SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE *FORWARD TIME CENTERED SPACE* (FTCS)

SKRIPSI

OLEH
SEPTIA WULAN NDARI
NIM.19610040

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE *FORWARD TIME CENTERED SPACE* (FTCS)

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Septia Wulan Ndari
NIM.19610040

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE *FORWARD TIME CENTERED SPACE* (FTCS)

SKRIPSI

Oleh
Septia Wulan Ndari
NIM.19610040

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 29 November 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Juhari, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIPPPK. 19840209 202321 1010	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE *FORWARD TIME CENTERED SPACE* (FTCS)

SKRIPSI

Oleh
Septia Wulan Ndari
NIM. 19610040

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 18 Desember 2024

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji 1	: M. Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Juhari, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Septia Wulan Ndari
NIM	: 19610040
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Solusi Numerik Persamaan Difusi Menggunakan Metode *Forward Time Centered Space* (FTCS)

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atau perbuatan tersebut.

Malang, 18 Desember 2024
Yang membuat pernyataan,

Septia Wulan Ndari
NIM. 19610040

MOTO

"Alirkan Manfaat, Ciptakan Karya-Karya Hebat"

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji bagi Allah SWT atas Rahman dan Rahimnya yang telah memberikanku ilmu, kekuatan, dan kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada :

Kedua orang tua penulis Bapak Arif Mulyanto dan Ibu Watinah yang selalu senantiasa mendukung, mendoakan, dan selalu mencurahkan cintanya. Adik penulis Muahammad Ilyas dan Nadya Salsabila, beserta keluarga besar yang selalu mendoakan, mendukung, memberi semangat, nasihat dan kasih sayang yang tak terhingga.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, tidak ada ungkapan yang lebih anggun, melainkan ungkapan segala puji dan syukur atas kehadirat Allah *subhanahu wa ta'ala* Tuhan sekalian alam semesta. Tak lupa shalawat dan salam kami haturkan kepada baginda Nabi Muhammad *shallahu'alaihi wasallam* yang telah memberi bimbingan kepada umatnya menuju jalan terang benderang yakni Islam. Serta, sebaik-baiknya suri teladan bagi para umat manusia di muka bumi.

Suatu ujian pasti tak luput yang dari namanya halangan, rintangan, serta hambatan. Akan tetapi, semua itu dapat terlewati oleh peneliti berkat dukungan dari orang-orang terdekat. Hal ini peneliti wajib mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberi bimbingan dan nasihat.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberi bimbingan dan nasihat.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan segala keluasan ilmu dan bimbingannya selama perkuliahan.
7. Ibunda Watinah dan Ayahanda Arif Mulyanto yang selalu memberikan motivasi dan dukungan.
8. Seluruh mahasiswa matematika angkatan 2019 yang berjuang bersama dalam menyelesaikan perkuliahan.

9. Sahabat saya Putri Dwi Avitasari, Alfin Nur Aini, dan Annisa Putri Rizqia yang telah mendukung saya dalam penyelesaian tugas akhir ini di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Semoga Allah *subhanahu wa ta'ala* membalas segala kebaikan yang diberikan kepada penulis. Penulis menyadari dalam penulisan proposal skripsi ini pastinya masih banyak kekurangan. Oleh sebab itu, peneliti berharap mendapat nasihat yang membangun tanpa harus menjatuhkan. Peneliti juga berharap melalui tulisannya ini diharapkan dapat memperluas keilmuan dan melahirkan ilmu-ilmu baru di bidang matematika khususnya di program studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 18 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Ndari, Septia Wulan, 2024. **Solusi Numerik Persamaan Difusi Menggunakan Metode *Forward Time Centered Space* (FTCS)**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Persamaan Difusi, Persamaan Differensial Parsial, Metode *Forward Time Centered Space* (FTCS)

Persamaan difusi tercipta melalui pendekatan analogi perpindahan partikel dari satu tempat ke tempat lain, baik padat, cair, maupun gas. Persamaan ini dapat diselesaikan melalui pendekatan solusi numerik dan solusi analitik. Penelitian ini bertujuan untuk mengkomparasikan hasil solusi analitik dan solusi numerik dari persamaan tersebut dengan menggunakan metode *Forward Time Centered Space* (FTCS). Dalam mempermudah perhitungan dalam solusi numerik peneliti dibantu dengan pemrograman. Adapun langkah yang dilakukan untuk mencari solusi analitik adalah dengan menghitung nilai eksak dan solusi numerik adalah dengan diskritisasi persamaan, analisis kestabilan, analisis konsistensi. Hasil yang didapat dari penelitian ini adalah perbandingan dari solusi analitik dengan numerik persamaan difusi dan visualisasi solusi ke dalam bentuk plot 3 dimensi. Dengan demikian, penelitian ini menyimpulkan bahwa solusi numerik yang dihasilkan mendekati hasil dari solusi analitik.

ABSTRACT

Ndari, Septia Wulan, 2024. **Numeric Solution of Diffusion Equation Using Forward Time Centered Space (FTCS) Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Juhari, M.Si (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keyword: Diffusion Equation, Partial Differential Equation, Forward Time Centered Space (FTCS) Method.

