian hingga $0 \leq t_0 \leq s_i + t_k$

Diasumsikan benar bahwa untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ memenuhi

$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_m$ dengan $s_i, t_k \geq 0$

Dimana $t_0 \leq s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ akibatnya terdapat $z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots, z_{n,0} \in E_+$ sedemikian hingga $z_{i,0} \leq s_i$, $\forall i$, dan

$t_0 = z_{1,0} + z_{2,0} + \cdots + z_{n,0}$

$t_0 = \sum_{i=1}^{n} z_{i,0}$

Karena $\sum_{i=1}^{n} s_i = t_0 + \sum_{k=1}^{m} t_k$

$\sum_{i=1}^{n} s_i - t_0 = \sum_{k=1}^{m} t_k$

Misalkan $\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} z_{i,0}$, maka

$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{k=1}^{m} t_k$, akibatnya

Terdapat $z_{i,k} \geq 0$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$ dan $k = 1,2, \ldots, n$ sedemikian hingga

$s_i - z_{i,0} = v_i = \sum_{i=1}^{n} z_{i,k}$ dengan $i = 1,2, \ldots, n$ dan $t_k = \sum_{i=1}^{n} z_{i,k}$

Proposisi 4.3 (Meyer-Nieberg, 1991)

Suatu Ruang Vektor terurut E adalah Ruang Riesz jika $E = E_+ - E_+$ dan $\sup(h, i) = h \vee i$ untuk setiap $h, i \in E_+$

Bukti.

Ambil sebarang $h, i \in E_+$dan $s \in E$

1. Akan dibuktikan bahwa $E = E_+ - E_+$

   Perhatikan bahwa:

   Karena $h \in E_+$,

   Berdasarkan definisi 4.3, maka $\forall h \geq 0$, berlaku:

   $h = h^+ = h \vee 0 = h > 0$

   $h = h^- = -h \vee 0 = 0$

   artinya $h^+, h^- \in E_+$

   Berdasarkan teorema 4.1 (2)

   $s = s^+ - s^-$ dalam hal ini berarti $s = h^+ - h^-$

   Karena $s \in E$ dan $h^+, h^- \in E_+$, maka dapat ditulis:

$$E = E_+ - E_+$$

   Jadi terbukti bahwa $E = E_+ - E_+$

2. Akan dibuktikan bahwa $\sup(h, i) = h \vee i$

   Perhatikan bahwa:

   Karena $h, i \in E_+$, maka $\forall h, i \geq 0$, berlaku:

   $h = h^+ = h \vee 0 = h > 0$

   $i = i^+ = i \vee 0 = i > 0$

Sehingga,

$h \vee i = h^{+} \vee i^{+}$

$= (h \vee 0) \vee (i \vee 0)$

$= h \vee i$

$= \sup\,(h, i)$

Jadi terbukti bahwa $\sup\,(h, i) \ = h \vee i$.

4.2 Ruang Bernorma Riesz

Ruang Bernorma Riiesz adalah Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm, berikut definisi lengkap dari Ruang Bernorma Riesz.

Definisi 4.4 (Meyer-Nieberg, 1991)

Apabila semi-norm p pada E memenuhi $p(s) \leq p(t)$ ketika $|s| \leq |t|$ dikatakan latis semi-norm dan lattice norm apabila p adalah norm. Dalam kasus lain $(E, ||.||)$ dikatakan Ruang Bernorma Riesz.

Contoh 4.2

Buktikan bahwa Ruang Euclid $(\mathbb{R}^n, \| \ d \ \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz dengan norm yang didefinisikan dengan:

$$\| \ d \ \| = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2}$$

Bukti.

Diambil sebarang $d, e, f \in \mathbb{R}^n$ dan $\beta \in \mathbb{R}$ dengan $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dan $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

Akan dibuktikan $(\mathbb{R}^n, \| \ d \ \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz.

Untuk membuktikan $(\mathbb{R}^n, \| \ d \ \|)$ Ruang Bernorma Riesz, maka akan ditunjukan:

3. $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Riesz

Karena Ruang Riesz adalah Ruang Vektor terurut yang dilengkapi dengan lattice, maka harus memenuhi syarat-syarat berikut:

(i) Apabila $d, e \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $d \leq e$, maka $d + f \leq e + f$ untuk setiap $f \in \mathbb{R}^n$.

