DEKOMPOSISI PRIMER MODUL $\mathbb{Z}_n$ ATAS $\mathbb{Z}$

SKRIPSI

OLEH:
KHARISMA MUFIDATUS SOLICHA
NIM. 210601110071

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

DEKOMPOSISI PRIMER MODUL $\mathbb{Z}_n$ ATAS $\mathbb{Z}$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
KHARISMA MUFIDATUS SOLICHA
NIM. 210601110071

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

DEKOMPOSISI PRIMER MODUL $\mathbb{Z}_n$ ATAS $\mathbb{Z}$

SKRIPSI

Oleh
Kharisma Mufidatus Solicha
NIM. 210601110071

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 04 Desember 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIP. 19900215 201903 2 015	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

DEKOMPOSISI PRIMER MODUL $\mathbb{Z}_n$ ATAS $\mathbb{Z}$

SKRIPSI

Oleh
Kharisma Mufidatus Solicha
NIM. 210601110071

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2024

Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji I	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

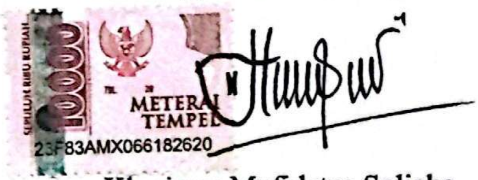
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini

Nama	: Kharisma Mufidatus Solicha
NIM	: 210601110071
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Dekomposisi Primer Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya akan bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2024



Kharisma Mufidatus Solicha
NIM.210601110071

HALAMAN MOTO

"*The key in your self*"

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(Q.S Al-Insyirah ayat 6)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk garda terdepan penulis, Mamak dan Bapak tersayang yang selalu mengiringi doanya dan selalu mendukung dan memotivasi penulis. Skripsi ini juga penulis persembahkan untuk diri sendiri yang memilih berjuang untuk bertahan sampai saat ini melewati banyak lika-liku.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dekomposisi Primer Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$". Sholawat serta salam selalu kami haturkan kepada junjungan kami, Nabi Muhammad SAW yang dinantikan syafaatnya. Skripsi ini diajukan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan, dukungan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, motivasi dengan penuh kesabaran kepada penulis selama mengerjakan skripsi ini.
5. Ibu Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang berkenan menyempatkan waktunya untuk membimbing penulis dalam kajian topik Al-Qur'an pada penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Eva Alisah, M.Pd., selaku ketua penguji dalam ujian skripsi saya yang telah memberikan banyak arahan, ilmu, serta motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Ibu Dewi Ismiarti, M.Si., selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi saya yang telah memberikan banyak arahan, ilmu, serta bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan dukungan dan saran dalam penyusunan skripsi ini.
9. Bapak Suliadi, S.Pd.,Gr., dan Ibu Yuhanisah serta seluruh keluarga yang selalu mengiringi doa, memberikan dukungan serta motivasi bagi penulis selama penyusunan skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat penulis, Hilda Aulia Arafah, S.Psi., Icha Aprilia Risdayati, Della Nanda Febriantika, dan teman-teman "The Vrull" yang selalu memberikan dukungan, motivasi, dan membersamai penulis selama proses menempuh pendidikan.
11. Seluruh mahasiswa Angkatan 2021 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah berproses bersama penulis selama menempuh pendidikan di Universitas ini.
12. Terakhir, untuk diri sendiri yang telah berjuang untuk bertahan dan tidak menyerah melewati segala lika-liku dalam proses menempuh pendidikan hingga terselesaikannya tugas akhir ini.

Berkah dan rida Allah SWT sehingga penyusunan skripsi ini dapat terselesaikan. Penulis menyadari akan ketidaksempurnaan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran yang dapat membangun dari pembaca untuk keberlanjutan penelitian. Penulis mengharapkan penelitian ini dapat bermanfaat untuk penelitian selanjutnya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Malang, 20 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$: Himpunan Bilangan Real

$\mathbb{Q}$: Himpunan Bilangan Rasional

$\mathbb{Z}$: Himpunan Bilangan Bulat

$\mathbb{Z}^+$: Himpunan Bilangan Bulat Positif

$\mathbb{Z}_n$: Himpunan Bilangan Bulat Modulo n

$\mathbb{N}$: Himpunan Bilangan Asli

ABSTRAK

Solicha, Kharisma Mufidatus. 2024. **Dekomposisi Primer Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (1) Intan Nisfulaila, M.Si., (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: dekomposisi modul, dekomposisi primer, modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor yang mana memungkinkan lapangan digantikan oleh ring sebagai skalarnya. Modul atas daerah ideal utama merupakan modul dimana skalarnya berupa daerah ideal utama. Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan salah satu contoh modul atas daerah ideal utama, yang terdiri atas bilangan bulat modulo n. Untuk menganalisis suatu struktur yang lebih mendalam, dapat digunakan dekomposisi. Dekomposisi diartikan sebagai proses penguraian, yang bertujuan untuk dapat menganalisis dengan lebih detail. Dekomposisi modul berarti memecah struktur modul menjadi bentuk yang lebih sederhana. Dekomposisi primer pada modul menunjukkan bahwa suatu modul dapat dipecah menjadi submodul-submodul primer.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan studi literatur. Adapun tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu diawali dengan melengkapi pembuktian teorema dekomposisi primer. Sebelum melakukan proses dekomposisi, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul torsi atas daerah ideal utama dan dengan order yang dapat dinyatakan dalam faktorisasi prima. Proses dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dilakukan dalam empat tahapan. Berdasarkan hasil dari penelitian yang dilakukan, hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan satu faktor prima didapatkan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$. Sedangkan untuk n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer $\mathbb{Z}_n = \frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_n \oplus \frac{n}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_n \oplus \dots \oplus \frac{n}{p_k^{e_k}}\mathbb{Z}_n$.

ABSTRACT

Solicha, Kharisma Mufidatus Solicha. 2024. **Primary Decomposition of Modules $\mathbb{Z}_n$ over** $\mathbb{Z}$. Undergraduate Thesis. Mathematics Departement, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Intan Nisfulaila, M.Si., (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: modules decomposition, primary decomposition, modules $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$

Modules is a generalization of vector space that allows fields to be replaced by rings as scalars. A module over a principal ideal domain is a module where the scalar is a principal ideal domain. The module $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$ is an example of such a module, consisting of integers modulo n. To analyze a structure in greater depth, decomposition can used. Decomposition is defined as the process of breaking down a structure to facilitate detailed analysis. Module decomposition refers to breaking down a module structure into simpler forms. Primary decomposition of a module indicates that a module can be decomposed into primary submodules.

The method used in this research is a literature review. The research process begins with completing the proof of the primary decomposition theorem. Before perfoming the decomposition process, it is first demonstrated that the module $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$ is a torsion module over a principal ideal domain with an order that can be expressed in prime factorization. The process of module $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$ is carried out in four steps. Based on the results of research conducted, the results of the decomposition of the module $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$ for n numbers with one prime factor obtained the module $\mathbb{Z}_n$ over $\mathbb{Z}$ can be expressed as a direct sum of primary submodules $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p^e}$. Meanwhile, for n numbers with more than one prime factor, it can be expressed as a direct sum of primary submodules $\mathbb{Z}_n = \frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_n \oplus \frac{n}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_n \oplus \dots \oplus \frac{n}{p_k^{e_k}}\mathbb{Z}_n$.

مستخلص البحث

الصالحة، حرسما مفيدة. **التحلل الأولي لوحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) اينتان نصف الليلة، الماجستيرة ، (٢) إبرناهيراواتي، الماجستيرة.

الكلمات المفتاحية: تحلل الوحدات، التحلل الأولي، وحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$

الوحدات النمطية هي تعميم للفضاءات المتجهة التي تسمح باستبدال الحقل بحلقة ككمية قياسية له. الوحدة النمطية على منطقة مثالية أساسية هي وحدة نمطية تكون كميتها القياسية منطقة مثالية أساسية. الوحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$ هي أحد الأمثلة على الوحدة النمطية على مناطق المثل الأعلى الرئيسية، والتي تتكون من الأعداد الصحيحة على مقياس n. لتحليل البنية بشكل أعمق، يمكن استخدام التحلل. يُعرَّف التحلل بأنه عملية تحليل، تهدف إلى التمكن من التحليل بمزيد من التفصيل. يعني تفكيك الوحدة النمطية تقسيم بنية الوحدة النمطية إلى أشكال أبسط. يشير التحلل الأولي على الوحدة النمطية إلى إمكانية تقسيم الوحدة النمطية إلى وحدات فرعية أولية. المنهج المستخدم في هذا البحث هو منهج الدراسة الأدبية. تبدأ المراحل التي تم تنفيذها في هذه الدراسة باستكمال إثبات نظرية التحلل الأساسي. قبل إجراء عملية التفكيك، يتم أولاً إثبات أن وحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$ هي وحدة على منطقة المثالية الرئيسية وبرتبة يمكن التعبير عنها بالعوامل الأولية. تتم عملية تحليل وحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$ على أربع مراحل. استنادًا إلى نتائج البحث الذي تم إجراؤه، يمكن التعبير عن نتائج عملية تفكيك وحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$ للأعداد n ذات العامل الأولي الواحد التي تم الحصول عليها وحدة $\mathbb{Z}_n$ على $\mathbb{Z}$ على شكل مجموع مباشر للوحدات الفرعية الأولية $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$. بينما بالنسبة للأعداد n التي تحتوي على أكثر من عامل أوّلي واحد، يمكن التعبير عنها كمجموع مباشر من الوحدات الفرعية الأولية $\mathbb{Z}_n = \frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_n \oplus \frac{n}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_n \oplus \ldots \oplus \frac{n}{p_k^{e_k}}\mathbb{Z}_n$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan himpunan takkosong yang dilengkapi oleh satu operasi biner atau lebih (Andari, 2017). Struktur aljabar yang sering dijumpai pada saat ini yaitu grup, ring, dan modul. Pada masing-masing struktur tersebut, memiliki kemiripan sifat dan struktur satu sama lain. Sehingga, hal ini memungkinkan adanya keterkaitan dari masing-masing struktur. Struktur aljabar yang paling sederhana adalah struktur grup (Gilbert & Gilbert, 2013).

Grup merupakan suatu himpunan takkosong yang dilengkapi satu operasi biner dan memenuhi empat aksioma (Andari, 2017). Aksioma yang harus dipenuhi pada struktur grup diantaranya yaitu operasi biner tertutup pada himpunan, himpunan bersifat asosiatif terhadap operasi, mempunyai unsur kesatuan, serta setiap unsurnya memiliki invers. Jika suatu grup memenuhi aksioma komutatif terhadap operasi, maka grup tersebut dikatakan grup komutatif atau grup abelian (Andari, 2017).

Selain struktur grup, terdapat struktur gelanggang atau lebih dikenal dengan istilah ring. Ring merupakan suatu himpunan takkosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang memenuhi tiga aksioma (Andari, 2017). Aksioma pertama memenuhi aksioma grup komutatif terhadap operasi pertama. Aksioma kedua yaitu himpunan yang dilengkapi operasi kedua tertutup dan operasinya bersifat asosiatif. Aksioma ketiga yaitu operasi kedua bersifat distributif terhadap operasi pertama.

Pada dasarnya, modul merupakan hasil dari generalisasi dari ruang vektor aljabar linier yang mana memperbolehkan mengganti lapangan dengan ring sebagai skalar (Adkins & Weintraub, 1995). Roman (2008) mendefinisikan R-modul (modul atas R) sebagai grup abelian yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar serta memenuhi aturan-aturan tertentu. Aturan pertama memenuhi sifat distribusi perkalian scalar terhadap penjumlahan pada modul. Aturan kedua memenuhi sifat distribusi perkalian scalar terhadap penjumlahan pada ring. Aturan ketiga memenuhi sifat asosiatif perkalian skalar. Dan aturan terakhir adalah terdapat unsur identitas skalar 1 dalam ring. Pada struktur modul, ring dianggap sebagai gelanggang tumpuan suatu modul.

Bagian-bagian dari suatu himpunan dikenal sebagai himpunan bagian atau subhimpunan. Subhimpunan takkosong dari suatu modul yang membentuk modul pula dengan operasi perkalian skalar yang sama dikenal sebagai submodul (Wahyuni, 2016). Submodul memenuhi aturan-aturan tertentu, yaitu tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada modul induknya. Selain itu, submodul juga harus memiliki unsur identitas dari modul induknya. Dengan demikian, submodul mempertahankan struktur modul dengan operasi yang sama seperti modul induknya.

Submodul memiliki peranan yang cukup penting dalam menganalisis suatu modul. Submodul dapat membantu mengidentifikasi struktur internal pada modul dengan memecah modul menjadi bagian-bagian yang lebih kecil dan sederhana. Dengan menguraikannya, struktur modul dapat dianalisis lebih detail bagaimana elemen-elemennya berinteraksi dengan operasi yang berlaku pada modul tersebut sehingga dapat menambah wawasan terkait sifat-sifat modul yang lebih besar.

Secara bahasa, dekomposisi diartikan suatu proses penguraian menjadi bentuk yang lebih sederhana (Kemendikbud, 2016). Dalam matematika, dekomposisi sangat diperlukan untuk mengenali sifat pada suatu struktur aljabar, salah satunya pada struktur modul. Dengan menguraikannya menjadi submodul-submodul, dimaksudkan dapat mempermudah dalam mengkaji suatu modul dengan berbagai jenis operasi yang berlaku pada modul. Dengan demikian, dapat dilihat pula keteraturan dan keterkaitan antara submodul dan modul induknya.

Dekomposisi juga dapat membantu dalam memahami bagaimana modul dapat dibangun dari bagian-bagian yang lebih kecil dan sederhana, sehingga memudahkan dalam analisis sifat dasar modul tersebut. Misalnya, dengan melihat modul sebagai jumlah langsung dari submodul-submodulnya, sehingga dapat mudah meneliti sifat-sifat seperti kestabilan, ketertutupan terhadap operasi, dan hubungan antar elemen dalam struktur modul secara keseluruhan. Proses ini menjadikan dekomposisi menjadi konsep yang penting dalam matematika aljabar dalam menyederhanakan struktur modul dan hubungan antar bagian-bagiannya. Konsep dekomposisi pada modul ini memiliki keterkaitan dengan ajaran di dalam Al-Qur’an khususnya pada Q.S. Al-Bayyinah ayat 6-7 (Kemenag, 2024).

إِنَّ الَّذِينَ كَفَرُوا مِنْ أَهْلِ الْكِتَابِ وَالْمُشْرِكِينَ فِي نَارِ جَهَنَّمَ خَالِدِينَ فِيهَا ۚ أُوْلَٰٓئِكَ هُمْ شَرُّ ٱلْبَرِيَّةِ ﴿٦﴾
إِنَّ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ أُوْلَٰٓئِكَ هُمْ خَيْرُ ٱلْبَرِيَّةِ ﴿٧﴾

Artinya: *“Sesungguhnya orang-orang kafir dari golongan ahli kitab dan orang-orang musyrik (akan masuk) ke dalam neraka Jahannam; mereka kekal di dalamnya. Mereka itulah seburuk-buruk makhluk (6). Sesungguhnya orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh, mereka itulah sebaik-baik makhluk.(7)”(Al-Bayyinah: 6-7)*

Pada wahyu Allah tersebut dijelaskan bahwa manusia dikelompokkan menjadi dua golongan berdasarkan keimanan dan amal perbuatan manusia. Pada ayat 6, Allah mengelompokkan mereka yang menolak kebenaran setelah datangnya risalah Islam. Mereka yang termasuk kelompok ini diancam akan kekal dalam neraka Jahannam sebagai hukuman atas ketidaktaatan dan penolakannya atas kebenaran. Pada ayat selanjutnya, Allah mengelompokkan orang-orang yang beriman dan memperkuat keimanannya dengan amal shaleh sebagai sebaik-baiknya makhluk. Hal ini menunjukkan penghargaan dari Allah bagi mereka yang menjalankan perintah-Nya dan berpegang teguh pada keimanan yang kuat. Pemisahan ini mengindikasikan bagaimana tindakan manusia di dunia membentuk nasib kehidupan yang kekal nantinya, yakni kehidupan di akhirat. Allah menunjukkan secara tegas bahwa keimanan dan perbuatan amal manusia dia dunia menentukan nasib akhir mereka. Hal ini serupa dengan konsep dimana dekomposisi modul, dimana struktur modul dipisah-pisah dengan tujuan untuk dapat memahami sifat-sifatnya.

Pada penelitian sebelumnya telah dibahas dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas beberapa ring khusus (Nataprawira, 2022) dan (Wardhana, 2022). Pada penelitian keduanya, disimpulkan bahwa modul yang dibangun atas ring berupa daerah ideal utama selalu dapat didekomposisikan menjadi submodul bebas dan submodul torsi. Sedangkan modul yang dibangun secara hingga oleh daerah Dedekind, dapat diuraikan menjadi submodul proyektif dan submodul torsi. Penelitian lainnya yaitu penelitian Diana Amalia yang membahas dekomposisi siklis dari modul yang dibangun secara hingga. Pada penelitian lainnya, disimpulkan bahwa untuk mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga dengan empat langkah yaitu dengan mendekomposisikan modul yang dibangun secara hingga atas ideal utama, mendekomposisikan modul bebas, mendekomposisikan modul torsi, dan mendekomposisikan modul primer menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis (Amalia, 2018). Terlihat bahwa pada penelitian-penelitian sebelumnya berfokus pada dekomposisi modul yang masih umum, belum dijelaskan secara khusus untuk dekomposisi modul tertentu. Oleh karena itu, peneliti ingin melakukan suatu kajian mengenai dekomposisi pada modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sehingga penelitian ini berjudul "Dekomposisi Primer Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan pada latar belakang sebelumnya maka penelitian ini akan membahas terkait bagaimana hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer.

