

**SIFAT-SIFAT RUANG TOPOLOGI SUPRA IDEAL MELALUI
 R - I BUKA**

SKRIPSI

**OLEH:
NURIL MA'RIFATUL HUSNA
NIM. 210601110022**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024**

**SIFAT-SIFAT RUANG TOPOLOGI SUPRA IDEAL MELALUI
 R - I BUKA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Nuril Ma'rifatul Husna
NIM. 210601110022**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024**

**SIFAT-SIFAT RUANG TOPOLOGI SUPRA IDEAL MELALUI
R-I BUKA**

SKRIPSI

Oleh
Nuril Ma'rifatul Husna
NIM. 210601110022

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 22 November 2024

Dosen Pembimbing I



Dian Maharani, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001

Dosen Pembimbing II



Erna Herawati, M.Pd.
NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

**SIFAT-SIFAT RUANG TOPOLOGI SUPRA IDEAL MELALUI
 R -I BUKA**

SKRIPSI

Oleh
Nuril Ma'rifatul Husna
NIM. 210601110022

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2024

Ketua Penguji : Dr. Elly Susanti, M.Sc.

Anggota Penguji 1 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Dian Maharani, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nuril Ma'rifatul Husna

NIM : 210601110022

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-sifat Ruang Topologi Supra Ideal Melalui R/I Buka

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2024



Nuril Ma'rifatul Husna
NIM.210601110022

MOTO

“Kegagalan hanya terjadi bila kita menyerah”

- B.J. Habibie

PERSEMBAHAN

Bismillaahirrahmaanirrahiim

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, terkhusus kepada kedua orang tua tercinta, Bapak Maulan dan Ibu Imroatin, yang senantiasa memberikan doa, semangat, dan dukungan material yang tiada henti untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Tidak lupa kepada kakak-kakak yang selalu memberikan motivasi, kasih sayang, dan dukungan dalam setiap langkah perjalanan penulis. Serta kepada diri sendiri yang telah berjuang dengan penuh kesabaran, selalu menyertakan Allah SWT dalam setiap prosesnya.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta karunianya. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SWA sehingga tugas akhir ini dapat penulis selesaikan dengan baik.

Skripsi dengan judul “Sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui R - I -buka” merupakan salah satu tugas akhir untuk menyelesaikan mata kuliah skripsi di program studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dorongan dari beberapa pihak. Maka dari itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua sekaligus dosen wali Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, dan nasihat selama menyusun proposal skripsi.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, nasihat, dan pengetahuan selama menyusun proposal skripsi.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, nasihat, dan pengetahuan selama menyusun proposal skripsi.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
7. Kedua orangtua di Tulungagung yang selalu sabar dan mendo'akan serta memotivasi untuk mengerjakan skripsi.
8. Kakak kandung, kakak ipar, dan juga saudara-saudara yang selalu memberikan dukungan, motivasi, nasihat, dan tidak lupa mendo'akan.
9. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika Angkatan 2021 yang selalu memberi dukungan antar mahasiswa.

10. Pihak-pihak lain yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan di masa mendatang. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca serta menjadi sumbangsih bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Malang, 20 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR SIMBOL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
مستخلص البحث.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah.....	5
BAB II KAJIAN TEORI	7
2.1 Teori Pendukung	7
2.1.1. Ruang Topologi.....	7
2.1.2. Himpunan Buka pada Ruang Topologi.....	8
2.1.3. Himpunan Tutup pada Ruang Topologi.....	9
2.1.4. Interior pada Ruang Topologi	10
2.1.5 Tutupan pada Ruang Topologi.....	16
2.1.6 Ruang Topologi Ideal.....	17
2.1.7 Himpunan Buka pada Ruang Topologi Ideal.....	20
2.1.8 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi Ideal.....	20
2.1.9 Ruang Topologi Supra	20
2.1.10 Himpunan Buka pada Ruang Topologi Supra	22
2.1.11 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi Supra.....	23
2.1.12 Interior pada Ruang Topologi Supra.....	23
2.1.13 Tutupan pada Ruang Topologi Supra.....	24
2.1.14 Ruang Topologi Supra Ideal	25
2.1.15 Interior pada Topologi Supra Ideal	26
2.1.16 Tutupan pada Topologi Supra Ideal	26
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits	28
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	31
BAB III METODE PENELITIAN	34
3.1 Jenis Penelitian.....	34
3.2 Pra Penelitian	34
3.3 Tahapan Penelitian	34
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	36
4.1 Himpunan Regular Buka.....	36

4.2	Himpunan $R-I$ Buka.....	37
4.3	Himpunan Supra $R-I$ Buka	39
4.4	Interior dan Tutupan pada Ruang Topologi Supra $R-I$ Buka.....	48
4.5	Kajian Penelitian dalam Prespektif Islam	54
BAB V PENUTUP		59
5.1	Kesimpulan	59
5.2	Saran untuk Penelitian Lanjutan	60
DAFTAR PUSTAKA.....		61
RIWAYAT HIDUP		62

DAFTAR SIMBOL

X	: Himpunan X
$\emptyset$	: Himpunan kosong
τ	: Topologi
(X, τ)	: Ruang topologi
I	: Ideal
(X, τ, I)	: Ruang topologi ideal
$Int(A)$	: Interior dari himpunan A
$Cl(A)$	: Tutupan dari himpunan A
$\subset/\subseteq$	: Himpunan bagian
μ	: Topologi supra
(X, μ)	: Ruang topologi supra
(X, μ, I)	: Ruang topologi supra ideal
$Int^\mu(A)$	: Interior supra dari himpunan A
$Cl^\mu(A)$	: Tutupan supra dari himpunan A

ABSTRAK

Husna, Nuril Ma'rifatul. 2024. **Sifat-sifat Ruang Topologi Supra Ideal Melalui $R-I$ Buka**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Himpunan $R-I$ buka, ruang topologi supra ideal

Penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka. Topologi supra memiliki perbedaan yang mendasar dengan topologi biasa pada salah satu sifatnya yaitu irisan-irisan dari anggota τ belum tentu merupakan anggota topologi supra. Hal tersebut mengakibatkan adanya perbedaan sifat-sifat ruang topologi supra ideal dengan sifat-sifat ruang topologi ideal biasa. Tujuan utama pada penelitian ini yaitu untuk membuktikan sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka. Hasil penelitian telah membuktikan sifat-sifat himpunan $R-I$ buka dan himpunan $R-I$ tutup. Selain itu, penelitian ini juga telah membuktikan aksioma-aksioma yang memenuhi supra $R-I-Int(A)$ dan supra $R-I-Cl(A)$. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dan menjadi referensi tambahan bagi peneliti selanjutnya yang berkaitan dengan topologi supra ideal melalui $R-I$ buka.

ABSTRACT

Husna, Nuril Ma'rifatul. 2024. **Properties of Supra Ideal Topological Spaces Via $R-I$ Open Sets**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: $R-I$ open sets, supra ideal topological space

This research discusses the properties of supra ideal topological spaces via $R-I$ open sets. Supra topology has a fundamental difference with ordinary topology in one of its properties, namely the intersection of members τ is not necessarily a member of supra topology. This results in differences in the properties of supra ideal topological spaces with the properties of ordinary ideal topological spaces. The main objective of this research is to prove the properties of supra ideal topological spaces via $R-I$ open sets. The research results have proven the properties of $R-I$ open sets and $R-I$ closed sets. Furthermore, this research has also proven the axioms that satisfy supra $R-I-Int(A)$ and supra $R-I-Cl(A)$. This research is expected to be beneficial and serve as an additional reference for future researchers related to supra ideal topology via $R-I$ open sets.

مستخلص البحث

حسنى، نورالمعرفة. ٢٠٢٤. خصائص الفضاءات الطوبولوجية السوبرا المثالية عبر $R-I$ المفتوحة. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) ديان مهاراني، الماجستير (٢) ايرناهيراوتي، الماجستير

الكلمات المفتاحية: المجموعات $R-I$ المفتوحة، الفضاء الطوبولوجي السوبرا المثالية

ناقشت هذه البحث خصائص الفضاءات الطوبولوجية السوبرا المثالية عبر $R-I$ المفتوحة. الطوبولوجيا السوبرا تختلف عن الطوبولوجيا العادية في إحدى خصائصها، وهي أن تقاطع الأعضاء τ ليس بالضرورة عضوًا في الطوبولوجيا السوبرا. و ينتج عن ذلك اختلافات في خصائص الفضاءات الطوبولوجية السوبرا مع خصائص الفضاءات الطوبولوجية العادية. الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إثبات خصائص الفضاء الطوبولوجية السوبرا المثالية عبر $R-I$ المفتوحة. وقد أثبتت نتائج البحث خصائص مجموعة $R-I$ المفتوحة ومجموعة $R-I$ المغلقة. إضافة إلى ذلك، أثبت هذا البحث أيضًا البديهيات التي تحقق البديهيات التي تحقق المجموعة السوبرا $R-I-Int(A)$ والمجموعة السوبرا $R-I$ $Cl(A)$. ومن المتوقع أن يكون هذا البحث مفيدًا ومرجعًا إضافيًا لمزيد من الباحثين يتعلق الطوبولوجيا السوبرا المثالية عبر $R-I$ المفتوحة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Topologi merupakan salah satu cabang matematika yang cukup populer. Pada tahun 1914, ruang topologi pertama kali dikenalkan oleh Felix Hausdorff (Singh, 2019). Suatu topologi τ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X adalah anggota τ , gabungan dari sebarang anggota τ juga anggota τ , irisan dari anggota-anggota τ juga anggota τ sehingga pasangan (X, τ) disebut sebagai ruang topologi (Morris, 2007).

Pada ruang topologi membahas tentang himpunan buka, himpunan tutup, interior, danutupan. Himpunan buka pada ruang topologi merupakan semua anggota dari τ pada ruang topologi (X, τ) (Morris, 2007). Sedangkan himpunan bagian A pada X dikatakan himpunan tutup pada ruang topologi (X, τ) apabila komplementnya di X yaitu $X \setminus A$ himpunan buka (Morris, 2007). Selanjutnya, interior himpunan bagian A pada topologi (X, τ) merupakan gabungan semua himpunan buka pada A yang dinotasikan dengan $Int(A)$ atau A° (Singh, 2019). Sedangkanutupan himpunan bagian A pada topologi (X, τ) merupakan irisan semua himpunan tutup pada A dan dinotasikan dengan $Cl(A)$ atau $\bar{A}$ (Singh, 2019).

Seiring berjalannya waktu, penelitian tentang ruang topologi terus mengalami perkembangan salah satunya yaitu topologi ideal yang pertama kali dikaji oleh Vaidyanathaswamy pada tahun 1945. Topologi ideal merupakan koleksi himpunan bagian tak kosong dari X yang memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu apabila

A adalah anggota I dan B adalah himpunan bagian A maka B juga anggota I , apabila A dan B anggota I maka gabungan dari A dan B juga merupakan anggota I (Monsef dkk., 1992).

Topologi ideal juga membahas terkait himpunan buka dan himpunan tutup. Himpunan buka topologi ideal (X, τ, I) dan $A \subseteq X$ maka A dikatakan I -buka apabila $A \subseteq \text{Int}(A^*)$ yang dinotasikan dengan $IO(X, \tau)$. Sedangkan himpunan bagian $F \subseteq (X, \tau, I)$ dikatakan I -tutup apabila komplemen dari I -buka (Monsef dkk., 1992).

Selain membahas topologi ideal, beberapa peneliti juga membahas topologi supra. Pada tahun 1983, Mashhour memperkenalkan ruang topologi supra. μ merupakan koleksi himpunan bagian X yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Suatu topologi supra μ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa sifat yaitu himpunan X dan himpunan kosong $\emptyset$ adalah anggota μ , gabungan dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ juga merupakan anggota μ . Pasangan (X, μ) disebut ruang topologi supra. Anggota dari kumpulan himpunan μ disebut himpunan supra buka di (X, μ) dan komplemen dari himpunan supra buka disebut himpunan tutup supra (Mashhour dkk., 1983).

Ruang topologi supra juga membahas tentang himpunan buka, himpunan tutup, interior, dan tutupan. Himpunan supra buka di (X, μ) merupakan anggota dari koleksi himpunan μ . Sedangkan, komplemen dari himpunan supra buka topologi supra disebut himpunan supra tutup (Mashhour dkk., 1983). Interior topologi supra pada himpunan A dinotasikan dengan supra $\text{Int}^\mu(A)$ yang didefinisikan dengan supra $\text{Int}^\mu(A) = \bigcup \{B : B \text{ supra buka dan } A \supseteq B\}$. Tutupan topologi supra pada himpunan A dinotasikan dengan $Cl^\mu(A)$ yang didefinisikan dengan supra

$Cl^\mu(A) = \cap \{B: B \text{ supra tertutup dan } A \subseteq B\}$ (Pricilla & Maggi, 2016). Pada tahun 2012, Syamapada Modak dan Sukalyan Mistry mengemukakan idenya untuk mengembangkan topologi supra menjadi ruang topologi supra ideal. Ruang topologi supra (X, μ) dengan ideal I pada X disebut ruang topologi supra ideal dan dinotasikan dengan (X, μ, I) (Modak & Mistry, 2012).