The diffusion equation is derived through an analogy of particle transfer from one location to another, whether in solid, liquid, or gas phases. This equation can be solved using numerical and analytical approaches. This study aims to compare the results of analytical and numerical solutions of the diffusion equation using the Forward Time Centered Space (FTCS) method. To facilitate the numerical solution computations, programming tools were employed. The steps undertaken to obtain the analytical solution involved calculating the exact values, while the numerical solution was derived by discretizing the equation, performing stability analysis, and conducting consistency analysis. The outcomes of this study include a comparison between the analytical and numerical solutions of the diffusion equation, as well as a visualization of the solutions in the form of three-dimensional plots. Consequently, the study concludes that the numerical solutions obtained closely approximate the results of the analytical solutions.

مستخلص البحث

نداري، سبتيا وولان، ٢٠٢٤. الحل الرقمي لمعادلة الانتشار باستخدام طريقة الفضاء المتمركز حول الزمن الأمامي(*FTCS*). ألبث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانج . المشرف: جوهري، الماجستير, إيرنا هيراواتي، الماجستيرة

الكمات المفتا حية : معادلة الانتشار، المعادلة التفاضلية الجزئية، طريقة الفضاء المتمركز حول الزمن الأمامي

تم اشتقاق معادلة الانتشار من خلال تشبيه انتقال الجسيمات من مكان إلى آخر، سواء في الحالة الصلبة أو السائلة أو الغازية. يمكن حل هذه المعادلة باستخدام الطريقتين العددية والتحليلية. تهدف هذه الدراسة إلى مقارنة نتائج الحلول التحليلية والحلول العددية لمعادلة الانتشار باستخدام طريقة الزمن الأمامي والموقع المركزي (*FTCS*). ولتسهيل عمليات الحساب في الحلول العددية، تم الاستعانة ببرمجيات متخصصة. تمثل الخطوات المتبعة للحصول على الحل التحليلي في حساب القيم الدقيقة، بينما تم الحصول على الحل العددي من خلال تفكيك المعادلة، وإجراء تحليل الاستقرار وتحليل الاتساق. ثملت نتائج هذه الدراسة مقارنة بين الحلول التحليلية والحلول العددية لمعادلة الانتشار، بالإضافة إلى عرض مرئي للحلول في شكل رسوم ثلاثية الأبعاد. وعليه، خلصت الدراسة إلى أن الحلول العددية التي تم الحصول عليها قريبة جدًا من نتائج الحلول التحليلية.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu cabang matematika yang menarik untuk dipelajari dan dikaji adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang mengandung turunan, dimana turunan adalah hubungan persamaan dan tingkat (Boyce & DiPrima, 2012). Persamaan ini membantu menyelesaikan masalah dibidang sains dan teknologi, sebagai contoh permasalahan yang berkaitan dengan proses difusi. Difusi merupakan peristiwa perpindahan suatu zat pelarut dari konsentrasi tinggi ke konsetrasi rendah (Yudhi, 2019). Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan fluktuasi densitas dalam material yang mengalami difusi (Harper & Weaire, 2009), transien tekanan fluida dalam media berpori, tranportasi bahan kimia, dan lain-lain.

Solusi numerik merupakan solusi pendekatan terbaik dari solusi analitik suatu persamaan. Suatu solusi numerik dikatakan baik ketika solusi tersebut memiliki nilai galat yang kecil. Nilai error didapatkan dengan melakukan ekspansi deret Taylor melalui pemotongan suku turunan sampai suku order tertentu. Salah satu metode numerik yang bisa digunakan adalah skema *Forward-Time Centered Space* (FTCS).

Allah SWT. berfirman dalam Surat Al-Anbiya : 30 sebagai berikut

اَوَلَمْ يَرَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْٓا اَنَّ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنٰهُمَاۗ وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاۤءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّۗ اَفَلَا يُؤْمِنُوْنَ ﴿٣٠﴾

"Apakah orang-orang kafir tidak mengetahui bahwa langit dan bumi, keduanya, dahulu menyatu, kemudian Kami memisahkan keduanya dan Kami menjadikan segala sesuatu yang hidup berasal dari air? Maka, tidakkah mereka beriman?" (Kementerian Agama RI, 2024)

Berdasarkan tafsir Ibnu Katsir (Ringkas) ayat tersebut menjelaskan bahwa dahulu langit dan bumi itu pada asalnya adalah satu kesatuan. Kemudian, Allah pisahkan menjadi tujuh lapis langit dan bumi dengan perantara angin untuk menengahi diantara keduanya (Sholeh & Ramadhan, 2020). Melalui peristiwa pemisahan tersebut terjadi penyebaran energi, materi atau partikel yang mendukung terciptanya kondisi baru dalam mendukung kehidupan. Dari hal tersebut mensyaratkan bahwa peristiwa penyebaran termasuk dalam proses difusi. Hal ini memiliki hubungan yang sangat erat dengan kehidupan sehingga perlu dikaji lebih mendalam untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Rahaman bersama rekannya meneliti (Rahaman et al., 2015) terkait persamaan difusi. Penelitian ini membahas perbandingan solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi menggunakan metode beda hingga. Penelitian Rahaman berfokus pada pembuktian nilai error yang dihasilkan dari perbandingan tersebut. Hasil perbandingan yang didapatkan adalah terdapat kesesuaian antara solusi analitik dan solusi numerik.

