SIFAT KEPADATAN OPERATOR KONTINU TERBATAS DI RUANG BANACH

SKRIPSI

OLEH:
NAYAKA IBRAHIM
NIM. 210601110068

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT KEPADATAN OPERATOR KONTINU TERBATAS DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
NAYAKA IBRAHIM
NIM. 210601110068

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SIFAT KEPADATAN OPERATOR KONTINU TERBATAS DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh
NAYAKA IBRAHIM
NIM. 210601110068

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 22 November 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Achmad Nashichuddin, MA
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT KEPADATAN OPERATOR KONTINU TERBATAS DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh
NAYAKA IBRAHIM
NIM. 210601110068

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Seminar Proposal Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Mengikuti Sidang Skripsi
Tanggal 20 Desember 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M. Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M. Si	....
Anggota Penguji 3	: Achmad Nashichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nayaka Ibrahim
NIM	:	210601110068
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Sifat Kepadatan Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2024

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

06B73AKX730972919

Nayaka Ibrahim

NIM. 210601110068

MOTO

"Jalan menuju surga dimulai dari neraka."

Dante Alighieri

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

1. Kedua Orang Tua penulis yang senantiasa menemani, mengayomi, melindungi, membimbing, dan memberikan dukungan kapanpun dan di manapun penulis berada.
2. Teman-teman penulis atas beragam pengalaman yang telah diberikan mulai dari awal hingga saat ini.
3. Akun-akun *shitpost* dari berbagai jejaring media sosial seperti *YouTube*, *Twitter* (atau *X*), *Instagram*, maupun *Reddit* yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu namanya yang telah menghibur penulis.

Semoga tulisan sederhana ini dapat memberikan kesan di hati kalian bahwa penulis akan selalu mengingat kalian.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Penulis panjatkan puji syukur dan berterima kasih kepada Allah SWT atas rahmat dan bimbingan-Nya yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat Kepadatan Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach". Salawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun ke jalan kebenaran yaitu agama Islam. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang membantu dan memberikan bimbingan arahan selama proses penyusunan skripsi. Ucapan terima kasih disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I.
5. Achmad Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II.
6. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku penguji utama dalam seminar proposal.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
8. Orang tua dan seluruh keluarga
9. Seluruh mahasiswa program studi matematika angkatan 2021

Malang, 20 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\|\cdot\|$	: Norma
$\subseteq$	: Subhimpunan
$\subset$	: Subhimpunan Sejati
$\in$	: Anggota
$\notin$	: Bukan Anggota
$\times$	: *Cross*
$\rightarrow$	: Implikasi, Pemetaan, atau Konvergen
$\mapsto$	: Fungsi
$\leftrightarrow$	: Biimplikasi

ABSTRAK

Ibrahim, Nayaka. 2024. Sifat Kepadatan Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman., M.Si. (2) Achmad Nashichuddin., MA.

Kata kunci: Operator Kontinu Terbatas, Kepadatan, Ruang Banach

Suatu Operator yang menjadi sebuah pemetaan antar Ruang Banach dapat bersifat padat sesuai dengan jenis operator yang digunakan. Beberapa studi mendefinisikan sifat B sebagai sifat yang menandai kepadatan operator pada suatu Ruang Banach. Berbagai kajian di masa lampau telah merumuskan beberapa hipotesis mengenai bagaimana sifat kepadatan operator, atau sifat B, dapat disangkal berdasarkan berbagai kondisi lain. Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk menelaah beragam cara untuk menyangkal berlakunya sifat kepadatan operator di Ruang Banach dengan menganalisis teori-teori yang berkaitan, di antaranya; barisan basis, barisan konstanta, hingga kecembungan Ruang Banach. Hasil dari penelitian ini yaitu Ruang Banach yang bersifat Cembung, baik tegas maupun seragam, terbukti tidak memiliki operator yang bersifat padat terhadap Ruang Banach itu sendiri.

ABSTRACT

Ibrahim, Nayaka. 2024. On the Density of Continuous-Bounded Operators on Banach Spaces. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman., M.Si. (2) Achmad Nashichuddin., MA.

Keywords: Continuous-Bounded Operator, Dense, Banach Space

Banach Spaces can contain any operator which can be dense depending on what kind of operator is used. Several studies define property B as a property that marks the denseness of an operator of any Banach Spaces. Previous literatures gave some examples of how property B can be disproved by using certain conditions. Therefore, this study seeks to analyze on how property B is indeed, fails to hold on some Banach Spaces by using the existing other theories, such as; bases sequences, constant sequences, and even the convexity of Banach Spaces. The result of this study is how any uniformly and strictly convex Banach Spaces cannot have continuous-bounded operators that are dense on the Banach Spaces they are equipped to.

مستخلص البحث

إبراهيم، ناياكا ٢٠٢٤. خصائص الكثافة للمشغلات المتصلة المقيدة في فضاءات باناخ. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. ا المشرفة: (١) د. خير الرحمن، الماجستير (٢) أحمد ناصح الدين، الماجستيرر.

الكلمات المفتاحية: المشغل، المتصل، المقيد، الكثافة، فضاء الباناخ

يمكن أن يكون المشغِّل الذي هو عبارة عن تعيين بين فضاءات الباناخ كثيفًا وفقًا لنوع المشغِّل المستخدم. تعرّف بعض الدراسات خاصية B على أنها الخاصية التي تميز كثافة المشغلات على فضاء الباناخ. صاغت الدراسات السابقة العديد من الفرضيات حول كيفية نفي خاصية كثافة المشغل، أو الخاصية B، في ظل الظروف الأخرى المختلفة. وبالتالي، هدفت هذه الدراسة إلى فحص الطرق المختلفة لنفي خاصية الكثافة المشغل في فضاءات الباناخ من خلال تحليل النظريات ذات الصلة، بما في ذلك الصفوف الأساسي، والصفوف الثابتة، وتحدب فضاءات باناخ. والنتيجة التي توصلت إليها هذه الدراسة هي أن فضاءات الباناخ المحدبة، سواء كانت محدبة بشكل صارم أو منتظم، ثبت عدم وجود مشغلات كثيفة في فضاء الباناخ نفسه.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu Ruang Vektor X atas lapangannya, baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ merupakan himpunan tak kosong X yang beranggotakan dengan vektor dan memiliki dua operasi aljabar, yaitu penjumlahan antar vektor dan perkalian dengan skalar terhadap lapangannya (Kreyszig, 1978). Ruang Vektor memiliki sifat operasi seperti komutatif, asosiatif, dan distributif. Selain itu, Ruang juga memiliki sifat dilengkapi dengan adanya vektor nol, vektor negatif, maupun identitas (Anton & Rorres, 2013).

Ruang Vektor X dapat memiliki berbagai jenis fungsi dan pemetaan. Ruang Vektor X yang memiliki sebuah fungsi $\|\cdot\|$, yang mana apabila fungsi tersebut memenuhi keempat syarat norma, maka X juga bisa disebut sebagai Ruang Bernorma X. Ruang Bernorma X dapat dituliskan dengan notasi $(X, \|\cdot\|)$ (Kreyszig, 1978).

Selain fungsi norma, Ruang Vektor X juga dapat memiliki sebuah fungsi atau pemetaan Operator. Secara singkat, pemetaan T disebut sebagai Operator Linier apabila pemetaan tersebut mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian (Kreyszig, 1978). Di samping itu, Operator T juga dapat bersifat kontinu maupun terbatas.

Bishop dan Phelps (1960) sebelumnya telah meneliti mengenai Ruang Banach. Penelitian mereka berisi kajian tentang kepadatan fungsi norma di Ruang Banach. Lalu, di bagian akhir penelitian, mereka mengutarakan sebuah pertanyaan mengenai kepadatan suatu Operator Linier di sebarang Ruang Banach.

Pada tahun-tahun berikutnya, Lindenstrauss (1963) mendefinisikan sifat B untuk menjawab pertanyaan tersebut. Secara sekilas, sifat B dapat dijelaskan sebagai kondisi yang berlaku di saat kumpulan dari Operator Linier yang kontinu terbatas dari Ruang Banach bersifat padat. Lindenstrauss (1963) menjelaskan bahwa sifat B sangat bergantung kepada *convexity* atau kecembungan dari norma Ruang Banach.

Schachermayer (1983) telah mengkaji mengenai kepadatan pada Ruang banach. Pada penelitiannya, Schachermayer (1983) meneliti bagaimana fungsi norma dan Operator dapat bersifat padat berdasarkan domain mereka. Lalu, Schachermayer (1983) juga memberikan satu contoh penyangkal bagi sifat B melalui sudut pandang fungsi-fungsi kontinu pada interval tertutup $[0, 1]$.