1.3 Tujuan Penelitian

Berlandaskan latar belakang dan permasalahan yang akan dibahas, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer.

1.4 Manfaat Penelitian

Sesuai dengan tujuan penelitian, maka manfaat penelitian ini dibedakan berdasarkan kepentingan beberapa pihak, yaitu:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini memberikan penulis pemahaman yang lebih mendalam mengenai teori modul, khususnya dalam menganalisis dekomposisi modul.

Dengan penelitian ini, penulis dapat mengasah kemampuan dalam menerapakan konsep-konsep aljabar abstrak dalam pemecahan masalah serta mengasah kemampuan berpikir kritis dan sistematis dalam memecahkan suatu persoalan.

2. Bagi Mahasiswa

   Penelitian ini dapat menjadi referensi tambahan bagi mahasiswa yang tertarik untuk mempelajari lebih lanjut mengenai struktur aljabar, khususnya struktur modul. penelitian ini dapat membantu dalam memperjelas konsep abstrak dalam persoalan yang lebih kompleks, sehingga mahasiswa dapat mengetahui relevansi mengenai dekomposisi dalam pembelajaran aljabar.

3. Bagi Lembaga

   Penelitian ini dapat menjadi salah satu kontribusi literatur akademik di bidang matematika, khususnya pada aljabar. Penelitian ini dapat membuka peluang untuk eksplorasi lebih lanjut pada penelitian lanjutan mengenai struktur aljabar khusunya pada struktur modul.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dikaji beberapa teori mengenai struktur aljabar meliputi grup, ring, modul, dan jumlah langsung pada modul. Pada teori-teori tersebut akan dibahas definisi dan diberikan contohnya.

2.1.1 Bilangan Prima

Sebelum membahas struktur aljabar, perlu dikenal terlebih dahulu mengenai bilangan prima untuk lebih memahami teori di subbab selanjutnya. Bilangan prima didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Bilangan prima merupakan suatu bilangan bulat $q > 1$ yang tidak memiliki pembagi a dari q sehingga memenuhi $1 < a < q$. Jika bilangan bulat $n > 1$ tidak memenuhi kondisi prima, maka n disebut bilangan komposit (Niven dkk., 1991).

Sebagai contoh, 2,3,5 merupakan bilangan prima. Karena $2 > 1$ dan tidak memiliki pembagi a sehingga $1 < a < 2$. Begitu pula dengan 3 dan 5, keduanya tidak memiliki pembagi b dan c sehingga $1 < b < 3$ dan $1 < c < 5$.

Selanjutnya, bilangan komposit yang lebih dari satu memiliki keterkaitan tersendiri dengan bilangan prima, yaitu sebagai berikut.

Teorema 2.2. Setiap bilangan bulat $m > 1$ dapat diekspresikan sebagai perkalian bilangan prima (mungkin hanya dengan satu faktor) (Niven dkk., 1991).

Bukti:

Misalkan m bilangan prima, maka m merupakan hasil kali dari satu faktor prima, yaitu dirinya sendiri. Misalkan m bukan prima, maka m dapat difaktorkan menjadi bilangan bulat lainnya, yaitu misalkan m_1 dan m_2 sehingga $m = m_1 m_2$ dimana $1 < m_1 < m$ dan $1 < m_2 < m$. Selanjutnya akan diperiksa untuk m_1 dan m_2. Jika m_1 dan m_2 prima, maka sudah ditemukan faktor primanya. Jika salah satunya bukan prima, maka dapat difaktorkan kembali menjadi bilangan bulat lainnya. Misalkan $m_1 = m_3 m_4$ dimana $1 < m_3, m_4 < m_1$. Proses penulisan setiap bilangan komposit yang muncul sebagai hasil perkalian factor-faktor harus diberhentikan, karena setiap faktor-faktornya lebih kecil dari bilangan komposit itu sendiri dan lebih dari 1. Dengan demikian, m dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan prima, dan karena faktor-faktor prima tersebut belum tentu berbeda, maka m dapat dituliskan dalam bentuk

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

dimana $p_1, p_2, \dots, p_k$ bilangan prima dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ bilangan bulat positif. Representasi pada teorema tersebut dikenal sebagai faktorisasi prima.

Setelah mempelajari terkait dengan bilangan prima, selanjutnya akan dibahas mengenai struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan suatu himpunan takkosong bersama satu atau lebih operasi biner yang terdefinisi di dalamnya (Andari, 2015). Beberapa struktur aljabar yang perlu dikenal adalah grup, ring, dan modul.

2.1.2 Himpunan Bilangan Bulat Modulo n

Pada subbab ini, diperkenalkan himpunan bilangan bulat modulo n, yang merupakan himpunan kelas-kelas residu modulo n. Untuk memulai, didefinisikan suatu relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai berikut.

Definisi 2.3. Misalkan diberikan n bilangan bulat positif tetap. Didefinisikan suatu relasi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu

$$a \sim b$$

jika dan hanya jika n membagi $b - a$. Dengan kata lain, $a \sim b$ jika selisih antara b dan a merupakan kelipatan dari n (Dummit & Foote, 2004).

Relasi ini bersifat reflektif, yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \sim a$. Selain itu, relasi ini juga bersifat simetris, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \sim b$ berlaku pula $b \sim a$. Jika $a \sim b$ dan $b \sim c$ maka n membagi $a - b$ dan n membagi $b - c$. Oleh karena itu, n juga membagi $(a - b) + (b - c) = a - c$ sehingga diperoleh $a \sim c$. Hal ini menunjukkan bahwa relasi bersifat transitif. Relasi yang demikian, disebut dengan relasi ekuivalensi (Dummit & Foote, 2004). Jika $a \sim b$ dapat ditulis dengan $a \equiv b (mod\, n)$. Untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$, kelas ekuivalensi dari a dapat dilambangkan dengan $\bar{a}$, yaitu kelas sisa dari a modulo n, mencakup semua bilangan bulat berbeda dari a dengan kelipatan integral dari n. Kelas sisa dari a secara matematis dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a, a \pm n, a \pm 2n, a \pm 3n, ..\} \end{aligned}$$

Terdapat kelas-kelas ekivalensi $mod\ n$ yang berbeda, yaitu

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$$

yang ditentukan oleh sisa-sisa yang mungkin setelah pembagian dengan n dan kelas residu ini membagi bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Selanjutnya, himpunan kelas ekivalensi dibawah relasi ekivalensi ini dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_n$.

Berikut diberikan contohnya.

Misalkan $n = 7$, maka $\mathbb{Z}_7$ merupakan himpunan kelas residu 7, yaitu

$$\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

Operasi yang berlaku pada himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$ adalah operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Operasi penjumlahan dalam $\mathbb{Z}_n$ merupakan penjumlahan kelas-kelas residu, yaitu untuk setiap kelas residu modulo n $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_n.$$

Sedangkan perkalian pada himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \in \mathbb{Z}_n.$$

Berikut ditunjukkan sifat-sifat aljabar operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$ memiliki sifat tertutup, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ hasil penjumlahan $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ juga merupakan elemen $\mathbb{Z}_n$. Demikian pula, operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_n$ memiliki sifat tertutup, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ hasil perkalian $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ juga merupakan elemen $\mathbb{Z}_n$. Dengan demikian, himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Selanjutnya, operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif, karena untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$, berlaku

$$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\overline{(a+b)}+\bar{c}$$

$$=\overline{(a+b)+c}$$

$$=\overline{a+(b+c)}$$

$$=\bar{a}+\overline{(b+c)}$$

$$=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$$

Operasi perkalian juga bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbb{Z}_n$, berlaku

$$\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\overline{(a\cdot b)}\cdot\bar{c}$$

$$=\overline{(a\cdot b)\cdot c}$$

$$=\overline{a\cdot(b\cdot c)}$$

$$=\bar{a}\cdot\overline{(b\cdot c)}$$

$$=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$$

Selain itu, operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$ bersifat komutatif, karena untuk setiap $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_n$, berlaku $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$. Operasi perkalian juga bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_n$, berlaku $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$. Dengan demikian, operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat asosiatif dan sifat komutatif pada himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$.

2.1.3 Grup dan Subgrup

Grup merupakan struktur aljabar yang paling sederhana, karena hanya dilengkapi dengan satu operasi biner. Untuk memperjelas, berikut adalah definisi struktur grup.

Definisi 2.4 Grup merupakan pasangan berurutan $(G,*)$ dengan G himpunan takkosong yang dilengkapi operasi biner $*$ dan memenuhi empat aksioma berikut.

1. Himpunan G tertutup terhadap operasi biner $*$

   $\forall g, h \in G\ ,\ g * h \in G$

2. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif di G

   $\forall g, h \in G, (g * h) * i = g * (h * i)$

3. Himpunan G memiliki elemen identitas

   $\exists e \in G, \forall g \in G\ ,\ e * g = g = g * e$

4. Setiap elemen di G mempunyai invers

   $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G\ ,\ g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$

(Gilbert & Gilbert, 2013).

Lebih lanjut, jika operasi biner $*$ yang berlaku pada struktur grup bersifat komutatif, maka struktur tersebut dikatakan grup abelian. Berikut diberikan contoh dari grup.

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abelian.

Perlu diketahui bahwa, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n-1}\}$. Berdasarkan pada subbab sebelumnya, $\mathbb{Z}_n$ tertutup terhadap operasi penjumlahan. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif dan bersifat komutatif. Perhatikan bahwa, terdapat elemen $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$ untuk setiap elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} + \bar{0}$. Dan setiap elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ terdapat $-\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_n$ yang dilengkapi oleh operasi penjumlahan merupakan grup abelian.

Selanjutnya, pada struktur grup memiliki himpunan bagian yang disebut dengan subgrup. Subgrup merupakan subhimpunan dari grup yang memenuhi grup dan dengan operasi yang sama dengan grup induknya, sebagaimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5. Himpunan takkosong H dan $H \subseteq G$ dikatakan subgrup jika dilengkapi dengan operasi yang sama dengan G. Himpunan H ini juga merupakan grup (Andari, 2015).

Menurut Gilbert & Gilbert (2013) subgrup dibagi menjadi dua, yaitu subgrup sejati dan subgrup tak sejati. Subgrup tak sejati dari suatu grup G meliputi himpunan elemen identitas dari grup dan grup itu sendiri. Dan subgrup sejati meliputi subgrup selain himpunan elemen identitas dan himpunan dari grup itu sendiri. Berikut contoh dari subgrup.

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan, yaitu $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. $(\mathbb{Z}, +)$ juga merupakan grup. Karena himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ subhimpunan dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan dengan operasi biner yang sama yaitu penjumlahan, maka dapat disimpulkan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup dari $(\mathbb{R}, +)$.

Teorema 2.6. Himpunan takkosong H dimana $H \subseteq G$ merupakan subgrup dari grup $(G,*)$ jika dan hanya jika memenuhi $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$ (Andari, 2015).

Bukti:

Misalkan $(G,*)$ merupakan grup, H subhimpunan dari G, dan $p, q \in H$.

Untuk membuktikan Teorema 2.5. akan dibuktikan dua arah, yaitu jika H merupakan subgrup dari G, maka $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$, dan jika $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$, maka H merupakan subgrup dari G.

1. Akan dibuktikan $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$

Ambil sebarang $g, h \in H$. Karena H subgrup dari G maka H merupakan grup pula. Karena $h \in H$ dan H merupakan grup maka $h^{-1} \in H$, Ksrena H grup, maka H tertutup, sehingga $g * h^{-1} \in H$. Dengan demikian terbukti $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$.

2. Akan dibuktikan H subgrup dari G.

   Berdasarkan yang telah diketahui, $\forall g, h \in H$ berlaku $g * h^{-1} \in H$. S. jika diambil $g, g \in H$ maka berlaku $g * g^{-1} = e \in H$. Selanjutnya, jika diambil $e, g \in H$, maka berlaku $e * g^{-1} = g^{-1} \in H$. Jadi, untuk setiap $g \in H$ terdapat $g^{-1} \in H$ sehingga $g * g^{-1} = e$. Demikian juga diambil $e, h \in H$, maka berlaku $e * h^{-1} = h^{-1} \in H$. Selanjutnya jika diambil $g, h^{-1} \in H$, maka berlaku $g * (h^{-1})^{-1} = g * h \in H$. Dari penjabaran tersebut, diperoleh $\forall g, h \in H$ berakibat $g * h \in H$ dan $\forall g \in H$ berakibat $g^{-1} \in H$

Berdasarkan poin 1 dan 2 maka Teorema 2.5 terbukti.

2.1.4 Ring dan Subring

Setelah memahami struktur grup, akan dibahas mengenai struktur aljabar lain yang merupakan perluasan dari grup, yaitu suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi atau sering disebut dengan ring sebagaimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.7. Himpunan takkosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yang dinotasikan dengan $+$ dan $\times$ atau dapat dituliskan $(R, +, \times)$ disebut dengan ring jika memenuhi kondisi berikut.

1. $(R, +)$ merupakan grup abelian

2. $(R,\times)$ memenuhi kondisi berikut.

   a. Himpunan R tertutup terhadap operasi $\times$

   b. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di himpunan R

3. Operasi kedua bersifat distributif terhadap operasi pertama, atau secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

   $\forall\, x, y, z \in R, (x + y)z = xy + yz$

   $\forall\, x, y, z \in R, x(y + z) = xy + xz$

(Andari, 2017).

Lebih lanjut, suatu ring dikatakan sebagai ring dengan elemen satuan jika himpunan R memiliki elemen identitas terhadap operasi kedua. Dan ring dikatakan sebagai ring komutatif jika operasi kedua memenuhi hukum komutatif pada himpunan (Adkins & Weintraub, 1995). Jika $(R,\times)$ memenuhi kedua kondisi tersebut, maka ring $(R, +,\times)$ disebut dengan ring komutatif dengan elemen satuan. Berikut diberikan contoh dari ring.

Diberikan $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, dan $\mathbb{Z}_7$ yang dilengkapi operasi penjumlahan, yaitu $(\mathbb{Z}_7, +)$ merupakan grup abelian. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_7$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian, yaitu $(\mathbb{Z}_7, +,\times)$ merupakan ring.

Penyelesaian.

1. Akan ditunjukkan operasi perkalian berlaku hukum asosiatif di himpunan $\mathbb{Z}_7$

   Diberikan sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_7$ dengan $\bar{a} = a + 7p$, $\bar{b} = b + 7q$, dan $\bar{c} = c + 7r$ dimana $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa,

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c} = [(a + 7p) \times (b + 7q)] \times \bar{c}$$

$$= [(a + 7p) \times (b + 7q)] \times (c + 7r)$$

$$= (a + 7p) \times (b + 7q) \times (c + 7r)$$

$$= (a + 7p) \times [(b + 7q) \times (c + 7r)]$$

$$= \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$$

karena $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, maka terbukti bahwa operasi perkalian bersifat asosiatif di himpunann $\mathbb{Z}_7$.

2. Akan ditunjukkan himpunan $\mathbb{Z}_7$ memenuhi hukum distributif.

   Diberikan sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_7$ dengan $\bar{a} = a + 7p$, $\bar{b} = b + 7q$, dan $\bar{c} = c + 7r$ dimana $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa,

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = [(a + 7p) + (b + 7q)] \times (c + 7r)$$

$$= [(a + b) + 7(p + q)] \times (c + 7r)$$

$$= (a + b)c + 7(a + b)r + 7(p + q)c + 7^2(p + q)r$$

$$= ac + bc + 7ar + +7br + 7pc + 7qc + 49pr + 49qr$$

$$= (ac + 7ar + 7pc + 49pr) + (bc + 7br + 7qc + 49qr)$$

$$= (a + 7p) \times (c + 7r) + (b + 7q) \times (c + 7r)$$

$$= \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = (a + 7p) \times [(b + 7q)(c + 7r)]$$

$$= (a + 7p) \times [(b + c) + 7(q + r)]$$

$$= a(b + c) + 7p(b + c) + 7a(q + r) + 7^2p(q + r)$$

$$= ab + ac + 7pb + 7pc + 7aq + 7ar + 49pq + 49pr$$

$$= (ab + 7pb + 7aq + 49pq) + (ac + 7pc + 7ar + 49pr)$$

$$= (a + 7p) \times (b + 7q) + (a + 7p) \times (c + 7r)$$

$$= \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

Berdasarkan poin 1 dan 2, maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_7, +, \times)$ merupakan ring.

Perhatikan bahwa, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan atau $(\mathbb{R},+,\times)$ merupakan suatu ring. Jelas bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ merupakan subhimpunan dari himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. $(\mathbb{Z},+,\times)$ merupakan subring dari $(\mathbb{R},+,\times)$, karena memenuhi ring dengan operasi yang sama. Namun, berbeda dengan $(\mathbb{N},+,\times)$ bukan merupakan subring dari $(\mathbb{R},+,\times)$ karena himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ tidak memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Hal ini menunjukkan bahwa tidak semua subhimpunan takkosong dari ring juga merupakan ring. Dengan demikian, terdapat struktur lain di dalam struktur ring yang dikenal sebagai subring.