Ruang topologi supra ideal memiliki beberapa topik pembahasan di antaranya terdapat himpunan buka, himpunan tutup, interior, dan tutupan. Definisi dari supra buka ideal merupakan himpunan bagian A pada ruang topologi supra ideal apabila $A \subset Int^\mu (A^{*\mu})$. Kemudian definisi dari supra tutup ideal merupakan komplemen dari supra buka ideal. Adapun definisi dari interior supra ideal pada himpunan bagian A yang dinotasikan dengan $Int^{*\mu} (A)$ merupakan gabungan dari ideal supra himpunan buka A (Jasim & Zaben, 2015). Sedangkan, definisi dari tutupan supra ideal pada himpunan bagian A yang dinotasikan dengan $Cl^{*\mu} (A)$ merupakan irisan dari ideal supra himpunan tutup A (Jasim & Zaben, 2015).

Pada penelitian ini, peneliti akan membahas terkait himpunan ruang topologi supra melalui $R-I$ -buka dan sifat-sifatnya. Adapun, $R-I$ -buka merupakan himpunan A pada ruang topologi supra ideal apabila $A = Int^\mu (Cl^*(A))$. Sedangkan komplemen dari himpunan supra $R-I$ buka dinamakan himpunan supra $R-I$ tutup.

Suatu himpunan X dalam topologi tidak semuanya dapat dikatakan sebagai ruang topologi. Dengan kata lain, hanya beberapa anggota himpunan yang memenuhi beberapa syarat tertentu. Hal tersebut sama halnya dengan semua perbuatan yang dilakukan oleh manusia tidak langsung dapat diterima oleh Allah SWT. Amal tersebut dapat diterima oleh Allah SWT harus memenuhi syarat utama yaitu niat dan ikhlas sebagaimana yang sudah dijelaskan dalam hadis riwayat

bukhari dan muslim:

عَنْ أَمِيرِ الْمُؤْمِنِينَ أَبِي حَفْصٍ عُمَرَ بْنِ الْخَطَّابِ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ : سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ ﷺ يَقُولُ :
 إِنَّمَا الْأَعْمَالُ بِالنِّيَّاتِ وَإِنَّمَا لِكُلِّ امْرِئٍ مَّا نَوَى فَمَنْ كَانَ هِجْرَتُهُ إِلَى اللَّهِ وَرَسُولِهِ فَهِجْرَتُهُ إِلَى اللَّهِ وَرَسُولِهِ
 وَمَنْ كَانَ هِجْرَتُهُ لِدُنْيَا يُصِيبُهَا أَوْ امْرَأَةٍ يَنْكِحُهَا فَهِجْرَتُهُ إِلَى مَا هَجَرَ إِلَيْهِ (رواه البخاري والمسلم)

Artinya: “Dari Amirul Mu’minin Abu Hafsh Umar bin Al-Khaththab radhiyallahu ‘anhu ia berkata, Aku mendengar Rasulullah Shallallahu ‘Alaihi wa Sallam bersabda: Sesungguhnya amal itu tergantung niatnya, dan setiap orang hanya mendapatkan apa yang diniatkannya. Barangsiapa yang (berniat) hijrah kepada Allah dan Rasul-Nya, maka hijrahnya kepada Allah dan Rasul-Nya. Barangsiapa yang (berniat) hijrah karena dunia yang ingin diraihnya atau wanita yang akan dinikahinya, maka hijrahnya kepada apa yang diniatkannya itu.” (HR. Bukhari No. 1 dan HR. Muslim No. 1907)

Hadis tersebut menjelaskan tentang begitu pentingnya niat dalam melakukan setiap perbuatan. Pada dasarnya, niat menjadi pondasi untuk melakukan perbuatan tersebut sehingga jika niat yang tulus dan ikhlas karena Allah SWT maka perbuatan tersebut akan dinilai oleh Allah SWT dan memiliki nilai sebagai ibadah. Namun, niat yang tidak tulus dan ikhlas karena Allah SWT maka perbuatannya tidak memiliki nilai ibadah dan dianggap sia-sia. Hal ini sama dengan himpunan X pada suatu himpunan tak kosong di mana untuk menjadi ruang topologi harus memenuhi syarat-syarat tertentu.

Berdasarkan pemaparan mengenai ruang topologi supra ideal dan $R-I$ buka diatas, sebelumnya telah dilakukan penelitian oleh Sangeetha & Chacko (2019) yang berjudul “On Supra Ideal Topological Space Via $R-I$ Open Sets”. Berkaitan dengan hal tersebut, maka peneliti tertarik untuk mengkaji sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka dan pembuktiannya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka didapatkan rumusan masalah yang

akan dibahas pada penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian yang akan dibahas yaitu untuk mengetahui sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan menjadi referensi tambahan terkait sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka. Selain itu, penelitian ini diharapkan menjadi referensi bagi peneliti lainnya untuk meneliti ruang topologi supra lainnya seperti meneliti sifat-sifat $R-I$ kontinu pada ruang topologi supra ideal.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan membahas tentang sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka yaitu himpunan buka, himpunan tutup, interior, dan tutupan.

1.6 Definisi Istilah

1. Ruang Topologi

Suatu topologi τ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X adalah anggota τ , gabungan dari sebarang anggota τ juga anggota τ , irisan dari anggota-anggota τ juga anggota τ sehingga pasangan

(X, τ) disebut sebagai ruang topologi (Morris, 2007).

2. Ruang Topologi Ideal

Topologi ideal merupakan koleksi himpunan bagian tak kosong dari X yang memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu apabila A adalah anggota I dan B adalah himpunan bagian A maka B juga anggota I , apabila A dan B anggota I maka gabungan dari A dan B juga merupakan anggota I (Monsef dkk., 1992).

3. Ruang Topologi Supra

Suatu μ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa sifat yaitu himpunan X dan himpunan kosong $\emptyset$ adalah anggota μ , gabungan dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ juga merupakan anggota μ . Pasangan (X, μ) disebut ruang topologi supra (Mashhour dkk., 1983).

4. Ruang Topologi Supra Ideal

Ruang topologi supra (X, μ) dengan ideal I pada X disebut topologi supra ideal dan dinotasikan dengan (X, μ, I) (Modak & Mistry, 2012).

5. Definisi Himpunan R - I -buka di topologi supra

Diberikan (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal. Himpunan A dikatakan supra R - I buka apabila $A = \text{Int}^\mu (Cl^*(A))$. Komplemen dari himpunan supra R - I buka dinamakan himpunan supra R - I tutup (Sangeetha & Chacko, 2019).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada sub bab ini akan dibahas tentang dasar-dasar teori sebelum mengkaji sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka.

2.1.1. Ruang Topologi

Ruang topologi memiliki peranan penting dalam memahami sifat-sifat ruang topologi supra ideal, terutama dalam supra $R-I$ buka. Oleh karena itu, sebelum mengkaji sifat-sifat tersebut, penting terlebih dahulu memahami ruang topologi beserta contohnya yang akan didefinisikan pada definisi 2.1

Definisi 2.1 (Morris, 2007)

Suatu topologi τ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa aksioma tertentu yaitu

1. Himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X adalah anggota τ
2. Gabungan dari sebarang himpunan τ juga anggota τ
3. Irisan dari himpunan-himpunan τ juga anggota τ

τ yang memenuhi aksioma tersebut dikatakan sebagai topologi. Sedangkan, pasangan (X, τ) disebut ruang topologi.

Contoh 2.1 Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi

$$X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

Bukti

1. Jelas terbukti bahwa $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$
2. $\emptyset \cup X = X \in \tau$;

$$\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$\emptyset \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$X \cup \{a\} = X \in \tau;$$

$$X \cup \{a, b\} = X \in \tau;$$

$$X \cup \{a, c, d\} = X \in \tau;$$

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$\{a, b\} \cup \{a, c, d\} = X \in \tau;$$

$$3. \quad \emptyset \cap X = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a, b\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a, c, d\} = \emptyset \in \tau;$$

$$X \cap \{a\} = \{a\} \in \tau;$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$X \cap \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau;$$

Berdasarkan pembuktian di atas dan memenuhi kondisi 1-3, maka terbukti bahwa (X, τ) merupakan ruang topologi.

2.1.2. Himpunan Buka pada Ruang Topologi

Pada ruang topologi memiliki himpunan buka yang akan didefinisikan

sebagai berikut dan contohnya.

Definisi 2.2 (Morris, 2007)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi, sedemikian sehingga anggota dari τ dikatakan sebagai himpunan buka.

Proposisi 2.1 (Morris, 2007)

Apabila (X, τ) merupakan ruang topologi, maka

1. Himpunan X dan himpunan $\emptyset$ merupakan himpunan buka τ
2. Gabungan dari sebarang himpunan buka τ juga himpunan buka τ
3. Irisan dari himpunan – himpunan buka τ juga himpunan buka τ

Contoh 2.2 Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi

$$X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

Himpunan buka dari topologi di atas adalah $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$.

2.1.3. Himpunan Tutup pada Ruang Topologi

Selain himpunan buka, pada ruang topologi juga memiliki himpunan tutup yang akan didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.3 (Morris, 2007)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi. Himpunan bagian A di X dikatakan himpunan tutup pada (X, τ) apabila komplementnya di X yang dinotasikan dengan $X \setminus A$ merupakan himpunan buka di (X, τ) .

Proposisi 2.2 (Morris, 2007)

Apabila (X, τ) merupakan ruang topologi, maka

1. Himpunan X dan himpunan kosong merupakan himpunan tutup
2. Gabungan dari sebarang himpunan tutup τ juga himpunan tutup τ

3. Irisan dari himpunan – himpunan tutup τ juga himpunan tutup τ

Contoh 2.3 Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi

$$X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

Himpunan tutup dari ruang topologi tersebut adalah $\{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b\}\}$.

2.1.4. Interior pada Ruang Topologi

Interior pada ruang topologi akan didefinisikan sebagai berikut dan contohnya.

Definisi 2.4 (Singh, 2019)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan A merupakan himpunan bagian dari X . Himpunan buka terbesar di A dinamakan interior di $A \in X$ merupakan gabungan semua himpunan buka dalam A . Dinotasikan dengan $\text{int } A$ atau A° . $\text{Int } A$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Int } (A) = \bigcup \{G \mid G \text{ buka di } X \text{ dan } G \subseteq A\}$$

Contoh 2.4 Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan $A \subseteq X$

$$X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}, \text{ dan } A = \{a, d\}$$

Interior dari topologi di atas adalah

1. Himpunan bukanya yaitu $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$
2. Himpunan buka yang merupakan himpunan bagian dari A adalah $\emptyset, \{a\}$
3. $\text{Int}(A) = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa interior dari A adalah $\{a\}$.

Proposisi 2.3 (Singh, 2019)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan $A, B \subseteq X$. Maka,

1. $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$

2. $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$
3. $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$
4. $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$, maka harus membuktikan 2 inklusi yaitu $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Int}(A)$ dan $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(\text{Int}(A))$

Inklusi pertama : $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Int}(A)$

Berdasarkan definisi 2.4, $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan buka terbesar yang terkandung dalam A

Karena $\text{Int}(A) \subseteq A$, maka setiap titik di $\text{Int}(\text{Int}(A))$ juga harus ada di $\text{Int}(A)$. Artinya setiap $x \in \text{Int}(\text{Int}(A))$ juga merupakan elemen dari $\text{Int}(A)$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Int}(A)$

Inklusi kedua $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(\text{Int}(A))$

Berdasarkan definisi 2.4, $\text{Int}(A)$ merupakan himpunan buka terbesar yang terkandung dalam A , maka $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(A)$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(\text{Int}(A))$

Dikarenakan telah membuktikan $\text{Int}(\text{Int}(A)) \subseteq \text{Int}(A)$ dan $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(\text{Int}(A))$, maka terbukti bahwa $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$

2. Akan dibuktikan $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$

Ambil sebarang $x \in \text{Int}(A)$

Berdasarkan definisi 2.4, x memiliki persekitaran U di dalam A yaitu $U \subseteq$

A

Karena $A \subseteq B$, maka $U \subseteq B$, artinya x memiliki persekitaran U di dalam B . Oleh karena itu, $x \in \text{Int}(B)$

Karena telah membuktikan bahwa setiap titik $x \in \text{Int}(A)$ juga berada dalam $\text{Int}(B)$, maka diperoleh $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $A \subseteq B \Rightarrow \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$

3. Akan dibuktikan $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$, maka harus membuktikan 2 inklusi yaitu $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$ dan $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

Inklusi pertama: $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$

Misalkan $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, maka $x \in \text{Int}(A)$ dan $x \in \text{Int}(B)$

Karena $x \in \text{Int}(A)$, maka ada persekitaran $U \subseteq A$ yang mengandung x

Demikian pula, karena $x \in \text{Int}(B)$, ada persekitaran $V \subseteq B$ yang mengandung x

Perhatikan bahwa $x \in U \cap V$ adalah persekitaran yang mengandung x

Selain itu, $U \cap V \subseteq A \cap B$ karena $U \subseteq A$ dan $V \subseteq B$. Artinya, ini menunjukkan bahwa $x \in \text{Int}(A \cap B)$ karena x memiliki persekitaran $U \cap V \subseteq A \cap B$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$

Inklusi kedua: $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

Misalkan $x \in \text{Int}(A \cap B)$, maka ada persekitaran $W \subseteq A \cap B$ yang mengandung x

Karena $W \subseteq A \cap B$, maka $W \subseteq A$ dan $W \subseteq B$

Oleh karena itu, $x \in \text{Int}(A)$ karena ada persekitaran $W \subseteq A$ yang

mengandung x

Demikian pula, $x \in \text{Int}(B)$ karena ada persekitaran $W \subseteq B$ yang mengandung x

Dengan demikian, diperoleh $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ yang menunjukkan bahwa $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

Karena telah menunjukkan $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$ dan $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, maka diperoleh $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$

4. Akan dibuktikan $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$

Ambil sebarang $x \in \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, maka memiliki 2 kemungkinan yaitu $x \in \text{Int}(A)$ atau $x \in \text{Int}(B)$

Jika $x \in \text{Int}(A)$, maka terdapat persekitaran $U \subseteq A$ yang mengandung x
 Karena $A \subseteq A \cup B$, maka juga memiliki $U \subseteq A \cup B$. Artinya x memiliki persekitaran $U \subseteq A \cup B$ yang berarti $x \in \text{Int}(A \cup B)$

Jika $x \in \text{Int}(B)$, maka terdapat persekitaran $V \subseteq B$ yang mengandung x
 Karena $B \subseteq A \cup B$, maka juga memiliki $V \subseteq A \cup B$. Artinya x memiliki persekitaran $V \subseteq A \cup B$ yang berarti $x \in \text{Int}(A \cup B)$

Dikarenakan setiap $x \in \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ juga berada di $\text{Int}(A \cup B)$ diperoleh $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$

Teorema 2.1 (Adams & Fransoza, 2008)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan $A, B \subseteq X$.