Pada tahun 1998, Aguirre juga memberikan pendekatan yang lebih mudah dalam contoh penyangkal bagi sifat B. Pada penelitiannya, Aguirre memilih sebuah barisan khusus yang nantinya akan mengantarkan kepada konsep kecembungan dari norma Ruang Banach. Penelitian yang dilakukan oleh Aguirre (1998) ini memiliki kesimpulan yaitu setiap Ruang Banach yang bersifat cembung tegas gagal memenuhi kriteria sifat B.

Salah satu dari penelitian terakhir mengenai sifat B adalah penelitian yang dilakukan oleh Fovelle (2024). Di dalam penelitiannya, Fovelle (2024) memperjelas dan menyempurnakan contoh penyangkal yang telah diteliti oleh Aguirre (1998), yaitu mengenai kecembungan dari Ruang Banach. Berbeda dengan penelitian yang dilakukan oleh Bishop dan Phelps (1960) dan juga Lindenstrauss (1963), Fovelle (2024) lebih mengerucutkan topik penelitian tentang teorema-teorema yang berakibat pada tidak berlakunya sifat B.

Namun, pada bagian akhir penelitian yang dikerjakan oleh Fovelle masih menyisakan beberapa permasalahan dan pertanyaan. Pertanyaan-pertanyaan mengenai berlakunya sifat B di Ruang Banach berdimensi tak hingga belum memiliki jawaban yang jelas. Dengan demikian, berdasarkan berbagai studi yang dilakukan, peneliti hendak menyelidiki permasalahan tersebut, tepatnya mengenai bagaimana penyangkalan sifat B pada operator kontinu terbatas di Ruang Banach.

Suatu konsep dapat diidentifikasi dengan sifat-sifat yang melekat pada konsep tersebut, tak terkecuali konsep dalam matematika maupun konsep manusia dalam pandangan agama. Dalam agama Islam dijelaskan bahwa terdapat banyak jenis dari manusia, seperti manusia saleh, munafik, beruntung, merugi, juga beriman. Dengan mengikuti deskripsi atau sifat-sifat yang ada, benar bahwa konsep tersebut memang tergolong dalam kelompok yang dimaksud.

Awal dari Surah Al-Anfal, tepatnya Surah Al-Anfal Ayat 2 (Kementrian Agama, 2024) adalah salah satu dari sekian banyaknya firman Allah yang berisi tentang sifat-sifat seorang manusia beriman. Surah Al-Anfal Ayat 2 (Kementrian Agama, 2024) memiliki terjemahan sebagai berikut:

> "*Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah manusia yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati manusia, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman manusia (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah manusia bertawakkal.*"

Tafsir Ibnu Katsir (2015) mencoba menjelaskan lebih detail mengenai ayat tersebut, yang mana memiliki terjemahan sebagai berikut:

> "*Berkenaan dengan firman-Nya ini, Ali bin Abi Thalhah mengatakan dari Ibnu Abbas, ia berkata: "Tidak masuk ke dalam hati orang-orang munafik sedikit pun dari mengingat Allah saat mereka melaksanakan kewajiban-kewajibannya. Mereka juga tidak beriman sedikit pun terhadap ayat-ayat Allah, tidak bertawakkal, tidak salat saat sendirian dan tidak menunaikan zakat dalam harta kekayaan mereka. Maka Allah memberitahukan, bahwa mereka bukanlah orang-orang yang beriman.".*"

Dapat diperhatikan bahwa manusia munafik memiliki berbagai sifat tercela yang terwujud dalam perbuatan mereka, yaitu tidak mengingat Allah dan tidak pula beriman kepada-Nya. Hal ini sangat berkebalikan dengan sifat manusia beriman yang dijelaskan memiliki sifat terpuji yang terwujud dalam perbuatan mereka, yaitu senantiasa mengingat Allah dan beriman kepada-Nya.

Surah Al-Anfal Ayat 2 (Kementrian Agama, 2024) dengan jelas menggambarkan sejumlah sifat yang melekat pada diri orang-orang yang beriman. Ayat ini menekankan bahwa manusia yang beriman adalah individu-individu yang hatinya bergetar dan bergetar ketika nama Allah disebutkan, yang mencerminkan kedalaman penghormatan dan kekaguman yang manusia miliki terhadap Sang Pencipta. Pengalaman spiritual ini tidak hanya menunjukkan kecintaan manusia kepada Allah, tetapi juga menandakan bagaimana hubungan manusia dengan-Nya senantiasa hidup dan dinamis.

Selain itu, ketika ayat-ayat Allah dibacakan kepada manusia, iman manusia akan bertambah, yang menegaskan bahwa keyakinan manusia tidak bersifat statis. Sebaliknya, iman itu dapat mengalami pasang surut, meningkat atau menurun tergantung pada kondisi dan situasi yang manusia hadapi. Dalam konteks ini, penting untuk dicatat bahwa manusia selalu bertawakkal kepada Allah, yang berarti manusia mempercayai sepenuhnya bahwa segala sesuatu yang terjadi dalam kehidupan manusia adalah bagian dari rencana dan kehendak-Nya yang Maha Bijaksana.

Kesetiaan dan keteguhan manusia dalam menghadapi berbagai cobaan dan ujian hidup juga menjadi bukti nyata dari sifat-sifat luhur yang dimiliki oleh manusia beriman, yang sesuai dengan ajaran yang terkandung dalam Alquran.

Dengan demikian, ayat ini mengajak para manusia untuk merenungkan betapa pentingnya menguatkan iman kita dan senantiasa memperbaiki hubungan setiap manusia dengan Allah dalam setiap aspek kehidupan.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah bagi penelitian ini yaitu bagaimana sifat B pada operator kontinu terbatas di Ruang Banach dapat disangkal?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari dilaksanakannya penelitian ini adalah mengetahui bagaimana cara menyangkal sifat B pada Operator kontinu terbatas di Ruang Banach.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan menghasilkan manfaat-manfaat, baik dari sisi teoritis maupun sisi praktis. Manfaat-manfaat tersebut antara lain:

i. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat teoritis berupa sumbangsih ilmu pengetahuan, terutama terhadap konsep operator di Ruang Banach sebagai bidang kajian Matematika.

ii. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat praktis berupa sebagai salahsatu referensi atau sumber rujukan yang dapat dipertimbangkan oleh pembaca dalam ranah penulisan ilmiah secara umum.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan dibatasi pada Ruang Banach, Operator, dan sifat B. Lebih jelasnya Ruang Banach Cembung, baik yang tegas maupun seragam. Selain itu, Operator yang akan dikaji adalah Operator Linier yang bersifat kontinu dan terbatas. Di samping itu, penelitian ini akan mengkaji sifat B, tepatnya dalam cara penyangkalannya.

1.6 Definisi Istilah

Proposal ini memuat sebagian istilah-istilah khusus yang merujuk kepada konsep-konsep dalam matematika. Secara singkat, dari beberapa istilah khusus dalam proposal ini beserta dengan penjelasannya sebagai berikut.

i. Norma

   Untuk x dan y adalah sebarang anggota Ruang Vektor X, lalu α adalah suatu skalar atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$, suatu fungsi $\|\cdot\|$ dapat dikatakan sebagai norma apabila memenuhi $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, dan juga $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Norma dari x dinotasikan sebagai $\|x\|$.

ii. Ruang Banach

   Sebuah Ruang Bernorma yang lengkap atau memenuhi sifat kelengkapan, tepatnya setiap Barisan Cauchy dalam Ruang Bernorma tersebut konvergen terhadap suatu elemen di Ruang Bernorma itu sendiri.

iii. Operator Linier

   Pemetaan yang terdapat di suatu Ruang Bernorma yang mengawetkan dua operasi aljabar, yaitu penjumlahan dan perkalian.

v. Padat terhadap Ruang Bernorma

Misalkan $\bar{M} \subseteq X$, misalkan $\bar{M}$ merupakan kumpulan dari titik akumulasi dari suatu Ruang Bernorma X, jika $\bar{M} = X$, maka X disebut bersifat padat.

vi. Sifat B

Misalkan X dan Y adalah Ruang Banach, jika kumpulan dari Operator kontinu terbatas T yang memetakan dari Ruang Banach X ke Ruang Banach Y bersifat padat, maka Ruang Banach X disebut memiliki sifat B.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Teori

2.1.1 Ruang Vektor

DEFINISI 2.1 (Anton & Rorres, 2013)

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong. Untuk setiap x, y, dan $z \in X$ juga k dan m berupa skalar atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ yang memenuhi $x + y$ juga anggota di X

i. $x + y = y + x$.

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

iii. Terdapat suatu vektor nol, yaitu $0 \in X$ sedemikian sehingga $0 + x = x$.

iv. Untuk setiap $x \in X$ terdapat suatu $-x \in X$ sedemikian sehingga

$x + (-x) = 0$.

v. kx juga anggota di X.

vi. $k(x + y) = kx + ky$.

vii. $(k + m)x = kx + mx$.

viii. $k(mx) = (km)x$.

ix. $1x = x$.