Definisi 2.8. Misalkan diberikan ring $(R,+,\times)$ dan subhimpunan takkosong S dari R. Himpunan S dikatakan subring dari ring R jika S merupakan ring dengan operasi yang berlaku juga pada ring R (Andari, 2017).

Berikut diberikan contoh subring.

$(\mathbb{Z},+,\times)$ dan $(2\mathbb{Z},+,\times)$ merupakan ring. Karena himpunan bilangan genap $2\mathbb{Z}$ subhimpunan dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangat genap $2\mathbb{Z}$ dilengkapi oleh operasi yang sama dengan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, maka $(2\mathbb{Z},+,\times)$ merupakan subring dari $(\mathbb{Z},+,\times)$.

2.1.5 Ideal

Selain subring, terdapat struktur lain di dalam suatu ring yang melibatkan kondisi tambahan, yaitu ideal. Ideal tidak hanya memenuhi sifat-sifat subring, tetapi memiliki karakteristik lain terkait operasi perkalian dengan elemen-elemen dari ring induknya. Struktur ideal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9. Suatu ideal I merupakan suatu subhimpunan takkosong dari ring R yang memenuhi aksioma berikut.

1. $\forall\, p, q \in I$ berlaku $p - q \in I$
2. $\forall\, p \in I, r \in R$ berlaku $rp \in I$ dan $pr \in I$

(Wahyuni, 2016).

Berikut diberikan contoh untuk ideal.

Misalkan diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}. \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, kemudian $I = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal untuk $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$.

Penyelesaian.

1. Jelas bahwa himpunan I takkosong dan $I \subseteq \mathbb{Z}_6$.
2. Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in I$ maka berlaku $x - y \in I$.
   a. $\bar{0} - \bar{0} = \bar{0} \in I$
   b. $\bar{0} - \bar{3} = \bar{3} \in I$
   c. $\bar{3} - \bar{0} = \bar{3} \in I$
   d. $\bar{3} - \bar{3} = \bar{0} \in I$

   Terbukti untuk setiap $x, y \in I$ maka $x - y \in I$.
3. Akan ditunjukkan untuk setiap $x \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $xr \in I$.
   a. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{0} \cdot \bar{3} = \bar{0} \in I$
   b. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{1} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{1} \in I$
   c. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{2} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0} \in I$
   d. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{3} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{3} \in I$
   e. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{4} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0} \in I$
   f. $\bar{0}\,, \bar{3} \in I, \bar{5} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{5} \cdot \bar{0} = \bar{0} \in I$ dan $\bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{3} \in I$

Karena ring $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$ bersifat komutatif, maka berlaku pula untuk setiap $x \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $rx \in I$. Dengan demikian, terbukti untuk setiap $x \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $rx \in I$ dan $xr \in I$.

Jadi terbukti bahwa I= $\{\bar{0},\bar{3}\}$ merupakan ideal untuk $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$.

Setelah mempelajari struktur ring dan struktur lain dalam ring, terdapat struktur aljabar lain yang juga dilengkapi dengan dua operasi biner. Struktur ini merupakan struktur yang memiliki karakteristik yang lebih kuat dari ring. Struktur ini memungkinkan menjadi langkah awal dalam pemahaman struktur lainnya yang lebih kompleks.

2.1.6 Daerah Integral

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, daerah integral memiliki karakteristik yang lebih kuat dibandingkan dengan ring. Daerah integral merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, dimana elemen tak nol didalamnya tidak memiliki pembagi nol. Sebelum pada definisi daerah integral, terlebih dahulu mengetahui definisi pembagi nol, yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.10. Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Suatu elemen tak nol $x \in R$ disebut pembagi nol sejati jika dan hanya jika terdapat elemen tak nol $y \in R$ sehingga $xy = 0$ (Andari, 2017).

Berikut diberikan contoh dari pembagi nol.

Diberikan ring matriks

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$$

Akan ditunjukkan bahwa ring $(M,+,\times)$ memiliki pembagi nol sejati.

Penyelesaian.

Misalkan dipilih matriks $A \neq 0$ dan $B \neq 0$ dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena untuk matriks tak nol $A \in M$ terdapat $B \in M$ yang tak nol sehingga memenuhi $AB = 0 = BA$, maka terbukti bahwa ring M memiliki pembagi nol, yaitu matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Perhatikan bahwa jika diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $xy = 0$ maka diperoleh $x = 0$ atau $y = 0$. Namun, berbeda halnya jika berbicara pada ring $\mathbb{Z}_{10}$. Jika $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{10}$ dengan $\bar{x}.\bar{y} = \bar{0}$, maka dapat dimungkinkan mendapatkan $\bar{x} = \bar{2} \neq \bar{0}$ dan $\bar{y} = \bar{5} \neq \bar{0}$ sehingga $\bar{2}\,.\,\bar{5} = \bar{0}$. Dari kedua fenomena ini, dapat disimpulkan bahwa pada ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ tidak dapat ditemukan pembagi nol. Sedangkan pada ring himpunan $\mathbb{Z}_{10}$ dapat ditemukan pembagi nol. Dalam hal ini, ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol dikelompokkan menjadi struktur ring tersendiri, yaitu daerah integral (Wahyuni, 2016). Daerah integral didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.11. Ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak memiliki pembagi nol disebut dengan daerah integral (Gallian, 2016).

Sebagai contoh, ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan daerah integral. Hal ini dikarenakan pada himpunan $\mathbb{Z}$ tidak dapat ditemukan pembagi nol. Jika diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $xy = 0$ maka diperoleh $x = 0$ atau $y = 0$. Hal ini berarti ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ tidak memiliki pembagi nol. Akibatnya, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan daerah integral.

Selain daerah integral, terdapat jenis struktur ring lainnya, yaitu daerah ideal utama. Pada daerah integral, terdapat fenomena khusus yaitu jika setiap ideal dari daerah integral dibangun oleh satu elemen, maka daerah integral yang demikian disebut dengan daerah ideal utama (Wahyuni, 2016).

2.1.7 Daerah Ideal Utama

Pada subbab sebelumnya, telah dibahas mengenai ideal, pada subbab ini akan dibahas terlebih dahulu mengenai ideal yang lebih khusus, yaitu ideal utama. Istilah ideal utama muncul dari sifat daerah integral pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ (Wahyuni, 2016). Pada ring $\mathbb{Z}$, sebarang bilangan bulat k, $k\mathbb{Z}$ atau dapat didefinisikan sebagai $k\mathbb{Z} = \{kx | x \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal yang dibangun oleh satu elemen, yaitu $\{k\}$. Lebih sederhananya, ideal $k\mathbb{Z}$ dapat dihasilkan oleh elemen k. Untuk lebih jelasnya, ideal utama didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.12. Misalkan I ideal dari ring R. Ideal I disebut sebagai ideal utama atau ideal pokok jika terdapat $x \in R$ sehingga $I = \{xr | r \in R\}$ atau lebih sederhananya I dapat dihasilkan atau dibangun oleh satu elemen. Lebih lanjut, ideal utama I dapat dituliskan dengan notasi

$$I = \langle x \rangle = \{xr | r \in R\}$$

maka x disebut sebagai pembangun dari suatu ring R (Andari, 2017).

Berikut diberikan contoh dari ideal utama.

Misalkan diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \times)$ dimana $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$ dan ideal $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$. Akan ditunjukkan bahwa ideal A dibangun oleh $\overline{3}$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa, elemen-elemen pada ideal A dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} A &= \left\{\overline{3k} \middle| \overline{k} \in \mathbb{Z}_{12}\right\} \\ &= \langle \overline{3} \rangle \end{aligned}$$

Karena dapat ditemukan $\overline{3} \in \mathbb{Z}_{12}$ sehingga ideal A dapat dihasilkan dari elemen $\overline{3} \in \mathbb{Z}_{12}$, maka dapat dikatakan bahwa ideal A dibangun oleh $\overline{3}$.

Perlu diketahui, tidak semua ideal pada ring merupakan ideal utama. Pada ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, setiap idealnya merupakan ideal utama. Hal ini dikarenakan setiapa ideal pada ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$. Oleh karenanya, setiap ideal pada ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat dituliskan dalam bentuk $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\} = \langle n \rangle$. Namun, ideal $I = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ bukan merupakan ideal utama. Hal ini dikarenakan tidak dapat ditemukan elemen di $M_2(\mathbb{R})$ sehingga dapat membangun ideal I. Fenomena inilah yang menjadi motivasi definisi daerah ideal utama.

Definisi 2.13. Daerah ideal utama merupakan daerah integral yang setiap idealnya dibangun oleh satu elemen, atau setiap idealnya merupakan ideal utama (Wahyuni, 2016).

Contoh sederhana dari daerah ideal utama adalah $(\mathbb{Z}, +, \times)$. Sebelumnya telah dibahas bahwa setiap ideal di ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan ideal utama. Dan telah diketahui pula pada subbab sebelumnya bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan daerah integral. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan daerah ideal utama.

Pada daerah ideal utama, konsep elemen prima atau unsur prima memiliki peran penting dalam memahami struktur elemen di dalamnya. Konsep ini merupakan perluasan dari bilangan prima dalam bilangan bulat, tetapi berlaku pada domain yang lebih umum. Elemen prima berkaitan erat dengan struktur ideal utama dan dapat mendeskripsikan sifat faktorisasi unik dari elemen-elemen tak nol dan bukan elemen identitas dalam daerah ideal utama. Berikut diberikan definisi dari unsur prima dalam daerah integral.

Definisi 2.14. Misalkan R merupakan daerah integral. Elemen tak nol $p \in R$ disebut prima di R jika ideal $\langle p \rangle$ yang dibangun oleh p merupakan ideal prima. Dengan kata lain, elemen tak nol p merupakan elemen prima jika p bukan elemen identitas dan untuk setiap $a, b \in R$, jika $p|ab$ maka $p|a$ atau $p|b$ (Dummit & Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh untuk unsur prima di daerah integral.

Polinomial $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ adalah unsur prima karena tidak dapat difaktorkan lebih lanjut dalam doamain $\mathbb{Q}[x]$. Jika $x^2 + 1$ dapat difaktorkan, maka faktorisasi tersebut harus berupa dua polinomial berderajat satu dalam $\mathbb{Q}[x]$. Tetapi, polinomial $x^2 + 1 = (x - a)(x - b)$ untuk $a, b \in \mathbb{Q}$ tidak mungkin memiliki solusi karena $x^2 + 1 = 0$ tidak memiliki akar dalam bilangan rasional. Dengan demikian, $x^2 + 1$ tidak dapat difaktorkan lebih lanjut.

Pada teori grup, telah dikenal grup abelian yaitu himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi sifat komutatif. Pada teori ring, dapat ditemukan struktur yang lebih banyak dengan dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian). Akan tetapi, terdapat beberapa kasus yang tidak dapat ditangani oleh kedua teori ini seperti dalam mempertimbangkan tindakan elemen-elemen pada suatu ring terhadap himpunan. Oleh karenanya, terdapat struktur modul yang menggabungkan ide dari teori grup dan teori ring.

2.1.8 Modul

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, modul menggabungkan ide pada teori grup dan teori ring yang tidak hanya mempelajari operasi penjumlahan saja, tetapi juga bagaimana menganalisis elemen di ring dapat mengubah elemen pada modul dengan perkalian skalar.

Definisi 2.15. Diberikan ring $(R, +, \times)$ dengan elemen satuan.

1. $R -$ modul kiri atau modul kiri atas R merupakan grup abelian M yang dilengkapi dengan pemetaan perkalian skalar

   $$\circ : R \times M \to M$$

   yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

   a. $a \circ (m + n) = a \circ m + a \circ n$

   b. $(a + b) \circ m = a \circ m + b \circ n$

c. $(ab) \circ m = a \circ (bm)$

d. $1 \circ m = m$

untuk setiap $a, b \in R$ dan $m, n \in M$

2. $R -$ modul kanan atau modul kanan atas R merupakan grup abelian M yang dilengkapi dengan pemetaan perkalian skalar

$$\circ : M \times R \to M$$

yang memenuhi aksioma-aksioma berikut.

a. $(m + n) \circ a = m \circ a + n \circ a$

b. $m \circ (a + b) = m \circ a + m \circ b$

c. $m \circ (ab) = (ma) \circ b$

d. $m \circ 1 = m$

untuk setiap $a, b \in R$ dan $m, n \in M$

(Adkins & Weintraub, 1995).

Pada dasarnya modul kiri dan modul kanan sama, yang membedakan keduanya adalah perkalian terhadap skalarnya dari arah kiri atau kanan. Selanjutnya, pada penelitian ini akan berfokus pada R-modul kiri yang kemudian disebut dengan R-modul. Berikut diberikan contoh untuk R-modul.

Diberikan suatu ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dan grup abelian M, dimana

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} \middle| i, j, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

dengan perkalian skalar

$$\cdot : \mathbb{Z} \times M \to M$$

merupakan suatu $\mathbb{Z} -$ modul.

Penyelesaian.

Jelas bahwa M merupakan grup abelian. Kemudian dimisalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $P, Q \in M$ dengan $P = \begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} l & m \\ n & 0 \end{bmatrix}$ dimana $i, j, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z} -$ modul M memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $a(P + Q) = aP + aQ$

$$\begin{aligned} a(P + Q) &= a\left(\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & m \\ n & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= a\left(\begin{bmatrix} i + l & j + m \\ k + n & 0 + 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a(i + l) & a(j + m) \\ a(k + n) & a(0 + 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ai + al & aj + am \\ ak + an & a0 + a0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ai & aj \\ ak & a0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} al & am \\ an & a0 \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} l & m \\ n & 0 \end{bmatrix} \\ &= aP + aQ \end{aligned}$$

2. $(a + b)P = aP + bP$

$$\begin{aligned} (a + b)P &= (a + b)\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} \\ &=\cdot \begin{bmatrix} (a + b)i & (a + b)j \\ (a + b)k & (a + b)0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ai + bi & aj + bj \\ ak + bk & a0 + b0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ai & aj \\ ak & a0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bi & bj \\ bk & b0 \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix} \\ &= aP + bP \end{aligned}$$

3. $(ab)P = a(bP)$

$$(ab)P = (ab)\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ab)i & (ab)j \\ (ab)k & (ab)0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(bi) & a(bj) \\ a(bk) & a(b0) \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} bi & bj \\ bk & b0 \end{bmatrix}$$

$$= a\left(b\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= a(bP)$$

4. $1P = P$

$$1P = 1\begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1i & 1j \\ 1k & 1(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i & j \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

$$= P$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\mathbb{Z} - \text{modul } M$ merupakan suatu modul.

Jika pada grup dan ring terdapat subgrup dan subring, begitu pula pada modul, yang dikenal sebagai submodul sebagaimana didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.16. Himpunan bagian takkosong S dari R −modul M adalah submodul jika S merupakan subgrup dari M terhadap operasi yang sama pada M dan S merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan dengan operasi pergandaan pada R −modul M (Roman, 2008).

Berikut juga diberikan teorema syarat cukup dan perlu untuk menjadi submodul, yaitu sebagai berikut.

Teorema 2.17. Subhimpunan takkosong S dari R-modul M merupakan submodul jika dan hanya jika S tertutup terhadap kombinasi linier, yaitu

$$\forall\, \alpha, \beta \in R, u, v \in S \text{ berlaku } \alpha u + \beta v \in S$$

(Roman, 2008).

Teorema 2.18. Jika M_1 dan M_2 submodul dari M, maka $M_1 + M_2$ dan $M_1 \cap M_2$ merupakan submodul dari M (Roman, 2008).

Bukti.

Misalkan M_1 dan M_2 submodul dari M, kemudian akan ditunjukkan

1. $M_1 + M_2$ submodul di M
   a. Akan ditunjukkan $M_1 + M_2 \subseteq M$

      Ambil $u \in M_1 + M_2$, artinya $u = u_1 + u_2$ dengan $u_1 \in M_1 \subseteq M$ dan $u_2 \in M_2 \subseteq M$. Perhatikan bahwa karena M tertutup terhadap operasi penjumlahan maka

      $$u = u_1 + u_2 \in M$$

      Jadi, $M_1 + M_2 \in M$.
   b. Akan ditunjukkan $M_1 + M_2$ takkosong.

      Berdasarkan yang telah diketahui, M_1 dan M_2 merupakan submodul dari M. Hal ini mengakibatkan M_1 dan M_2 merupakan modul. Pilih $0 \in M_1$ dan $0 \in M_2$, sehingga diperoleh

      $$0 = 0 + 0 \in M_1 + M_2$$

      Jadi, $M_1 + M_2 \neq \emptyset$.
   c. Akan ditunjukkan syarat cukup dan perlu untuk suatu submodul.

Ambil $\alpha, \beta \in R$ dan $u, v \in M_1 + M_2$. Artinya $u = u_1 + u_2$ dimana $u_1 \in M_1$ dan $u_2 \in M_2$ serta $v = v_1 + v_2$ dimana $v_1 \in M_1$dan $v_2 \in M_2$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v &= \alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) \\ &= \alpha u_1 + \alpha u_2 + \beta v_1 + \beta v_2 \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2)\end{aligned}$$

Karena $u_1, v_1 \in M_1$ dan $u_2, v_2 \in M_2$ maka $\alpha u_1, \beta v_2 \in M_1$ dan $\alpha u_2, \beta v_2 \in M_2$. Akibatnya, $\alpha u_1 + \beta v_1 \in M_1$ dan $\alpha u_2 + \beta v_2 \in M_2$ sehingga $(\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_2 + \beta v_2) \in M_1 + M_2$.