1. Jika U adalah himpunan buka di (X, τ) dan $U \subset A$, maka $U \subset \text{Int}(A)$
2. Jika $A \subset B$ maka $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$
3. A adalah himpunan buka $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$

Bukti

1. Karena U adalah himpunan buka di (X, τ) dan $U \subset A$ maka setiap $x \in U$ memiliki persekitaran yang berada di dalam U

Hal ini menunjukkan bahwa U merupakan himpunan buka yang seluruhnya terkandung dalam A .

Karena $\text{Int}(A)$ adalah himpunan buka terbesar yang terkandung dalam A , dan U adalah himpunan buka yang terkandung dalam A , maka $U \subset \text{Int}(A)$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $U \subset \text{Int}(A)$.

2. Terbukti pada proposisi 2.3 (2)
3. $\Rightarrow$ Jika A adalah himpunan buka, maka $A = \text{Int}(A)$

Karena A merupakan himpunan buka, maka setiap titik di A memiliki persekitaran di dalam A

Oleh karena itu, seluruh A memenuhi syarat untuk menjadi interior dari A , yang berarti $\text{Int}(A) = A$, karena $\text{Int}(A)$ adalah himpunan buka terbesar yang terkandung dalam A .

Dengan demikian, terbukti bahwa Jika A adalah himpunan buka, maka $A = \text{Int}(A)$

$\Leftarrow$ Jika $A = \text{Int}(A)$, maka A adalah himpunan buka

Misalkan $A = \text{Int}(A)$

Karena $\text{Int}(A)$ adalah himpunan buka dan memiliki $A = \text{Int}(A)$, maka A adalah himpunan buka.

Dengan demikian, terbukti bahwa Jika $A = \text{Int}(A)$, maka A adalah himpunan buka

Dikarenakan telah membuktikan 2 arah, maka dapat disimpulkan bahwa A adalah himpunan buka $\Leftrightarrow A = \text{Int}(A)$

Teorema 2.2 (Adams & Fransoza, 2008)

Himpunan A dan B pada ruang topologi (X, τ) , berlaku pernyataan-pernyataan berikut ini

1. $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl}(A)$
2. $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A)$
3. $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$
4. $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$

Bukti

1. Akan dibuktikan $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl}(A)$, maka harus membuktikan 2 inklusi $\text{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{Cl}(A)$ dan $X \setminus \text{Cl}(A) \subseteq \text{Int}(X \setminus A)$

Inklusi pertama: $\text{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{Cl}(A)$

Ambil sebarang $x \in \text{Int}(X \setminus A)$, maka x memiliki persekitaran $U \subseteq X \setminus A$ yang mengandung x

Karena $U \subseteq X \setminus A$, maka tidak ada titik dalam U yang berada di A

Dengan demikian, x tidak di dalam $\text{Cl}(A)$ yang berarti $x \in X \setminus \text{Cl}(A)$

Dikarenakan x dipilih sebarang dalam $\text{Int}(X \setminus A)$, maka didapatkan bahwa $\text{Int}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{Cl}(A)$

Inklusi kedua: $X \setminus \text{Cl}(A) \subseteq \text{Int}(X \setminus A)$

Ambil sebarang titik $x \in X \setminus \text{Cl}(A)$

Karena $x \notin \text{Cl}(A)$, maka x memiliki persekitaran V yang tidak memiliki titik-titik dari A

Hal ini menunjukkan bahwa $V \subseteq X \setminus A$, sehingga x memiliki persekitaran

berada di $X \setminus A$. Artinya $x \in \text{Int}(X \setminus A)$

Karena x dipilih sebarang dalam $X \setminus \text{Cl}(A)$, maka diperoleh $X \setminus \text{Cl}(A) \subseteq \text{Int}(X \setminus A)$

Dikarenakan telah membuktikan 2 inklusi, maka diperoleh $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl}(A)$

2. Akan dibuktikan $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A)$
3. Telah terbukti pada proposisi 2.3 (4)
4. Telah terbukti pada proposisi 2.3 (3)

2.1.5 Tutupan pada Ruang Topologi

Selain interior, pada ruang topologi juga memiliki tutupan yang akan didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.5 (Singh, 2019)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan $A \subseteq X$. Himpunan tutup terkecil di A dinamakan tutupan di $A \in X$ merupakan gabungan semua himpunan buka di A dan dinotasikan dengan $\text{Cl}(A)$ atau $\bar{A}$. $\text{Cl}(A)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Cl}(A) = \bigcap \{F \mid F \text{ tutup di } X \text{ dan } F \subseteq A\}$$

Contoh 2.5 Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi dan $A \subseteq X$

$X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, dan $A = \{a, d\}$

Tutupan dari topologi tersebut adalah:

1. Himpunan tutupnya yaitu $\{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b\}\}$
2. Himpunan tutup yang termuat dalam A adalah $F = \{X, \{a, d\}\}$
3. $\text{Cl}(A) = \bigcap \{F\} = X \cap \{a, d\} = \{a, d\}$

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa tutupan dari A adalah $\{a, d\}$.

Proposisi 2.4 (Singh, 2019)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan $A, B \subseteq X$. Maka,

2. $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$
3. $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$
4. $Cl(A) \cap Cl(B) = Cl(A \cap B)$
5. $Cl(A) \cup Cl(B) = Cl(A \cup B)$

Teorema 2.3 (Adams & Fransoza, 2008)

Diberikan (X, τ) merupakan ruang topologi dan $A, B \subseteq X$.

ologi dan $A, B \subseteq X$.

1. Jika C adalah himpunan tutup di (X, τ) dan $A \subset C$, maka $Cl(A) \subset C$
2. Jika $A \subset B$ maka $Cl(A) \subset Cl(B)$
3. A adalah himpunan tutup $\Leftrightarrow A = Cl(A)$

2.1.6 Ruang Topologi Ideal

Setelah membahas ruang topologi, selanjutnya akan didefinisikan tentang ruang topologi ideal serta contohnya.

Definisi 2.6 (Monsef dkk., 1992)

Suatu ideal I pada himpunan tak kosong X di ruang topologi (X, τ) merupakan koleksi himpunan bagian tak kosong X yang memenuhi beberapa aksioma yaitu

- a. $A \in I$ dan $B \subseteq A$ maka $B \in I$
- b. $A \in I$ dan $B \in I$ maka $A \cup B \in I$

I yang memenuhi aksioma tersebut dikatakan topologi ideal pada X dan (X, τ, I) disebut ruang topologi ideal.

Contoh 2.6 Diberikan $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Bukti

Berdasarkan contoh 2.1, (X, τ) merupakan ruang topologi

Akan dibuktikan (X, τ, I) menggunakan 2 aksioma di atas

1. Jika $A = \emptyset \in I$ dan $B \subseteq A$ maka $B \subseteq \emptyset$. Jadi, $B \in I$ karena $\emptyset \in I$

Jika $A = \{a\} \in I$ dan $B \subseteq A$, maka $B \subseteq \{a\}$. Jadi, $B \in I$ karena $\{a\} \in I$

2. Jika $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$, maka $A \cup B = \emptyset$ dan $\emptyset \in I$.

Jika $A = \emptyset$ dan $B = \{a\}$, maka $A \cup B = \{a\}$ dan $\{a\} \in I$.

Jika $A = \{a\}$ dan $B = \emptyset$, maka $A \cup B = \{a\}$ dan $\{a\} \in I$.

Jika $A = \{a\}$ dan $B = \{a\}$, maka $A \cup B = \{a\}$ dan $\{a\} \in I$.

Karena $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ memenuhi 2 aksioma di atas dan τ adalah ruang topologi pada X , maka terbukti (X, τ, I) merupakan ruang topologi ideal.

Definisi 2.7 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi dan $x \in X$. Persekitaran x dinotasikan dengan $N(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$

Definisi 2.8 (Jasim & Zaben, 2015)

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi, I adalah ideal yang didefinisikan pada X , dan A adalah himpunan bagian dari X . Dinotasikan dengan $A^*(I, \tau)$ atau yang disingkat dengan A^* , dapat didefinisikan sebagai:

$$A^* = \{x \in X : U \cap A \notin I, \text{ untuk setiap } U \in N(x)\}$$

Selain itu, didefinisikan juga $Cl^* = A \cup A^*$

Contoh 2.7 Diberikan $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, $I =$

$\{\emptyset, \{a\}\}$. Misalkan $A = \{a, b\}$ adalah himpunan bagian X yang akan dicari A^*

Bukti

A^* didefinisikan sebagai

$$A^* = \{x \in X : U \cap A \notin I, \forall U \in N(x)\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A \notin I$ untuk setiap $U \in N(x)$

Untuk $x = a$

$$N(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $N(a)$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in I$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \in I$ pada beberapa $U \in N(a)$, maka $a \notin A^*$

Untuk $x = b$

$$N(b) = \{\{a, b\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $N(b)$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \notin I$ untuk semua $U \in N(b)$, maka $a \in A^*$

Untuk $x = c$

$$N(c) = \{\{a, c, d\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $N(c)$

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \in I$ pada beberapa $U \in N(c)$, maka $a \notin A^*$

Untuk $x = d$

$$N(d) = \{\{a, c, d\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $N(d)$

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \in I$ pada beberapa $U \in N(d)$, maka $a \notin A^*$

Dengan demikian, diperoleh $A^* = \{b\}$.

2.1.7 Himpunan Buka pada Ruang Topologi Ideal

Pada ruang topologi ideal juga akan didefinisikan himpunan buka.

Definisi 2.9 (Monsef dkk., 1992)

Diberikan ruang topologi ideal (X, τ, I) dan $A \subseteq X$, maka A dikatakan I -buka apabila $A \subseteq \text{Int}(A^*)$. Biasanya dinotasikan dengan $IO(X, \tau) = \{A \subseteq X : A \subseteq \text{int}(A^*)\}$ atau secara singkatnya ditulis dengan IO untuk $IO(X, \tau)$.

2.1.8 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi Ideal

Selain himpunan buka, pada ruang topologi ideal juga akan didefinisikan himpunan tutup.

Definisi 2.10 (Monsef dkk., 1992)

Himpunan bagian dari $F \subseteq (X, \tau, I)$ dikatakan I -tutup apabila komplemen dari I -buka.

2.1.9 Ruang Topologi Supra

Selanjutnya akan dibahas tentang ruang topologi supra. Ruang topologi

supra pertama kali dikenalkan oleh Mashhour pada tahun 1983 (Mashhour dkk., 1983). Berikut definisi dari ruang topologi supra dan contohnya.

Definisi 2.11 (Mashhour, dkk. 1983)

Suatu μ pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa aksioma yaitu

1. $X, \emptyset \in \mu$
2. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mu$, maka $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mu$

μ yang memenuhi aksioma tersebut disebut topologi supra dan pasangan (X, μ) disebut ruang topologi supra.

Contoh 2.8 Misalkan (X, μ) adalah ruang topologi supra

$$X = \{a, b, c\}, \mu = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

Bukti

1. Sudah jelas bahwa $\emptyset$ dan X di μ
2. $\emptyset \cup X = X \in \mu$;

$$\emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mu;$$

$$\emptyset \cup \{b, c\} = \{b, c\} \in \mu;$$

$$X \cup \{a, b\} = X \in \mu;$$

$$X \cup \{b, c\} = X \in \mu;$$

$$\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} = X \in \mu;$$

Berdasarkan pembuktian di atas, terbukti bahwa (X, μ) merupakan ruang topologi supra.