Maka X dapat disebut sebagai Ruang Vektor X.

2.1.2 Norma

DEFINISI 2.2 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X merupakan Ruang Vektor. Untuk setiap x dan y adalah sebarang anggota Ruang Vektor X dan terdapat sebuah skalar α atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Suatu fungsi $\|\cdot\|$ disebut sebagai norma apabila memenuhi

i. $\|x\| \geq 0$

ii. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

CONTOH 2.3 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X merupakan Ruang Vektor. Misalkan x dan $y \in X$ adalah n-*tuple* dengan $x = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ dan $y = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ dengan $(1 \leq i, j < n < \infty)$ dan α adalah sebarang skalar atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ fungsi $\|x\| = \underset{i}{max}|\theta_i|$ merupakan norma di Ruang Vektor X.

Lebih jelasnya, misalkan θ_j dan φ_j masing-masing merupakan nilai maksimum dari θ_i dan φ_i untuk $(1 \leq i, j < n < \infty)$. Perhatikan bahwa

i. $|\theta_j| \geq 0$, dengan $|\theta_j| = \underset{i}{max}|\theta_i| = \|x\|$. Oleh karena itu, $\|x\| \geq 0$.

ii. Jika $\|x\| = 0$ maka $\|x\| = \underset{i}{max}|\theta_i| = |\theta_j| = 0$, jadi $\theta_j = 0$. Sebaliknya, jika $\theta_j = 0$, maka $|\theta_j| = 0$, lalu $0 = |\theta_j| = \underset{i}{max}|\theta_i| = \|x\|$.

iii. $\|\alpha x\| = \underset{i}{max}|\alpha\theta_i| = |\alpha||\theta_j| = |\alpha|\|x\|$.

iv. $\|x + y\| = \underset{i}{max}|\theta_i + \varphi_i| = |\theta_j + \varphi_j| \leq |\theta_j| + |\varphi_j|$

$$\|x+y\| = \max_i |\theta_i| + \max_i |\varphi_i| = \|x\| + \|y\|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dengan demikian, benar bahwa $\|x\|$ merupakan norma di Ruang Vektor X.

2.1.3 Ruang Bernorma

DEFINISI 2.4 (Kreyszig, 1978)

Suatu Ruang Vektor X yang dilengkapi dengan fungsi norma $\|\cdot\|$ disebut sebagai Ruang Bernorma X dan dapat dituliskan sebagai $(X, \|\cdot\|)$.

2.1.4 Ruang Banach

DEFINISI 2.5 (Stein & Shakarchi, 2011)

Misalkan (x_n) dan (x_m) Barisan Cauchy di Ruang Vektor X, jika

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ sebagaimana } n, m \to \infty,$$

terdapat suatu nilai konvergensi $x \in X$ sedemikian sehingga berlaku

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ sebagaimana } n \to \infty$$

maka Ruang Vektor X juga didefinisikan sebagai Ruang Banach X.

DEFINISI 2.6 (Beuzamy, 1982)

Misalkan X merupakan Ruang Banach, apabila untuk sebarang $x, y \in X$ yang tak kolinier, yaitu $x \times y \neq 0$, berlaku

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$

maka X merupakan Ruang Banach Cembung Tegas.

DEFINISI 2.7 (Beuzamy, 1982)

Misalkan X merupakan Ruang Banach, apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x, y \in X$ jika

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \text{ berlaku } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

maka X merupakan Ruang Banach Cembung Seragam.

Misalkan Z adalah suatu Ruang Banach Cembung Tegas berdimensi tak hingga, sudah pasti Z adalah subruang dari Ruang Banach X. Selain itu, Beuzamy (1982) mengemukakan bahwa Ruang Banach Cembung Tegas mengimplikasikan Ruang Banach Cembung Seragam karena berdasarkan Definisi 2.6 misalkan x dan y di X yang tak kolinier dapat pilih δ sedemikian sehingga

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \leq 2 - 2\delta$$

$$\frac{1}{2}(||x + y||) \leq 1 - \delta$$

Yang mana menghasilkan Definisi 2.7

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\| \leq 1 - \delta\,.$$

Perhatikan bahwa, misalkan X Ruang Banach Cembung Tegas, maka berdasarkan penjelasan di atas, jelas bahwa X Ruang Banach Cembung Seragam.

2.1.2 Operator Linier

Operator Linier dapat dideskripsikan sebagai sebuah pemetaan pada suatu Ruang Vektor, lebih khususnya Ruang Bernorma.

DEFINISI 2.8 (Kreyszig, 1978)

Untuk setiap x, y anggota domain T dan skalar α mengawetkan operasi aljabar Ruang Vektor, jika $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T x$, maka T adalah sebuah Operator Linier.

CONTOH 2.9 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X dan Y merupakan ruang bernorma. Pemetaan Nol, $0: X \rightarrow Y$, yang didefinisikan dengan $0(x) = 0$ untuk setiap x dan $y \in X$ dan skalar α merupakan sebuah Operator Linier karena

i. $0(x + y) = 0$ dan $0(x) + 0(y) = 0 + 0 = 0.$

ii. $0(\alpha x) = 0$ dan $\alpha 0(x) = \alpha 0 = 0.$

DEFINISI 2.10 (Kreyszig, 1978)

Suatu *linear functional* f merupakan Operator Linier f dengan domain berupa Ruang Vektor dan range atas lapangan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$**.**

DEFINISI 2.11 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X dan Y ruang bernorma dengan $D(T) \subset X$. Misalkan $T: D(T) \rightarrow Y$ merupakan suatu operator T. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

untuk setiap $x \in D(T)$ memenuhi

$$\|x - x_0\| < \delta$$

maka T disebut operator kontinu di sebuah titik $x_0 \in D(T)$

DEFINISI 2.12 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X dan Y ruang bernorma dengan $D(T) \subset X$. Misalkan $T: D(T) \rightarrow Y$ merupakan suatu operator T. Jika terdapat suatu bilangan real c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(T)$ berlaku

$$\|Tx\| \leqq c\|x\|$$

maka T disebut operator terbatas.

LEMMA 2.13 (Kreyszig, 1978)

Misalkan T merupakan operator terbatas. Maka norma dari T dapat dituliskan sebagai $\|T\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$.

TEOREMA 2.14 (Kreyszig, 1978)

Misalkan $T: D(T) \to Y$ merupakan operator, dengan $D(T) \subset X$ dan $X,\ Y$ merupakan Ruang Bernorma, maka

i. T kontinu jika dan hanya jika T terbatas.

ii. Jika T kontinu di satu titik, maka T kontinu.

BUKTI

i. Apabila $T = 0$ maka jawaban sudah jelas. Misalkan $T \neq 0$. Maka $\|T\| \neq 0$. Asumsikan T terbatas untuk sebarang $x_0 \in D(T)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dengan menimbang

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ di mana } \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

maka diperoleh

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \varepsilon.$$

Sebaliknya, asumsikan T kontinu di sebarang $x_0 \in D(T)$. Maka, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$, lalu untuk setiap $x \in D(T)$ berlaku $\|x - x_0\| \leq \delta$. Kemudian, pilih sebarang $y \neq 0$ di $D(T)$ dan pilih $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y$. Maka $\|x - x_0\| = \delta$. Selanjutnya,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}\right) y \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|.$$

Merujuk kepada

$$\|Tx - Tx_0\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| \text{ dan } \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$$

diperoleh $\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$. Maka berdasarkan Definisi 2.12., telah dibuktikan bahwa T kontinu jika dan hanya jika T terbatas ■.

ii. Dikarenakan poin a berlaku untuk sebarang titik terhadap T, maka jelas bahwa jika T kontinu di satu titik, maka T kontinu ■.

Di sisi lain, istilah khusus *norm-attaining operator* atau operator serupa norma merujuk kepada permasalahan yang muncul dari studi mengenai operator linier di suatu Ruang Banach.

DEFINISI 2.15 (Fovelle, 2024)

Misalkan X dan Y merupakan Ruang Banach dan T merupakan operator dari X dan Y. Jika operator T memenuhi $\|Tx\| = \|T\|$

maka suatu himpunan dari operator T disebut sebagai *norm-attaining operator* atau operator serupa norma dari X dan Y yang bisa dituliskan sebagai $NA(X, Y)$. Namun, pada penelitian yang lain disebutkan bahwa selain operator T perlu memenuhi kriteria sebelumnya, terdapat kriteria lain yang perlu dimiliki, yakni untuk setiap $x \in X$, $\|x\| = 1$ (Schachermayer, 1983).