Misalkan $d \leq e$, maka $d_1 \leq e_1$, $d_2 \leq e_2$,..., $d_\mathrm{n} \leq e_\mathrm{n}$ dapat dikatakan $d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i}$ untuk setiap $\mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$

Perhatikan bahwa:

$d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} = d_\mathrm{i} + f_\mathrm{i} - f_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i}$

$$d_\mathrm{i} + f_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} + f_\mathrm{i} \text{ untuk setiap } \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$$

$$d + f \leq e + f$$

(ii) Apabila $d \geq 0$ maka $\beta d \leq \beta e$ untuk setiap $\beta \geq 0$ di $\mathbb{R}$.

Misalkan $d \geq 0$ misalkan pula $d \leq e$

Perhatikan bahwa:

$$d_\mathrm{i} \leq e_\mathrm{i} = \frac{1 d_\mathrm{i}}{1} \leq e_\mathrm{i}$$

$$\frac{\beta d_\mathrm{i}}{\beta} \leq e_\mathrm{i}$$

$$\beta d_\mathrm{i} \leq \beta e_\mathrm{i}$$

$$\beta d \leq \beta e$$

(iii) Berdasarkan definisi lattice, maka:

$d \vee e = (\mathrm{maks}(d_1, e_1), \mathrm{maks}(d_2, e_2), \dots, \mathrm{maks}(d_n, e_n))$

$$d \wedge e = (\min(d_1, e_1), \min(d_2, e_2), \dots, \min(d_n, e_n))$$

karena $d \vee e \in \mathbb{R}^n$ dan

$d \wedge e \in \mathbb{R}^n$, maka $(\mathbb{R}^n, \leq)$ adalah lattice.

Dari poin (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Riesz.

2. $(\mathbb{R}^n, \leq)$ adalah lattice norm

Diketahui:

$$\| d \| = (\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2}$$

Sehingga:

$$\| e \| = (\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2)^{1/2} = \sqrt{|e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2}$$

Misalkan $\| d \| \leq \| e \|$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $|d| \leq |e|$

Karena $\| d \| \leq \| e \|$, maka:

$$(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2)^{1/2} \leq (\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2)^{1/2}$$

$$\sqrt{|d_1|^2 + \ldots + |d_n|^2} \leq \sqrt{|e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2}$$

Karena $d, e \in \mathbb{R}^n$ dan berdasarkan definisi akar kuadrat pada bilangan real maka:

$$|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_n| \leq |e_1| + |e_2| + \ldots + |e_n|$$

$$|d_i| \leq |e_i|$$

$$|d| \leq |e|$$

Dari poin 1 dan 2 maka terbukti bahwa $(\mathbb{R}^n, \| d \|)$ adalah Ruang Bernorma Riesz

Proposisi 4.4 (Meyer-Nieberg, 1991)

Untuk suatu Ruang Bernorma Riesz $(E, \|.\|)$ maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

1. Operasi Lattice adalah kontinu.
2. *Cone* positif E_+adalah tertutup.
3. $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ untuk setiap barisan naik yang konvergen $(s_n)_1^\infty \subset E$.

Bukti.

Misalkan $s_n \to s$ dan $t_n \to t$ dalam norm.

1. Akan dibuktikan:

   (i) $s_n \vee t_n \to s \vee t$

   Misalkan $u_n = s_n \vee t_n$ dan $u = s \vee t$

   Karena $s_n \to s$ dan $t_n \to t$ dengan $n \to \infty$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku:

   $\| u_n - u \| < \varepsilon$

   $\| s_n \vee t_n - s \vee t \| < \varepsilon$

   Dengan menggunakan manipulasi aljabar, maka:

   $\leq \| s_n \vee t_n(-s_n \vee t + s_n \vee t) - s \vee t \|$

   $\leq \| s_n \vee t_n - s_n \vee t \| + \| s_n \vee t - s \vee t \|$

   Berdasarkan teorema 2.1, maka:

   $\leq \| s_n - s_n \| + \| t_n - t \| + \| s_n - s \| + \| t - t \|$

   $\leq \| t_n - t \| + \| s_n - s \|$, dengan demikian diperoleh:

   $\| t_n - t \| < \varepsilon$ dan $\| s_n - s \| < \varepsilon$

Jadi terbukti bahwa $s_n \vee t_n \to s \vee t$

(ii) $s_n \wedge t_n \to s \wedge t$

Misalkan $v_n = s_n \wedge t_n$ dan $v = s \wedge t$

Karena $s_n \to s$ dan $t_n \to t$ dengan $n \to \infty$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku:

$\parallel v_n - v \parallel < \varepsilon$

$\parallel s_n \wedge t_n - s \wedge t \parallel < \varepsilon$

Dengan menggunakan manipulasi aljabar, maka:

$\leq \parallel s_n \wedge t_n(-s_n \wedge t + s_n \wedge t) - s \wedge t \parallel$

$\leq \parallel s_n \wedge t_n - s_n \wedge t \parallel + \parallel s_n \wedge t - s \wedge t \parallel$

Berdasarkan teorema 2.1, maka:

$\leq \parallel s_n - s_n \parallel + \parallel t_n - t \parallel + \parallel s_n - s \parallel + \parallel t - t \parallel$

$\leq \parallel t_n - t \parallel + \parallel s_n - s \parallel$, dengan demikian diperoleh:

$\parallel t_n - t \parallel < \varepsilon$ dan $\parallel s_n - s \parallel < \varepsilon$

Jadi terbukti bahwa $s_n \wedge t_n \to s \wedge t$

Dari poin (a) dan (b) terbukti bahwa operasi Lattice dalam Ruang Bernorma Riesz adalah kontinu.

2. Akan dibuktikan bahwa *cone* positif E_+ adalah tertutup.

Misalkan $s_n \in E_+$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $s_n \to s \in E$ dengan $n \to \infty$

Karena $s_n \in E_+$, maka $s_n \geq 0$, artinya $s_n = s_n \vee 0$

Berdasarkan proposisi 4.4 (1), maka:

$s_n = s_n \vee 0 \to s \vee 0$ dengan $n \to \infty$

$s \vee 0 = s$

Jadi terbukti bahwa *cone* positif E_+adalah tertutup.

3. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ untuk setiap barisan naik yang konvergen $(s_n)_1^\infty \subset E$.

   Misalkan $(s_n)_1^\infty \subset E$ adalah barisan naik yang konvergen, artinya $s_n \leq s_{n+1}$ dan $s_n \to s$.

   Akan ditunjukkan bahwa $s = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$

   Perhatikan bahwa:

   Karena s_n adalah barisan naik yang konvergen ke s, maka s adalah batas atas dari $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, artinya $s \geq s_n$

   Karena $s_n \to s$ dan $s \geq s_n$, maka:

$$s = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ untuk setiap barisan naik yang konvergen $(s_n)_1^\infty \subset E$.

4.3 Ruang Bernorma Riesz dalam Al-Qur’an dan Hadis

Ruang Bernorma Riesz adalah Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm. Sedangkan Ruang Riesz adalah Ruang Vektor terurut yang dilengkapi dengan lattice. Sebelum membahas integrasi Ruang Bernorma Riesz dalam Al-Qur’an dan hadis, terlebih dahulu penulis membahas integrasi kompatibel dalam Ruang Vektor terurut. Kompatibel dalam Kamus Besar Bahasa Indonesia memiliki banyak arti, salah satunya kesetaraan. Kesetaraan berarti bahwa semua orang memiliki kedudukan yang sama dan diperlakukan setara tanpa diskriminasi, baik dalam hak, kesempatan, maupun perlakuan. Berikut pengertian kesetaraan menurut hukum yang berlaku di Indonesia dan pengertian keseteraan dalam Agama Islam.

Kesetaraan menurut hukum di indonesia adalah prinsip bahwa setiap warga negara berhak mendapatkan perlakuan yang sama dihadapan hukum, tanpa diskriminasi. Prinsip tersebut termuat dalam pasal 27 Ayat (1) UUD 1945. Pasal ini menyatakan bahwa: "setiap warga negara bersamaan kedudukannya di dalam hukum dan pemerintahan dan wajib menjujung hukum dan pemerintahan itu dengan tidak ada kecualinya ."