Pada contoh 2.8 di atas merupakan topologi supra pada X , namun μ bukan suatu topologi pada X karena $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \mu$.

Contoh 2.9 Misalkan (X, μ) adalah ruang topologi supra

$$X = \{a, b, c\}, \mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Bukti

1. Sudah jelas bahwa $\emptyset$ dan X di μ

2. $\emptyset \cup X = X \in \mu;$

$$\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \mu;$$

$$\emptyset \cup \{b\} = \{b\} \in \mu;$$

$$\emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mu;$$

$$X \cup \{a\} = X \in \mu;$$

$$X \cup \{b\} = X \in \mu;$$

$$X \cup \{a, b\} = X \in \mu;$$

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in \mu;$$

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mu;$$

$$\{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mu;$$

Berdasarkan pembuktian di atas, terbukti bahwa (X, μ) merupakan ruang topologi supra.

Pada contoh 2.9 diatas merupakan topologi supra pada X dan suatu topologi pada X .

2.1.10 Himpunan Buka pada Ruang Topologi Supra

Pada ruang topologi supra juga terdapat himpunan buka yang akan didefinisikan dan contohnya sebagai berikut:

Definisi 2.12 (Mashhour dkk., 1983)

Anggota dari koleksi himpunan μ disebut himpunan buka supra di (X, μ) .

Contoh 2.10 Diberikan (X, μ) adalah ruang topologi supra

$$X = \{a, b, c\}, \mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Himpunan buka dari ruang topologi supra di atas adalah $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

2.1.11 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi Supra

Selain himpunan buka, ruang topologi supra juga memiliki himpunan tutup yang akan didefinisikan dan contohnya sebagai berikut.

Definisi 2.13 (Mashhour dkk., 1983)

Komplemen dari himpunan supra buka disebut himpunan tutup supra.

Contoh 2.11 Diberikan (X, μ) adalah ruang topologi supra

$$X = \{a, b, c\}, \mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Himpunan buka dari ruang topologi supra di atas adalah $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

maka himpunan tutupnya adalah $\{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$.

2.1.12 Interior pada Ruang Topologi Supra

Definisi 2.14 (Pricilla & Maggi, 2016)

Interior supra pada himpunan bagian A dinotasikan dengan $Int^\mu(A)$ yang didefinisikan dengan supra $Int(A) = \cup \{B : B \text{ supra buka dan } A \supseteq B\}$.

Contoh 2.12 Misalkan (X, μ) merupakan ruang topologi supra $A \supseteq B$.

$$X = \{a, b, c\}, \mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \text{ dan } A = \{a, b\}$$

Interior pada ruang topologi supra di atas adalah:

1. Himpunan buka supranya yaitu $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
2. Himpunan buka yang merupakan himpunan bagian dari A adalah $\emptyset, \{a, b\}$
3. $Int^\mu(A) = \emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\}$

Berdasarkan pembuktian di atas, terbukti bahwa $Int^\mu(A) = \{a, b\}$.

2.1.13 Tutupan pada Ruang Topologi Supra

Definisi 2.15 (Pricilla & Maggi, 2016)

Tutupan supra pada himpunan bagian A dinotasikan dengan $Cl^\mu(A)$ yang didefinisikan dengan supra $Cl^\mu(A) = \cap \{B: B \text{ supra tertutup dan } A \subseteq B\}$.

Contoh 2.13 Misalkan (X, μ) merupakan ruang topologi supra $A \supseteq B$.

$X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, dan $A = \{a, b\}$

Tutupan pada ruang topologi supra di atas adalah:

1. Himpunan tutup supranya yaitu $\{X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$
2. Himpunan tutup yang merupakan himpunan bagian dari A adalah X dan $\{a, b\}$
3. $Cl^\mu(A) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

Berdasarkan pembuktian di atas, terbukti bahwa $Cl^\mu(A) = \{a, b\}$.

Teorema 2.4

Diberikan (X, μ) merupakan ruang topologi supra, maka

1. $Int^\mu(A) \cap Int^\mu(B) \subseteq Int^\mu(A \cap B)$
2. $Cl^\mu(A) \cup Cl^\mu(B) \subseteq Cl^\mu(A \cup B)$

Bukti

1. Akan ditunjukkan bahwa $Int^\mu(A) \cup Int^\mu(B) \subseteq Int^\mu(A \cup B)$

Ambil sebarang $x \in Int^\mu(A)$, maka terdapat persekitaran $U \subset A$ yang mengandung x

Ambil sebarang $x \in Int^\mu(B)$, maka terdapat persekitaran $V \subset B$ yang mengandung x

Karena U dan V merupakan persekitaran x , maka $W = U \cap V$ merupakan persekitaran x

Perhatikan bahwa $W \subset A \cap B$ karena $W \subset U \subset A$ dan $W \subset U \subset B$

Karena terdapat persekitaran $W \subset A \cap B$ yang mengandung x , artinya $x \in \text{Int}^\mu(A \cap B)$ untuk setiap $x \in \text{Int}^\mu(A) \cap x \in \text{Int}^\mu(B)$ maka $\text{Int}^\mu(A) \cap \text{Int}^\mu(B) \subseteq \text{Int}^\mu(A \cap B)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\text{Cl}^\mu(A) \cup \text{Cl}^\mu(B) \subseteq \text{Cl}^\mu(A \cup B)$

Ambil sebarang $x \in \text{Int}^\mu(A)$, maka x adalah titik limit dari A

Karena $A \subseteq A \cup B$, maka $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Artinya $x \in \text{Cl}^\mu(A \cup B)$

Ambil sebarang $x \in \text{Int}^\mu(B)$, maka x adalah titik limit dari B

Karena $B \subseteq A \cup B$, maka $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Artinya $x \in \text{Cl}^\mu(A \cup B)$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa $x \in \text{Cl}^\mu(A \cup B)$. Karena x dipilih sebarang dalam $\text{Cl}^\mu(A) \cup \text{Cl}^\mu(B)$, maka terbukti bahwa $\text{Cl}^\mu(A) \cup \text{Cl}^\mu(B) \subseteq \text{Cl}^\mu(A \cup B)$

2.1.14 Ruang Topologi Supra Ideal

Definisi 2.16 (Modak & Mistry, 2012)

Ruang topologi supra ideal dinotasikan dengan (X, μ, I) , apabila (X, μ) merupakan ruang topologi supra dan I ideal pada X .

Contoh 2.14 Diberikan $X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$

Bukti

Berdasarkan contoh 2.8, (X, μ) merupakan ruang topologi supra

Berdasarkan contoh 2.6, telah dibuktikan bahwa $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideal pada X , sehingga terbukti bahwa (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal.

Definisi 2.17 (Modak & Mistry, 2012)

Diberikan (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal. Operator himpunan

$(\)^{*\mu}: P(X) \rightarrow P(X)$ didefinisikan sebagai:

$$A^{*\mu}(I, \mu) = \{x \in X: U \cap A \notin I, \forall U \in \mu(x)\}$$

Atau biasanya dinotasikan dengan $A^{*\mu}$, sehingga didefinisikan $Cl^* = A \cup A^{*\mu}$

2.1.15 Interior pada Topologi Supra Ideal

Definisi 2.18 (Jasim & Zaben, 2015)

Interior supra ideal pada himpunan bagian A yang dinotasikan dengan $Int^\mu(A)$ merupakan gabungan dari ideal supra himpunan buka A .

2.1.16 Tutupan pada Topologi Supra Ideal

Definisi 2.19 (Jasim & Zaben, 2015)

Tutupan supra ideal pada himpunan bagian A yang dinotasikan dengan $Cl^{*\mu}(A)$ merupakan irisan dari ideal supra himpunan tutup A .

Contoh 2.15 Buktikan bahwa (X, τ) adalah ruang topologi, ruang topologi ideal, ruang topologi supra, dan ruang topologi supra ideal

$$X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}, I = \{\emptyset, \{a\}\}$$

Bukti

1. Jelas terbukti bahwa $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$

2. $\emptyset \cup X = X \in \tau$;

$$\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\emptyset \cup \{b\} = \{b\} \in \tau;$$

$$\emptyset \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$\emptyset \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$X \cup \{a\} = X \in \tau;$$

$$X \cup \{b\} = X \in \tau;$$

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$\{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$\{b\} \cup \{a, c, d\} = X \in \tau;$$

$$\{a, b\} \cup \{a, c, d\} = X \in \tau;$$

$$3. \quad \emptyset \cap X = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{b\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a, b\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\emptyset \cap \{a, c, d\} = \emptyset \in \tau;$$

$$X \cap \{a\} = \{a\} \in \tau;$$

$$X \cap \{b\} = \{b\} \in \tau;$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \in \tau;$$

$$X \cap \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\{a\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau;$$

$$\{b\} \cap \{a, b\} = \{b\} \in \tau;$$

$$\{b\} \cap \{a, c, d\} = \emptyset \in \tau;$$

$$\{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\} \in \tau;$$

Berdasarkan pembuktian di atas 1-3 terbukti bahwa (X, τ) merupakan ruang topologi

Karena (X, τ) merupakan ruang topologi, maka juga dikatakan ruang topologi

supra karena memenuhi persyaratan 1-2.

Karena (X, τ) merupakan ruang topologi dan berdasarkan contoh 2.6 telah dibuktikan bahwa $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideal pada X , sehingga terbukti bahwa (X, τ, I) merupakan ruang topologi ideal.

Karena (X, τ) juga merupakan ruang topologi supra dan berdasarkan contoh 2.6 telah dibuktikan bahwa $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideal pada X , sehingga terbukti bahwa (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits

Selain dijelaskan dalam hadis, Al-Qur'an juga menjelaskan bahwa tidak semua amal perbuatan manusia dapat diterima oleh Allah SWT. Beberapa ayat dalam Al-Qur'an menjelaskan bahwa setiap tindakan sekecil apapun akan diperhitungkan. Namun, agar amal tersebut dapat diterima oleh Allah SWT maka harus memenuhi persyaratan tertentu termasuk adanya iman yang benar dan niat yang ikhlas. Sebagaimana yang difirmankan oleh Allah SWT pada Q.S. Az-Zalzalah ayat 7-8:

﴿۷﴾ وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ﴿۸﴾

(Kemenag, 2024a)

Artinya: “Siapa yang mengerjakan kebaikan seberat zarrah, dia akan melihat (balasan)-Nya (7). Siapa yang mengerjakan kejahatan seberat zarrah, dia akan melihat (balasan)-Nya (8).”

Ayat tersebut menegaskan bahwa setiap amal yang sekecil apa pun akan diperhitungkan dan dibalas oleh Allah SWT di hari kiamat. Namun, jika amal tersebut dapat diterima oleh Allah SWT khususnya bagi orang muslim terdapat syarat-syarat yang harus dipenuhi. Pertama yaitu iman yang benar kepada Allah

SWT dan Rasul-Nya, karena amal tanpa iman tidak akan memiliki nilai di sisi-Nya. Kedua yaitu niat yang ikhlas sangat penting, di mana setiap amal harus dilakukan semata-mata bertujuan untuk memperoleh keridhaan Allah SWT dan bukan untuk kepentingan duniawi. Selain itu, amal tersebut harus sesuai dengan syariat islam agar dapat diterima sehingga setiap perbuatan harus mengacu pada ajaran yang diajarkan oleh Nabi Muhammad SAW.

Di sisi lain bagi orang kafir, amal yang mereka lakukan tidak akan dihargai di akhirat. Hal ini karena amal yang mereka lakukan tidak memenuhi syarat dasar yang diperlukan, yaitu iman kepada Allah SWT dan niat yang tulus. Meskipun mereka melakukan perbuatan baik di dunia tetapi tanpa landasan iman, maka amal tersebut tidak akan diterima oleh Allah SWT. Oleh karena itu, sangat penting bagi setiap manusia untuk menyadari syarat-syarat tersebut agar amal yang dilakukannya dapat diterima dan mendapatkan balasan baik di sisi Allah SWT.

Pentingnya kesadaran terhadap syarat-syarat amal menjadi kunci agar tindakan kita diterima oleh Allah SWT. Amal yang dilakukan tanpa niat yang tulus dan keimanan yang benar akan sia-sia, terutama bagi orang kafir. Allah SWT menjelaskan hal ini dalam Q.S. Al-Baqarah ayat 264 yang menjelaskan pentingnya niat dan kualitas amal.