DEFINISI 2.16 (Kreyszig, 1978)

Himpunan seluruh *linear functional* f terbatas dari Ruang Bernorma X dengan norma berupa

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

disebut sebagai Dual dari X, dituliskan sebagai X'. Lalu, Dual dari Dual dari X, tepatnya $(X')'$ atau X'', dapat disebut sebagai Bidual dari X.

DEFINISI 2.17 (Kreyszig, 1978)

Suatu Ruang Bernorma X dikatakan bersifat Refleksif apabila $X'' = X$.

DEFINISI 2.18 (James, 1972)

Suatu Ruang Linier Bernorma X dikatakan bersifat *finitely representable* terhadap Ruang Linier Bernorma Y jika untuk setiap subhimpunan berdimensi hingga X_n dari X dan $\lambda > 1$, terdapat T dari X_n ke Y sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X_n$ berlaku $\lambda^{-1}\|x\| \leqq \|T(x)\| \leqq \lambda\|x\|$.

DEFINISI 2.19 (James, 1972)

Ruang Banach X dikatakan bersifat super refleksif apabila tidak bersifat *finitely representable*.

2.1.3 Norma Asimtot Cembung Seragam

DEFINISI 2.20 (Roman, 2008)

Jika $\dot{X} \subseteq X$, maka $dim(X/\dot{X})$ disebut sebagai kodimensi dari $\dot{X}$ terhadap X dan dapat dituliskan sebagai $codim(\dot{X})$ atau kodimensi $(\dot{X})$.

DEFINISI 2.21 (Royden & Fitzpatrick, 2009)

Misalkan X Ruang Bernorma, maka bola satuan tertutup (*closed unit sphere*) dari X dapat dituliskan sebagai $S_X = \{x \in X | \|x\| = 1\}$.

DEFINISI 2.22 (Dilworth, dkk, 2017)

Misalkan X dan Y adalah Ruang Banach, jika untuk setiap $t > 0$ terdapat sebuah $\delta = \delta(t)$ untuk setiap $x \in S_X$, yaitu bola satuan tertutup dari X, terdapat $Y \subset X$ yang merupakan kodimensi (Y) berdimensi hingga sedemikian sehingga

$$\inf_{y \in S_Y} \|x + ty\| > 1 + \delta(t)$$

maka norma dari Ruang Banach X termasuk dalam kategori *asymptotically uniformly convex* atau asimtot cembung seragam.

DEFINISI 2.23 (Dilworth, dkk, 2017)

Jika untuk setiap $t \in (0,\, 1)$ terdapat $\delta = \delta(t)$ untuk setiap $x \in S_X$ terdapat $Y \subset X$ sedemikian sehingga berlaku

$$\inf_{y \in S_Y} max\{\|x + ty\|, \|x - ty\|\} \geq 1 + \delta(t),$$

maka sebuah norma dari X dapat dikatakan sebagai *asymptotically midpoint uniformly convex (AMUC*) atau norma asimtot titik tengah cembung seragam.

DEFINISI 2.24 (Fovelle, 2024)

Misalkan X merupakan Ruang Banach dan $cof(X)$ menandakan himpunan seluruh subruang tertutup dari X dengan kodimensi berhingga. Untuk $x \in S_X$ dan $t \in \mathbb{R}^+$, misalkan

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_X(x, t) &= \sup_{E \in cof(X)} \inf_{y \in S_Y} max\{\|x + ty\|, \|y - ty\|\} - 1 \\ &= \sup_{E \in cof(X)} \inf_{\substack{y \in S_Y \\ \|y\| \geq 1}} max\{\|x + ty\|, \|y - ty\|\} - 1 \end{aligned}$$

dengan persamaan bagian kedua beriringan dengan pernyataan bahwa, untuk setiap $y \in Y$, peta

$$t \in (0, \infty) \mapsto max\{\|x + ty\|, \|x - ty\|\}$$

adalah bersifat tak menurun atau *non-decreasing*. Sehingga, jika $\tilde{\delta}_X(x,\, t) > 0$ untuk setiap $x \in S_X$ dan $t > 0$, maka norma dari X disebut sebagai *locally asymptotically midpoint uniformly convex* (*locally AMUC*) atau norma asimtot titik tengah lokal cembung seragam.

TEOREMA 2.25 (Gowers, 1990)

Jika $T: X \to l_p$ adalah suatu pemetaan operator serupa norma, maka terdapat sebuah n sedemikian sehingga $Te_n = 0$.

BUKTI

Misalkan X adalah ruang barisan real $(x_i)_1^\infty$ sedemikian sehingga jika $(x_i^*)_1^\infty$ meupakan $(x_i)_1^\infty$ yang telah diatur menjadi barisan menurun maka

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} i^{-1}}\right) = 0$$

dan norma dari x yaitu

$$||x|| = \underset{n\to\infty}{max}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} i^{-1}}\right).$$

Asumsikan $T: X \to l_p$ adalah operator serupa norma. Pilih $x = (x_i)_1^\infty \in X$ juga $||x|| = 1$ dan $||Tx|| = ||T||$. Karena $(x_i)_1^\infty$ merupakan barisan menurun, maka $x_n \leq x_1 \leq 1$. Jika $(x_i)_1^\infty$ pada akhirnya bernilai nol, maka misalkan n merupakan indeks terkecil sedemikian sehingga $a_n = 0$. Lalu untuk $\delta \leq n^{-1}$ dimiliki $||x \pm \delta e_n|| = ||x|| \leq 1$. Di sisi lain, andaikan x_n tidak akan bernilai nol, pilih m sedemikian sehingga untuk suatu $n \geq m$, $\sum_1^n x_i + 1 \leq \sum_i^n i^{-1}$. Maka terdapat suatu $n \geq m$ sedemikian sehingga $x_n < x_{n-1}$, karena jika tidak, ekspresi $\sum_{i=1}^n x_i \,/ \sum_{i=1}^n i^{-1}$ tidak bersifat terbatas.

Untuk suatu n, jika $0 < \delta < x_{n-1} - x_n \leq 1$, maka $||x \pm \delta e_n|| \leq 1$. Karena l_p bersifat cembung tegas, maka pernyataan yang berlaku adalah $Te_n = 0$ atau

$$||T(x+\delta e_n)|| + ||T(x-\delta e_n)|| > 2||Tx||.$$

Yang mana peryataan kedua tidak memenuhi karena T seharusnya berupa operator serupa norma. Dengan demikian $Te_n = 0$ ■.

2.1.4 Padat

Misalkan M serupakan subhimpunan dari Ruang Bernorma X. Titik $x_0 \in X$ (yang belum tentu $x_0 \in M$) disebut sebagai titik akumulasi dari M jika setiap ketertanggaan dari x_0 memuat setidaknya satu titik $y \in M$ yang berbeda dari x_0. Di samping itu, himpunan yang beranggotakan elemen dari M dan juga titik akumulasi dari M dinotasikan sebagai $\overline{M}$, yaitu *closure* atau penutup dari M.

DEFINISI 2.26 (Kreyszig, 1978)

Sebuah subhimpunan M dari Ruang Bernorma X disebut bersifat *dense* atau padat jika $\overline{M} = X$.

2.1.5 Basis dan Barisan

DEFINISI 2.27 (Kreyszig, 1978)

c_0 adalah ruang dari seluruh barisan skalar yang konvergen ke nol.

DEFINISI 2.28 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah Ruang Vektor. n-tupel yang bebas linier dari vektor-vektor di X disebut sebagai basis dari X.

TEOREMA 2.29 (Pelcyńzski & Bessaga, 1991)

Setiap Ruang Bernorma berdimensi tak hingga dilengkapi dengan suatu basis.

BUKTI

Misalkan X Ruang Bernorma, tentunya terdapat suatu anggota berupa vektor. Misalkan $S \subseteq X$ merupakan subruang berdimensi tak hingga yang beranggotakan vektor-vektor s_i yang berupa basis bebas linier bagi S. Sehingga, misalkan $s' = \bigcup_i s_i$, maka jelas bahwa $s' \in S$ juga s' adalah batas atas dari S. Oleh sebab itu, karena s_i bebas linier maka s' juga bebas linier dan membangun di S, terlebih lagi di X. Dengan demikian, s' merupakan basis bagi S maupun X ■.

DEFINISI 2.30 (Fovelle, 2024)

Misalkan (x_n) merupakan basis dari Ruang banach X. Jika setiap permutasi $(x_{\sigma(n)})$ adalah basis dari X, ekuivalen dengan basis (x_n), maka (x_n) dapat dikatakan bersifat simetris.

DEFINISI 2.31 (Kalton, 1969)

Sebuah barisan (x_n) disebut regular apabila terdapat sebuah ketertanggaan V dari 0 sedemikian sehingga $(x_n) \notin V$ untuk setiap n.

DEFINISI 2.32 (Kalton, 1969)

Sebuah barisan reguler (x_n) yang terbatas juga bisa disebut sebagai *normalized sequence* atau barisan yang ternormalisasi.