Sedangkan dalam islam, kesetaraan berarti bahwa setiap individu dipandang setara dimata Allah SWT, tanpa melihat perbedaan ras, jenis kelamin, ataupun status sosial seseorang. Hal tersebut sama dengan konsep kompatibel atau kesetaraan dalam Ruang Vektor terurut. Maksud dari kompatibel dalam Ruang Vektor terurut adalah untuk setiap $h, i \in E$ dengan $h \leq i$, memenuhi $h + j \leq i + j$ untuk setiap $j \in E$ dan $mh \leq mi$. Jadi konsep ini menunjukkan bahwa, walaupun ada perbedaan antara dua elemen h dan $i,$ kemudian ada penjumlahan dan perkalian kedua elemen tersebut dengan j dan m bilangan real positif, hal tersebut tidak akan mengubah urutan antara keduanya. Dengan kata lain, meskipun ada perbedaan jenis kelamin baik laki-laki maupun perempuan, kaya ataupun miskin, namun dalam hal ibadah akan tetap sama dimata Allah Swt. Berikut ayat Al-Qur'an yang menjelaskan hal demikian.

فَاسْتَجَابَ لَهُمْ رَبُّهُمْ أَنِّي لَا أُضِيعُ عَمَلَ عامِلٍ مِنْكُمْ مِنْ ذَكَرٍ أَوْ أُنْثى بَعْضُكُمْ مِنْ بَعْضٍ فَالَّذِينَ هَاجَرُوا
وَأُخْرِجُوا مِنْ دِيارِهِمْ وَأُوذُوا فِي سَبِيلِي وَقاتَلُوا وَقُتِلُوا لَأُكَفِّرَنَّ عَنْهُمْ سَيِّئاتِهِمْ وَلَأُدْخِلَنَّهُمْ جَنَّاتٍ تَجْرِي مِنْ
تَحْتِهَا الْأَنْهارُ ثَواباً مِنْ عِنْدِ اللَّهِ وَاللَّهُ عِنْدَهُ حُسْنُ الثَّوَابِ ١٩٥

(Kementrian Agama, 2022)

Artinya: *"Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman), Sesungguhnya Aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal diantara kalian, baik laki-laki ataupun perempuan, (karena) sebagian kalian adalah turunan dari sebagian yang lain. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh. Pastilah akan Kuhapus kesalahan-kesalah mereka* *dan pastilah Aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya. Sebagai tanda pahala di sisi Allah. Dan Allah Allah pada sisi-Nya yang baik.”* (QS.Al-Imran [3]:195)

Dalam islam dijelaskan bahwa laki-laki dan perempuan dipandang sama dalam urusan ibadah, namun ada beberapa hal yang mengharuskan kedudukan laki-laki lebih tinggi dibandingkan perempuan, seperti dalam pelaksanaan shalat berjamaah. Dalam hal tersebut sebagian besar ulama bersepakat bahwa imam shalat berjamaah haruslah kaum laki-laki. Hal tersebut dijelaskan dalam Al-Qur’an.

اَلرِّجَالُ قَوّٰمُوْنَ عَلَى النِّسَاۤءِ بِمَا فَضَّلَ اللّٰهُ بَعْضَهُمْ عَلٰى بَعْضٍ وَّبِمَآ اَنْفَقُوْا مِنْ اَمْوَالِهِمْۗ فَالصّٰلِحٰتُ قٰنِتٰتٌ
حٰفِظٰتٌ لِّلْغَيْبِ بِمَا حَفِظَ اللّٰهُ ۗوَالّٰتِيْ تَخَافُوْنَ نُشُوْزَهُنَّ فَعِظُوْهُنَّ وَاهْجُرُوْهُنَّ فِى الْمَضَاجِعِ وَاضْرِبُوْهُنَّ ۚ فَاِنْ
اَطَعْنَكُمْ فَلَا تَبْغُوْا عَلَيْهِنَّ سَبِيْلًا ۗاِنَّ اللّٰهَ كَانَ عَلِيًّا كَبِيْرًا ٣٤

(Kementrian Agama, 2022)
Artinya: *“Kaum laki-laki itu adalah pemimpin bagi kaum wanita, karena Allah telah melebihkan sebagian mereka (laki-laki) atas sebagian yang lain (wanita), dan karena mereka (laki-laki) telah menafkahkan sebagian dari harta mereka. Maka wanita-wanita yang saleh adalah yang taat kepada Allah dan memelihara diri ketika (suaminya) tidak ada, karena Allah telah memelihara (mereka). Wanita-wanita yang kamu khawatirkan nusyuznya (membangkang), maka nasihatilah mereka, pisahkanlah mereka di tempat tidur, dan (kalau perlu) pukullah mereka. Tetapi jika mereka menaati kamu, maka janganlah kamu mencari-cari jalan untuk menyusahkannya. Sesungguhnya Allah Maha Tinggi lagi Maha Besar.”* (QS. An-Nisa [4]:34)