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا لَا تَبْطُلُوا صَدَقَاتِكُمْ بِالْمَنِّ وَالْأَذَىٰ كَالَّذِي يُنْفِقُ مَالَهُ رِثَاءَ النَّاسِ وَلَا يُؤْمِنُ بِاللَّهِ وَالْيَوْمِ
الْآخِرِ فَمَثَلُهُ كَمَثَلِ صَفْوَانٍ عَلَيْهِ تُرَابٌ فَأَصَابَهُ وَابِلٌ فَتَرَكَهُ صَلْدًا لَا يَقْدِرُونَ عَلَىٰ شَيْءٍ مِّمَّا كَسَبُوا وَاللَّهُ
لَا يَهْدِي الْقَوْمَ الْكَافِرِينَ ﴿٢٦٤﴾

(Kemenag, 2024b)

Artinya: “Wahai orang-orang yang beriman, jangan membatalkan (pahala) sedekahmu dengan menyebut-nyebutnya dan menyakiti (perasaan penerima), seperti orang yang menginfakkan hartanya karena riya (pamer) kepada manusia, sedangkan dia tidak beriman kepada Allah dan hari Akhir. Perumpamaannya (orang itu) seperti batu licin yang di atasnya ada debu, lalu batu itu diguyur hujan

lebat sehingga tinggallah (batu) itu licin kembali. Mereka tidak menguasai sesuatu pun dari apa yang mereka usahakan. Allah tidak memberi petunjuk kepada kaum kafir.”

Ayat tersebut memperingatkan tentang pentingnya menjaga keikhlasan dalam bersedekah dan tidak merusak amal baik dengan mengungkit-ungkit pemberian atau menyakiti penerima sedekah. Ayat tersebut juga memperingatkan bahwa sedekah yang dilakukan dengan tujuan pamer (riya') atau diikuti dengan perbuatan yang menyakiti hati penerima akan membuat amal tersebut sia-sia. Allah SWT mengibaratkan amal seperti itu dengan batu yang di atasnya terdapat debu, yang ketika terkena hujan lebat, debu itu hilang, menyisakan batu yang kosong.

Dalam konteks ayat ini, keikhlasan dan menjaga perasaan penerima sedekah menjadi syarat utama agar amal kebaikan diterima di sisi Allah SWT. Amal yang dilakukan dengan tujuan mendapatkan pujian dari manusia, atau disertai dengan sikap yang menyakiti penerima, tidak akan dihitung sebagai amal yang bermanfaat. Seperti halnya batu yang hilang debunya setelah terkena hujan, amal yang tidak didasarkan pada niat yang tulus hanya akan kehilangan nilai dan tidak membekas di sisi Allah SWT. Hal ini menekankan bahwa niat dan perilaku yang menyertai amal sangat penting dalam menentukan amal tersebut akan diterima atau tidak. Konsep ini dapat dikaitkan dengan topologi dalam matematika, di mana anggota dari suatu himpunan harus memenuhi syarat-syarat seperti adanya himpunan buka pada topologi.

Dengan demikian, amal perbuatan manusia sekecil apa pun akan diperhitungkan oleh Allah SWT seperti yang dijelaskan dalam Q.S. Al-Zalzalah ayat 7-8. Namun, agar amal diterima, harus memenuhi syarat, yaitu iman yang benar, niat ikhlas, dan sesuai syariat Islam. Bagi orang kafir, amal baik yang

dilakukan tanpa iman tidak akan diterima oleh Allah SWT. Selain itu, penting untuk menjaga keikhlasan dalam amal, seperti yang dijelaskan dalam Q.S. Al-Baqarah ayat 264, bahwa amal yang disertai riya' atau menyakiti penerima akan sia-sia dan tidak bernilai di sisi Allah SWT.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Definisi 2.19 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Diberikan (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal. Himpunan A dikatakan supra $R-I$ buka apabila $A = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A))$. Komplemen dari himpunan supra $R-I$ buka dinamakan himpunan supra $R-I$ tutup.

Remark 2.1 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan $R-I$ buka merupakan supra $R-I$ buka.

Remark 2.2 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan buka reguler merupakan supra $R-I$ buka.

Teorema 2.1 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan $R-I$ buka merupakan supra buka.

Teorema 2.2 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Apabila topologi supra sama dengan topologi diskrit, maka setiap himpunan buka supra adalah supra $R-I$ buka.

Teorema 2.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Himpunan supra $R-I$ buka mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Gabungan berhingga dari himpunan supra $R-I$ buka tidak harus supra $R-I$ buka
2. Irisan berhingga dari himpunan supra $R-I$ buka adalah supra $R-I$ buka

Teorema 2.4 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Himpunan supra $R-I$ tutup mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Gabungan berhingga dari himpunan supra $R-I$ tutup adalah supra $R-I$ tutup
2. Sebarang irisan dari himpunan supra $R-I$ tutup tidak harus supra $R-I$ tutup

Remark 2.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Irisan dari himpunan supra $R-I$ buka dan himpunan supra buka tidak harus himpunan supra buka.

Definisi 2.20 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Tutupan supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I-Cl(A)$ yang merupakan irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup termasuk A .

Definisi 2.21 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Interior supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I-Int(A)$ yang merupakan gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka termasuk A .

Teorema 2.5 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Berikut beberapa aksioma yang memenuhi supra $R-I-Int(A)$ dan supra $R-I-Cl(A)$:

1. Supra $R-I-Int(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ buka
2. Supra $R-I-Cl(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ tutup
3. Supra $R-I-Int(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ buka
4. Supra $R-I-Cl(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ tutup
5. $X \setminus \text{supra } R-I-Int(A) = \text{supra } R-I-Cl(X \setminus A)$
6. $X \setminus \text{supra } R-I-Cl(A) = \text{supra } R-I-Int(X \setminus A)$
7. $\text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{supra } R-I-Int(B) = \text{supra } R-I-Int(A \cap B)$

$$8. \text{Supra } R\text{-}I\text{-}Cl(A) \cup \text{supra } R\text{-}I\text{-}Cl(B) = \text{supra } R\text{-}I\text{-}Cl(A \cup B).$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan penulis adalah penelitian yang berjenis kualitatif berupa kajian pustaka. Kajian pustaka yang dimaksud merupakan penulis mengumpulkan dan mempelajari beberapa buku, artikel, dan jurnal tertulis terkait lemma, teorema, dan remark yang berkaitan dengan topik penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Pada kegiatan pra-penelitian, peneliti memahami dan mengumpulkan beberapa sumber rujukan untuk dijadikan referensi yang berkaitan dengan topik penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Pada kegiatan penelitian ini, peneliti menggunakan beberapa tahapan-tahapan penelitian. Adapun tahapan-tahapan tersebut sebagaimana berikut:

1. Mengumpulkan referensi terkait pembuktian sifat–sifat ruang topologi supra ideal melalui R - I buka.
2. Mengkaji teori pendukung yang berkaitan dengan sifat–sifat ruang topologi supra ideal melalui R - I buka.
3. Menentukan integrasi Al-Qur'an/Hadis yang berkaitan dengan penelitian.
4. Membuktikan beberapa teorema terkait sifat–sifat ruang topologi supra ideal melalui R - I buka.

5. Membuat kesimpulan terkait sifat–sifat ruang topologi supra ideal melalui R - I buka.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Himpunan Regular Buka

Dalam topologi ideal, konsep himpunan regular buka berkaitan dengan interior dan tutupan pada suatu himpunan. Berikut akan didefinisikan definisi himpunan regular buka pada definisi 4.1.

Definisi 4.1 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Himpunan bagian A pada ruang topologi ideal (X, τ, I) dikatakan regular buka jika $Int(Cl(A)) = A$.

Contoh 4.1 Diberikan $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Misalkan $A = \{a, b\}$, buktikan bahwa $Int(Cl(A)) = A$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $Int(Cl(A)) = A = \{a, b\}$

Berdasarkan contoh 2.1 telah terbukti bahwa τ merupakan topologi pada X . Oleh karena itu, himpunan buka dalam τ yaitu $\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ dan himpunan tutup dalam τ yaitu $\{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b\}\}$.

Berdasarkan definisi tutupan pada definisi 2.5 adalah irisan dari semua himpunan tutup dalam τ yang mengandung A . Himpunan tutup yang mengandung $A = \{a, b\}$ adalah X dan $\{a, b\}$ sendiri sehingga $Cl(A) = X \cap \{a, b\} = \{a, b\}$.

Berdasarkan definisi interior pada definisi 2.4, interior dari $Cl(A)$ adalah gabungan dari semua himpunan buka dalam τ yang termasuk di dalam $Cl(A) = \{a, b\}$. Himpunan buka yang termasuk di dalam $Cl(A) = \{a, b\}$ adalah $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

sehingga $\text{Int}(Cl(A)) = \emptyset \cup \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{Int}(Cl(A)) = A = \{a, b\}$.

4.2 Himpunan $R-I$ Buka

Dalam hal ini, himpunan $R-I$ buka adalah himpunan regular ideal buka.

Secara mendetail, himpunan ini didefinisikan pada definisi 4.2.

Definisi 4.2 (Modak & Mistry, 2012)

Himpunan bagian A pada ruang topologi ideal (X, τ, I) dikatakan $R-I$ buka jika $\text{Int}(Cl^*(A)) = A$. Himpunan bagian A pada ruang topologi ideal (X, τ, I) dikatakan $R-I$ tutup jika komplemen dari $R-I$ buka.

Lemma 4.1 (Modak & Mistry, 2012)

Diberikan A dan B himpunan bagian dari ruang topologi ideal (X, τ, I) . Maka berlaku

1. $\text{Int}(Cl^*(A))$ merupakan $R-I$ buka
2. Jika A dan B merupakan $R-I$ buka, maka $A \cap B$ juga $R-I$ buka
3. Jika A merupakan regular buka, maka A juga $R-I$ buka

Bukti

1. Berdasarkan definisi 4.2, terbukti bahwa $\text{Int}(Cl^*(A))$ merupakan $R-I$ buka
2. Diketahui A dan B merupakan $R-I$ buka sehingga dapat didefinisikan

$$A = \text{Int}(Cl^*(A)) \text{ dan } B = \text{Int}(Cl^*(B))$$

Akan ditunjukkan $A \cap B$ juga $R-I$ buka, yaitu akan ditunjukkan bahwa

$$A \cap B = \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$$

Ambil sebarang $x \in A \cap B$ dan akan ditunjukkan $x \in \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$

Karena $x \in A \cap B$ maka $x \in A$ dan $x \in B$

Karena A dan B merupakan R - I buka maka diperoleh

$$x \in \text{Int}(Cl^*(A)) \text{ dan } x \in \text{Int}(Cl^*(B))$$

Artinya, x merupakan elemen R - I buka A dan B , dengan kata lain $A \cap B \subseteq$

A dan $A \cap B \subseteq B$ didapatkan $Cl^*(A \cap B) \subseteq Cl^*(A) \cap Cl^*(B)$

Sehingga, $x \in \text{Int}(Cl^*(A)) \cap \text{Int}(Cl^*(B))$ berimplikasi dengan

$$x \in \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$$

Ambil sebarang $y \in \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$ dan akan ditunjukkan $y \in A \cap B$

Karena $y \in Cl^*(A \cap B)$ ada persekitaran buka U di mana $y \in U$ dan $U \subseteq Cl^*(A \cap B)$.

Karena $Cl^*(A \cap B) \subseteq Cl^*(A) \cap Cl^*(B)$, maka $U \subseteq Cl^*(A)$ dan $U \subseteq Cl^*(B)$

Karena A dan B adalah R - I buka dan $U \subseteq A \cap B$, maka $y \in A \cap B$

Karena $x \in A \cap B$ berimplikasi dengan $x \in \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$ dan $y \in \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$ berimplikasi dengan $y \in A \cap B$, maka

$$A \cap B = \text{Int}(Cl^*(A \cap B))$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $A \cap B$ merupakan R - I buka

2. Akan ditunjukkan jika A adalah regular buka $A = \text{Int}(Cl(A))$, maka $A = \text{Int}(Cl^*(A))$

Ambil $x \in A$ dan akan ditunjukkan $x \in \text{Int}(Cl^*(A))$

Karena A adalah regular buka, maka $x \in A = \text{Int}(Cl(A))$ yang berarti ada persekitaran buka U sedemikian sehingga $x \in U$ dan $U \subseteq Cl(A)$

Karena $Cl^*(A) \subseteq Cl(A)$, maka $U \subseteq Cl^*(A)$. Oleh karena itu:

$$x \in \text{Int}(Cl^*(A))$$

Ambil $x \in \text{Int}(Cl^*(A))$ dan akan ditunjukkan $x \in A$

Karena $x \in \text{Int}(Cl^*(A))$, maka ada persekitaran buka V sedemikian sehingga $x \in V$ dan $V \subseteq Cl^*(A)$

Karena $Cl^*(A) \subseteq Cl(A)$, maka $V \subseteq Cl(A)$. Oleh karena itu,

$$x \in \text{Int}(Cl(A))$$

Berdasarkan pembuktian di atas, dapat disimpulkan jika A merupakan regular buka maka A juga merupakan $R-I$ buka dengan kata lain $A = \text{Int}(Cl^*(A))$.

Contoh 4.2 Diberikan $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Misalkan $A = \{a, b\}$, buktikan bahwa $\text{Int}(Cl^*(A)) = A$

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\text{Int}(Cl^*(A)) = A$

Berdasarkan contoh 2.1 telah terbukti bahwa τ merupakan topologi pada X .