PROPOSISI 2.33 (Aguirre, 1998)

Misalkan Y adalah Ruang Banach yang memiliki barisan (y_n) yang simetris ternormalisasi yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l^1. Maka terdapat suatu *admissible sequence* w dan operator $T \in L(d_*(w), Y)$, yaitu ruang dari operator linier yang memetakan $d_*(w)$ ke Ruang Banach Y, sedemikian sehingga

$$Te_n = y_n.$$

BUKTI

Definisikan utnuk $w = 1/n$ *admissible sequence* adalah

$$d_*(w) = \left\{x = (x_n) \in c_0; \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k} = 0\right\}$$

dengan $\tilde{x}_n$ berupa $|x_n|$ yang *decreasing*. Lalu, definisikan

$$\|x\| = \frac{sup}{n} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k}{\sum_{k=1}^{n} w_k}.$$

Perhatikan bahwa, karena (y_n) tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l^1, maka terdapat suatu barisan $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)y_n$ di Y yang belum tentu konvergen. Selanjutnya, atur suku-suku dari (y_n) sedemikian sehingga $w(n) \geq 0$ untuk setiap n yang mana $w(n)$ sekarang merupakan sebuah barisan menurun. Hal ini menyebabkan (y_n) sekarang konvergen.

Di samping itu, definisikan $x = \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k$ juga $T(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)y_k$ dengan tujuan menunjukkan bahwa T terbatas pada barisan yang diberikan. Tetapkan $\left||x|\right| \leq 1$ dan y^* adalah sebarang *functional* dari unit bola Y^*. Lalu, anggap sebuah permutasi bilangan bulat π memenuhi $\pi(k) \leq n$ untuk setiap $k \leq n$, dan $\left|y^*\left(y_{\pi(1)}\right)\right| \geq \left|y^*\left(y_{\pi(2)}\right)\right| \geq \cdots \geq \left|y^*\left(y_{\pi(n)}\right)\right|$. Akhirnya, pilih suatu skalar μ_k sedemikian sehingga $|\mu_k| = 1$ dan $\left|y^*\left(y_{\pi(k)}\right)\right| = \mu_k y^*\left(y_{\pi(k)}\right)$ untuk $k \geq n$.

Selanjutnya, didapatkan

$$|y^*(Tx)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)y^*(y_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x(k)|\,|y^*(y_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left|x\left(\pi(k)\right)\right|\left|y^*\left(y_{\pi(k)}\right)\right|.$$

Karena $\left||x|\right| \leq 1$ dimiliki $\sum_{k=1}^{m} \left|x\left(\pi(k)\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{m} |w(k)|$ untuk $m \leq n$ juga

$$\begin{aligned}
|y^*(Tx)| &\leq \sum_{k=1}^{n} w(k)\left|y^*\left(y_{\pi(k)}\right)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y^*\left(y_{\pi(k)}\right) = y^*\left(\sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y_{\pi(k)}\right) \\
&\leq \left\|\left(\sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y_{\pi(k)}\right)\right\| \leq K\left\|\left(\sum_{k=1}^{n} w(k) y_{\pi(k)}\right)\right\| \leq KM
\end{aligned}$$

di mana K adalah konstanta dari (y_n) dan tetapkan

$$M = \sup\left\{\left|\left|\left(\sum_{k=1}^{n} w(k)y_k\right)\right|\right| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Karena $y^* \in Y^*$ berupa sebarang *functional* maka didapatkan $||Tx|| \leq KM$ ■.

TEOREMA 2.34 (Gurarii & Gurarii, 1971)

Misalkan $\{e_k\}_1^\infty$ merupakan barisan ternormalisasi di Ruang Banach Cembung Seragam X. Maka terhadap suatu ekspansi $x \in X$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, dengan $||e_i|| = 1$ dan suatu nilai $c > 0$ dimiliki pertidaksamaan

$$||x|| \leq c\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

BUKTI

Berdasarkan induksi matematika, jelas bahwa untuk $k = 1$ dan $k = n$ pernyataan bersifat benar. Selanjutnya, akan dibuktikan pernyataan bersifat benar untuk $k = n + 1$. Tetapkan untuk sebarang (x_r) dan (y_r) di X dan suatu nilai c

$$||x_{n+1}||^p = ||x_r + y_r||^p \leq ||x_r||^p + ||y_r||^p$$

$$\leq c^p \sum_{k=1}^{r} |a_k|^p + c^p \sum_{k=r+1}^{n+1} |a_k|^p = c^p \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|^p.$$

Selain itu

$$||x_{n+1}|| = \left(||x_{n+1}||^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(c^p \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = c\left(\sum_{k=1}^{n+1} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} ■.$$

PROPOSISI 2.35 (Aguirre, 1998)

Misalkan Y merupakan Ruang Banach yang memuat barisan yang ternormalisasi (x_n) dengan parameter estimasi atas p, maka terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \leq c\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

BUKTI

Pilih barisan (x_n) yang simetris ternormalisasi yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l^1.

Lalu pilih Ruang Banach l_p seperti pada 2.3, yaitu $\|(x_n)\| = \left(\sum_n |x_n|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Lalu, definisikan $P_n\left(\sum_k a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$. Perhatikan bahwa

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{k=1} a_k x_k\right)\right\| = \left\|P_n P_m\left(\sum_{k=1} a_k x_k\right)\right\|$$

$$= \left\|P_n\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right)\right\| \leq ||P_n|| \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\| \leq \sup_m ||P_m|| \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\|.$$

Kemudian, dengan menetapkan $c = \sup_m ||P_m||$ dan berdasarkan definisi norma pada l_p didapatkan

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \leq \sup_m ||P_m|| \left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\| = c\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \blacksquare.$$

2.1.6 Sifat *B*

DEFINISI 2.36 (Fovelle, 2024)

Misalkan X dan Y adalah Ruang Banach. Jika $NA(X, Y)$ bersifat padat di $\mathscr{L}(X,Y)$, yaitu ruang dari seluruh operator terbatas, untuk setiap Ruang Banach X maka Ruang Banach Y dikatakan memiliki sifat B.

2.2 Kriteria Muslim Dalam Alquran

Ketika Alquran menyebutkan bahwa hati orang beriman gemetar apabila nama Allah disebutkan, hal ini menggambarkan kepekaan atau ketelitian yang mendalam terhadap ayat-ayat-Nya. Di antara ayat-ayat Alquran yang menjebutkan tentang kriteria keimanan adalah Surah Al-Anfal ayat 2 yang memiliki arti

"*Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah manusia yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati manusia, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman manusia (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah manusia bertawakkal.*"

Ibnu Katsir dalam buku tafsirnya menyampaikan bahwa

""Dan kepada Rabblah mereka bertawakkal." Maksudnya, mereka tidak mengharap selain Dia, tidak menuju selain kepada-Nya, tidak berlindung kecuali di sisi-Nya, tidak meminta kebutuhan-kebutuhannya kecuali dari-Nya dan tidak mempunyai keinginan kecuali ditujukan kepada-Nya. Mereka pun mengetahui bahwa, apa yang dikehendaki Allah pastilah terjadi dan apa yang tidak Allah kehendaki tidaklah terjadi. Dialah yang berkuasa untuk mengatur kerajaan-Nya, Dialah yang tunggal (Esa) dan tiada sekutu bagi-Nya, tidak ada yang dapat menolak keputusan-Nya, dan Allahlah yang Mahacepat hisab (perhitungan)-Nya. Karena itulah Sa'id bin Jubair berkata: "Tawakkal kepada Allah merupakan himpunan (gabungan) dari keimanan"."

Berdasarkan penjelasan di atas, sudah selayaknya bagi setiap muslim untuk berserah diri kepada Tuhan semesta alam sebagai perwujudan keimanan mereka. Pernyataan ini diperjelas oleh Ibnu Katsir dengan adanya pendapat dari Sa'id bin Jubair tentang keimanan yang memiliki syarat berupa tawakkal kepada Allah.

Dalam Agama Islam iman bukanlah sekadar pengakuan lisan, tetapi harus diiringi dengan keyakinan yang mendalam di dalam hati dan ditunjukkan melalui amal perbuatan yang baik. Dengan kata lain, untuk menjadi seorang yang beriman, seseorang harus memenuhi kriteria-kriteria tertentu yang telah diajarkan dalam Alquran dan Hadis. Ini mencakup bertambahnya rasa takut terhadap Allah. Tanpa memenuhi sifat tersebut, keimanan seseorang dapat dipertanyakan. Oleh karena itu, pemahaman yang mendalam tentang sifat-sifat ini sangat penting untuk membentuk karakter dan kepribadian seorang Muslim yang sejati.