Penelitian lain dilakukan (Loskor & Sarkar, 2022) terhadap persamaan panas untuk difusivitas termal menggunakan metode beda hingga. Penelitian tersebut berfokus perbandingan difusivitas termal dari 7 material logam dengan mengimplementasikan hasilnya menggunakan *software*. Hasil dari penelitian tersebut adalah Emas, Perak, dan Tembaga bertindak sebagai konduktor panas terbaik dibandingkan dengan Alumunium dan Besi Cor.

Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui hasil solusi analitik dan solusi numerik yang meliputi diskritisasi, analisis kestabilan, dan konsistensi. Selanjutnya, mendapatkan implementasi skema beda hingga persamaan difusi. Perbedaan penelitian ini dengan sebelumnya adalah membandingkan hasil dari solusi analitik dan numerik dengan kondisi batas dan kondisi awal. Selain itu juga, mengimplementasikan persamaan difusi menggunakan metode FTCS pada grafik 3-D.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat diambil rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana solusi analitik dari persamaan difusi?
2. Bagaimana solusi numerik dari persamaan difusi dengan metode FTCS?
3. Bagaimana perbandingan solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi?

1.3 Tujuan Penelitian

Telah diketahui berdasarkan rumusan masalah diatas dapat disimpulkan tujuan penelitian ini yaitu

1. Untuk mengetahui solusi analitik dari persamaan difusi.
2. Untuk mengetahui solusi numerik dari persamaan difusi dengan metode FTCS.
3. Untuk mengetahui perbandingan solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu

1. Manfaat Teoritis

Manfaat teoritis dari hasil penelitian ini bisa digunakan sebagai sumber pustaka untuk dikembangkan lebih lanjut oleh peneliti lain dibidang persamaan difusi.

2. Manfaat Praktis

Secara praktis diharapkan hasil penelitian ini memberikan manfaat sebagai berikut.

a. Bagi Peneliti
    1) Diharapkan dapat menambah khazanah pengetahuan mengenai keilmuan solusi numerik pada persamaan difusi.
    2) Diharapkan penelitian ini dapat menjadi referensi baru dalam pengembangan model persamaan diferensial parsial.
b. Bagi Universitas, mampu memberikan tulisan yang berkualitas berkaitan dengan solusi numerik pada persamaan diferensial parsial khususnya untuk model persamaan difusi menggunakan metode *Forward Time Centered Space* (FTCS).

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah persamaan difusi

$$U_t = 2U_{xx}$$

dengan kondisi batas Dirichlet dan kondisi awal

$$U(x,0) = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$$

(Coleman, 2013)

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas (Ross, 1984). Contoh persamaan diferensial parsial sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2 \tag{2.1}$$

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan ke dalam empat tipe yaitu

1. Berdasarkan diskriminan

   Kasus spesial dari persamaan differensial orde 2 dengan 2 dimensi

   $$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU + G = 0 \tag{2.2}$$

   dimana A, B, C, D, E, F, G adalah fungsi dari variabel independen x dan y. Persamaan diferensial dikatakan bertipe

   a. Eliptik, jika nilai $B^2 - 4A < 0$.

   b. Parabolik, jika nilai $B^2 - 4A = 0$.

   c. Hiperbolik, jika nilai $B^2 - 4A > 0$.

2. Berdasarkan nilai eigen

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0 \tag{2.3}$$

   Koefisien matriks orde tertingginya dapat ditulis $A = [a_{ij}]$. Kemudian, untuk mencari nilai eigen dari A

   $$AX = \lambda X$$

dengan X adalah vektor eigen dan λ adalah nilai eigen. Kedua ruas ditambahkan dengan $-\lambda X$ sehingga menjadi

$$AX - \lambda X = 0 \tag{2.4}$$

Faktorkan X maka didapat

$$(A - \lambda I)X = 0$$

dengan I adalah matriks identitas berukuran sama dengan A dan $(A - \lambda I)$ disebut matriks karakteristik. Agar persamaan memiliki solusi non-trivial maka determinan matriks $(A - \lambda I)$ harus bernilai nol

$$|A - \lambda I| = 0$$

Ketika $X \neq 0$ maka didapat

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

a. Eliptik

Suatu persamaan dikatakan eliptik jika semua nilai eigen adalah tidak nol dan tanda sama.

b. Parabolik

Persamaan dikatakan parabolik jika terdapat tepat satu nilai eigennya sama dengan nol.

c. Hiperbolik

Persamaan dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen tidak nol dan satu nilai eigen berlawanan tanda.