Jadi, $M_1 + M_2$ submodul dari M.

Berdasarkan uraian dari a-c, maka terbukti bahwa $M_1 + M_2$ submodul dari M.

2. $M_1 \cap M_2$
   a. Akan ditunjukkan $M_1 \cap M_2 \subseteq M$

      Ambil $u \in M_1 \cap M_2$, artinya $u \in M_1$ dan $u \in M_2$. Karena $M_1 \subseteq M$ dan $M_2 \subseteq M$ maka $u \in M$.

      Jadi, $M_1 \cap M_2 \subseteq M$.
   b. Akan ditunjukkan $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$

      Pilih $0 \in M_1$ dan $0 \in M_2$, sehingga $M_1 \cap M_2 = 0$.

      Jadi, $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.
   c. Akan ditunjukkan syarat cukup dan perlu untuk suatu submodul.

      Ambil $\alpha, \beta \in R$ dan $u, v \in M_1 \cap M_2$. $u \in M_1 \cap M_2$ artinya $u \in M_1$ dan $u \in M_2$ serta $v \in M_1 \cap M_2$ artinya $v \in M_1$ dan $v \in M_2$. Berdasarkan yang telah diketahui, M_1 submodul dari M dan $u, v \in M_1$ maka

$$\alpha u + \beta v \in M_1 \qquad (2.1)$$

Berdasarkan yang diketahui, M_2 submodul dari M dan $u, v \in M_2$ maka

$$\alpha u + \beta v \in M_2 \qquad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$\alpha u + \beta v \in M_1 \cap M_2$$

Berdasarkan uraian dari a-c, maka terbukti bahwa $M_1 + M_2$ submodul dari M.

Berikut diberikan contoh dari submodul.

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat dipandang sebagai $\mathbb{Z}$ −modul. Pada subbab-subbab sebelumnya telah diketahui bahwa subhimpunan $n\mathbb{Z} = \{np | p \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan merupakan subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$. Oleh karenanya dengan mudah dapat disimpulkan bahwa himpunan bilangan bulat kelipatan n $n\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari himpunan bilangan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}-$ modul.

Setelah mengenal konsep struktur modul secara umum sebagai fondasi utama dalam teori modul, pembahasan akan dilanjutkan dengan mengeksplorasi berbagai struktur lain pada modul. Beberapa struktur penting yang akan dibahas meliputi modul primer, modul bebas, modul torsi, dan beberapa konsep-konsep yang terkait dalam struktur modul.

2.1.7.1 Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$

Sebelum lanjut pada pembahasan, akan dibahas terlebih dahulu mengenai contoh lain terkait modul atas ring. Pada subbab sebelumnya telah dibahas bahwa $\mathbb{Z}_n$ yang dilengkapi oleh operasi penjumlahan merupakan grup abelian. Selanjutnya, akan dibentuk modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dengan menambahkan perkalian skalar dengan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu

$$\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n.$$

Operasi perkalian skalar dilakukan dengan bilangan bulat pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ dan suatu scalar $k \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$k \circ \bar{a} = \overline{ka}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ memenuhi aksioma-aksioma pada modul, yaitu sebagai berikut.

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku,

1. $a \circ (\bar{x} + \bar{y}) = a \circ \bar{x} + a \circ \bar{y}$

   Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} a \circ (\bar{x} + \bar{y}) &= a \circ \overline{(x + y)} \\ &= \overline{a(x + y)} \\ &= \overline{ax + ay} \\ &= \overline{ax} + \overline{ay} \\ &= a \circ \bar{x} + a \circ \bar{y} \end{aligned}$$

2. $(a + b) \circ \bar{x} = a \circ \bar{x} + b \circ \bar{x}$

   Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} (a + b) \circ \bar{x} &= \overline{(a + b)x} \\ &= \overline{ax + bx} \\ &= \overline{ax} + \overline{bx} \\ &= a \circ \bar{x} + b \circ \bar{x} \end{aligned}$$

3. $(ab) \circ \bar{x} = a \circ (b \circ \bar{x})$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(ab) \circ \bar{x} &= \overline{(ab)x} \\ &= \overline{a(bx)} \\ &= a \circ \overline{bx} \\ &= a \circ (b \circ \bar{x})\end{aligned}$$

4. $1 \circ \bar{x} = \bar{x}$

   Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}1 \circ \bar{x} &= \overline{1x} \\ &= \bar{x}\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian 1-4, terlihat bahwa $\mathbb{Z}_n$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul memenuhi aksioma-aksioma modul.

2.1.7.2 Annihilator

Setelah mengenal mengenai submodul, terdapat beberapa kasus dimana elemen-elemen ring yang ketika dikalikan dengan elemen tertentu pada modul selalu menghasilkan nol. Sebagai contoh pada modul $2\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$ dimana $2\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan genap. Perhatikan bahwa jika $2, 3 \in \mathbb{Z}$ dikalikan dengan $8 \in 2\mathbb{Z}$, maka $2 \cdot 8 = 16 \in 2\mathbb{Z}$ dan $3 \cdot 8 = 24 \in 2\mathbb{Z}$. Namun, jika diambil $0 \in \mathbb{Z}$ dikalikan dengan sebarang elemen $z = 2k \in 2\mathbb{Z}$ menghasilkan 0. Fenomena ini yang membawa pada konsep annihilator yang merupakan himpunan elemen-elemen ring yang dapat mengenolkan sebarang elemen di modul. Annihilator didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.19. Annihilator dari elemen $x \in M$ sebagai R −modul adalah

$$ann(x) = \{r \in R | rx = 0\}$$

dan annihilator dari submodul S dari M adalah

$$ann(S) = \{r \in R | rS = \{0\}\}$$

dimana $rS = \{rs | s \in S\}$ (Roman, 2008).

Sebagai contoh dari annihilator adalah misalkan diberikan modul $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}_6 -$ modul. Annihilator dari $\overline{3} \in \mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}_6$ $-$modul adalah

$$ann_{\mathbb{Z}_6}(\overline{3}) = \{r \in \mathbb{Z}_6 | r\overline{3} = 0\} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$$

2.1.7.3 Modul Primer

Pada subbab ini akan dibahas mengenai modul primer. Modul primer merupakan modul yang memiliki order perpangkatan dari bilangan prima. Untuk lebih jelasnya, modul primer didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.20. Misalkan diberikan R daerah integral dan p merupakan unsur prima di R. Suatu R-modul M disebut modul primer (p-primer) jika $ann(M)$ adalah perpangkatan dari p (Adkins & Weintraub, 1995).

Berikut diberikan contoh dari modul primer.

Himpunan bilangan bulat modulo 4, yaitu $\mathbb{Z}_4$ yang dipandang sebagai $\mathbb{Z}$-modul merupakan modul primer. Hal ini dikarenakan annihilator dari $\mathbb{Z}_4$ dibangun oleh perpangkatan dari bilangan prima $p = 2$. Untuk lebih jelasnya, perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned} ann(\mathbb{Z}_4) &= 4\mathbb{Z} \\ &= \langle 4 \rangle \\ &= \langle 2^2 \rangle \end{aligned}$$

Karena $ann(\mathbb{Z}_4) = \langle 2^2 \rangle$, maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan suatu modul $2 - primer$.

2.1.7.4 Modul Bebas

Pada subbab ini akan dibahas mengenai modul bebas. Sebelum mengenal modul bebas, terlebih dahulu akan dibahas mengenai himpunan pembangun pada modul dan modul yang bebas linier. Berikut didefinisikan himpunan pembangun dari suatu modul.

Definisi 2.21. Modul yang dibangun oleh subhimpunan S dari modul M adalah himpunan semua kombinasi linier dari elemen di S, atau dapat ditulis dengan

$$\langle S \rangle = \{r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n \mid r_i \in R, u_i \in S\}$$

Subhimpunan $S \subseteq M$ disebut pembangun M atau $M = \langle S \rangle$ (Roman, 2008).

Berikut diberikan contoh dari himpunan pembangun.

Misalkan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul dan subhimpunan $S = \{3,6,9,12\} \subseteq \mathbb{Z}$. Pada subbab-subbab sebelumnya dapat dilihat bahwa submodul dari himpunan bilangam bulat $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$. Hal ini berarti submodul-submodul dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang memuat himpunan S adalah himpunan bilangan bulat kelipatan tiga $3\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$. Oleh karena itu, submodul yang dihasilkan oleh S adalah himpunan bilangan bulat kelipatan tiga, yaitu $3\mathbb{Z}$.

Kemudian didefinisikan pula untuk modul yang bebas linier, yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.22. Misalkan M adalah R −modul, dan S himpunan bagian M. Himpunan S dikatakan bebas linier jika untuk setiap $r_i \in R$ dan $v_i \in S$ untuk semua memenuhi

$$r_1v_1 + \cdots + r_nv_n = 0 \text{ maka } r_i = 0 \text{ untuk semua } i = 1,2, \ldots, n$$

(Roman, 2008).

Berikut diberikan contoh untuk himpunan yang bebas linier. Misalkan diberikan himpunan $A = \{(0,1), (1,0)\}$ di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z} -$ modul. Perhatikan bahwa,

$$r_1(0,1) + r_2(1,0) = (0,0)$$

$$(0, r_1) + (r_2, 0) = (0,0)$$

$$(r_2, r_1) = (0,0)$$

sehingga diperoleh $r_1 = 0$ dan $r_2 = 0$ dan berakibat $r_1(0,1) + r_2(1,0) = (0,0)$. Dengan demikian, himpunan A bebas linier.

Setelah mengenal himpunan yang membangun dan bebas linier pada modul, selanjutnya akan didefinisikan modul bebas. Modul bebas merupakan modul yang memiliki basis, yaitu subhimpunan yang bebas linier dan membangun.

Definisi 2.23. Misalkan diberikan modul N atas R. Subhimpunan $B \subseteq N$ disebut suatu basis bagi N jika B bebas linier dan membangun N. N dikatakan R −modul bebas jika $N = \{0\}$ atau dalam arti himpunan N memiliki basis (Roman, 2008).

Sebagai contoh dari modul bebas yaitu setiap ring komutatif dengan elemen satuan dan jika R adalah daerah integral, R adalah R −modul bebas dengan basis $\{1\}$.

2.1.7.5 Modul Torsi

Pada subbab sebelumnya telah diketahui bahwa himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral, sehingga tidak dapat ditemukan pembagi nol. Namun, berbeda pada $\mathbb{Z}_{15}$ yang dipandang sebagai $\mathbb{Z}$ modul, dimana dapat ditemukan $3 \in \mathbb{Z}$ dan $\bar{5} \in \mathbb{Z}_{15}$ sehingga mengakibatkan $3 \cdot \bar{5} = \bar{0}$. Elemen-elemen yang mengakibatkan hasil perkaliannya dengan elemen di modul menjadi nol disebut elemen torsi. Untuk memperjelas, berikut definisi modul torsi.

Definisi 2.24. Unsur tak nol $v \in M$ sebagai suatu R −modul disebut unsur torsi jika ada unsur tak nol $r \in R$ sehingga $rv = 0$. Modul dikatakan modul bebas torsi jika tidak memiliki unsur torsi. Modul torsi adalah modul yang setiap unsur tak nolnya merupakan unsur torsi. Gabungan dari semua unsur torsi dan unsur $\{0\}$ dilambangkan dengan M_{tor}, atau dapat ditulis dengan

$$M_{tor} = \{0\} \cup \{v \in M | v \text{ unsur torsi}\}$$

(Roman, 2008).

Lebih lanjut, modul yang tidak memiliki unsur torsi disebut dengan modul bebas torsi.

Contoh dari modul torsi adalah $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}_7$, karena setiap unsur tak nol di $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dikalikan dengan $0 \neq 7 \in \mathbb{Z}$ menghasilkan $0 \in \mathbb{Z}_7$.

2.1.7.6 Modul atas Daerah Ideal Utama

Pada subbab-subbab sebelumnya telah mengenal berbagai macam struktur modul. Pada subbab ini akan dibahas struktur modul yang lebih kompleks, yaitu struktur modul atas daerah ideal utama.

Definisi 2.25. Misalkan R adalah daerah ideal utama dan M merupakan R-modul. Jika N submodul dari M, maka setiap pembangun dari $ann(N)$ disebut sebagai order dari N. Sedangkan orde dari $v \in M$ adalah orde dari submodul $\langle v \rangle$ (Roman, 2008).

Berikut diberikan contoh order.

Misalkan diberikan $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, dan $N = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$. Annihilator dari N adalah himpunan unsur di $\mathbb{Z}$ yang mengenolkan setiap elemen pada N, yaitu $3 \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, annihilator dari N adalah ideal yang dibangun oleh 3, yaitu $ann(N) = \langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z}$.

Setelah memahami konsep order dari suatu submodul dan peran annihilator dalam mendeskripsikan elemen-elemen yang mengenolkan submodul dapat dilihat sifat khusus yang muncul dalam modul dengan elemen torsi. Elemen torsi merupakan elemen yang memiliki annihilator bukan nol. Namun, terdapat struktur modul dimana satu-satunya elemen yang memiliki annihilator nol, yaitu elemen nol itu sendiri. Untuk lebih jelasnya, struktur yang demikian didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.26. Misalkan R daerah ideal utama dan M merupakan R-modul. Jika unsur torsi pada M hanyalah unsur 0, maka M disebut sebagai modul bebas torsi (Wardhana, 2022).

Contoh dari modul bebas torsi adalah $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Karena tidak ditemukan unsur tak nol $r, v \in \mathbb{Z}$ sehingga $rv = 0$.

2.1.7.7 Jumlah Langsung

Pada subbab ini akan dibahas mengenai jumlah langsung suatu modul dari submodul-submodulnya. Jumlah langsung didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.27. Suatu modul M atas R $-$modul merupakan jumlah langsung (dalam) dari suatu kumpulan $\mathcal{H} = \{S_i | i \in I\}$ dari submodul di M, ditulis

$$M = \bigoplus \mathcal{H} \; atau \; M = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. M merupakan jumlah dari himpunan $\mathcal{H}$

$$V = \sum_{i \in I} S_i$$

2. Uuntuk setiap $i \in I$, berlaku

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$$

(Roman, 2008).

Pada kasus ini, setiap S_i dikatakan sebagai *direct summand* dari M. Jika $\mathcal{H} = \{S_1, \dots, S_n\}$ merupakan kumpulan yang berhingga, maka *direct sum* juga dapat dituliskan dengan

$$M = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$$

Dengan demikian, jika $M = S \oplus T$, maka S dikatakan sebagai terkomplemen dan T dikatakan sebagai komplemen dari S di M (Roman, 2008).

Berikut diberikan contoh untuk jumlah langsung dari suatu modul.

Misalkan diberikan modul $M = \mathbb{Z}_6$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$, submodul $S_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan penjumlahan langsung dari $\mathbb{Z}_6$. Hal ini dikarenakan terdapat submodul $S_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ sedemikian sehingga $S_1 + S_2 = \mathbb{Z}_6$ dan $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$. Dengan demikian, modul M dapat dituliskan sebagai jumlah langsung dari submodul S_1 dan S_2 atau dapat dituliskan sebagai

$$M = S_1 \oplus S_2$$

2.1.7.8 Dekomposisi Modul

Dekomposisi secara bahasa berarti suatu proses penguraian menjadi bentuk yang lebih sederhana (Kemendikbud, 2016). Dekomposisi modul berarti menguraikan atau memecah struktur modul menjadi bentuk yang lebih sederhana, yaitu submodul. Suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis, sebagaimana pada teorema berikut.

Teorema 2.28. Misalkan diberikan modul $M \neq 0$ yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R. Jika $\mu(M) = n$ atau bilangan terkecil yang membangun $R - modul\ M$ adalah n, maka M isomorfik ke jumlah langsung submodul-submodul siklik

$$M \cong Rw_1 \oplus Rw_2 \oplus \ldots \oplus Rw_n$$

sehingga memenuhi

$$R \neq ann(w_1) \supseteq ann(w_2) \supseteq \cdots \supseteq ann(w_n) = ann(M)$$

(Adkins & Weintraub, 1995).

Terdapat beberapa langkah dalam mendekomposisikan modul tersebut. Langkah pertama dalam mendekomposisikannya adalah dengan memecah modul menjadi modul bebas dan modul torsi, sebagaimana teorema berikut.

Teorema 2.29. Jika M merupakan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R, maka

$$M = M_{tor} \oplus M_{free}$$

dimana M_{free} merupakan submodul bebas dari M dan M_{tor} merupakan submodul torsi dari M (Wardhana, 2022).

Lebih lanjut, submodul bebas dengan suatu basisnya misalkan $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ maka dapat menuliskan modul M dalam bentuk jumlah langsung

$$M = \langle w_1 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle w_n \rangle \oplus M_{tor}$$

dimana submodul siklik $\langle w_i \rangle$ memiliki annihilator nol (Roman, 2008).

Sedangkan modul torsi atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi submodul-submodul primer.