Berdasarkan contoh 4.1 diperoleh bahwa $A^* = \{b\}$

Oleh karena itu, $Cl^*(A) = A \cup A^* = \{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

Berdasarkan definisi interior pada definisi 2.4, interior dari $Cl^*(A)$ adalah gabungan dari semua himpunan buka dalam τ yang termasuk di dalam $Cl^*(A) = \{a, b\}$. Himpunan buka yang termasuk di dalam $Cl^*(A) = \{a, b\}$ adalah $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ sehingga $\text{Int}(Cl^*(A)) = \emptyset \cup \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{Int}(Cl^*(A)) = A = \{a, b\}$ adalah himpunan $R-I$ buka pada ruang topologi ideal (X, τ, I) .

4.3 Himpunan Supra $R-I$ Buka

Dalam sub bab ini akan dibahas mengenai definisi serta sifat-sifatnya di

dalam supra R - I buka.

Definisi 4.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Diberikan (X, μ, I) merupakan ruang topologi supra ideal. Himpunan A dikatakan supra R - I buka apabila $A = \text{Int}^\mu (Cl^*(A))$. Komplemen dari himpunan supra R - I buka dinamakan himpunan supra R - I -tutup.

Contoh 4.3 Diberikan (X, μ, I) dimana $X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Maka $\{a\}$ dan $\{b\}$ merupakan himpunan supra R - I buka.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\{a\}$ dan $\{b\}$ yang merupakan himpunan supra R - I buka dengan $A = \text{Int}^\mu (Cl^*(A))$.

Perhatikan bahwa $Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu}$, dengan $A^{*\mu}$ didefinisikan sebagai

$$A^{*\mu} = \{x \in X \mid U \cap A \notin I, \forall U \in \mu(x)\} \text{ dengan } \mu(x) = \{U \in \mu \mid x \in U\}$$

sehingga diperoleh

$$\mu(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, X\}$$

$$\mu(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, X\}$$

$$\mu(c) = X$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $U \cap A \notin I \forall U \in \mu(x)$ dengan memilih $A = \{a\}$ dan $A = \{b\}$

1. Untuk $A = \{a\}$

$$\mu(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $\mu(a)$

$$\{a\} \cap \{a\} = \{a\} \in I$$

$$\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\} \in I$$

$$X \cap \{a\} = \{a\} \in I$$

Karena $U \cap A \in I$ pada $U \in \mu(a)$, maka $a \notin A^{*\mu}$ artinya diperoleh $A^{*\mu} = \emptyset$ dan berdasarkan definisi tutupan $Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu}$ sehingga didapatkan

$$Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu} = \{a\} \cup \emptyset = \{a\}$$

Dan diperoleh $Int^\mu Cl^*(A) = \{a\}$

Dengan demikian, terbukti bahwa $Int^\mu(Cl^*(a)) = \{a\}$ memenuhi syarat dikatakan sebagai himpunan supra R - I buka.

2. Untuk $x = \{b\}$

$$\mu(b) = \{b, \{a, b\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $\mu(b)$

$$\{b\} \cap \{b\} = \{b\} \notin I$$

$$\{a, b\} \cap \{b\} = \{b\} \notin I$$

$$X \cap \{b\} = \{b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \in I$ pada $U \in \mu(b)$, maka $a \notin A^{*\mu}$ artinya diperoleh $A^{*\mu} = \{b\}$ dan berdasarkan definisi tutupan $Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu}$ sehingga didapatkan

$$Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu} = \{b\}$$

Dan diperoleh $Int^\mu Cl^*(A) = \{b\}$

Dengan demikian, terbukti bahwa $Int^\mu(Cl^*(A)) = \{b\}$ yang memenuhi syarat dikatakan sebagai himpunan supra R - I buka.

Jadi, terbukti bahwa $\{a\}$ dan $\{b\}$ merupakan himpunan supra R - I buka.

Remark 4.1 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan R - I buka merupakan supra R - I buka.

Bukti

Karena μ merupakan topologi supra dari τ dengan $\tau \subseteq \mu$, didapatkan bahwa:

$$Int(Cl^*(A)) \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Misalkan A adalah himpunan $R-I$ buka, sehingga $A = Int(Cl^*(A))$, maka:

$$A = Int(Cl^*(A)) \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Karena A merupakan $R-I$ buka dan memenuhi $A = Int(Cl^*(A))$, maka A juga memiliki sifat terbuka pada topologi supra μ . Oleh karena itu, tidak hanya $A \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$, tetapi juga memiliki kesetaraan:

$$A = Int^\mu(Cl^*(A))$$

Dengan demikian, terbukti bahwa setiap himpunan $R-I$ buka merupakan supra $R-I$ -buka.

Remark 4.2 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan buka regular merupakan supra $R-I$ -buka

Bukti

Karena μ merupakan topologi supra dari τ dengan $\tau \subseteq \mu$, didapatkan bahwa:

$$Int(Cl(A)) \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Misalkan A adalah himpunan regular buka, sehingga $A = Int(Cl(A))$ maka:

$$A = Int(Cl(A)) \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Karena A merupakan himpunan buka reguler dan memenuhi $A = Int(Cl(A))$, maka A juga memiliki sifat buka pada topologi supra μ . Oleh karena itu, tidak hanya $A \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$, tetapi juga memiliki kesetaraan:

$$A = Int^\mu(Cl^*(A))$$

Dengan demikian, terbukti bahwa setiap himpunan buka reguler merupakan supra

$R-I$ buka.

Teorema 4.1 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Setiap himpunan $R-I$ buka merupakan supra buka.

Bukti

Karena μ adalah topologi supra dari τ , maka diperoleh bahwa :

$$Int(Cl^*(A)) \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Asumsikan bahwa $A = Int(Cl^*(A))$, maka didapatkan

$$A \subseteq Int^\mu(Cl^*(A))$$

Karena $A \subseteq Int(Cl^*(A))$, A terbuka dalam τ , dan $A = Int(Cl^*(A))$, maka A juga memenuhi $A = Int^\mu(A)$

Dengan demikian terbukti bahwa $A = Int^\mu(A)$ yang menunjukkan bahwa A adalah supra buka, maka setiap himpunan $R-I$ buka juga merupakan supra buka.

Remark 4.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Tidak berlaku untuk kebalikan teorema 4.1 sehingga setiap himpunan supra buka belum tentu merupakan himpunan $R-I$ buka

Contoh 4.4 Diberikan (X, μ, I) dimana $X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Akan dibuktikan bahwa $\{a, b\}$ merupakan supra buka namun tidak supra $R-I$ buka.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\{a, b\}$ bukan merupakan himpunan supra $R-I$ buka dengan $A = Int^\mu(Cl^*(A))$.

Berdasarkan contoh 2.8 bahwa μ merupakan topologi supra dan diketahui bahwa $I = \{\emptyset, \{a\}\}$, maka akan dibuktikan bahwa $Cl^*(A)$ yang berisi himpunan $\{a, b\}$.

Berdasarkan definisi 2.17, $Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu}$, sehingga akan mencari $A^{*\mu}$

Dalam hal ini, $A^* = \{x \in X | U \cap A \notin I, \forall U \in \mu(x)\}$ dengan $\mu(x) = \{U \in \mu | x \in U\}$ sehingga diperoleh

$$\mu(a) = \{\{a, b\}, X\}$$

$$\mu(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, X\}$$

$$\mu(c) = \{X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \notin I$ untuk setiap U di $\mu(x)$

1. $x = a$

$$\mu(a) = \{\{a, b\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $\mu(a)$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \notin I$ untuk setiap $U \in \mu(a)$, maka $a \in A^{*\mu}$

2. $x = b$

$$\mu(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $\mu(b)$

$$\{b\} \cap \{a, b\} = \{b\} \notin I$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \notin I$ untuk setiap $U \in \mu(b)$, maka $b \in A^{*\mu}$

3. $x = c$

$$\mu(c) = \{X\}$$

Akan dibuktikan bahwa $U \cap A$ untuk setiap U di $\mu(c)$

$$X \cap \{a, b\} = \{a, b\} \notin I$$

Karena $U \cap A \notin I$ untuk setiap $U \in \mu(c)$, maka $c \in A^{*\mu}$

Jadi $A^{*\mu} = \{a, b, c\}$

Dikarenakan berdasarkan definisi $Cl^*(A) = A \cup A^{*\mu}$, maka diperoleh

$$Cl^*(A) = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\} = X$$

Dan diperoleh $Int^\mu Cl^*(A) = X$

Karena $A = \{a, b\} \neq X \neq Int^\mu Cl^*(A)$, maka A bukan merupakan supra $R-I$

buka namun $A = \{a, b\}$ merupakan himpunan supra buka karena termasuk dalam μ .

Teorema 4.2 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Apabila topologi supra sama dengan topologi diskrit, maka setiap himpunan supra adalah supra $R-I$ buka.

Bukti

Dalam topologi diskrit, setiap himpunan terbuka adalah $R-I$ buka sehingga pernyataan tersebut telah terbukti.

Teorema 4.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Himpunan supra $R-I$ buka mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Gabungan berhingga dari himpunan supra $R-I$ buka tidak harus supra $R-I$ buka
2. Irisan berhingga dari himpunan supra $R-I$ -buka adalah supra $R-I$ -buka

Bukti

1. Pada contoh 4.1 telah terbukti bahwa $\{a\}$ dan $\{b\}$ merupakan supra $R-I$ buka tetapi pada contoh 4.4 $\{a, b\}$ tidak supra $R-I$ buka
2. Misalkan A dan B adalah himpunan supra $R-I$ buka dalam ruang topologi supra-ideal (X, μ, I) , sehingga:

$$A = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A)) \text{ dan } B = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(B))$$

Akan dibuktikan bahwa $A \cap B$ supra R - I buka, yaitu akan ditunjukkan $A \cap$

$$B = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A \cap B))$$

Karena Cl^* tutupan ideal sehingga memiliki sifat $\text{Cl}^*(A \cap B) \subseteq \text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B))$ maka didapatkan

$$\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A \cap B)) \subseteq \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B)))$$

Dalam topologi supra μ , interior 2 irisan himpunan dapat dinyatakan sebagai irisan dari interiornya sehingga diperoleh

$$\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B))) = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A)) \cap \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(B))$$

Berdasarkan pemisalan di atas, $A = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A))$ dan $B = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(B))$ maka diperoleh

$$\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B))) = A \cap B$$

Karena $\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A \cap B)) \subseteq \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B)))$ dan $\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A) \cap (\text{Cl}^*(B))) = A \cap B$ didapatkan bahwa

$$\text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A \cap B)) = A \cap B$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $A \cap B = \text{Int}^\mu(\text{Cl}^*(A \cap B))$, sehingga

$A \cap B$ juga merupakan himpunan supra R - I buka

Teorema 4.4 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Himpunan supra R - I -tutup mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Gabungan berhingga dari himpunan supra R - I tutup adalah supra R - I tutup
2. Sebarang irisan dari himpunan supra R - I tutup tidak harus supra R - I tutup

Bukti

Diberikan $C \subseteq X$ dikatakan supra $R-I$ tutup, maka komplemen dari C adalah $X \setminus C$ dan dapat dikatakan $R-I$ buka

1. Diberikan 2 himpunan supra $R-I$ tutup C dan D dengan himpunan supra $R-I$ buka berupa $X \setminus C$ dan $X \setminus D$.

Berdasarkan sifat himpunan buka, jika 2 himpunan supra $R-I$ buka maka irisan kedua himpunan tersebut juga supra $R-I$ buka. Perhatikan bahwa $(X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ juga supra $R-I$ buka

Berdasarkan sifat operasi himpunan, didapatkan bahwa

$$X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$$

Dikarenakan $(X \setminus C) \cap (X \setminus D)$ adalah supra $R-I$ buka, maka $X \setminus (C \cup D)$ juga supra $R-I$ buka

Dengan demikian, terbukti bahwa $C \cup D$ merupakan supra $R-I$ tutup

2. Berdasarkan contoh 4.3, diperoleh bahwa

$\{a, c\}$ merupakan komplemen dari $\{b\}$ di mana $\{b\}$ merupakan supra $R-I$ buka. Oleh karena itu, $\{a, c\}$ merupakan supra $R-I$ tutup

$\{b, c\}$ merupakan komplemen dari $\{a\}$ di mana $\{a\}$ merupakan supra $R-I$ buka. Oleh karena itu, $\{b, c\}$ merupakan supra $R-I$ tutup

$\{c\}$ merupakan komplemen dari $\{a, b\}$ di mana $\{a, b\}$ bukan merupakan supra $R-I$ buka. Oleh karena itu, $\{c\}$ bukan merupakan supra $R-I$ tutup

Dengan demikian, terbukti bahwa sebarang irisan dari himpunan supra $R-I$ tutup tidak harus supra $R-I$ tutup

Remark 4.4 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Irisan dari himpunan supra $R-I$ buka dan himpunan supra buka tidak selalu merupakan himpunan supra buka

Contoh 4.2 Diberikan $X = \{x, y, z\}$, $I = \{\emptyset, \{x\}\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$.

Perhatikan bahwa $\{x\}$ dan $\{x, z\}$ merupakan himpunan supra $R-I$ buka. namun $\{x, z\} \cap \{y, z\} = \{z\}$ bukan merupakan supra buka.