2.1.2 Persamaan Difusi

Difusi merupakan peristiwa perpindahan suatu zat pelarut dari konsentrasi tinggi ke konsetrasi rendah (Yudhi, 2019). Peristiwa ini dapat diubah ke dalam persamaan difusi. Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan fluktuasi densitas dalam material yang mengalami difusi (Harper & Weaire, 2009). Persamaan difusi bisa ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial \emptyset(r,t)}{\partial t} = \nabla \,.\, [D(\emptyset, r)\ \nabla \emptyset(\mathrm{r}, \mathrm{t})] \tag{2.6}$$

D adalah matriks definit positif simetris dan D konstan, ketika koefisien difusi *anisotropic* sehingga persamaan dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial \emptyset(r,t)}{\partial t} = D\nabla^2 \emptyset(r,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u_t = Du_{xx} \tag{2.7}$$

untuk $a \leq x \leq b$ dan $0 < t < T$ dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Ada dua tipe syarat batas

1. Syarat Batas Dirichlet

$$u(a,t) = g_1(t) \equiv c_1 \text{ dan } u(b,t) = g_2(t) \equiv c_2$$

2. Syarat Batas Neumann

$$u_x(a,t) = g_1(t) \equiv c_1 \text{ dan } u_x(b,t) = g_2(t) \equiv c_2$$

(Coleman, 2013)

Persamaan difusi dapat diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variable*). Solusi ini diperkenalkan oleh David Bernoulli dan Jean le Rond d'Alembert yang bereksperimen dengan teknik baru untuk menghasilkan solusi linear, persamaan diferensial parsial homogen (Coleman, 2013). Contoh :

$$U_t = 3U_{xx} \tag{2.8}$$

$$U(x,0) = 17\sin\pi x$$

$$U(0,t) = U(4,t) = 0$$

Misalkan

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Substitusikan ke dalam persamaan (2.8) sehingga didapatkan

$$X(x) \cdot T'(t) = 3X"(x) \cdot T(t)$$

Bagi kedua sisi dengan $X(x) \cdot T(t)$

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)}$$

Agar hasil kedua ruas memiliki nilai yang sama perlu disamakan dengan konstanta pemisahan $-\lambda$

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Maka dari persamaan di atas didapatkan dua persamaan

1. Untuk fungsi waktu $T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = -\lambda$$

atau

$$T'(t) = -3\lambda T(t)$$

$$T'(t) + 3\lambda T(t) = 0 \tag{2.9}$$

2. Untuk fungsi posisi $X(x)$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = -\lambda$$

atau

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{2.10}$$

Memisahkan kondisi batas

$$U(0, t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$U(4, t) = 0 = X(4)T(t) \Rightarrow X(4) = 0$$

$T(t) \neq 0$ untuk solusi non-trivial. Selanjutnya, menyelesaikan persamaan (2.10) menggunakan metode karakteristik dan perlu memisalkan dengan suatu konstanta sebarang. Misalkan $D = \frac{d}{dx}$ sehingga persamaannya menjadi

$$D^2 + \lambda$$

karena $D_x(e^{Nx}) = Ne^{Nx}$, dengan N adalah konstanta. Tulis persamaan (2.10) dalam bentuk operator

$$(D^2 + \lambda)X(x) = 0$$

menjadi

$$(D^2 + \lambda)e^{Nx} = D^2(e^{Nx}) + \lambda e^{Nx}$$

$$= N^2 e^{Nx} + \lambda e^{Nx}$$

$$= e^{Nx}(N^2 + \lambda)$$

$e^{Nx} \neq 0$ karena sifat inherennya sebagai fungsi eksponensial. Maka

$$N^2 + \lambda = 0$$

$$N^2 = -\lambda$$

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

maka diperoleh

1. Kasus $\lambda = 0$

$$N = 0$$

Jadi N memiliki akar ganda. Maka solusi umumnya dalam bentuk linier

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Menerapkan kondisi batas $X(0) = 0$

$$X(0) = C_1 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

karena nilai $C_2 = 0$ sehingga persamaannya menjadi

$$X(x) = C_1 x$$

Menerapkan kondisi batas $X(4) = 0$

$$X(4) = C_1(4) = 0$$

$$C_1 = 0$$

Jadi, solusi yang didapatkan adalah solusi trivial $X(x) = 0$ karena menghasilkan nilai $U(x,t) = X(x) \cdot T(t) = (0) \cdot T(t) = 0$.

2. Jika $\lambda < 0,\ \lambda = -k^2, k > 0$, persamaan diferensialnya menjadi

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$N = \pm\sqrt{-(-k^2)}$$

$$N = \pm\sqrt{k^2}$$

$$N = \pm k$$

Solusi umumnya

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

Menerapkan kondisi batas $X(0) = 0$

$$X(0) = C_1 e^{k0} + C_2 e^{-k0} = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 = -C_2$$

maka didapat

$$X(x) = C_1 e^{kx} - C_1 e^{-kx}$$

$$X(x) = C_1(e^{kx} - e^{-kx})$$

$$X(x) = C_1(2\sinh kx)$$

$$X(x) = 2C_1 \sinh kx$$

Menerapkan kondisi batas $X(4) = 0$

$$X(4) = 2C_1 \sinh kx = 0$$

$$2C_1 \sinh k(4) = 0$$

$$2C_1 \sinh 4k = 0$$

Ada dua kemungkinan solusi :

1. Jika $C_1 = 0$, maka nilai dari koefisien menjadi nol.
2. Jika $\sinh 4k = 0$, maka perlu mencari nilai k yang memenuhi persamaan ini karena

$$\sinh 4k = \frac{e^{4k} - e^{-4k}}{2}.$$

Oleh karena itu, agar $\sinh 4k = 0,$ nilai k haruslah 0.