2.2 Kajian Topik dengan Al-Qur'an

Dekomposisi secara bahasa diartikan sebagai suatu proses penguraian menjadi bentuk yang lebih sederhana (Kemendikbud, 2016). Pada penelitian ini, dekomposisi diterapkan pada struktur modul, yaitu mendekomposisikan modul $\mathbb{Z}_n$ menjadi submodul-submodul siklis. Tujuan dari dekomposisi ini adalah untuk dapat melihat sifat struktur modul dan keterkaitan antara submodul-submodulnya. Setiap submodul ini jika disatukan akan membentuk suatu kesatuan struktur modul. Konsep dekomposisi tidak hanya digunakan pada matematika, tetapi juga dalam konteks spiritual, sebagaimana firman Allah SWT pada Q.S Al-Bayyinah ayat 6-7 yang memecah golongan manusia berdasarkan keimanan dan amal perbuatannya. Dalam firman tersebut manusia terbagi menjadi dua golongan, yakni golongan orang-orang kafir dan orang-orang yang beriman serta beramal saleh.

Konsep amal saleh yang dijelaskan pada ayat tersebut tidak hanya menunjukkan keutamaan manusia sebagai makhluk terbaik, tetapi juga menunjukkan bagaimana keteraturan dan keselarasan kehidupan tercipta melalui amal dan iman. Allah SWT mengapresiasi amal-amal tersebut dengan rahmat dan pahala berupa surga dan kedudukan mulia. Rahmat Allah SWT ini dijelaskan lebih luas dalam firman-Nya Q.S Al-Fatihah ayat 1 melalui sifat-Nya sebagai Ar-Rahman dan Ar-Rahim (Kemenag, 2024).

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ ﴿١﴾

Artinya: *"Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang"*

Firman Allah SWT ini mengandung makna mendalam tentang kasih sayang dan kekuasaan Allah SWT. Wahyu tersebut menegaskan bahwa setiap aktivitas hendaknya dimulai dengan menyebut nama Allah SWT. Hal ini dilakukan sebagai wujud ketergantungan dan kesadaran manusia terhadap kekuasaan-Nya. Dengan mengucapkan kalimat basmalah menunjukkan bahwa seseorang menyerahkan segala urusannya kepada Allah SWT. Para ulama' menyebutkan bahwa dalam memulai suatu pekerjaan diharapkan pekerjaan tersebut dapat kekal disisi Allah SWT, yang diharapkan kekal disini adalah pahala, dengan begitu dapat diraih di hari kiamat (Shihab, 2000).

Sifat Allah SWT Ar-Rahman dan Ar-Rahim pada firman ini menunjukkan betapa luasnya kasih sayang Allah SWT kepada hamba-Nya. Ar-Rahman merujuk pada kasih sayang Allah SWT secara umum dan mencakup seluruh makhluk-Nya tanpa terkecuali, baik yang beriman maupun tidak beriman. Rahmat ini diberikan oleh Allah SWT sebagai bentuk kemurahan Allah SWT pada semua makhluk-Nya. Setiap makhluk hidup, meliputi manusia, hewan, dan tumbuhan merasakan rahmat ini dalam bentuk rezeki, kesehatan, udara, dan segala kenimatan hidup. Meskipun seseorang berada dalam kekufuran dan maksiat, rahmat Ar-Rahman tetap menyentuhnya selama ia hidup.inilah bentuk kasih sayang yang tidak terbatasi oleh kondisi dan perbuatan manusia. Sebagai contoh, orang kafir yang tidak mempercayai atau mengimani Allah SWT juga mendapatkan rahmat Ar-Rahman sekalipun dapat menikmati harta, keberhasilan, dan kenikmatan dunia. Hal ini menunjukkan bahwa rahmat Allah SWT mencakup seluruh makhluk tanpa kecuali. Akan tetapi, rahmat ini hanya berlaku dalam kehidupan dunia, rahmat Ar-Rahman ini tidak berlanjut jika kehidupan dunia telah berakhir bagi mereka yang tidak beriman dan menolak kebenaran. Dengan demikian, rahmat Ar-Rahman Allah SWT meliputi keseluruhan makhluk bersifat sementara di dunia. Sedangkan yang kekal adalah sifat Ar-Rahim Allah SWT sampai di kehidupan selanjutnya (Shihab, 2000).

Rahmat Rahim Allah SWT hanya dapat dinikmati di kehidupan akhirat. Sifat Ar-Rahim Allah SWT menggambarkan kasih sayang Allah SWT yang bersifat khusus yang hanya diberikan kepada orang-orang yang beriman dan taat kepada-Nya. Kasih sayang ini meliputi petunjuk atau hidayah, ketenangan jiwa, ampunan dosa, dan perlindungan Allah SWT dalam menghadapi kesulitan hidup. Berbeda dengan rahmat Ar-Rahman, rahmat Ar-Rahim hanya diberikan kepada mereka yang berusaha mendekatkan diri kepada Allah SWT dengan iman dan amal saleh. Oleh karena itu, rahmat Ar-Rahim Allah SWT bersifat lebih khusus, sebagai bentuk kasih sayang Allah SWT yang paling sempurna dan hanya didapatkan oleh mereka yang mendapatkan ridho-Nya. Rahmat inilah yang dinantikan di hari kiamat kelak, berupa keselamatan akan siksa neraka dan kenikmatan surga bagi mereka yang disebut dengan sebaik-baiknya makhluk pada Q.S Al-Bayyinah ayat 7. Sifat Ar-Rahim memberikan jaminan bahwa hamba yang taat tidak hanya akan memperoleh kebaikan di dunia, tetapi juga di akhirat.

Sifat Ar-Rahman dan Ar-Rahim Allah SWT memperlihatkan betapa luas dan adilnya kasih sayang-Nya dalam mengatur kehidupan makhluk-Nya. Rahmat-Nya tidak terbatas pada orang-orang yang beriman, melainkan menjangkau seluruh makhluk tanpa terkecuali sebagai bentuk kemurahan-Nya. Akan tetapi, ketika kehidupan dunia berakhir hanya mereka yang beriman yang mendapatkan rahmat khusus di akhirat. Konsep inilah yang ditegaskan kembali pada firman yang lain, yaitu Q.S Al-Mukminun ayat 109-110 (Kemenag, 2024).

اِنَّهٗ كَانَ فَرِيْقٌ مِّنْ عِبَادِيْ يَقُوْلُوْنَ رَبَّنَآ اٰمَنَّا فَاغْفِرْلَنَاوَارْحَمْنَاوَاَنْتَ خَيْرُ الرّٰحِمِيْنَ ۚ ﴿١٠٩﴾ فَاتَّخَذْتُمُوْهُمْ
سِخْرِيًّا حَتّٰٓى اَنْسَوْكُمْ ذِكْرِيْ وَكُنْتُمْ مِّنْهُمْ تَضْحَكُوْنَ ﴿١١٠﴾

Artinya: *“Sesungguhnya segolongan dari hamba-hamba-Ku berdoa, “Ya Tuhan kami, kami telah beriman, maka ampunilah kami dan berilah kami rahmat. Engkau adalah sebaik-baik pemberi rahmat.”(109) Lalu, kamu jadikan mereka bahan ejekan sehingga itu membuatmu lupa mengingat-Ku dan kamu (selalu) menertawakan mereka”*

Pada firman Allah SWT tersebut diperlihatkan dua golongan manusia, yaitu orang-orang beriman yang selalu memohon rahmat dan ampunan serta orang-orang kafir yang mengejek dan meremehkan mereka. Pada ayat 109 ditunjukkan bahwa di dunia terdapat hamba-hamba Allah SWT yang beriman dan memohon ampunan serta rahmat-Nya. Mereka tidak hanya mengakui keimanan dengan lisan, tetapi juga memohon ampunan dan rahmat dari Allah SWT. Hal ini menunjukkan bahwa mereka memahami bahwa iman saja tidak cukup tanpa ampunan dan rahmat Allah SWT. Permohonan dalam ayat ini mengisyaratkan kesadaran bahwa meskipun telah beriman dan berbuat baik, manusia tetap rentan melakukan dosa dan kesalahan. Mereka mengandalkan kasih sayang Allah dengan penuh kesadaran bahwa hanya dengan iman dan ampunan Allah SWT mereka dapat selamat. Doa-doa yang dipanjatkan tersebut menjadi cerminan ketaatan dan harapan untuk mendapatkan rahmat Allah SWT yang berlanjut di kehidupan akhirat. Selain itu, penyebutan "Engkau (Allah SWT) adalah sebaik-baiknya pemberi rahmat" menunjukkan pengakuan terhadap kesempurnaan kasih sayang Allah SWT. Hal ini menekankan betapa pentingnya rahmat Ar-Rahim yang bersifat khusus bagi orang yang beriman dan berlanjut di kehidupan akhirat.

Pada ayat selanjutnya dijelaskan orang-orang munafik, yaitu mereka yang mengejek dan merendahkan orang beriman. Ejekan tersebut menunjukkan keangkuhan dan kesombongan mereka karena merasa lebih tinggi dari segi status sosial, kekayaan, atau keyakinan. Akibat dari mereka yang sering mengejek dan menertawakan orang beriman, mereka lalai dari mengingat Allah SWT dan semakin jauh dari petunjuk yang Allah SWT berikan. Kaum kafir menjadi lalai dan terasing dari kebenaran karena memusuhi ajaran Islam dengan mengejek kaum yang menganutnya (Shihab, 2002c). Sikap mereka ini menunjukkan tidak hanya merendahkan manusia, tetapi juga penghinaan secara tidak langsung pada ajaran Allah SWT. Hal ini menunjukkan bahwa mereka terlena dengan kehidupan duniawi dan mengabaikan konsekuensi kehidupan di akhirat. Akhirnya, mereka menyesal karena rahmat Allah SWT di akhirat hanya diberikan pada orang-orang beriman. Sedangkan bagi mereka yang menolak atas kebenaran risalah Islam terhalang dari rahmat Ar-Rahim Allah SWT.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada penelitian ini, digunakan teorema untuk mendekomposisikan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$, yaitu sebagai berikut.

Teorema 2.30. Misalkan diberikan modul torsi M atas daerah ideal utama R yang memiliki order

$$\mu = p_1^{e_i} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$$

dimana p_i merupakan bilangan prima berbeda dan tidak saling terkait di R. M dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung

$$M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$$

dimana

$$M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} M = \{v \in M | p_i^{e_i} \cdot v = 0\}$$

merupakan submodul primer yang memiliki order $p_i^{e_i}$. Dekomposisi pada modul M ini disebut dengan dekomposisi primer dari M (Roman, 2008).

Pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang diterapkan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur merupakan proses sistematis untuk mengumpulkan, meninjau, dan menganalisis informasi dari berbagai sumber yang relevan dengan topik penelitian (Creswell & Creswell, 2003). Penelitian ini dilakukan dengan menganalisis berbagai sumber literatur seperti artikel, buku dan lain-lain yang membahas tentang dekomposisi modul, khususnya pada dekomposisi primer modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan oleh peneliti sebelum menulis penelitian ini adalah :

1. Mempelajari konsep dasar dari ring.
2. Mempelajari konsep dasar modul atas ring.
3. Mempelajari dan memahami konsep yang berhubungan dengan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$.
4. Mempelajari mengenai konsep dekomposisi primer pada modul.

3.3 Tahap Penelitian

Pada penelitian ini akan dilakukan beberapa langkah, yaitu:

1. Melengkapi pembuktian teorema dekomposisi primer dari modul torsi.

2. Menunjukkan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul torsi atas daerah ideal utama.
3. Mengidentifikasi langkah-langkah mendekomposisikan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ berdasarkan teorema dekomposisi primer.
   a. Menentukan annihilator dari modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$.
   b. Menentukan order μ dari modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dan menentukan faktorisasi prima dari μ sebagai $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ dimana $p_1, p_2, \dots, p_k$ merupakan bilangan prima berbeda di himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.
   c. Menentukan submodul-submodul primer dari modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$, yaitu $M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}} \mathbb{Z}_n, M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}} \mathbb{Z}_n, \dots, M_{p_k} = \frac{\mu}{p_k^{e_k}} \mathbb{Z}_n$
   d. Menyimpulkan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu $\mathbb{Z}_n = \frac{\mu}{p_1^{e_1}} \mathbb{Z}_n \oplus \frac{\mu}{p_2^{e_2}} \mathbb{Z}_n \oplus \dots \oplus \frac{\mu}{p_k^{e_k}} \mathbb{Z}_n$.

.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini terlebih dahulu akan dipaparkan teorema dekomposisi primer yang akan digunakan untuk mendekomposisikan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebgaai jumlah langsung submodul-submodul primer. Pada subbab selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul torsi atas daerah ideal utama. Kemudian dilanjutkan dengan menjabarkan proses dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer untuk beberapa n tertentu yang kemudian dapat dilihat hasil jumlah langsung submodul-submodul primer dari modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ secara umum.

4.1 Teorema Dekomposisi Primer

Pada subbab ini akan dipaparkan teorema dekomposisi primer. Teorema ini selanjutnya diterapkan untuk mendekomposisikan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer, sebagaimana terangkum pada teorema berikut.

Teorema 4.1. Misalkan diberikan modul torsi M atas daerah ideal utama R yang memiliki order

$$\mu = p_1^{e_i} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

dimana p_i merupakan unsur prima berbeda di R. M dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung

$$M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_k}$$

dimana

$$M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} M = \{v \in M | p_i^{e_i} \cdot v = 0\}$$

merupakan submodul primer yang memiliki order $p_i^{e_i}$. Dekomposisi pada modul M ini disebut dengan dekomposisi primer dari M (Roman, 2008).

Bukti:

Pada teorema tersebut diberikan bahwa modul M merupakan modul torsi atas daerah ideal utama R yang memiliki orde $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n}$, dimana p_i merupakan unsur prima dan e_i merupakan bilangan bulat positif. Dalam pembuktian teorema dekomposisi primer, akan ditunjukkan beberapa hal, yaitu $M_{p_i} = \mu_i M$, submodul M_{p_i} merupakan submodul primer, dan modul M dapat dituliskan sebagai jumlah langsung $M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $M_{p_i} = \mu_i M$

   Untuk menunjukkan bahwa $M_{p_i} = \mu_i M$, maka perlu ditunjukkan $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$ dan $M_{p_i} \subseteq \mu_i M$. Misalkan $\mu_i = \frac{\mu}{p_i^{e_i}}$.

   a. $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$

      Ambil sebarang $\mu_i x \in \mu_i M$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p_i^{e_i} \mu_i x &= (p_i^{e_i} \cdot \mu_i) x \\ &= \left(p_i^{e_i} \cdot \frac{\mu}{p_i^{e_i}} \right) x \\ &= \mu x \end{aligned}$$

      Karena μ merupakan pembangun dari annihilator M, maka $\mu x = 0$ untuk semua $x \in M$.

      Jadi, $\mu x \in M_{p_i}$. Hal ini berarti $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$.

Setelah terbukti bahwa $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$, selanjutnya akan ditunjukkan sebaliknya, yaitu $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$.

b. $M_{p_i} \subseteq \mu_i M$

Perhatikan bahwa, μ_i dan $p_i^{e_i}$ relatif prima. Akibatnnya, terdapat $a, b \in R$ sehingga

$$ap_i^{e_i} + b\mu_i = 1$$

Misalkan $x \in M_{p_i}$, maka berdasarkan definisi M_{p_i}, $p_i^{e_i}x = 0$.

Tulis x sebagai

$$\begin{aligned}
x &= 1 \cdot x \\
&= \left(ap_i^{e_i} + b\mu_i\right)x \\
&= \left(ap_i^{e_i}\right)x + (b\mu_i)x \\
&= a\left(p_i^{e_i}x\right) + (\mu_i bx) \\
&= a(0) + \mu_i(bx) \\
&= 0 + \mu_i(bx) \\
&= \mu_i(bx) \in \mu_i M
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $M_{p_i} \subseteq \mu_i M$.

Berdasarkan uraian a) dan b) didapatkan $\mu_i M \subseteq M_{p_i}$ dan $M_{p_i} \subseteq \mu_i M$, maka terbukti bahwa $M_{p_i} = \mu_i M$.