4.4 Interior dan Tutupan pada Supra $R-I$

Pada subbab ini akan dibahas 2 pembahasan yang merupakan konsep dasar yaitu interior dan tutupan pada supra $R-I$ serta sifat-sifatnya.

Definisi 4.3 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Tutupan supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I-Cl(A)$ yang merupakan irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup termasuk A .

Definisi 4.4 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Interior supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I-Int(A)$ yang merupakan gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka termasuk A .

Contoh 4.5 Diberikan (X, μ, I) dimana $X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$,

$I = \{\emptyset, \{b\}\}$. Maka supra $R-I-Cl(\{b\}) = \{b, c\}$ dan supra $R-I-Int(\{b\}) = \emptyset$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa supra $R-I-Cl(\{b\}) = \{b, c\}$

Himpunan dalam μ yang mencakup $\{b\}$ adalah $\{b, c\}$ dan X

Berdasarkan definisi 4.3, $R-I-Cl(A)$ yang merupakan irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup termasuk A maka $\{b, c\} \cap X = \{b, c\}$

Akan dibuktikan bahwa supra $R-I-Int(\{b\}) = \emptyset$

Karena pada $\{b\}$ tidak memiliki himpunan terbuka dalam μ yang sepenuhnya terdapat dalam $\{b\}$, maka $Int^\mu(\{b\}) = \emptyset$

Berdasarkan pembuktian di atas, didapatkan:

Supra $R-I-Cl(\{b\}) = \{b, c\}$ dan supra $R-I-Int(\{b\}) = \emptyset$

Teorema 4.5 (Sangeetha & Chacko, 2019)

Berikut beberapa aksioma yang memenuhi supra $R-I-Int(A)$ dan supra $R-I-Cl(A)$:

1. Supra $R-I-Int(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ buka
2. Supra $R-I-Cl(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ tutup
3. Supra $R-I-Int(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ buka
4. Supra $R-I-Cl(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ tutup
5. $X \setminus \text{supra } R-I-Int(A) = \text{supra } R-I-Cl(X \setminus A)$
6. $X \setminus \text{supra } R-I-Cl(A) = \text{supra } R-I-Int(X \setminus A)$
7. $\text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{supra } R-I-Int(B) = \text{supra } R-I-Int(A \cap B)$
8. $\text{Supra } R-I-Cl(A) \cup \text{supra } R-I-Cl(B) = \text{supra } R-I-Cl(A \cup B)$.

Bukti

1. Supra $R-I-Int(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ buka.

Berdasarkan definisi 4.4, interior supra $R-I$ dari A , yaitu supra $R-I-Int(A)$ adalah gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka yang termasuk A .

Karena gabungan dari himpunan-himpunan supra $R-I$ buka adalah supra $R-I$ buka, maka supra $R-I-Int(A)$ juga merupakan himpunan supra $R-I$ buka.

2. Supra $R-I-Cl(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ tutup.

Berdasarkan definisi 4.3, tutupan supra $R-I$ dari A , yaitu supra $R-I-Cl(A)$, adalah irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup A . Karena irisan dari himpunan-himpunan supra $R-I$ tutup adalah supra $R-I$ tutup, maka supra $R-I-Cl(A)$ juga merupakan himpunan supra $R-I$ tutup.

3. Supra $R-I-Int(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ buka.

Karena supra $R-I-Int(A)$ adalah gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka yang termasuk dalam A , maka setiap elemen dalam supra $R-I-Int(A)$ juga merupakan elemen dari A , sehingga supra $R-I-Int(A) \subseteq A$.

Jika A adalah himpunan supra $R-I$ -buka, maka A sudah merupakan gabungan dari dirinya sendiri sebagai himpunan supra $R-I$ buka yang termasuk A , sehingga supra $R-I-Int(A) = A$.

4. Supra $R-I-Cl(A) \subseteq A$ dan persamaan berlaku jika dan hanya jika A adalah himpunan supra $R-I$ -tutup.

Karena supra $R-I-Cl(A)$ adalah irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup A , setiap elemen dari supra $R-I-Cl(A)$ juga merupakan elemen dari A , sehingga supra $R-I-Cl(A) \subseteq A$.

Jika A adalah himpunan supra $R-I$ tutup, maka A sudah merupakan irisan dari dirinya sendiri sebagai himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup A , sehingga supra $R-I-Cl(A) = A$.

5. $X \setminus \text{supra } R-I-Int(A) = \text{supra } R-I-Cl(X \setminus A)$.

Berdasarkan definisi 4.4, supra $R-I-Int(A)$ adalah gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka yang termasuk A . Komplemen dari gabungan

semua himpunan supra $R-I$ buka yang termasuk A adalah irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup $X \setminus A$. Oleh karena itu,

$$X \setminus \text{supra } R-I-Int(A) = \text{supra } R-I-Cl(X \setminus A).$$

$$6. \quad X \setminus \text{supra } R-I-Cl(A) = \text{supra } R-I-Int(X \setminus A)$$

Berdasarkan definisi 4.3, supra $R-I-Cl(A)$ adalah irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup yang termasuk A . Komplemen dari irisan semua himpunan supra $R-I$ tutup yang termasuk A adalah gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka yang mencakup $X \setminus A$. Oleh karena itu,

$$X \setminus \text{supra } R-I-Cl(A) = \text{supra } R-I-Int(X \setminus A).$$

$$7. \quad \text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{supra } R-I-Int(B) = \text{supra } R-I-Int(A \cap B)$$

Akan dibuktikan menggunakan 2 inklusi yaitu $\text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{Supra } R-I-Int(B) \subseteq \text{Supra } R-I-Int(A \cap B)$ dan $\text{Supra } R-I-Int(A \cap B) \subseteq \text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{Supra } R-I-Int(B)$

Inklusi pertama yaitu $\text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{Supra } R-I-Int(B) \subseteq \text{Supra } R-I-Int(A \cap B)$

Ambil sembarang $x \in \text{Supra } R-I-Int(A) \cap \text{Supra } R-I-Int(B)$

Maka $x \in \text{Supra } R-I-Int(A)$ dan $x \in \text{Supra } R-I-Int(B)$

Karena $x \in U$ (dengan $U \subseteq A$) dan $x \in V$ (dengan $V \subseteq B$), maka $x \in U \cap V$ di mana $U \cap V$ adalah himpunan $R-I$ -buka (karena irisan dua $R-I$ -buka juga $R-I$ -buka). Sehingga diperoleh $U \cap V \subseteq A \cap B$

Dengan demikian, diperoleh $x \in \text{Supra } R-I-Int(A \cap B)$

Inklusi kedua yaitu $\text{supra } R-I-Int(A \cap B) \subseteq \text{supra } R-I-Int(A) \cap \text{supra } R-I-Int(B)$

Ambil sembarang $x \in \text{supra } R-I-Int(A \cap B)$

Maka, x berada dalam gabungan himpunan $R-I$ buka $W \subseteq A \cap B$

Karena $W \subseteq A \cap B$, maka $W \subseteq A$ dan $W \subseteq B$ sehingga diperoleh $x \in$

Supra $R-I-Int(A)$ dan $x \in$ Supra $R-I-Int(B)$

Dengan demikian, diperoleh $x \in$ Supra $R-I-Int(A) \cap$ Supra $R-I-Int(B)$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa supra $R-I-Int(A) \cap$ supra $R-I-Int(B) =$ supra $R-I-Int(A \cap B)$.

8. Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B) =$ supra $R-I-Cl(A \cup B)$

Akan dibuktikan menggunakan 2 inklusi yaitu Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B) \subseteq$ supra $R-I-Cl(A \cup B)$ dan supra $R-I-Cl(A \cup B) \subseteq$ Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B)$

Inklusi pertama yaitu Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B) \subseteq$ supra $R-I-Cl(A \cup B)$

Ambil sembarang $x \in$ Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B)$, maka $x \in$ Supra $R-I-Cl(A)$ atau $x \in$ Supra $R-I-Cl(B)$

Karena Supra $R-I-Cl(A)$ merupakan himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup A maka setiap $x \in$ Supra $R-I-Cl(A)$, begitu pula setiap $x \in$ Supra $R-I-Cl(A)$ yang mencakup B

Maka, setiap elemen dari Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B)$ mencakup $A \cup B$, dan

$$\text{Supra } R-I-Cl(A) \cup \text{supra } R-I-Cl(B) \subseteq \text{supra } R-I-Cl(A \cup B)$$

Inklusi kedua yaitu supra $R-I-Cl(A \cup B) \subseteq$ Supra $R-I-Cl(A) \cup$ supra $R-I-Cl(B)$

Ambil sebarang $x \in$ supra $R-I-Cl(A \cup B)$, maka x terdapat dalam semua himpunan supra $R-I$ tutup yang mencakup $A \cup B$

Karena $A \subseteq A \cup B$ dan $B \subseteq A \cup B$, maka setiap himpunan supra supra $R-I$ tutup yang mencakup $A \cup B$ mencakup A dan B

Oleh karena itu, x juga berada dalam supra $R-I-Cl(A)$ atau supra $R-I-Cl(B)$, sehingga:

$$\text{supra } R-I-Cl(A \cup B) \subseteq \text{supra } R-I-Cl(A) \cup \text{supra } R-I-Cl(B)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\text{supra } R-I-Cl(A) \cup \text{supra } R-I-Cl(B) = \text{supra } R-I-Cl(A \cup B)$.

Contoh 4.6 Diberikan (X, μ, I) dimana $X = \{a, b, c\}$, $\mu = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $I = \{\emptyset, \{b\}\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Buktikan dan tentukan supra $R-I-Int(A)$, supra $R-I-Int(B)$ supra $R-I-Cl(A)$, supra $R-I-Cl(B)$.

Bukti

Akan dibuktikan supra $R-I-Int(A)$

Karena tidak ada himpunan terbuka dalam I yang mencakup $A = \{a\}$, maka gabungan dari himpunan-himpunan tersebut adalah $\emptyset$

Dengan demikian, terbukti bahwa supra $R-I-Int(A) = \emptyset$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (1) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut

Akan dibuktikan supra $R-I-Int(B)$

Telah terbukti pada contoh 4.4 bahwa supra $R-I-Int(B) = \emptyset$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (1) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut

Akan dibuktikan supra $R-I-Cl(A)$

Himpunan-himpunan dalam μ yang mencakup $\{a\}$ adalah $\{a, c\}$ dan X

Berdasarkan definisi 4.3, $R-I-Cl(A)$ yang merupakan irisan dari semua himpunan

supra $R-I$ tutup termasuk A maka $\{a, c\} \cap X = \{a, c\}$

Dengan demikian, terbukti bahwa supra $R-I-Cl(A) = \{a, c\}$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (2) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut

Akan dibuktikan supra $R-I-Cl(B)$

Telah terbukti pada contoh 4.4 bahwa supra $R-I-Cl(B) = \{b, c\}$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (2) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut

Perhatikan bahwa $A \cap B = \emptyset$ dan supra $R-I-Int(A \cap B) = \emptyset$ maka supra $R-I-Int(A) \cap supra R-I-Int(B) = \emptyset$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (7) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut

Perhatikan bahwa $A \cup B = (a, b)$ dan supra $R-I-Cl(A \cup B) = X, \{a, b\}$ maka supra $R-I-Cl(A) \cup supra R-I-Cl(B) = \{a, b, c\} = X$

Dapat dilihat pada teorema 4.5 (8) bahwa sesuai dengan pembuktian teorema tersebut.

4.5 Kajian Penelitian dalam Prespektif Islam

Pada penjelasan di atas telah dijelaskan pengertian dari topologi ideal dengan memenuhi syarat-syarat tertentu. Syarat-syarat dari topologi ideal tersebut sama halnya dengan orang yang paling bertakwa di kehidupan sehari-hari dan juga dijelaskan dalam Q.S Al-Hujurat ayat 13:

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاهُ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاهُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاهُ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

(Kemenag, 2024c)

Artinya: *“Wahai manusia, sesungguhnya Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan perempuan. Kemudian, Kami menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling bertakwa. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Teliti.”*

Ayat ini menegaskan bahwa Allah SWT menciptakan manusia dari seorang laki-laki dan seorang perempuan kemudian menjadikan mereka berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar mereka dapat saling mengenal, bukan untuk saling menghina. Allah SWT menekankan bahwa perbedaan yang ada di antara manusia bukanlah alasan untuk bermegah-megahan, melainkan sarana untuk saling memahami dan menghargai. Allah SWT juga menegaskan bahwa nilai seseorang tidak diukur dari asal usul atau kedudukan sosialnya, tetapi dari tingkat ketakwaannya. Dengan kata lain, mereka yang paling mulia di sisi Allah SWT adalah yang paling bertakwa.