Hal ini juga memberikan solusi trivial yang bukan solusi yang sesuai.

3. Kasus $\lambda \geq 0, \lambda = k^2, k > 0$, persamaan diferensialnya menjadi

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$N = \sqrt{-k^2}$$

$$N = \sqrt{-1 \cdot k^2}$$

$$N = \pm ik$$

Persamaan di atas menghasilkan akar kompleks $N = ik$ dan $N = -ik$. Maka solusi umum persamaan diferensialnya

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

Menggunakan identitas euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dan $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ maka

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$$

$$e^{-ikx} = \cos kx - i\sin kx$$

Substitusikan ke persamaan sebelumnya

$$X(x) = C_1(\cos kx + i\sin kx) + C_2(\cos kx - i\sin kx)$$

$$X(x) = C_1\cos kx + C_1 i\sin kx + C_2\cos kx - C_2 i\sin kx$$

$$X(x) = (C_1 + C_2)\cos kx + i(C_1 - C_2)\sin kx$$

Misalkan $A = C_1 + C_2$ dan $B = i(C_1 - C_2)$

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

Menerapkan $X(0) = 0$

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0$$

$$A = 0$$

maka persamaannya menjadi

$$X(x) = B\sin kx$$

selanjutnya $X(4) = 0$

$$X(4) = B\sin 4k = 0$$

Ada dua kemungkinan solusi :

1. Jika $B = 0$, maka solusi trivial (fungsi $X(x) = 0$).
2. Jika $\sin 4k = 0$, maka perlu mencari nilai k yang memenuhi persamaan ini. Fungsi sinus bernilai nol

$$\sin 4k = 0 \ \ ketika\ 4k = n\pi, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{4}, \ \ n = 1,2,3, \dots$$

Karena $\lambda = k^2$, maka

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{16}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

Sehingga solusi persamaan (2.10) ditulis menjadi

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{4}$$

Nilai $\lambda \geq 0$ sesuai dengan kondisi *Dirichlet* karena menghasilkan sinusoidal yang memenuhi $X(0) = 0$ dan $X(4) = 0$. Nilai eigen $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{16}$ ini memberikan solusi non-trivial, yakni $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{4}$.

Menyelesaikan persamaan (2.9) menggunakan metode karakteristik, misalkan $T'(t) = M$ dan M adalah sebuah konstanta sehingga

$$M + 3\lambda = 0$$

$$M = -3\lambda$$

maka diperoleh

$$T(t) = Ce^{Mt}$$

$$T(t) = Ce^{-3\lambda t}$$

Diketahui untuk nilai $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{16}$ sehingga menjadi

$$T(t) = T_n(t) = Ce^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{16}}$$

Berdasarkan solusi dari $X_n(x)$ dan $T_n(t)$ maka diperoleh solusi umumnya

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{4} \cdot Ce^{-\frac{2n^2\pi^2 t}{16}}$$

Solusi umum yang memenuhi kondisi batas

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n(x,t)$$

dengan nilai B_n adalah koefisien Fourier yang ditentukan oleh kondisi awal. Substitusikan nilai $U_n(x,t)$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{4} \cdot e^{-\frac{3n^2\pi^2 t}{16}}$$

Kemudian menggunakan kondisi awal dari $U(x,0) = 17\sin\pi x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{4} \cdot e^{-\frac{3n^2\pi^2 0}{16}} = 17\sin\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{4} = 17\sin\pi x$$

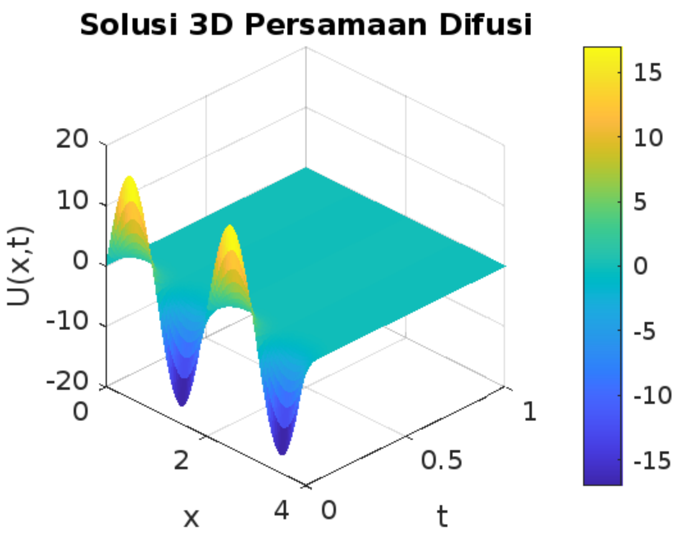
$$B_1\sin\frac{\pi x}{4} + B_2\sin\frac{\pi x}{2} + B_3\sin\frac{3\pi x}{4} + B_4\sin\pi x + B_5\sin\frac{5\pi x}{4} + B_6\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots = 17\sin\pi x$$