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, Ruang Bernorma Riesz adalah Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm. Berikut definisi lengkapnya. Apabila semi-norm p pada E memenuhi $p(s) \leq p(t)$ ketika $|s| \leq |t|$ dikatakan latis semi-norm dan lattice norm apabila p adalah norm. Dalam kasus lain $(E, \|.\|)$ dikatakan Ruang Bernorma Riesz. Konsep Ruang Bernorma Riesz dan lattice semi-norm dapat dikaitkan dengan ayat-ayat Al-Qur'an yang menegaskan tentang prinsip keadilan, dan kedekatan seorang hamba kepada Allah Swt melalui amal kebaikan.

Lattice semi-norm dapat dipandang sebagai suatu sistem yang menilai amal perbuatan setiap orang secara adil berdasarkan tingkat atau bobot amalnya. Al-

Qur’an mengajarkan bahwa amal seseorang dinilai dengan adil dan proporsional. Amal yang besar mendapatkan pahala yang besar, dan begitu pula sebaliknya. Hal ini bisa dikaitkan dengan konsep lattice semi-norm, di mana elemen dengan "norm" yang lebih besar memiliki kedudukan yang lebih tinggi. Sebagaimana dijelaskan dalam Al-Qur’an.

فَمَنْ يَّعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَّرَهٗۚ ۝٧ وَمَنْ يَّعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَّرَهٗ ۝٨

(Kementrian Agama, 2022)
Artinya: *“Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat zarrah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan seberat zarrah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula.”* (QS. Al-Zalzalah [99]:7-8)

Ayat ini menggambarkan bahwa setiap amal, sekecil apa pun, memiliki nilai yang terukur dan adil. Dalam lattice semi-norm, hal ini serupa dengan $p(s) \leq p(t)$ ketika $|s| \leq |t|$, di mana amal yang lebih besar nilainya akan memiliki posisi atau kedudukan yang lebih tinggi. Dalam Ruang Bernorma Riesz, norm $||.||$ adalah suatu fungsi yang mengukur jarak atau kedekatan elemen dalam Ruang tersebut. Hal ini bisa diibaratkan sebagai kedekatan seorang hamba dengan Allah Swt melalui amal perbuatannya.

وَاِذَا سَاَلَكَ عِبَادِيْ عَنِّيْ فَاِنِّيْ قَرِيْبٌۗ اُجِيْبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ اِذَا دَعَانِۙ فَلْيَسْتَجِيْبُوْا لِيْ وَلْيُؤْمِنُوْا بِيْ لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُوْنَ ۝١٨٦

(Kementrian Agama, 2022)
Artinya: *“Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang Aku, maka (jawablah), sesungguhnya Aku dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia memohon kepada-Ku. Maka hendaklah mereka memenuhi (segala perintah-Ku) dan beriman kepada-Ku, agar mereka memperoleh kebenaran.”* (QS. Al-Baqarah [2]:186)

Ayat ini mengajarkan bahwa jarak seorang hamba dengan Allah Swt adalah dekat, dan jarak tersebut hanya dapat diukur melalui amal dan doa yang dilakukan oleh hamba tersebut. Hal demikian sama halnya dengan konsep norm dalam Ruang Bernorma Riesz, di mana setiap elemen s memiliki nilai norm $\| s \|$ yang memberikan informasi tentang "jarak" elemen tersebut dari titik nol (atau keadaan tanpa amal).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Ruang Bernorma Riesz merupakan Ruang Riesz yang dilengkapi dengan norm. Ruang Bernorma Riesz memiliki sifat-sifat dasar yang dibuktikan dalam penelitian ini. Sifat-sifat dasar tersebut mencakup operasi latticenya yang kontinu, *cone* positif bersifat tertutup, dan ketentuan konvergensi barisan naik yang berada dalam Ruang Bernorma Riesz. Penelitian ini juga menunjukkan adanya keterkaitan antara konsep Ruang Bernorma Riesz dengan nilai-nilai dalam Al-Qur'an dan Hadis

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

1. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji lebih dalam tentang aplikasi Ruang Bernorma Riesz.
2. Pengembangan penelitian ini dapat mencakup pembahasan tentang Ruang Bernorma Riesz dengan struktur yang lebih kompleks, misalnya, dengan menambahkan operator-operator khusus yang relevan.