Selain dengan yang telah termaktub dalam ayat kedua, kriteria manusia beriman juga disebutkan di ayat-ayat selanjutnya dalam Surah Al-Anfal. Dalam Surah Al-Anfal Ayat 3 (Kementrian Agama, 2024) yang memiliki arti

"*Mereka yang melaksanakan salat, dan dari sebagian yang Kami anugerahkan kepada mereka, mereka nafkahkan*".

dalam buku tafsir Al-Mishbah karya Quraish Shihab (2001) dijelaskan bahwa ayat ini memperinci kriteria manusia beriman dalam ayat sebelumnya. Lebih jelasnya, ayat kedua menggambarkan kriteria dalam lubuk hati sedangkan ayat ketiga menggambarkan kriteria dalam perbuatan fisik, seperti melaksanakan salat yang mewakili hubungan dengan Sang Pencipta dan menafkahkan harta yang mewakili hubungan sesama manusia. Dalam bukunya dituliskan

"Selanjutnya jika ini telah tercapai sang mukmin menyadari kebesaran dan kekuasaan Tuhan-nya serta menyadari pula kelemahannya sesuai dengan kenyataan yang ada, yaitu bahwa segala persoalan kembali kepada Allah SWT. dan dengan demikian dia berserah diri kepada-Nya dan inilah yang dimaksud "dan kepada Tuhan mereka, mereka berserah diri." Setelah ini tercapai maka sang mukmin menempatkan dirinya pada posisi hamba Allah, tunduk dan taat kepada-Nya dan inilah salat yang sebenarnya yang merupakan hubungan antara hamba dengan Allah. Selanjutnya dia juga memperhatikan hubungannya dengan masyarakat, memenuhi kebutuhan mereka dengan menafkahkan rezeki yang Allah SWT. anugerahkan kepadanya baik harta, ilmu. Atau selainnya, dan inilah yang ditunjuk oleh ayat ketiga di atas "dan sebagian dari apa yang Kami anugerahkan kepada mereka, mereka nafkahkan."."

Dengan demikian, berdasarkan deskripsi melalui sifat-sifat manusia beriman dalam Alquran, seorang manusia, khususnya muslim layak disebut beriman apabila memiliki hubungan yang kuat dan baik kepada Allah dan sesama makhluk ciptaan-Nya.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Salah satu dari jenis Ruang Banach yang akan dikaji pada penelitian ini adalah Ruang Banach dengan norma barisan diskrit l^p, tepatnya

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_n |x_n|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 < p < \infty$$

yang jelas bahwa $x_n \in X$. Oleh karena itu, akan ditunjukkan bahwa $\|x_n\|$ merupakan norma Ruang Banach, tepatnya memenuhi sifat kelengkapan.

Perhatikan bahwa; ambil sebarang Barisan Cauchy (x_n) dan (x_m) di Ruang Bernorma X sehingga $\|x_n - x_m\| \to 0$, sebagaimana $n, m \to \infty$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|x_n + 0 - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \\ &= \|x_n - x - x_m + x\| = \|(x_n - x) - (x_m - x)\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \to 0.\end{aligned}$$

Mengacu pada kriteria norma yang menyebutkan bahwa $\|x\| \geq 0$, hal ini mengakibatkan baik $\|x_n - x\|$ ataupun $\|x_m - x\|$ keduanya konvergen ke nol sebagaimana $n, m \to \infty$ dan x merupakan nilai konvergensi dari X. Oleh sebab itu, telah ditunjukkan bahwa $\|x_n\|$ memenuhi sifat kelengkapan. Sehingga X dengan norma $\|x_n\|$ adalah Ruang Banach (Fovelle, 2024).

Perlu diketahui bahwa, norma di atas menggunakan parameter $1 < p < \infty$. Sehingga penggunaan parameter lain seperti $0 < p < 1$ layak diselidiki atas keabsahannya sebagai norma terhadap suatu Ruang Banach. Dengan demikian, runtutan pembuktian dari keempat kriteria norma masih perlu dilaksanakan sebagai dasar argument dalam proses penelitian ini.

Pada peneletian sebelumnya telah dipaparkan definisi dari sifat B. Secara singkat, jelas bahwa sifat B tidak akan berlaku apabila operator-norma dari suatu Ruang Banach tidak bersifat padat pada kondisi tertentu. Di samping itu, dengan menggunakan jenis barisan tertentu maka suatu Ruang Banach gagal memenuhi kriteria sifat B. Beberapa permasalahan yang akan dibuktikan di penelitian antara lain:

TEOREMA 2.37 (Fovelle, 2024)

Jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris yang ternormalisasi (x_n) yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l^1, maka X gagal memenuhi sifat B.

TEOREMA 2.38 (Fovelle, 2024)

Jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris (x_n) yang ternormalisasi dengan parameter estimasi atas $1 < p < \infty$, maka X gagal memenuhi sifat B.

TEOREMA 2.39 (Aguirre, 1998)

Sebuah Ruang Banach Cembung Tegas X yang memiliki subruang berdimensi tak hingga yang bersifat super refleksif gagal memenuhi sifat B.

AKIBAT 2.40 (Aguirre, 1998)

Setiap Ruang Banach Cembung Seragam X yang berdimensi tak hingga gagal memenuhi sifat B.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian bermetode kualitatif berjenis kajian kepustakaan. Secara umum penelitian yang direncanakan berisi pembuktian beberapa teorema mengenai sifat B pada Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach berdasarkan berbagai definisi, teorema, proposisi, maupun lemma yang telah ada sebelumnya.

3.2 Pra Penelitian

Pada bagian ini akan dikumpulkan berbagai jenis sumber referensi, baik buku hingga artikel, yang berhubungan dengan topik penelitian. Cabang keilmuan matematika seperti analisis real dan analisis fungsional adalah fokus utama dalam menyeleksi referensi yang ada. Di antara dari jurnal utama yang dijadikan sebagai referensi utama adalah jurnal artikel oleh Fovelle (2024) yang berisi keterkaitan $AMUC$ dengan sifat B.

Prosesi selanjutnya adalah pembuatan rancangan atau skema mengenai penelitian. Pada bagian ini informasi dan materi yang berhubungan erat dikelompokkan untuk memudahkan proses penelitian. Di samping itu, peneliti juga perlu memulai mengerucutkan topik dan pertanyaan utama penelitian guna memudahkan proses menganalisis permasalahan yang ada.

3.3 Tahapan Penelitian

Sesuai dengan definisinya, berlaku atau tidak berlakunya sifat B pada suatu Ruang Banach dikaji melalui *operator denseness* atau kepadatan operatornya. Dikarenakan Ruang Banach itu sendiri dapat bersifat *convex* atau cembung, maka norma dari Ruang Banach yang juga bersifat cembung sangat berpengaruh kepada kepadatan operator dan sifat B di dalamnya. Dalam beberapa dekade terakhir terdapat banyak matematikawan yang telah memberikan sejumlah contoh penyangkal bagi sifat B, diantaranya yaitu:

i. Himpunan fungsi kontinu di interval tutup $[0, 1]$.
ii. l^p dengan parameter $1 < p < \infty$ sebagai Ruang Banach diskrit.
iii. Ruang Banach Cembung Tegas.
iv. Ruang Banach Cembung Seragam berdimensi tak hingga.

Dengan demikian, berikut adalah tahapan penelitian yang akan dilaksanakan:

i. Mengidentifikasi objek penelitian berupa sifat B.
ii. Mengorganisir dan menganalisis berbagai teori yang berhubungan dengan objek penelitian.
iii. Menganalisis sifat B pada Ruang Banach diskrit yang menggunakan l^p dengan parameter $0 < p < 1$.
iv. Menganalisis sifat B pada Ruang Banach berdimensi hingga.
v. Menganalisis sifat B pada Ruang Banach berdimensi tak hingga.
vi. Merumuskan kesimpulan dari hasil pembahasan penelitian.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat Kepadatan Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach

Pada bagian ini akan dibuktikan Teorema 2.37, Teorema 2.38, Teorema 2.39, dan Akibat 2.40.

TEOREMA 2.37 (Fovelle, 2024)

Jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris yang ternormalisasi (x_n) yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l_1, maka X gagal memenuhi sifat B.

BUKTI

Perhatikan bahwa, Aguirre (1998) menjelaskan berdasarkan Definisi 2.15, operator serupa norma yang digunakan dalam Proposisi 2.35 dan Teorema 2.25 memiliki syarat $\left||Ty_n|\right| = \left||T|\right|$ juga $\left||y_n|\right| = 1$ sedangkan (y_n) sendiri konvergen lemah ke 0, oleh karena itu T merupakan operator yang tidak kompak. Selanjutnya, dengan menggunakan Proposisi berikut

PROPOSISI 4.1 (Lindenstrauss, 1963)

Misalkan X merupakan Ruang Banach Cembung Tegas dan terdapat operator tidak kompak dari c_0 ke X, maka X tak memiliki sifat B.