Dari sini didapatkan bahwa $B_4 = 17$ sehingga solusinya menjadi

$$U(x,t) = 17\sin\pi x\, e^{-\frac{3(4)^2\pi^2 t}{16}}$$

$$U(x,t) = 17\sin\pi x\, e^{-3\pi^2 t} \qquad (2.11)$$

Selanjutnya mengimplementasikannya pada grafik diperoleh



Gambar 2.1 Solusi Persamaan Difusi

2.1.3 Metode FTCS (*Forward Time Centered Space*)

Metode Beda Hingga adalah metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode numerik diferensial telah digunakan untuk mendiskritisasi persamaan diferensial parsial dan membantu dalam mendapatkan skema numerik (Nyakebogo et al., 2021). Contoh dari metode numerik adalah FTCS, *Backward Times Centered Space* (BTCS), skema Dufort-Frankel, dan skema Crank-Nicolson. Metode FTCS sering disebut sebagai metode eksplisit dari persamaan difusi atau metode Richardson (Pudjaprasetya, 2013). Skema eksplisit FTCS untuk persamaan difusi

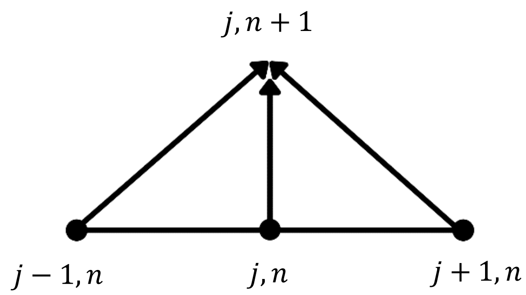
$$\frac{u_i^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.12}$$

atau

$$u_i^{n+1} = u_j^n + d(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \tag{2.13}$$

dengan nilai d adalah bilangan difusi tanpa dimensi (atau nomor grid Fourier).

$$d = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \tag{2.14}$$



Gambar 2.1 Stensil Metode *Forward Time Centered Space* (FTCS)

Untuk mencari banyaknya grid x yang diperlukan dalam penyelesaian bisa dicari dengan

$$N_x = \frac{b-a}{\Delta x}, \quad x_j = a + (j-1)\Delta x, j = 1,2,\dots,N_x + 1$$

dan grid t

$$N_t = \frac{T}{\Delta t}, \quad t_n = (n-1)\Delta t, \qquad n = 1,2,\dots,Nt + 1$$

2.1.4 Keakuratan Solusi

2.1.4.1 Analisis Kestabilan

Analisis Von Neumann adalah analisis Fourier diskrit dari persamaan beda koefisien konstanta linier apa domain periodik dengan *mesh size* yang seragam (Brio et al., 2010). Metode Von Neumman digunakan untuk menganalisis stabilitas skema FTCS (Nyakebogo et al., 2021). Persamaan dikatakan stabil ketika mengikuti

$$\gamma \coloneqq 2D\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \tag{2.15}$$

Dimana γ dikenal sebagai bilangan stabilitas atau bilangan Fourier, yang sering muncul dalam metode eksplisit untuk memecahkan persamaan diferensial parsial. Syarat ini berasal dari analisis numerik untuk menghindari pertumbuhan kesalahan selama iterasi.

- Jika $\gamma > 1$, solusi numerik dapat menjadi tidak stabil, yaitu kesalahan kecil dalam perhitungan bisa tumbuh secara eksponensial.
- Jika $\gamma \leq 1$, solusi numerik stabil, dan kesalahan tidak akan tumbuh dengan iterasi.

2.1.4.2 Analisis Konsistensi

Ekpansi deret Taylor digunakan dalam menganalisis konsistensi (Nyakebogo et al., 2021). Pertama kali dikenalkan oleh Brook Taylor seorang matematikawan Inggris dalam bukunya Methodus *increnentorum directa et inversa* pada tahun 1715.