2. Akan ditunjukkan bahwa M_{p_i} merupakan submodul primer. Berdasarkan definisi 2.20, modul primer merupakan modul yang memiliki order dari perpangkatan prima. Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa $ann_R\left(M_{p_i}\right) = \langle p_i^{e_i}\rangle$. Untuk menunjukkan hal tersebut, maka perlu ditunjukkan bahwa M_{p_i} submodul dari M, $\langle p_i^{e_i}\rangle \subseteq ann_R(M_{p_i})$, dan $ann_R\left(M_{p_i}\right) \subseteq \langle p_i^{e_i}\rangle$.

a. M_{p_i} submodul dari M

Berdasarkan teorema 2.17, untuk menunjukkan bahwa M_{p_i} merupakan submodul dari M, maka perlu ditunjukkan bahwa M_{p_i} tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Ambil sebarang $v, w \in M_{p_i}$ dan $r \in R$. Perhatikan bahwa,

$$p_i^{e_i} \cdot (v + w) = p_i^{e_i} \cdot v + p_i^{e_i} w$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Oleh karena itu, M_{p_i} tertutup terhadap penjumlahan. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M_{p_i} tertutup terhadap perkalian skalar. Perhatikan bahwa,

$$p_i^{e_i} \cdot (r \cdot v) = r \cdot \left(p_i^{e_i} \cdot v\right)$$
$$= r \cdot 0$$
$$= 0$$

Oleh karena itu, M_{p_i} tertutup terhadap perkalian skalar. Dengan demikian, M_{p_i} merupakan submodul dari M.

b. $\langle p_i^{e_i} \rangle \subseteq ann_R(M_{p_i})$

Misalkan $a \in \langle p_i^{e_i} \rangle$, maka a dapat dituliskan sebagai $a = p_i^{e_i} \cdot s$ untuk suatu $s \in R$ dan ambil sebarang $v \in M_{p_i}$. Perhatikan bahwa,

$$r \cdot v = \left(p_i^{e_i} \cdot s\right) \cdot v$$
$$= s \cdot \left(p_i^{e_i} \cdot v\right)$$
$$= s \cdot 0$$
$$= 0$$

Jadi terbukti bahwa $\langle p_i^{e_i} \rangle \subseteq ann_R(M_{p_i})$.

c. $ann_R\left(M_{p_i}\right) \subseteq \langle p_i^{e_i} \rangle$

Misalkan $b \in ann_R(M_{p_i})$, maka untuk setiap $v \in M_{p_i}$ berlaku $b \cdot v = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $b \in \langle p_i^{e_i} \rangle$. Karena $b \in ann_R(M_{p_i})$, maka untuk setiap $v \in M_{p_i}$ berlaku $b \cdot v = 0$. Perhatikan juga bahwa, untuk setiap $v \in M_{p_i}$ berlaku $p_i^{e_i} \cdot v = 0$. Hal ini berarti $p_i^{e_i}$ merupakan elemen di R yang mengenolkan semua elemen $v \in M_{p_i}$. Karena $b \in ann_R\left(M_{p_i}\right)$, maka b haruslah elemen dari ideal $\langle p_i^{e_i} \rangle$. Artinya, ada $c \in R$ sedemikian sehingga $b = p_i^{e_i} \cdot c$. Karena b adalah sebarang elemen di $ann_R\left(M_{p_i}\right)$, maka $annn_R\left(M_{p_i}\right) \subseteq \langle p_i^{e_i} \rangle$.

Berdasarkan uraian poin b dan c, didapatkan $\langle p_i^{e_i} \rangle \subseteq ann_R\left(M_{p_i}\right)$ dan $ann_R\left(M_{p_i}\right) \subseteq \langle p_i^{e_i} \rangle$. Hal ini berarti $ann_R\left(M_{p_i}\right) = \langle p_i^{e_i} \rangle$. Dengan demikian, terbukti bahwa submodul M_{p_i} merupakan submodul primer dari M.

3. Akan ditunjukkan bahwa M dapat dinyatakan dalam bentuk jumlah langsung dari submodul-submodul primer, yaitu $M = M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \dots \oplus M_{p_n}$.

Akan ditunjukkan bahwa M memenuhi syarat jumlah langsung, yaitu sebagai berikut.

a. $M = \sum_i^n M_{p_i}$

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_i^n M_{p_i} \subseteq M$ dan $M \subseteq \sum_i^n M_{p_i}$.

Jelas bahwa $\sum_i^n M_{p_i} \subseteq M$, selanjutnya akan ditunjukkan $M \subseteq \sum_i^n M_{p_i}$. Perhatikan bahwa p_i merupakan bilangan prima berbeda dan tidak sekawan untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$ maka $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = 1$. Akibatnya,

$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n = 1$$

untuk suatu $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$.

Ambil sebarang $x \in M$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x \\ &= (a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n)x \\ &= (a_1\mu_1)x + (a_2\mu_2)x + \cdots + (a_n\mu_n)x \\ &= (\mu_1 a_1)x + (\mu_2 a_2\ )x + \cdots + (\mu_n a_n)x \\ &= \mu_1(a_1 x) + \mu_2(a_2 x) + \cdots + \mu_n(a_n x) \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\mu_i(a_i x) \in M_{p_i}, \forall i = 1,2, \dots, n$. Hal ini berakibat

$$\mu_1(a_1 x) + \mu_2(a_2 x) + \cdots + \mu_n(a_n x) = x \in \sum_i^n M_{p_i}$$

Jadi terbukti bahwa $M = \sum_i^n M_{p_i}$.

b. $M_{p_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{p_j}\right) = \{0\}$

Ambil sebarang $x \in M_{p_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{p_j}\right)$, artinya $x \in M_{p_i}$ dan $x \in \left(\sum_{j \neq i} M_{p_j}\right)$.

Karena $x \in M_{p_i}$, maka $p_i^{e_i} x = 0$. Disisi lain, karena x dapat dituliskan sebagai kombinasi linier elemen-elemen dari M_{p_j} dengan $j \neq i$, yaitu

$$x = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_{i-1} y_{i-1} + \mu_{i+1} y_{i+1} + \cdots + \mu_n y_n$$

maka operasi $p_i^{e_i}$ pada x mengakibatkan

$$\begin{aligned} p_i^{e_i} x &= p_i^{e_i}(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_{i-1} y_{i-1} + \mu_{i+1} y_{i+1} + \cdots + \mu_n y_n) \\ &= p_i^{e_i}(\mu_1 y_1) + p_i^{e_i}(\mu_2 y_2) + \cdots + p_i^{e_i}(\mu_{i-1} y_{i-1}) + p_i^{e_i}(\mu_{i+1} y_{i+1}) \\ &\quad + \cdots + p_i^{e_i}(\mu_n y_n) \end{aligned}$$

Karena $p_i^{e_i}$ hanya berkaitan langsung dengan $\mu_i y_i$, sedangkan elemen-elemen lain dari $\mu_j y_j$ dengan $j \neq i$ tidak memiliki hubungan langsung dengan p_i, maka kombinasi linier dari x hanya dapat menghasilkan 0 jika $x = 0$. Oleh karena itu, satu-satunya elemen di $M_{p_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{p_j}\right)$ adalah elemen nol, sehingga

$$M_{p_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} M_{p_j}\right) = \{0\}.$$

Berdasarkan uraian 1) 2), dan 3) terbukti bahwa modul torsi atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer M_{p_i} dengan order $p_i^{e_i}$.

Proses dekomposisi primer pada suatu modul torsi M atas daerah ideal utama R berdasarkan teorema 4.1 adalah sebagai berikut.

1. Menentukan annihilator dari M
2. Menentukan order dari modul M, yaitu μ dan menentukan faktorisasi prima dari μ sebagai $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ dimana p_i merupakan unsur prima berbeda di R.
3. Menentukan submodul-submodul primer dari M, yaitu $M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}} M, M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}} M, \dots, M_{p_k} = \frac{\mu}{p_k^{e_k}} M$.
4. Menyimpulkan modul M sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer $M = \frac{\mu}{p_1^{e_1}} M \oplus \frac{\mu}{p_2^{e_2}} M \oplus \dots \oplus \frac{\mu}{p_k^{e_k}} M$.

4.2 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$

Pada subbab ini akan diperlihatkan dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dengan menerapkan teorema 4.1 yang telah dibuktikan sebelumnya. Namun, sebelum menunjukkan dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ memenuhi syarat Teorema 4.1, yaitu modul yang didekomposisikan merupakan modul torsi atas daerah ideal utama. Oleh karena itu, berikut akan ditunjukkan bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul torsi yang atas daerah ideal utama.

Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul torsi karena setiap elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ dapat ditemukan elemen tak nol $r \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $r \cdot \bar{a} = \bar{0}$. Dalam hal ini, untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ dapat dipilih $r = n \in \mathbb{Z}$, karena $n \cdot \bar{a} = \overline{n \cdot a} = \bar{0}$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen dalam $\mathbb{Z}_n$ adalah elemen torsi. Perhatikan bahwa, elemen-elemen pada himpunan bilangan bulat modulo n, yaitu $\mathbb{Z}_n$ merupakan himpunan kelas-kelas residu sebanyak n elemen, yakni $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Selain itu, setiap elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ memiliki order yang terkait dengan annihilatornya. Berdasarkan Definisi 2.25, setiap submodul yang dibangun oleh $\bar{a}$, yaitu $\langle \bar{a} \rangle$ memiliki order yang ditentukan oleh pembangun dari ideal $ann(\langle \bar{a} \rangle)$. Untuk setiap elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, dapat dipilih $r = n$ yang mengakibatkan $n \cdot \bar{a} = \bar{0}$. Hal ini berarti order dari $\bar{a}$ adalah n.

Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ memiliki order n yang dapat dikaitkan dengan faktor prima dari n, yaitu dalam bentuk faktorisasi prima dari n. Order dari modul $\mathbb{Z}_n$ dapat dianggap sebagai hasil perkalian dari order submodul-submodul yang dibangun oleh elemen-elemen $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Mengingat bahwa $\mathbb{Z}_n$ merupakan modul torsi, setiap submodul $\langle \bar{a} \rangle$ yang dibangun oleh elemen $\bar{a}$ memiliki order yang terkait dengan faktor prima dari n. Oleh karena itu, secara keseluruhan order μ dari $\mathbb{Z}_n$ sebagai modul torsi atas $\mathbb{Z}$ dapat diekspresikan dalam bentuk faktorisasi prima $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_n$ sebagai modul torsi memiliki order μ dalam bentuk faktorisasi prima $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$. Setelah mengetahui bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ memenuhi syarat yang diberikan pada teorema, maka selanjutnya akan ditunjukkan dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer.

Proses dekomposisi dimulai dengan mencari annihilator dari $\mathbb{Z}_n$ dan ditentukan pembangun dari annihilatornya. Berdasarkan definisi 2.25, order dari $\mathbb{Z}_n$ merupakan pembangun dari annihilatornya. Dan berdasarkan teorema 2.2, order μ dari $\mathbb{Z}_n$ dapat dinyatakan sebagai faktorisasi prima dari bilangan prima berbeda di $\mathbb{Z}$, yaitu $\mu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$. Setelah annihilator dan order dari $\mathbb{Z}_n$ ditentukan, langkah berikutnya adalah menentukan submodul-submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_n$. Submodul M_{p_i} merupakan elemen-elemen di $\mathbb{Z}_n$ yang jika dikalikan dengan $p_i^{e_i}$ menghasilkan $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$. Langkah terakhir adalah menyimpulkan modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer $M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} \mathbb{Z}_n$. Pada penelitian ini, akan ditinjau dari dua kelompok $\mathbb{Z}_n$, yaitu untuk n bilangan dengan satu faktor prima, dan untuk n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima.

4.2.1 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Satu Faktor Prima

Pada subbab ini akan diperlihatkan dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dengan n bilangan dengan satu faktor prima. Berikut diperlihatkan proses dekomposisinya.

4.2.1.1 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_2$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_2$ terdiri dari dua elemen, yaitu $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Modul $\mathbb{Z}_2$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_2$ dan order dari $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}\} \\ &= \{\dots, -2,0,2,4,6, \dots\} \\ &= 2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_2$ dibangun oleh 2. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $\mu = 2$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_2$. Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{2}\mathbb{Z}_2 = \frac{2}{2}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_2$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_2$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$$

4.2.1.2 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_3$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_3$ terdiri dari tiga elemen, yaitu $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Modul $\mathbb{Z}_3$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_3$ dan order dari $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_3) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} \\ &= 3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_3$ dibangun oleh 3. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_3$ adalah $\mu = 3$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_3$. Pilih $p_1^{e_1} = 3$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_3 = \frac{\mu}{3}\mathbb{Z}_3 = \frac{3}{3}\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_3$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_3$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$$

4.2.1.3 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_4$ terdiri dari empat elemen, yaitu $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Modul $\mathbb{Z}_4$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_4$ dan order dari $\mathbb{Z}_4$.

$$ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4) = \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}\}$$

$$= \{\dots, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$= 4\mathbb{Z} = \langle 4 \rangle$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_4$ dibangun oleh 4. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_4$ adalah $\mu = 4 = 2^2$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_4$. Pilih $p_1^{e_1} = 2^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_4 = \frac{\mu}{2^2}\mathbb{Z}_4 = \frac{4}{2^2}\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_4$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_3$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{2^2}$$

Perhatikan bahwa, modul $\mathbb{Z}_{2^2}$ dibangun oleh $\bar{1} \in \mathbb{Z}_{2^2}$, sehingga hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dituliskan dengan

$$\mathbb{Z}_4 = \langle \bar{1} \rangle$$

4.2.1.4 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_5$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_5$ terdiri dari lima elemen, yaitu $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Modul $\mathbb{Z}_5$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_5$ dan order dari $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_5) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -5,0,5,10,15, \dots\} \\ &= 5\mathbb{Z} = \langle 5 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_5$ dibangun oleh 5. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_5$ adalah $\mu = 5$

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_5$. Pilih $p_1^{e_1} = 5$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{5}\mathbb{Z}_5 = \frac{5}{5}\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_5$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_5$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$$

4.2.1.5 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_7$ terdiri dari tujuh elemen, yaitu $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Modul $\mathbb{Z}_7$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_7$ dan order dari $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_7) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -7,0,7,14,21, \dots\} \end{aligned}$$

$$= 7\mathbb{Z} = \langle 7 \rangle$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_7$ dibangun oleh 7. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_7$ adalah $\mu = 7$

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_7$. Pilih $p_1^{e_1} = 7$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{7}\mathbb{Z}_7 = \frac{7}{7}\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_7$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}_7$$

4.2.1.6 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_8$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_8$ terdiri dari delapan elemen, yaitu $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Modul $\mathbb{Z}_8$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_8$ dan order dari $\mathbb{Z}_8$.

$$ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8) = \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}\}$$

$$= \{\dots, -8, 0, 8, 16, 24, \dots\}$$

$$= 8\mathbb{Z} = \langle 8 \rangle$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_8$ dibangun oleh 8. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $\mu = 8 = 2^3$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_8$. Pilih $p_1^{e_1} = 2^3$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_8 = \frac{\mu}{2^3}\mathbb{Z}_8 = \frac{4}{2^3}\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_8$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_8$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_{2^3}$$

4.2.1.7 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_9$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_9$ terdiri dari sembilan elemen, yaitu $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Modul $\mathbb{Z}_9$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer siklik. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_9$ dan order dari $\mathbb{Z}_9$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_9) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}\} \\ &= \{\ldots, -9, 0, 9, 18, 27, \ldots\} \\ &= 9\mathbb{Z} = \langle 9 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_9$ dibangun oleh 9. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_9$ adalah $\mu = 9 = 3^2$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_9$. Pilih $p_1^{e_1} = 3^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_9 = \frac{\mu}{3^2}\mathbb{Z}_9 = \frac{9}{3^2}\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_9$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_9$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_{3^2}$$

4.2.1.8 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{11}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{11}$ terdiri dari sebelas elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{11} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{11}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{11}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{11}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{11}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{11} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -11, 0, 11, 22, 23, \dots\} \\ &= 11\mathbb{Z} = \langle 11 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{11}$ dibangun oleh 11. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{11}$ adalah $\mu = 11$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{11}$. Pilih $p_1^{e_1} = 11$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{11} = \frac{\mu}{11}\mathbb{Z}_{11} = \frac{11}{11}\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_{11}$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_{11}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$$

4.2.1.9 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{25}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{25}$ terdiri dari dua puluh lima elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{23}, \overline{24}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{25}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{25}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{25}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{25}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -25, 0, 25, 50, 75, \dots\} \\ &= 25\mathbb{Z} = \langle 25 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{25}$ dibangun oleh 25. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{25}$ adalah $\mu = 25 = 5^2$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{25}$. Pilih $p_1^{e_1} = 5^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{25} = \frac{\mu}{5^2}\mathbb{Z}_{25} = \frac{25}{5^2}\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{25} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{23}, \overline{24}\}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_{25}$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_{25}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{5^2}$$

4.2.1.10 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{49}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{49}$ terdiri dari 49 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{47}, \overline{48}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{49}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{49}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{49}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{49}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{49} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -49, 0, 49, 98, 147, \dots\} \\ &= 49\mathbb{Z} = \langle 49 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{49}$ dibangun oleh 49. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{49}$ adalah $\mu = 49 = 7^2$.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{49}$. Pilih $p_1^{e_1} = 7^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_7 = \frac{\mu}{7^2}\mathbb{Z}_{49} = \frac{49}{7^2}\mathbb{Z}_{49} = \mathbb{Z}_{49}$$

Submodul-submodul primer dari $\mathbb{Z}_{49}$ hanyalah dirinya sendiri. Oleh karenanya modul $\mathbb{Z}_{49}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{49} = \mathbb{Z}_{7^2}$$

Berdasarkan uraian dari dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan satu faktor prima, dapat dilihat modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer dirinya sendiri, yaitu

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p^e}$$

dimana p merupakan faktor prima dari n dan e bilangan bulat positif. Berikut diperlihatkan hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan satu faktor prima.

Tabel 4.1 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Satu Faktor Prima

n	**Modul**	M_{p_i}	**Hasil Dekomposisi**
2	$\mathbb{Z}_2$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{2}{2}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 = \langle \bar{1} \rangle$
3	$\mathbb{Z}_3$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{3}{3}\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3 = \langle \bar{1} \rangle$
4	$\mathbb{Z}_4$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{4}{2^2}\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{2^2}$
5	$\mathbb{Z}_5$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{5}{5}\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$
7	$\mathbb{Z}_7$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{7}{7}\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}_7$
8	$\mathbb{Z}_8$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{8}{2^3}\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_{2^3}$
9	$\mathbb{Z}_9$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{9}{3^2}\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_{3^2}$
11	$\mathbb{Z}_{11}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{11}{11}\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$	$\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{Z}_{11}$
25	$\mathbb{Z}_{25}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{25}{5^2}\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{25}$	$\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{5^2}$
49	$\mathbb{Z}_{49}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{49}{7^2}\mathbb{Z}_{49} = \mathbb{Z}_{49}$	$\mathbb{Z}_{49} = \mathbb{Z}_{7^2}$

Berdasarkan tabel 4.1, dapat dilihat bahwa hasil dekomposisi untuk n bilangan dengan satu faktor prima, modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul primer dirinya sendiri, yaitu $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$.