Dalam konteks konsep ideal dalam topologi, himpunan manusia yang berbeda-beda (seperti bangsa atau suku) dapat diasumsikan sebagai subhimpunan dari himpunan umat manusia X . Setiap individu atau kelompok yang memiliki sifat takwa dapat dikatakan menjadi elemen dari koleksi ideal I yang memenuhi syarat keanggotaan dalam himpunan tersebut. Secara matematis, jika A dan B adalah dua subhimpunan yang memenuhi sifat ideal (takwa), maka gabungan $A \cup B$ juga menjadi bagian dari ideal I , karena takwa tetap menjadikan mereka mulia meskipun berasal dari kelompok yang berbeda. Demikian pula, jika suatu kelompok kecil $B \subseteq A$ juga memiliki sifat takwa, maka kelompok B tetap menjadi bagian dari himpunan ideal I . Jadi, takwa berfungsi sebagai syarat umum untuk "keanggotaan ideal," meskipun manusia memiliki latar belakang yang beragam. Hal ini sejalan dengan

prinsip bahwa setiap manusia memiliki kesempatan untuk diakui dan dihargai oleh Allah SWT berdasarkan amalnya. Sebagaimana firman Allah SWT pada Q.S. Ali Imron ayat 195:

فَاسْتَجَابَ لَهُمْ رَبُّهُمْ أَيْ لَا أُنِيعُ عَمَلَ عَامِلٍ مِّنْكُمْ مِّمَّنْ ذَكَرَ أَوْ أُتِيَ بَعْضُكُم مِّنْ بَعْضٍ فَالَّذِينَ هَاجَرُوا
وَأُخْرِجُوا مِنْ دِيَارِهِمْ وَأُودُوا فِي سَبِيلِي وَقُتِلُوا وَقُتِلُوا لَا كُفْرَانَ عَنْهُمْ سَيَاتِهِمْ وَلَا دُخْلَنَّهُمْ جَنَّتِ بَحْرِي مِنْ
تَحْتِهَا الْأَنْهَارُ ثَوَابًا مِّنْ عِنْدِ اللَّهِ وَاللَّهُ عِنْدَهُ حُسْنُ الثَّوَابِ ﴿١٩٥﴾

(Kemenag, 2024d)

Artinya: “Maka, Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman), “Sesungguhnya Aku tidak menyia-nyiakan perbuatan orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki maupun perempuan, (karena) sebagian kamu adalah (keturunan) dari sebagian yang lain. Maka, orang-orang yang berhijrah, diusir dari kampung halamannya, disakiti pada jalan-Ku, berperang, dan terbunuh, pasti akan Aku hapus kesalahan mereka dan pasti Aku masukkan mereka ke dalam surga-surga yang mengalir di bawahnya sungai-sungai sebagai pahala dari Allah. Di sisi Allahlah ada pahala yang baik.”

Surah Ali Imran ayat 195 menekankan bahwa Allah SWT tidak menyia-nyiakan amal kebaikan siapa pun, baik laki-laki maupun perempuan. Ayat ini menjelaskan bahwa setiap amal yang dilakukan dengan niat ikhlas akan mendapatkan balasan dari Allah SWT, tanpa perbedaan gender, latar belakang, atau kondisi sosial. Allah SWT menegaskan bahwa setiap orang memiliki kesempatan yang sama dalam memperoleh pahala, asal memenuhi kriteria keikhlasan dan ketakwaan dalam beramal. Ayat ini menggambarkan keadilan dan kasih sayang Allah SWT dalam menghargai setiap usaha manusia menuju kebaikan, yang menghapus batasan sosial atau perbedaan dalam penghargaan amal.

Dalam konteks topologi ideal, ayat ini dapat dihubungkan dengan konsep himpunan ideal I di mana setiap amal baik dianggap sebagai elemen dalam himpunan ideal tersebut, terlepas dari siapa pelakunya. Secara matematis, jika A adalah himpunan amal baik yang dilakukan oleh laki-laki dan B adalah himpunan

amal baik yang dilakukan oleh perempuan, maka baik A maupun B termasuk dalam himpunan ideal I , karena keduanya memenuhi sifat kebaikan. Selain itu, gabungan amal dari $A \cup B$, yang mencakup seluruh amal baik tanpa memandang pelakunya, tetap menjadi anggota himpunan ideal I , karena gabungan amal kebaikan tersebut juga diterima dan dihargai oleh Allah SWT. Jika $C \subseteq A$ adalah himpunan kecil dari amal tertentu dalam A , maka C juga termasuk dalam I , selama amal tersebut memenuhi kriteria kebaikan yang diinginkan. Ini mencerminkan bahwa amal baik dalam berbagai bentuk tetap menjadi bagian dari himpunan ideal, sejalan dengan prinsip keadilan Allah SWT. Hal ini juga sejalan dengan pesan dalam Q.S. Al-Baqarah ayat 148, di mana Allah SWT menjelaskan bahwa setiap umat memiliki arah atau kiblatnya sendiri, dan di dalam keberagaman tersebut terdapat tujuan yang sama untuk beramal dan beribadah kepada-Nya.

وَلِكُلٍّ وِجْهَةٌ هُوَ مُوَلِّئُهَا فَاسْتَغْنُوا الْخَيْرِثَ آيِنَ مَا تَكُونُوا يَأْتِ بِكُمْ اللَّهُ جَمِيعًا إِنَّ اللَّهَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٤٨﴾

(Kemenag, 2024e)

Artinya: “Bagi setiap umat ada kiblat yang dia menghadap ke arahnya. Maka, berlomba-lombalah kamu dalam berbagai kebajikan. Di mana saja kamu berada, pasti Allah akan mengumpulkan kamu semuanya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.”

Ayat tersebut menyatakan bahwa setiap kelompok memiliki arah atau tujuan tertentu, namun Allah SWT mengingatkan bahwa umat manusia hendaknya berkompetisi dalam melakukan kebaikan. Dalam setiap aspek kehidupan, orang akan menghadapi banyak jalan dan pilihan. Arah dan tujuan itu bisa berbeda tergantung pada situasi dan pemahaman masing-masing individu atau kelompok, tetapi kebaikan merupakan hal yang harus senantiasa diperjuangkan bersama. Ayat ini menunjukkan bahwa, terlepas dari perbedaan dalam pandangan atau jalan yang

ditempuh, usaha menuju kebaikan dan kemuliaan tetaplah menjadi tujuan utama.

Ayat ini dapat dikaitkan dengan konsep himpunan ideal I dalam topologi, di mana kebaikan menjadi karakteristik ideal yang dapat dimiliki oleh setiap subhimpunan dari suatu himpunan umat manusia X . Jika A dan B adalah dua himpunan yang melambangkan jalan atau arah berbeda yang ditempuh oleh kelompok-kelompok manusia, maka A dan B tetap menjadi bagian dari himpunan ideal I selama mereka mengarahkan anggotanya menuju kebaikan. Secara matematis, gabungan dari dua himpunan $A \cup B$, yang mencakup semua usaha kebaikan dari arah mana pun, juga termasuk dalam himpunan ideal I karena tetap memenuhi karakteristik kebaikan. Dengan demikian, setiap jalan yang mengarah pada kebaikan, meskipun berbeda, tetap memiliki nilai yang ideal, menunjukkan bahwa dalam pandangan Allah SWT, keragaman ini memperkaya amal baik dalam himpunan yang lebih luas.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan bab 4, dapat disimpulkan bahwa topologi supra adalah koleksi himpunan bagian X yang memenuhi beberapa sifat yaitu himpunan X dan himpunan kosong $\emptyset$ adalah anggota μ , gabungan dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ juga merupakan anggota μ . Sedangkan ruang topologi supra ideal merupakan ruang topologi supra dengan ideal I pada X . Ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka didefinisikan sebagai ruang topologi supra ideal dimana $A = Int^\mu (Cl^*(A))$. Adapun aksioma-aksioma yang menyatakan sifat dari ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ buka yaitu:

1. Gabungan berhingga dari himpunan supra $R-I$ buka tidak harus supra $R-I$ -buka
2. Irisan berhingga dari himpunan supra $R-I$ -buka adalah supra $R-I$ -buka

Pada pembahasan di atas juga menunjukkan beberapa aksioma yang berkaitan dengan interior dan tutupan supra $R-I$. Tutupan supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I$ - $Cl(A)$ yang merupakan irisan dari semua himpunan supra $R-I$ tutup termasuk A . Interior supra $R-I$ pada himpunan A dinotasikan dengan supra $R-I$ $Int(A)$ yang merupakan gabungan dari semua himpunan supra $R-I$ buka termasuk A .

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Topik penelitian mengenai sifat-sifat ruang topologi supra ideal masih banyak yang belum dibuktikan. Penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk meneliti sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ fungsi kontinu atau meneliti sifat-sifat ruang topologi supra ideal melalui $R-I$ pemetaan buka dan pemetaan tertutup.

DAFTAR PUSTAKA

- Abd El-Monsef, M. E., Lashien, E. F., & Nasef, A. A. (1992). *on I-Open Sets and I-Continuous Functions*. 32(1), 21–30.
- Adams, C., & Fransoza, R. (2008). *Introduction to Topology: Pure and Applied*.
- H. Jasim, T., & H. Zaben, R. (2015). On Ideal Supra Topological Spaces. *International Journal of Mathematical Analysis*, 4, 152–160.
- Hadis Riwayat Bukhari no. 1 dan Hadis riwayat Muslim no. 1907
- Kemenag. (2024a). Qur'an Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/99/7-8> (Diakses 16 Oktober 2024)
- Kemenag. (2024b). Qur'an Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/2/264> (Diakses 16 Oktober 2024)
- Kemenag. (2024c). Qur'an Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/49/13> (Diakses 30 Oktober 2024)
- Kemenag. (2024d). Qur'an Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/3/195> (Diakses 30 Oktober 2024)
- Kemenag. (2024e). Qur'an Kemenag. <https://quran.kemenag.go.id/2/148> (Diakses 30 Oktober 2024)
- Mashhour, A. S., Allam, A. A., Mahmoud, F. S., & Khedr, F. H. (1983). on Supra Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 14(4), 502–510.
- Modak, S., & Mistry, S. (2012). Ideal on supra topological space. *International Journal of Mathematical Analysis*, 6(1–4), 1–10.
- Morris, S. (2007). Topology without tears. *World War II, October 2007*, 373. <http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf>
- Pricilla, M. T., & Maggi, I. (2016). $\mu\alpha^*$ -Closed Set and $\mu\alpha^{**}$ -Closed Set in Supra Topological Spaces II. *P R E L I M I N A R I E S*. 11558–11562. <https://doi.org/10.15680/IJRSET.2015.0506268>
- Sangeetha, M. V., & Chacko, B. (2019). On supra ideal topological space via R-I-open sets. *Malaya Journal of Matematik*, S(1), 433–440. <https://doi.org/10.26637/mjm0s01/0077>
- Singh, T. B. (2019). Introduction to Topology. In *Introduction to Topology*. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-6954-4>

RIWAYAT HIDUP



Nuril Ma'rifatul Husna atau lebih dikenal sebagai Nuril. Dilahirkan di Tulungagung, 16 Januari 2003 sebagai anak keempat dari pasangan Bapak Maulan dan Ibu Imroatin. Selama masa pendidikan, penulis menempuh pendidikan dasar di SD Islam Al-Hidayah Samir dan lulus pada tahun 2015. Kemudian, pada tahun 2015 penulis menimba ilmu agama di Pondok Pesantren Terpadu Al-Kamal dan menempuh pendidikan jenjang sekolah menengah pertama di MTs Negeri 01 Blitar, lulus pada tahun 2018. Setelah itu, penulis masih menimba ilmu agama di Pondok pesantren Terpadu Al-Kamal dan menempuh pendidikan jenjang sekolah menengah atas di MA Negeri 03 Blitar, lulus pada tahun 2021. Setelah dinyatakan lulus dari SMA, pada tahu yang sama penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan setelah diterima sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN. Selama perkuliahan, penulis cukup aktif dalam mengikuti organisasi kampus. Salah satunya sebagai anggota divisi *Eksternal Public Relation* (EPR) Himpunan Mahasiswa Program Studi Matematika (HMPS) “Integral” Matematika pada tahun 2022 dan ketua divisi *Eksternal Public Relation* (EPR) pada tahun 2023. Selain itu, penulis juga melanjutkan menimba ilmu keagamaan di Pondok Pesantren Sabilurrosyad Gasek sejak 2022 sampai sekarang. Apabila terdapat pertanyaan, saran, ataupun kritik dari penelitian ini, penulis dapat dihubungi melalui email (nurilmarifatulhusna@gmail.com) atau sosisa media instagram (https://instagram.com/nurilmh_).



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nuril Ma'rifatul Husna
NIM : 210601110022
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Ruang Topologi Supra Ideal Melalui R/I Buka
Pembimbing I : Dian Maharani, M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	02 September 2024	Konsultasi Topik	1.
2.	06 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	11 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	18 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	27 September 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	03 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	11 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	15 Oktober 2024	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	15 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	17 Oktober 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	17 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal	11.
12.	28 Oktober 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	31 Oktober 2024	Konsultasi Bab IV	13.
14.	04 November 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	05 November 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	05 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	06 November 2024	ACC BAB IV dan V	17.
18.	07 November 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	07 November 2024	ACC Seminar Hasil	19.
20.	13 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	19 November 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	21.
22.	22 November 2024	ACC Sidang Skripsi	22.
23.	20 Desember 2024	ACC Keseluruhan	23.

Malang, 20 Desember 2024

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Ely Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005