Teorema

Jika f memiliki representasi (penjabaran) deret pangkat di a, atau dengan kata lain, jika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R \tag{2.16}$$

maka koefisien-koefisiennya dinyatakan oleh rumus

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.17}$$

Substitusi c_n ke persamaan diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a) + \cdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2 Berpikir Kritis dalam Al-Qur’an

Matematika sering disebut sebagai *mother of science* (Chiu, 2007) dimana dasar-dasar ilmu pengetahuan terdapat pada ilmu ini. Matematika membantu manusia dalam memahami dan menjelaskan tanda-tanda kebesaran Allah SWT. Hal ini terkandung dalam Q.S Ali Imran ayat 190-191 sebagai berikut

اِنَّ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيْلِ وَالنَّهَارِلَاٰيٰتٍ لِّاُولِى الْاَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا
وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِۚ رَبَّنَامَاخَلَقْتَ هٰذَابَاطِلًاۚ سُبْحٰنَكَ فَقِنَاعَذَابَ
النَّارِ ﴿١٩١﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan

berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), "Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Mahasuci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka." (Kementerian Agama RI, 2024)

Menurut tafsir al-Muyassar ayat diatas menjelaskan bahwa orang-orang yang mengingat Allah SWT akan mentadaburi penciptaan langit dan bumi. Mereka mempergunakan akal mereka untuk merenungi ciptaan-Nya. Ciptaan Allah SWT di alam semesta ini memiliki keteraturan dan harmoni yang dapat dijelaskan melalui bahasa matematika. Akan tetapi, masih banyak sekali misteri alam semesta yang belum terpecahkan oleh umat manusia. Guna membantu memecahkan misteri tersebut, seorang manusia perlu berpikir kritis.

Berpikir kritis merupakan kemampuan untuk merefleksikan pemikiran dan memecahkan masalah (Rahardhian, 2022). Al-Qur'an mengajarkan untuk selalu berpikir kritis dalam melakukan pengamatan melalui Q.S Al-Mulk ayat 3-4

الَّذِيْ خَلَقَ سَبْعَ سَمٰوٰتٍ طِبَاقًا ۗمَاتَرٰى فِيْ خَلْقِ الرَّحْمٰنِ مِنْ تَفٰوُتٍ ۗفَارْجِعِ الْبَصَرَ ۙهَلْ تَرٰى مِنْ فُطُوْرٍ ﴿٣﴾ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ اِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِءًا وَّهُوَ حَسِيْرٌ ﴿٤﴾

"(Dia juga) yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih ketidakseimbangan sedikitpun. Maka, lihatlah sekali lagi! Adakah kamu melihat suatu cela? Kemudian, lihatlah sekali lagi (dan) sekali lagi (untuk mencari cela dalam ciptaan Allah), niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu dengan kecewa dan dalam keadaan letih (karena tidak menemukannya)." (Kementerian Agama RI, 2024)

Menurut tafsir ringkas Kementrian Agama RI makna lihatlah sekali lagi dan berulang-ulang mengisyaratkan bahwa selain hanya melihat ciptaan Allah SWT, manusia juga dianjurkan untuk merenungi dan menggunakan akalnya untuk berpikir kritis. Maka dia akan menyadari bahwa hasilnya tetap tidak akan ditemukan kecacatan atau retak pada ciptaan Allah SWT. Dari sini Allah SWT memerintahkan makhluk-Nya untuk mengulangi pengamatan tersebut agar menjadi pelajaran dan menambah keyakinan bahwa tidak ada celah atau keanehan pada ciptaan-Nya.

Berpikir kritis mendorong manusia untuk memiliki rasa keingintahuan mengenai fenomena alam. Semakin tinggi rasa keingintahuan itu semakin haus pula manusia mencari pengetahuan dan pemahaman. Adapun elemen dari berpikir kritis yaitu analisis, penalaran, inferensi, membandingkan, formulasi hipotesis, pengujian, dan kesimpulan komperhensif (Rahardhian, 2022). Tahapan penting dari suatu penelitian adalah pengujian, apakah suatu teori itu benar atau tidak. Pengujian dan evaluasi adalah bagian penting dalam ilmu pengetahuan untuk memastikan keakuratan dari suatu ilmu.

Menurut Q.S Al-Mulk ayat 3-4, dimana Allah SWT memerintahkan manusia untuk memeriksa kembali secara berulang kali terhadap ciptaan-Nya walaupun tidak akan ditemukan kecacatan. Ayat tersebut mengajarkan prinsip seperti dalam konteks ilmiah untuk mengamati, menganalisis dan mengevaluasi secara berulang kali agar hasil yang didapatkan mendekati kesempurnaan. Prinsip ini memungkinkan peneliti untuk memperbaiki model, meningkatkan presisi, dan menghasilkan pengetahuan yang akurat. Dengan demikian, manusia dianjurkan untuk berpikir kritis dan menerapkan elemen dari berpikir kritis dalam memahami fenomena alam.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan merupakan penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan informasi dan data serta dibantu oleh berbagai literatur (Sari & Asmendri, 2020). Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk memperdalam kajian teoritis dari penelitian sebelumnya agar dapat lebih bisa dipahami.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Mencari solusi analitik dari persamaan difusi.
2. Mencari solusi numerik dari persamaan difusi.
   a. Diskritisasi persamaan difusi.
      1) Mencari turunan pertama pada persamaan difusi.
      2) Mensubstitusi hasil turunan pertama ke dalam deret Taylor.
      3) Mendisktritisasikan hasil substitusi dengan metode FTCS.
   b. Menganalisis kestabilan numerik (*von neumman*).
      1) Mengasumsikan gelombang bidang numerik.
      2) Menerapkan prosedur *von neumman* pada diskritisasi persamaan difusi.
   c. Menganalisis konsistensi numerik.
      1) Menjabarkan ekspansi deret Taylor
      2) Mensubstitusikan hasil ekspansi deret Taylor ke dalam bentuk diskritisasi persamaan difusi.

d. Mengimplementasikan metode FTCS untuk persamaan difusi.