4.2.2 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Lebih dari Satu Faktor Prima

Pada subbab ini akan diperlihatkan dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dengan n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima. Berikut diperlihatkan proses dekomposisinya untuk beberapa n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima.

4.2.2.1 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_6$ terdiri dari enam elemen, yaitu $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Modul $\mathbb{Z}_6$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_6$ dan order dari $\mathbb{Z}_6$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_6) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -6, 0, 6, 12, \dots\} \\ &= 6\mathbb{Z} = \langle 6 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_6$ dibangun oleh 6. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mu = 6$. Order dari $\mathbb{Z}_6$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 6 = 2 \cdot 3$ dimana 2 dan 3 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_6$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_6 = \frac{6}{2}\mathbb{Z}_6 = 3\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_6 = \frac{6}{3}\mathbb{Z}_6 = 2\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_6 = 3\mathbb{Z}_6 \oplus 2\mathbb{Z}_6$$

Perhatikan bahwa, submodul $3\mathbb{Z}_6$ dibangun oleh $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ dan submodul $2\mathbb{Z}_6$ dibangun oleh $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dituliskan dengan

$$\mathbb{Z}_6 = \langle\bar{3}\rangle \oplus \langle\bar{2}\rangle$$

4.2.2.2 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{10}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{10}$ terdiri dari sepuluh elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{10}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{10}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{10}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{10}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -10, 0, 10, 20, \dots\} \\ &= 10\mathbb{Z} = \langle 10\rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{10}$ dibangun oleh 10. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\mu = 10$. Order dari $\mathbb{Z}_{10}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 10 = 2 \cdot 5$ dimana 2 dan 5 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{10}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{10} = \frac{10}{2}\mathbb{Z}_{10} = 5\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{5}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 5$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{10} = \frac{10}{5}\mathbb{Z}_{10} = 2\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{10}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{10} = 5\mathbb{Z}_{10} \oplus 2\mathbb{Z}_{10}$$

4.2.2.3 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{12}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{12}$ terdiri dari 12 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{12}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{12}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{12}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -12, 0, 12, 24, \dots\} \\ &= 12\mathbb{Z} = \langle 12 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{12}$ dibangun oleh 12. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\mu = 12$. Order dari $\mathbb{Z}_{12}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 12 = 2^2 \cdot 3$ dimana 2 dan 3 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2^2$, maka sumodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{12} = \frac{12}{2^2}\mathbb{Z}_{12} = 3\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{12} = \frac{12}{3}\mathbb{Z}_{12} = 4\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{12}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{12} = 3\mathbb{Z}_{12} \oplus 4\mathbb{Z}_{12}$$

4.2.2.4 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{18}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{18}$ terdiri dari 18, yaitu $\mathbb{Z}_{18} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{16}, \overline{17}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{18}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{18}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{18}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{18}) &= \{r \in \mathbb{Z}\ | r\mathbb{Z}_{18} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -18, 0, 18, 36, \dots\} \\ &= 18\mathbb{Z} = \langle 18 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{18}$ dibangun oleh 18. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{18}$ adalah $\mu = 18$. Order dari $\mathbb{Z}_{18}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 18 = 2 \cdot 3^2$ dimana 2 dan 3 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{18}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{18} = \frac{18}{2}\mathbb{Z}_{18} = 9\mathbb{Z}_{18} = \{\bar{0}, \bar{9}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3^2$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{18} = \frac{18}{3^2}\mathbb{Z}_{18} = 2\mathbb{Z}_{18} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{18}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{18} = 9\mathbb{Z}_{18} \oplus 2\mathbb{Z}_{18}$$

4.2.2.5 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{30}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{30}$ terdiri dari 30 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{30} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{28}, \overline{29}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{30}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{30}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{30}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{30}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{30} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -30, 0, 30, 60, 90, \dots\} \\ &= 30\mathbb{Z} = \langle 30 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{30}$ dibangun oleh 30. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{30}$ adalah $\mu = 30$. Order dari $\mathbb{Z}_{30}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ dimana $2, 3,$ dan 5 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{30}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{30} = \frac{30}{2}\mathbb{Z}_{30} = 15\mathbb{Z}_{30} = \{\overline{0}, \overline{15}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{30} = \frac{30}{3}\mathbb{Z}_{30} = 10\mathbb{Z}_{30} = \{\overline{0}, \overline{10}, \overline{20}\}$$

Pilih $p_3^{e_3} = 5$, maka submodul M_{p_3} adalah

$$M_{p_3} = \frac{\mu}{p_3^{e_3}}\mathbb{Z}_{30} = \frac{30}{5}\mathbb{Z}_{30} = 6\mathbb{Z}_{30} = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{30}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{30} = 15\mathbb{Z}_{30} \oplus 10\mathbb{Z}_{30} \oplus 6\mathbb{Z}_{30}$$

4.2.2.6 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{60}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{60}$ terdiri dari 60 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{60} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{58}, \overline{59}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{60}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{60}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{60}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{30}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{60} = \{\overline{0}\} \\ &= \{\dots, -60,0,60,120,180, \dots\} \\ &= 60\mathbb{Z} = \langle 60 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{60}$ dibangun oleh 60. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{60}$ adalah $\mu = 60$. Order dari $\mathbb{Z}_{60}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ dimana 2,3, dan 5 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{60}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{60} = \frac{60}{2^2}\mathbb{Z}_{60} = 15\mathbb{Z}_{60} = \{\overline{0}, \overline{15}, \overline{30}, \overline{45}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{60} = \frac{60}{3}\mathbb{Z}_{60} = 20\mathbb{Z}_{60} = \{\overline{0}, \overline{20}, \overline{40}\}$$

Pilih $p_3^{e_3} = 5$, maka submodul M_{p_3} adalah

$$M_{p_3} = \frac{\mu}{p_3^{e_3}}\mathbb{Z}_{60} = \frac{60}{5}\mathbb{Z}_{60} = 12\mathbb{Z}_{60} = \{\overline{0}, \overline{12}, \overline{24}, \overline{36}, \overline{48}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{60}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{60} = 15\mathbb{Z}_{60} \oplus 20\mathbb{Z}_{60} \oplus 12\mathbb{Z}_{60}$$

4.2.2.7 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{126}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{126}$ terdiri dari 126 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{126} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{124}, \overline{125}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{126}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{126}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{126}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{126}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{126} = \{\overline{0}\} \\ &= \{\dots, -126, 0, 126, 252, 378, \dots\} \\ &= 126\mathbb{Z} = \langle 126 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{126}$ dibangun oleh 126. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{126}$ adalah $\mu = 126$. Order dari $\mathbb{Z}_{126}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ dimana 2,3, dan 7 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{126}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{126} = \frac{126}{2}\mathbb{Z}_{126} = 63\mathbb{Z}_{126} = \{\overline{0}, \overline{63}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3^2$, maka submodule M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{126} = \frac{126}{3^2}\mathbb{Z}_{126} = 14\mathbb{Z}_{3126}$$

$$= \{\overline{0}, \overline{14}, \overline{28}, \overline{42}, \overline{56}, \overline{70}, \overline{84}, \overline{98}, \overline{112}\}$$

Pilih $p_3^{e_3} = 7$, maka submodule M_{p_3} adalah

$$M_{p_3} = \frac{\mu}{p_3^{e_3}}\mathbb{Z}_{126} = \frac{126}{7}\mathbb{Z}_{126} = 18\mathbb{Z}_{126} = \{\overline{0}, \overline{18}, \overline{36}, \overline{54}, \overline{72}, \overline{90}, \overline{108}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{126}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{126} = 63\mathbb{Z}_{126} \oplus 14\mathbb{Z}_{126} \oplus 18\mathbb{Z}_{126}$$

4.2.2.8 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{210}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{210}$ terdiri dari 210 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{210} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{208}, \overline{209}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{210}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{210}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{210}$.

$$
\begin{aligned}
ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{210}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}\} \\
&= \{\dots, -210, 0, 210, 420, 630, \dots\} \\
&= 210\mathbb{Z} = \langle 210 \rangle
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{210}$ dibangun oleh 210. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{210}$ adalah $\mu = 210$. Order dari $\mathbb{Z}_{210}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ dimana 2,3,5, dan 7 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{210}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{210} = \frac{210}{2}\mathbb{Z}_{210} = 105\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}, \overline{105}\}$$

Pilih $p_2^{e_2} = 3$, maka submodul M_{p_2} adalah

$$M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{210} = \frac{210}{3}\mathbb{Z}_{210} = 70\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}, \overline{70}, \overline{140}\}$$

Pilih $p_3^{e_3} = 5$, maka submodul M_{p_3} adalah

$$M_{p_3} = \frac{\mu}{p_3^{e_3}}\mathbb{Z}_{210} = \frac{210}{5}\mathbb{Z}_{210} = 42\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}, \overline{42}, \overline{84}, \overline{126}, \overline{168}\}$$

Pilih $p_4^{e_4} = 7$, maka submodul M_{p_4} adalah

$$M_{p_4} = \frac{\mu}{p_4^{e_4}}\mathbb{Z}_{210} = \frac{210}{7}\mathbb{Z}_{210} = 30\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}, \overline{30}, \overline{60}, \overline{90}, \overline{120}, \overline{150}, \overline{180}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{210}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{210} = 105\mathbb{Z}_{210} \oplus 70\mathbb{Z}_{210} \oplus 42\mathbb{Z}_{210} \oplus 30\mathbb{Z}_{210}$$

4.2.2.9 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_{900}$ atas $\mathbb{Z}$

Elemen pada modul $\mathbb{Z}_{900}$ terdiri dari 900 elemen, yaitu $\mathbb{Z}_{900} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{898}, \overline{899}\}$. Modul $\mathbb{Z}_{900}$ akan didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer dengan menerapkan teorema dekomposisi primer. Langkah pertama yaitu dengan menentukan annihilator dari $\mathbb{Z}_{900}$ dan order dari $\mathbb{Z}_{900}$.

$$\begin{aligned} ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{900}) &= \{r \in \mathbb{Z} \mid r\mathbb{Z}_{900} = \{\bar{0}\} \\ &= \{\dots, -900, 0, 900, 1800, 2700, \dots\} \\ &= 900\mathbb{Z} = \langle 900 \rangle \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, annihilator dari $\mathbb{Z}_{900}$ dibangun oleh 900. Oleh karena itu, order dari $\mathbb{Z}_{900}$ adalah $\mu = 900$. Order dari $\mathbb{Z}_{900}$ dapat dinyatakan sebagai $\mu = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ dimana 2,3, dan 5 merupakan bilangan prima berbeda.

Langkah selanjutnya adalah dengan menentukan submodul primer M_{p_i} dari $\mathbb{Z}_{900}$.

Pilih $p_1^{e_1} = 2^2$, maka submodul M_{p_1} adalah

$$M_{p_1} = \frac{\mu}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_{900} = \frac{900}{2^2}\mathbb{Z}_{900} = 225\mathbb{Z}_{900} = \{\bar{0}, \overline{225}, \overline{450}, \overline{675}\}$$

$$\begin{aligned} M_{p_2} = \frac{\mu}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_{900} = \frac{900}{3^2}\mathbb{Z}_{900} &= 100\mathbb{Z}_{900} \\ &= \{\bar{0}, \overline{100}, \overline{200}, \overline{300}, \overline{400}, \overline{500}, \overline{600}, \overline{700}, \overline{800}\} \end{aligned}$$

$$M_{p_3} = \frac{\mu}{p_3^{e_3}}\mathbb{Z}_{900} = \frac{900}{5^2}\mathbb{Z}_{900} = 36\mathbb{Z}_{210} = \{\bar{0}, \overline{36}, \overline{72}, \dots, \overline{828}, \overline{864}\}$$

Dengan demikian, modul $\mathbb{Z}_{210}$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_{900} = 225\mathbb{Z}_{900} \oplus 100\mathbb{Z}_{900} \oplus 36\mathbb{Z}_{900}$$

Berdasarkan uraian dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan faktor prima lebih dari satu dapat dilihat bahwa modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer $M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}}\mathbb{Z}_n$. Berikut diperlihatkan hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima.

Tabel 4.2 Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Lebih dari Satu Faktor Prima

$\boldsymbol{n}$	**Modul**	$\boldsymbol{M_{p_i}}$	**Hasil Dekomposisi**
6	$\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{6}{2}\mathbb{Z}_6 = 3\mathbb{Z}_6$ $M_{p_2} = \frac{6}{3}\mathbb{Z}_6 = 2\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6 = 3\mathbb{Z}_6 \oplus 2\mathbb{Z}_6$
10	$\mathbb{Z}_{10}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{10}{2}\mathbb{Z}_{10}$ $= 5\mathbb{Z}_{10}$ $M_{p_2} = \frac{10}{5}\mathbb{Z}_{10}$ $= 2\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_{10} = 5\mathbb{Z}_{10} \oplus 2\mathbb{Z}_{10}$
12	$\mathbb{Z}_{12}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{12}{2^2}\mathbb{Z}_{12}$ $= 3\mathbb{Z}_{12}$ $M_{p_2} = \frac{12}{3}\mathbb{Z}_{12}$ $= 4\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12} = 3\mathbb{Z}_{12} \oplus 4\mathbb{Z}_{12}$
18	$\mathbb{Z}_{18}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{18}{2}\mathbb{Z}_{18}$ $= 9\mathbb{Z}_{18}$	

Lanjutan **Tabel 4.2** Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Lebih dari Satu Faktor Prima

$\boldsymbol{n}$	**Modul**	$\boldsymbol{M_{p_i}}$	**Hasil Dekomposisi**
		$M_{p_2} = \frac{18}{3^2}\mathbb{Z}_{18}$ $= 2\mathbb{Z}_{18}$	$\mathbb{Z}_{18} = 9\mathbb{Z}_{18} \oplus 2\mathbb{Z}_{18}$
30	$\mathbb{Z}_{30}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{30}{2}\mathbb{Z}_{30}$ $= 15\mathbb{Z}_{30}$ $M_{p_2} = \frac{30}{3}\mathbb{Z}_{30}$ $= 10\mathbb{Z}_{30}$ $M_{p_3} = \frac{30}{5}\mathbb{Z}_{30}$ $= 6\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_{30} = 15\mathbb{Z}_{30} \oplus 10\mathbb{Z}_{30} \oplus 6\mathbb{Z}_{30}$
60	$\mathbb{Z}_{60}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{60}{2^2}\mathbb{Z}_{60}$ $= 15\mathbb{Z}_{60}$ $M_{p_2} = \frac{60}{3}\mathbb{Z}_{60}$ $= 20\mathbb{Z}_{60}$ $M_{p_3} = \frac{60}{5}\mathbb{Z}_{60}$ $= 12\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{60} = 15\mathbb{Z}_{60} \oplus 20\mathbb{Z}_{60}$ $\oplus 12\mathbb{Z}_{60}$
126	$\mathbb{Z}_{126}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{126}{2}\mathbb{Z}_{126}$ $= 63\mathbb{Z}_{126}$	

Lanjutan **Tabel 4.2** Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Lebih dari Satu Faktor Prima

$\boldsymbol{n}$	**Modul**	$\boldsymbol{M_{p_i}}$	**Hasil Dekomposisi**
		$M_{p_2} = \frac{126}{3^2}\mathbb{Z}_{126}$ $= 14\mathbb{Z}_{126}$ $M_{p_3} = \frac{126}{7}\mathbb{Z}_{126}$ $= 18\mathbb{Z}_{126}$	$\mathbb{Z}_{126} = 63\mathbb{Z}_{126} \oplus 14\mathbb{Z}_{126}$ $\oplus\, 18\mathbb{Z}_{126}$
210	$\mathbb{Z}_{210}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{210}{2}\mathbb{Z}_{210}$ $= 105\mathbb{Z}_{210}$ $M_{p_2} = \frac{210}{3}\mathbb{Z}_{210}$ $= 70\mathbb{Z}_{210}$ $M_{p_3} = \frac{210}{5}\mathbb{Z}_{210}$ $= 42\mathbb{Z}_{210}$ $M_{p_4} = \frac{210}{7}\mathbb{Z}_{210}$ $= 30\mathbb{Z}_{210}$	$\mathbb{Z}_{210} = 105\mathbb{Z}_{210} \oplus 70\mathbb{Z}_{210}$ $\oplus\, 42\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{30}$
900	$\mathbb{Z}_{900}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_1} = \frac{900}{2^2}\mathbb{Z}_{900}$ $= 225\mathbb{Z}_{900}$ $M_{p_2} = \frac{900}{3^2}\mathbb{Z}_{900}$ $= 100\mathbb{Z}_{900}$	

Lanjutan **Tabel 4.2** Dekomposisi Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n Bilangan dengan Lebih dari Satu Faktor Prima

900	$\mathbb{Z}_{900}$ atas $\mathbb{Z}$	$M_{p_3} = \frac{900}{5^2}\mathbb{Z}_{900}$ $= 36\mathbb{Z}_{210}$	$\mathbb{Z}_{900} = 225\mathbb{Z}_{900} \oplus 100\mathbb{Z}_{900}$ $\oplus 36\mathbb{Z}_{900}$

Berdasarkan tabel 4.2, dapat dilihat bahwa hasil dekomposisi untuk n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima, modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul primer, yaitu

$$\mathbb{Z}_n = \frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_n \oplus \frac{n}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_n \oplus \dots \oplus \frac{n}{p_k^{e_k}}\mathbb{Z}_n.$$

4.3 Kajian Al-Qur'an terhadap Dekomposisi Modul

Penelitian ini menunjukkan dekomposisi suatu modul sebagai jumlah langsung submodul-submodul. Selain dalam matematika, konsep dekomposisi juga diterapkan dalam konsep spiritual, sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S Al-Fatihah ayat 1. Pada firman Allah SWT tersebut menjelaskan bahwa rahmat Allah SWT terbagi menjadi dua, yakni rahmat Ar-Rahman dan rahmat Ar-Rahim. Rahmat Ar-Rahman diberikan Allah SWT kepada seluruh makhluknya tanpa terkecuali di kehidupan dunia, dan rahmat ini tidak berlanjut jika kehidupan dunia berakhir. Sedangkan rahmat Ar-Rahim Allah SWT hanya diberikan di kehidupan akhirat kepada mereka yang beriman dan beramal saleh. Pengelompokan rahmat ini menunjukkan bahwa keduanya tidak memiliki irisan, tetapi keduanya tetap memiliki kesinambungan dalam kerangka rahmat Allah SWT sebagai bentuk kasih sayang-Nya. Konsep ini dipertegas oleh Allah SWT pada firmannya dalam Q.S Al-Mukminun ayat 109-110 yang menjelaskan hanya golongan tertentu yang mendapatkan rahmat Allah SWT di kehidupan akhirat. Selanjutnya, konsep pemisahan ini dijelaskan juga pada firman Allah SWT yang lain, yaitu pada Q.S Al-Kafirun ayat 6 (Kemenag, 2024).