DAFTAR PUSTAKA

Aliprantis, C. D. (2003). *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics* (second). Cambridgw Uneversity Press.

Anton, H., & Rorres, C. (2017). Elementary Linear Algebra. In *Вестник Росздравнадзора* (Vol. 4, Issue 1). Anton Textbooks.

Carlos, S. K. (2000). Element of Operator Theory. In *Sustainability (Switzerland)* (Vol.11,Issue http://scioteca.caf.com/bitstream/handle/123456789/1091/RED2017-Eng-8ene.pdf?sequence=12&isAllowed=y%0Ahttp://dx.doi.org/10.1016/j.regsciurbeco.2008.06.005%0Ahttps://www.researchgate.net/publication/305320484_SISTEM_PEMBETUNGAN_TERPUSAT_STRATEGI_MELESTARI

Charalambos, D. A., & Rabee, T. (2007). *Cones and Duality* (C. David, C. Walter, I. N.V., & G. K. Steven (eds.)). https://doi.org/10.1515/9783110800487.39

George, G. (1978). *General Lattice Theory* (B. Samuel, Eilenberg and Hyman (ed.)). Columbia University.

Groenewegen, G. (n.d.). *On Spaces of Banach Lattice Valued Functions and Measures*.

Hadits riwayat Muslim no. 4805 dari Abu Hurairah.

Hadits riwayat At-Tirmidzi no. 1842 dari Zarbi.

Kementrian Agama. (2022). *Quran Kemenag*.

Kreyszig, E. (1979). Introductory Functional Analysis with Applications,. In *The Mathematical Gazette* (Vol. 63, Issue 424). https://doi.org/10.2307/3616033

Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach Lattice*. Springer Science & Business Media.

Pedro, T. (1995). *Seminormed spaces*. *2*, 329–343.

Robert G., B. (2010). INTRODUCTION TO REAL ANALYSIS. In n C. Shanno (Ed.), *Urbana, Illinois* (FOURTH, Vol. 11, Issue 1). Laurie Rosatone.

Schaefer, H. H. (1974). Banach Lattices and Positive Operators. *Banach Lattices and Positive Operators*.

W.A.J, L. (1971). *Riesz Space*. North Holland Publishing Company.

RIWAYAT HIDUP

Halimah Tusaadiah, lahir di Bima pada tanggal 11 Desember 2001. Putri ke tiga dari tiga bersaudara dari Ayah Alm. Muhamad dan Ibu Fatimah. Sejak kecil ia dibesarkan di RT.001 RW.001 Dusun Kawinda Desa Sangga Kecamatan Lambu Kabupaten Bima. Selama berkuliah di Uin Maulana Malik Ibrahim Malang, Halimah aktif berkegiatan di luar kampus, yaitu sebagai pengurus PPTQ Ulin Nuha.

Adapun pendidikan formal yang ditempuh Halimah mulai dari taman kanak-kanak di TK Mulia Satu Atap. Kemudian melanjutakan pendidikan sekolah dasar di SDN 1 Simpasai. Setelah menyelesaikan pendidikan di Tingkat SD, Halimah melanjutkan pendidikan di Madrasah Tsanawiyah Al-Husainy Kota Bima. Setelah itu, ia menepuh pendidikan di Madrasah Aliyah Negeri 2 Kota Bima.

Selama menempuh pendidikan di Madrasah Aliyah Negeri 2 Kota Bima, Halimah aktif mengikuti kegiatan ekstrakurikuler, dan beberapa kali mengikuti lomba. Berikut beberapa lomba yang pernah diikuti Halimah selama duduk di bangku SMA. pertama, Lomba Ibnu Sina bidang Matematika pada tahun 2018. Kedua, Lomba Cerdas Cermat 4 Pilar yang diadakan oleh Majelis Permusyawaratan Rakyat Republik Indonesia pada tahun 2019.