BUKTI

Misalkan $T \in P(c_0, X)$ dan $y \in c_0$ memenuhi $\left||y|\right| = 1$ dan $\left||T_y|\right| = \left||T|\right|$. Tetapkan $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ sebagai basis dari c_0. Maka terdapat sebuah bilangan bulat n sedemikian sehingga untuk $i > n$ $\left||y \pm e_i/2|\right| = 1$. Lalu, untuk i berlaku

$\left|\left|T_y \pm Te_i/2\right|\right| \leq \left|\left|T_y\right|\right|$ dan oleh karena itu, dengan X yang cembung tegas dimiliki $Te_i = 0$ untuk $i > n$. Sehingga setiap operator di $P(c_0, X)$ kompak.

Perhatikan bahwa, Proposisi 4.1 ini menggunakan cara yang sama seperti Teorema 2.25 untuk menunjukkan pemetaan oleh operator T pada barisan e bernilai 0. Namun, Proposisi 4.1 menggunakan e berupa basis yang sama dari subjeknya, yaitu c_0, sedangkan Teorema 2.25 membantu Proposisi 2.35 dalam hal penggunaan basis yang tidak sama dari subjeknya, dalam hal ini l_1. Dengan demikian, apabila Proposisi 4.1 menyatakan penggunaan basis yang sama mengakibatkan semua operator serupa norma bersifat kompak, sebaliknya, penggunaan basis yang berbeda tentunya mengakibatkan operator serupa norma bersifat tidak kompak. Sehingga sifat B gagal berlaku ■.

Oleh karena itu, pada Teorema 2.37 ini, berdasarkan Proposisi 2.35, Teorema 2.25, Proposisi 4.1, maka terbukti bahwa Jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris yang ternormalisasi (x_n) yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l_1, maka X gagal memenuhi sifat B ■.

TEOREMA 2.38 (Fovelle, 2024)

Jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris (x_n) yang ternormalisasi dengan parameter estimasi atas $1 < p < \infty$, maka X gagal memenuhi sifat B.

BUKTI

Perhatikan bahwa, dmenetapkan $w = \frac{1}{n}$ pada $d_*(w)$, maka terdapat operator yang tak kompak dari $d_*(w)$ terhadap X. Selanjutnya, dikarenakan (x_n) yang adalah barisan simetris ternormalisasi yang tidak ekuivalen dengan unit basis vektor di l^1. Maka, berdasarkan Proposisi 2.35 dan Teorema 2.25, Teorema 2.34 menghasilkan sebuah Operator yang tidak kompak yang mana pada Proposisi 4.1 disebutkan bahwa Operator yang tidak kompak mengantarkan kepada gagalnya sifat B.

Dengan demikian terbukti bahwa jika X merupakan Ruang Banach *locally AMUC* yang memiliki barisan basis simetris (x_n) yang ternormalisasi dengan parameter estimasi atas $1 < p < \infty$, maka X gagal memenuhi sifat B ■.

TEOREMA 2.39 (Aguirre, 1998)

Sebuah Ruang Banach Cembung Tegas X yang memiliki tak hingga banyaknya subruang yang bersifat super-refleksif gagal memenuhi sifat B.

BUKTI

Berdasarkan Definisi 2.7 jelas bahwa Ruang Banach Cembung Tegas mengimplikasikan Ruang Banach yang Cembung Seragam. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.29 dan Teorema 2.34 jelas bahwa untuk suatu Ruang Banach Cembung Seragam X dengan barisan basis simetris (x_n) yang ternormalisasi dengan parameter estimasi atas $1 < p < \infty$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.37, benar bahwa Sebuah Ruang Banach Cembung Tegas X yang memiliki tak hingga banyaknya subruang yang bersifat super-refleksif gagal memenuhi sifat B ■.

AKIBAT 2.40 (Aguirre, 1998)

Untuk setiap Ruang Banach Cembung Seragam X yang berdimensi tak hingga gagal memenuhi sifat B.

BUKTI

Berdasarkan Teorema 2.39 jelas bahwa X pasti terdapat subruang yang memiliki barisan dengan estimasi-p. Sehingga, jelas bahwa sifat B pada Ruang Banach Cembung Seragam X yang berdimensi tak hingga juga gagal berlaku $\blacksquare$.

4.2 Kriteria Seorang Muslim dan Ruang Banach

Ayat 2 dari Surah Al-Anfal menggambarkan ciri orang yang beriman yang sejati, yakni mereka yang memiliki respon emosional dan spiritual yang mendalam terhadap nama Allah dan ayat-ayat-Nya. Ini tercermin dalam dua tindakan utama: pertama, hati mereka bergetar ketika mengingat Allah, dan kedua, mereka bertambah iman saat mendengarkan wahyu-Nya. Ayat 3 menambahkan, bahwa orang yang beriman ini adalah mereka yang melaksanakan salat dengan penuh kesungguhan dan menafkahkan sebagian dari rezeki yang diberikan oleh Allah. Dalam tafsir Ibnu Katsir, dijelaskan bahwa orang-orang munafik tidak merespon dengan baik ayat-ayat Allah dan tidak melaksanakan kewajiban agama seperti salat dan zakat.

Dalam Ruang Banach, sifat B berkaitan dengan kelengkapan dari Ruang Banach. Tepatnya, Ruang Banach perlu dilengkapi dengan suatu penanda yang menjadi simbol bagi kedekatan dan keterkaitan dengan Ruang Banach lainnya. Lalu, dengan adanya kedekatan tersebut, Ruang Banach dapat dinilai sebagai sempurna.

Konsep ini dapat dibandingkan dengan karakteristik orang beriman yang dijelaskan dalam Al-Anfal ayat 2-3. Dalam ayat ini, orang yang beriman digambarkan sebagai mereka yang memiliki hubungan yang stabil dan dalam dengan Allah, yang terwujud dalam dua cara utama: pertama, hati mereka bergetar setiap kali nama Allah disebut dan setiap kali mereka mendengar ayat-ayat-Nya dibacakan. Ini menunjukkan respons emosional dan spiritual yang sangat mendalam terhadap firman Allah. Kedua, orang beriman tersebut terus menerus bertambah keimanan mereka melalui interaksi dengan kebesaran Allah, yang memperkuat ikatan mereka dengan Allah dan meningkatkan kualitas hidup spiritual mereka. Dengan kata lain, iman mereka tidak bersifat statis atau sekadar mengikuti kewajiban agama, tetapi berkembang dan menguat seiring waktu, serupa dengan bagaimana Ruang Banach yang bisa jadi memiliki hubungan yang kuat atau lemah dengan Ruang Banach lain.

Di samping itu, layaknya Ruang Banach yang perlu dijelaskan bagaimana Ruang banach tersebut diwajibkan memiliki berbagai kriteria agar pantas disebut sempurna, orang beriman yang sejati tidak hanya sekadar mematuhi kewajiban agama secara literal, tetapi merespons dengan penuh keikhlasan dan kedalaman hati terhadap setiap perintah Allah. Iman mereka tidak terputus pada satu titik tertentu, melainkan terus berkembang dan berinteraksi dengan setiap pengalaman dan setiap ayat yang mereka dengar. Seiring waktu, iman mereka menjadi lebih kokoh dan semakin mendalam. Dengan demikian, kedekatan mereka dengan Allah semakin menguat. Orang beriman ini memiliki keterkaitan yang erat dengan sumber kebenaran yang lebih besar, yakni wahyu Allah, dan setiap amal ibadah yang mereka lakukan memperkuat ikatan ini, sama seperti bagaimana Ruang Banach yang saling berkaitan dengan Ruang Banach lain yang lebih besar dan kompleks.

Di samping itu, baik dari Ruang Banach dan kriteria orang beriman dalam Al-Anfal ayat 2-3 dapat dipahami sebagai konsep-konsep yang menggambarkan kedekatan dan keserasian yang mendalam. Orang yang beriman tidak hanya sekadar berada dalam ruang keimanan, tetapi juga secara aktif berinteraksi dan berkembang dalam hubungan yang semakin mendalam dengan Allah. Seperti halnya Ruang Banach yang harus memenuhi kondisi tertentu agar Ruang Banach dikatakan sempurna, orang beriman dalam Al-Anfal ayat 2-3 juga harus memenuhi kondisi tertentu yang menunjukkan keteguhan hati dan tindakan yang konsisten dalam mengikuti perintah Allah, baik melalui salat maupun zakat.