لَكُمْ دِيْنُكُمْ وَلِيَ دِيْنِ ﴿٦﴾

Artinya: "*Untukmu agamamu dan untukku agamaku.*"

Firman Allah SWT tersebut menegaskan sikap tegas Nabi Muhammad SAW terhadap kaum musyrikin Mekkah. Ketika orang kafir mengajukan tawaran untuk berbagi ibadah dengan saling menyembah Tuhan masing-masing secara bergantian, Allah SWT memerintahkan Nabi Muhammad SAW untuk menyatakan sikap tegas bahwa tidak ada ruang untuk mencampuradukkan keimanan kepada Allah SWT dengan kemusyrikan. Firman ini menegaskan prinsip tauhid yang menolak segala kompromi dalam hal akidah.

Pada kalimat "*Untukmu agamamu*' terdapat penegasan bahwa kaum kafir dipersilahkan untuk tetap menjalankan kepercayaan mereka jika mereka memilih untuk tidak menerima kebenaran Islam. Hal ini menunjukkan bentuk penolakan tanpa paksaan, melainkan menyerahkan pilihan kepada masing-masing individu. Firman ini menetapkan cara kehidupan bermasyarakat dalam toleransi beragama, yaitu setiap kelompok bertanggungjawab atas pilihannya sendiri (Shihab, 2009). Kemudian pada kalimat "*Dan untukku agamaku*" ditekankan bahwa Nabi Muhammad SAW sebagai pembawa risalah Islam akan tetap teguh pada keimanan dan syariat yang telah Allah SWT tetapkan. Tidak ada ruang untuk kompromi dalam tauhid, karena Islam berdiri kokoh di atas dasar akidah yang murni. Firman Allah SWT ini mencerminkan pemisahan yang jelas antara keyakinan kaum muslimin dengan keyakinan kaum kafir. Islam menegaskan kebebasan beragama tetapi tidak mengizinkan pencampuran akidah.

Konsep pemisahan yang tegas pada ayat ini selaras dengan konsep dekomposisi modul dimana memecah struktur modul menjadi submodul-submodul yang saling terpisah dan tidak beririsan. Dekomposisi ini memberikan kejelasan dalam memahami struktur modul secara keseluruhan dengan membaginya ke dalam bagian-bagian yang lebih sederhana dan terstruktur. Analoginya, keyakinan tauhid yang dipegang oleh umat Islam dan keyakinan syirik yang dianut oleh kaum kafir dapat dipandang sebagai dua submodul yang terpisah dalam struktur besar kehidupan manusia. Sebagaimana dalam modul, submodul-submodul yang terbentuk tidak memiliki irisan tetapi tetap berada dalam satu sistem yang lebih besar. Begitu pula keyakinan umat Islam dan kaum kafir tidak beririsan dalam hal akidah. Namun, keduanya tetap berada dalam ruang lingkup kehendak Allah SWT yang mencakup seluruh makhluk-Nya. Konsep pemisahan ini ditegaskan Kembali dalam firman Allah SWT yang lain, yaitu pada Q.S Yunus ayat 41 (Kemenag, 2024).

وَاِنْ كَذَّبُوْكَ فَقُلْ لِّيْ عَمَلِيْ وَلَكُمْ عَمَلُكُمْۚ اَنْتُمْ بَرِيْۤـُٔوْنَ مِمَّآ اَعْمَلُ وَاَنَا۠ بَرِيْۤءٌ مِّمَّا تَعْمَلُوْنَ ﴿٤١﴾

Artinya: "*Jika mereka mendustkanmu (Nabi Muhammad), katakanlah, "Bagiku perbuatanku dan bagimu perbuatanmu. Kamu berlepas diri dari apa yang aku perbuat dan aku pun berlepas diri dari apa yang kamu perbuat.'*""

Firman Allah SWT ini merupakan lanjutan dari ayat sebelumnya yang menjelaskan bahwa kaum musyrikin ada yang percaya kepada Nabi Muhammad SAW tetapi menolak kebanaran al-Qur'an disebabkan mereka keras kepala akan kedudukan sosial mereka dan ada juga yang lahir batin menolak serta tidak memeperhatikan Nabi Muhammad SAW (Shihab, 2002a). Firman ini menegaskan sikap yang harus diambil Nabi Muhammad SAW dalam menghadapi penolakan dari kaum musyrikin atas dakwahnya. Allah SWT memerintahkan Nabi untuk mengatakan kepada kaum musyrikin bahwa setiap orang bertanggungjawab atas amal perbuatannya sendiri. Nabi Muhammad SAW hanya bertugas untuk menyampaikan risalah Islam, sementara tanggung jawab atas penerimaan atau penolakan ajaran Islam sepenuhnya ada apada individu yang bersangkutan. Pernyataan "*Bagiku perbuatanku, dan bagimu perbuatanmu*" menunjukkan penegasan prinsip tanggung jawab individu dalam akidah, dimana tidak ada pemaksaan untuk menerima Islam. Firman ini mencerminkan nilai toleransi beragama, dimana kebebasan memilih keyakinan dihormati, meskipun Islam menegaskan kebenarannya. Selain itu, juga mencerminkan nilai otonomi dalam bertindak dan kebebasan dalam memilih keyakinan, tetapi dengan konsekuensi tanggungjawab pribadi. Seperti halnya dalam dekomposisi struktur modul, dimana memecah modul menjadi submodul-submodul yang mana setiap submodulnya memiliki karakteristik masing-masing.

Analogi ini menggambarkan bahwa sebagaimana dalam dekomposisi modul, setiap submodulnya mencerminkan bagian terpisah dengan perannya masing-masing, begitu pula dalam kehidupan manusia. Pilihan keyakinan individu dapan dipandang sebagai submodul yang mencerminkan tanggungjawab pribadi terhadap apa yang diyakini dan dilakukan. Firman Allah SWT ini memperkuat konsep bahwa keyakinan seseorang tidak dapat dicampur atau dipaksakan oleh pihak lain, sebagaimana submodul tidak bisa digabungkan sembarangan tanpa merusak struktur dasar modul. Dengan demikian, firman ini tidak hanya menegaskan pentingnya tanggungjawab individu dalam konteks spiritual, tetapi juga menggabarkan harmoni pada konsep dekomposisi modul. Dekomposisi membantu memahami struktur yang lebih kompleks dengan memisahkan elemen-elemen yang memiliki karakteristik masing-masing, sebagaimana dalam Islam setiap individu memikul tanggungjawab masing-masing atas perbuatannya sendiri di hadapan Allah SWT. Hal ini selaras dengan firman Allah SWT dalam Q.S Saba’ ayat 25 (Kemenag, 2024).

قُلْ لَّا تُسْـَٔلُوْنَ عَمَّآ اَجْرَمْنَا وَلَا نُسْـَٔلُ عَمَّا تَعْمَلُوْنَ ﴿٢٥﴾

Artinya: “*Katakanlah, “Kamu tidak akan dimintai pertanggungjawaban atas apa yang kami kerjakan dan kami tidak akan dimintai pertanggungjawaban atas apa yang kamu kerjakan.”*”

Firman ini menegaskan prinsip tanggung jawab individu atas perbuatannya masing-masing, baik dalam dosa maupun amal kebaikan. Allah SWT memerintahkan Nabi Muhammad SAW untuk menyampaikan kepada kaum musyrikin bahwa mereka tidak akan menanggung dosa kaum muslimin, begitupun sebaliknya. Setiap individu bertanggungjawab penuh atas amal perbuatannya sendiri tanpa campur tangan pihak lain. Ayat ini juga mencerminkan keadilan Allah SWT, dimana tidak ada seseorang yang akan dibebani dengan dosa orang lain. Selain itu, ayat ini menjadi pengingat akan kebebasan dan otonomi dalam memilih jalan hidup, tetapi setiap pilihan tersebut memiliki konsekuensi yang harus ditanggung sendiri oleh pelakunya. Prinsip ini menjadi dasar penting dalam kehidupan bermasyarakat yang menghargai kebebasan beragama dan tanggungjawab individu terhadap pilihan hidupnya di hadapan Allah SWT. Karena pada dasarnya tidak dapat dipungkiri bahwa setiap penganut agama termasuk agama Islam, sepenuhnya meyakini kebenaran dalam agamanya (Shihab, 2002b). Namun, hal tersebut tidak perlu ditonjolkan ditengah-tengah masyarakat umum. Ayat ini mengajarkan sikap yang tegas tetapi adil dalam dakwah. Nabi Muhammad

SAW hanya bertugas menyampaikan risalah dan tidak bertanggungjawab atas penolakan atau penerimaan orang lain terhadap kebenaran. Dengan demikian, Islam menghormati kebebasan individu, tetapi juga menegaskan pentingnya tanggungjawab penuh atas amal perbuatan masing-masing.

Konsep tanggung jawab yang dijelaskan dalam Q.S Saba' ayat 25 ini memiliki analogi yang selaras dengan prinsip dekomposisi struktur modul. Dalam dekomposisi modul, struktur modul dipecah menjadi submodul-submodul yang memiliki karakteristik serta perannya masing-masing tanpa bercampur dengan submodul lain. Setiap submodul mempertahankan karakteristiknya masing-masing dalam struktur modul secara keseluruhan, tanpa mempengaruhi atau dipengarauhi oleh elemen dari submodul lain.

Analogi ini menggambarkan bagaimana setiap individu bertanggungjawab atas amalnya sendiri, sebagaimana setiap submodul berfungsi secara terpisah dalam struktur modul. Misalnya, dalam modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$, elemen-elemen dapat dikelompokkan ke dalam submodul-submodul primer sehingga masing-masing bagian menyumbang pada pemahaman yang lebih jelas tentang keseluruhan struktur modul. Dalam konteks spiritual, individu-individu adalah bagian dari struktur sosial, tetapi setiap orang bertanggungjawab atas amalannya sendiri, tanpa campur tangan atau pengaruh langsung dari orang lain. Sebagaimana dekomposisi modul dapat membantu menyederhanakan pemahaman struktur kompleks, tanggung jawab individu yang dijelaskan pada ayat ini menyederhanakan hubungan manusia dengan Allah SWT, dimana setiap orang akan diadili secara adil berdasarkan amal perbuatannya masing-masing.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa hasil dari dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ untuk n bilangan dengan satu faktor prima adalah

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n.$$

Sedangkan untuk untuk n bilangan dengan lebih dari satu faktor prima, modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer

$$\mathbb{Z}_n = \frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z}_n \oplus \frac{n}{p_2^{e_2}}\mathbb{Z}_n \oplus \dots \oplus \frac{n}{p_k^{e_k}}\mathbb{Z}_n.$$

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada skripsi ini dilakukan mengenai bagaimana hasil dekomposisi modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ sebagai jumlah langsung submodul-submodul primer. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dekomposisi primer dapat diterapkan pada modul yang lebih kompleks, seperti pada modul $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_n)$ dan dilihat bagaimana pola untuk hasil dekomposisinya.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1995). Algebra: An Approach via Module Theory. In S. Axler, F. . Gehring, & K. . Ribet (Eds.), *Spring* (Vol. 79, Issue 484). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0923-2

Amalia, D. (2018). Dekomposisi Siklis Modul Yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama [Skripsi tidak diterbitkan, Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang]. In *UIN Maulana Malik Ibrahim Malang*. http://etheses.uin-malang.ac.id/13315/

Andari, A. (2015). Teori Grup. In *UB Press*. UB Press. http://weekly.cnbnews.com/news/article.html?no=124000

Andari, A. (2017). Ring, Field dan Daerah Integral. In *UB Press*. UB Press.

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2003). *research Design : Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). Abstract Algebra. In *The Mathematical Gazette* (Vol. 24, Issue 258). https://doi.org/10.2307/3607096

Gallian, J. (2016). Contemporary abstract algebra/Joseph A. Gallian. In *Boston, MA* (8th ed.).

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2013). *Elements of Modern Algebra, Eight Edition* (8th ed.).

Kemenag. (2024). *Qur'an Kemenag*. Https://Quran.Kemenag.Go.Id/Surah/2/29 (Diakses 6 Oktober 2024).

Kemendikbud. (2016). *Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa KBBI VI Daring*. Https://Kbbi.Kemdikbud.Go.Id/Dekomposisi/ Diakses Pada 9 November 2023.

Nataprawira, G. (2022). Dekomposisi Yang Dibangun Secara Hingga Atas Ring Khusus. *UJMC*, *8*, 35–42.

Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An Intoduction to The theory of Numbers* (5th ed.).

Roman, S. (2008). *Advanced linear algebra, third edition* (S. Axler & K. . Ribet (eds.); 3rd ed., Vol. 135). Springer.

Shihab, M. Q. (2000). *Tafsir Mishbah "Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an" Jilid 1*. Lentera Hati.

Shihab, M. Q. (2002a). *Tafsir Al-Mishbah : Pesan, Kesan dan Keserasian al-Qur'an Jilid 6*. Lentera Hati.

Shihab, M. Q. (2002b). *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian al-Qur'an Jilid 11*. Lentera Hati.

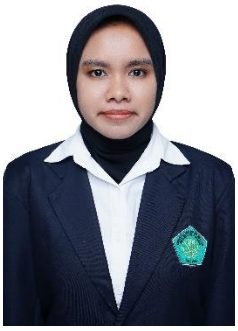
Shihab, M. Q. (2002c). *Tafsir Al Mishbah : Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Jilid 9*. Lentera Hati.

Shihab, M. Q. (2009). Al-Misbah "Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an" Jilid 15. In *V* (Vol. 15).

Wahyuni, S. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Gadjah Mada University Press.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *6*(2), 261. https://doi.org/10.31764/jtam.v6i2.6769

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Kharisma Mufidatus Solicha, lahir pada tanggal 23 Juli 2002 yang akrab dipanggil Kharisma. Penulis berasal dari Kabupaten Malang, tepatnya di Desa Banjarejo, Kecamatan Pagelaran. Penulis merupakan anak tunggal dari pasangan Suliadi dan Yuhanisah. Pendidikan formal yang telah ditempuhnya yaitu diawali dengan pendidikan sekolah dasar di SDN Banjarejo I dan lulus pada tahun 2014. Melanjutkan pendidikan jenjang sekolah menengah pertama di MTs Negeri Malang III (sekarang MTsN I Malang) dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan sekolah menengah atas di MAN 1 Malang dan lulus pada tahun 2020. Penulis kembali melanjutkan jenjang pendidikannya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswa, penulis mengikuti beberapa kepanitiaan dan komunitas di Program Studi Matematika serta aktif mengikuti ajang perlombaan. Selain itu, penulis juga mengawali pengalaman kerja sebagai guru olimpiade pada tahun 2022 dan tentor di sebuah lembaga bimbingan belajar pada tahun 2023 di Kota Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Kharisma Mufidatus Solicha
NIM	: 210601110071
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Dekomposisi Primer Modul $\mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$
Pembimbing I	: Intan Nisfulaila, M.Si.
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	06 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	26 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	08 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 Oktober 2024	ACC Bab I, II, dan III	4.
5.	14 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	15 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	6.
7.	16 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	7.
8.	18 Oktober 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	18 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	04 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	05 November 2024	Konsultasi Bab IV	11.
12.	14 November 2024	Konsultasi Bab IV	12.
13.	18 November 2024	Konsultasi Bab IV	13.
14.	25 November 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	14.
15.	25 November 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	15.
16.	28 November 2024	ACC Bab IV dan V	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	29 November 2024	ACC Seminar Hasil	17.
18.	05 Desember 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	18.
19.	04 Desember 2024	ACC Sidang Skripsi	19.
20.	20 Desember 2024	ACC Keseluruhan	20.

Malang, 20 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005