Dengan demikian, konsep Ruang Banach dapat digunakan sebagai pelajaran untuk menggambarkan keteguhan dan kedekatan hati orang beriman terhadap firman Allah. Seperti halnya anggota dari Ruang Banach, orang yang beriman dengan benar adalah mereka yang memiliki respons yang mendalam dan stabil terhadap perintah Allah, selalu bertambah keimanan dan amal ibadah mereka, serta menunjukkan kesungguhan dalam melaksanakan kewajiban-kewajiban agama, seperti yang tercermin dalam Surah Al-Anfal ayat 2-3.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan berbagai penjelasan yang telah dibahas, keberadaan sifat B pada suatu Ruang Banach dapat disangkal melalui berbagai cara. Di antaranya dengan barisan ternormalisasi yang tidak ekuivalen dengan vektor unit basis di l_1, barisan dengan parameter estimasi atas p, Ruang Banach Cembung Tegas dengan subruang yang super refleksif, hingga Ruang Banach Cembung Seragam berdimensi tak hingga. Sesuai dengan definisinya, tujuan utama dalam penyangkalan sifat B yang berasal dari kajian Operator kontinu terbatas adalah dengan menunjukkan bahwa Operator yang dimaksud tidak kontinu maupun terbatas.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Saran untuk penelitian selanjutnya, topik penelitian tentang Sifat B atau kepadatan operator kontinu terbatas masih belum banyak yang bahas sehingga untuk kedepannya topik penelitian ini dapat dikembangkan lagi dalam ranah lainnya seperti pada Ruang Lebesgue dan Ruang Hilbert.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra* (11th ed). Wiley.

Aguirre, F. J. (1998). Norm-Attaining Operators into Strictly Convex Banach Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *222*(2), 431–437.

Altshuler, Z. (1977). A Banach Space with A Symmetric Basis Which Contains No l^p Or c_0, And All Its Symmetric Basic Sequences Are Equivalent. *Composito Mathematica*, *35*(2), 189–195.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed). Wiley.

Betancor, J. J., dkk,. (2019). *Uniformly convex and smooth Banach spaces and Lp-boundedness properties of Littlewood-Paley and area functions associated with semigroups* (arXiv:1904.05641). arXiv. http://arxiv.org/abs/1904.05641

Beuzamy, B. (1982). Introduction to Banach Spaces and their Geometry.

Bishop, E., & Phelps, R. R. (1960). A Proof That Every Banach Space Is Subreflexive.

Casazza, P. G., & Shura, T. J. (1989). *Tsirelson's Space* (Vol. 1363). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0085267

Clarkson, James, A. (1936). Uniformly Convex Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, *40*(*3*), 396-414.

Diestel, J. (1963). *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag.

Dilworth, S. J., dkk,. (2017). Sums Of Asymptotically Midpoint Uniformly Convex Spaces. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, *24*(3).

Dimant, V., Gonzalo, R., & Jaramillo, J. A. (2009). Asymptotic Structure, l_p-Estimates of Sequences, And Compactness of Multilinear Mappings. *350*(2), 680-693.

Enflo, P. (1972). Equivalent Uniformly Convex Norms. *Israel J. Math*. *13*. 281-288.

Fovelle, A. (2024). Norm Attaining Operators into Locally Asymptotically Midpoint Uniformly Convex Banach Spaces (arXiv:2402.19067).

Gonzalo, R. (1995). Upper And Lower Estimates in Banach Sequence Spaces. *36*(4), 641-653.

Gowers, W. T. (1990). Symmetric Block Bases of Sequences With Large Average Growth. *Israel Journal of Mathematics*, *69*(2), 129–151.

Gurarii, V. I. & Gurarii, N. I. (1971). Bases in Uniformly Convex and Uniformly Flattened Banach Spaces. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, *5*(*1*), 220-225.

Iwanik, A. (1979). Norm attaining operators on Lebesgue spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, *83*(2), 381–386.

James, R., C. (1972). Super-Reflexive Banach Spaces. *Can. J. Math*, *XXIV*(5), 896-904.

Johnson, W. B., dkk,. (2001). Almost Frechet Differentiability of Lipschitz Mappings Between Infinite Dimensional Banach Spaces.

Kaftal, V., & Larson, D. (2018). *Admissible sequences for positive operators* (arXiv:1801.04509). arXiv. http://arxiv.org/abs/1801.04509

Kalton, N. J. (1971). Normalization Properties of Schauder Bases. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *s3-22*(1), 91–105.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley.

Kemenag. (2024). *Qur'an Kemenag*. https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/8?from=1&to=75.

Lindenstrauss, J. (1963). On Operators Which Attain Their Norm. *Israel Journal of Mathematics*, *1*(3), 139–148. https://doi.org/10.1007/BF02759700

Maurey, B., Milman, V. D., & Tomczak-Jaegermann, N. (1994). *Asymptotic Infinite-Dimensional Theory Of Banach Spaces* (arXiv:math/9403208). arXiv.

Milman, V. D. (1971). Geometric Theory of Banach Spaces. Part Ii. Geometry Of the Unit Sphere. *Russian Mathematical Surveys*, *26*(6), 79–163.

Milman, V. D., Schechtman, G., & Gromov, M. (2001). *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*. Springer.

Pelcyńzski, A. & Bessaga, C. (1991). *Theory of Linear Operations*. North-Holland.

Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra* (3rd ed). Springer.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2nd ed). McGraw-Hill.

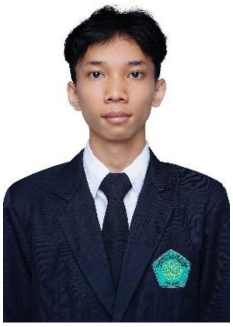
Schachermayer, (1983). Norm Attaining Operators on Some Banach Spaces. *Pacific Journal Of Mathematics*, *105*(2), 427–438.

Shihab, M. Q. (2001). *Tafsir Al-Misbah Jilid 05*, Lentera Hati.

Stein, E. M. & Shakarchi, R. (2011). *Functional Analysis Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton University Press.

Ismail. (2015). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 04*. (M. A. Ghofar, Trans.). Pustaka Imam asy-Syafi'i.

RIWAYAT HIDUP



Nayaka Ibrahim dilahirkan di Kota Malang pada tanggal 27 April 2003. Penulis mengenyam Pendidikan formalnya dimulai dari SD Brawijaya *Smart School* pada tahun 2009 hingga tahun 2015, MtsN 1 Kota Malang pada tahun 2015 hingga tahun 2018, dan MAN 2 Kota Malang pada tahun 2018 hingga 2021. Pada bulan Juni 2021 penulis diterima sebagai mahasiswa baru Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Di sela-sela kesibukan dalam kegiatan akademiknya sebagai pelajar perguruan tinggi, penulis tidak lupa untuk tetap aktif dalam kegiatan non-akademik. Di antara dari kegiatan yang berasal dari dalam kampus seperti anggota Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) "Integral" Matematika, tim penyusun soal Kompetisi Matematika Nasional (KOMET) XXI hingga XXIII, maupun kegiatan pertukaran pelajar atau *Student Exchange* 2023 dengan negara tujuan Turki. Di samping itu, penulis juga mengikuti kegiatan yang berasal dari luar kampus seperti kegiatan amal dan sukarelawan Pemecahan Rekor MURI membatik ciprat oleh 500 difabel yang diselenggarakan oleh Pemerintah Kota Malang dan meraih kategori medali perunggu dalam perlombaan *Mathematical-Analysis and Geometry Day* (MaGD) XV oleh Institut Teknologi Bandung (ITB) yang berskala nasional maupun *International Walisongo Science Competition* (IWSC) 2023 oleh Universitas Islam Negeri (UIN) Walisongo Semarang yang berskala Internasional.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Nayaka Ibrahim
NIM	: 210601110068
Fakultas / Program Studi	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Sifat Kepadatan Operator Kontinu Terbatas di Ruang Banach
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II	: Achmad Nashichuddin, MA.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	02 September 2024	Konsultasi Topik	1.
2.	11 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	27 September 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	02 Oktober 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	03 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Integrasi Bab I dan II	5.
6.	04 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Integrasi Bab I dan II	6.
7.	07 Oktober 2024	Konsultasi Kajian Integrasi Bab I dan II	7.
8.	08 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal oleh Pembimbing I	8.
9.	08 Oktober 2024	ACC Seminar Proposal oleh Pembimbing II	9.
10.	05 November 2024	Konsultasi Kajian Integrasi Bab IV	10.
11.	08 November 2024	Konsultasi dan Revisi Seminar Proposal, Konsultasi Bab IV dan V, dan ACC Seminar Hasil oleh Pembimbing I	11.

12.	08 November 2024	Konsultasi Kajian Integrasi Bab IV, ACC Seminar Hasil oleh Pembimbing II	12.
13.	22 November 2024	Konsultasi dan Revisi Seminar Hasil, ACC Sidang Skripsi oleh Pembimbing I	13.
14.	20 Desember 2024	ACC Keseluruhan oleh Pembimbing I	14.

Malang, 20 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005