3. Mencari perbandingan hasil solusi analitik dan solusi numerik persamaan difusi.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Solusi Analitik Persamaan Difusi

Persamaan difusi yang digunakan pada pembahasan ini adalah persamaan

$$\mathrm{U_t} = 2U_{xx} \tag{4.1}$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0$$

$$U(x,0) = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$$

Cari terlebih dahulu solusi analitik menggunakan metode pemisahan variabel. Misalkan

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{4.2}$$

Substitusikan ke dalam persamaan (4.1) sehingga didapatkan

$$X(x) \cdot T'(t) = 2X"(x) \cdot T(t)$$

Bagi kedua sisi dengan $X(x) \cdot T(t)$

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)}$$

Agar hasil kedua ruas memiliki nilai yang sama perlu disamakan dengan konstanta pemisahan $-\lambda$

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)} = -\lambda$$

(Coleman, 2013)

Maka dari persamaan di atas didapatkan dua persamaan

3. Untuk fungsi waktu $T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{2T(t)} = -\lambda$$

atau

$$T'(t) = -2\lambda T(t)$$

$$T'(t) + 2\lambda T(t) = 0 \tag{4.3}$$

4. Untuk fungsi posisi $X(x)$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = -\lambda$$

atau

$$X"(x) = -\lambda X(x)$$

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{4.4}$$

Memisahkan kondisi batas

$$U(0,t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$U(1,t) = 0 = X(1)T(t) \Rightarrow X(1) = 0$$

$T(t) \neq 0$ untuk solusi non-trivial. Selanjutnya, menyelesaikan persamaan (4.4) menggunakan metode karakteristik dan perlu memisalkan dengan suatu konstanta sebarang. Misalkan $D = \frac{d}{dx}$ sehingga persamaannya menjadi

$$D^2 + \lambda$$

karena $D_x(e^{Nx}) = Ne^{Nx}$, dengan N adalah konstanta, tulis persamaan (4.4) dalam bentuk operator

$$(D^2 + \lambda)X(x) = 0$$

menjadi

$$\begin{aligned}(D^2 + \lambda)e^{Nx} &= D^2(e^{Nx}) + \lambda e^{Nx} \\ &= N^2 e^{Nx} + \lambda e^{Nx} \\ &= e^{Nx}(N^2 + \lambda)\end{aligned}$$

$e^{Nx} \neq 0$ karena sifat inherennya sebagai fungsi eksponensial. Maka

$$N^2 + \lambda = 0$$

$$N^2 = -\lambda$$

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

maka diperoleh

1. Kasus $\lambda = 0$

$$N = 0$$

Jadi N memiliki akar ganda. Maka solusi umumnya dalam bentuk linier

$$X(x) = C_1x + C_2$$

Menerapkan kondisi batas $X(0) = 0$

$$X(0) = C_1 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

karena nilai $C_2 = 0$ sehingga persamaannya menjadi

$$X(x) = C_1x$$

Menerapkan kondisi batas $X(1) = 0$

$$X(1) = C_1 1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Jadi, solusi yang didapatkan adalah solusi trivial $X(x) = 0$ karena menghasilkan nilai $U(x,t) = X(x) \cdot T(t) = (0) \cdot T(t) = 0$.

2. Jika $\lambda < 0$, $\lambda = -k^2, k > 0$, persamaan diferensialnya menjadi

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$N = \pm\sqrt{-(-k^2)}$$

$$N = \pm\sqrt{k^2}$$

$$N = \pm k$$

Solusi umumnya

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

Menerapkan kondisi batas $X(0) = 0$

$$X(0) = C_1 e^{k0} + C_2 e^{-k0} = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 = -C_2$$

maka didapat

$$X(x) = C_1 e^{kx} - C_1 e^{-kx}$$

$$X(x) = C_1 (e^{kx} - e^{-kx})$$

$$X(x) = C_1 (2 \sinh kx)$$

$$X(x) = 2C_1 \sinh kx$$

Menerapkan kondisi batas $X(1) = 0$

$$X(1) = 2C_1 \sinh kx = 0$$

$$2C_1 \sinh k(1) = 0$$

$$2C_1 \sinh k = 0$$

Ada dua kemungkinan solusi :

1. Jika $C_1 = 0$, maka nilai dari koefisien menjadi nol.
2. Jika $\sinh k = 0$, maka perlu mencari nilai k yang memenuhi persamaan ini karena

$$\sinh k = \frac{e^k - e^{-k}}{2}.$$

Oleh karena itu, agar $\sinh k = 0$, nilai k haruslah 0.

Hal ini juga memberikan solusi trivial yang bukan solusi yang sesuai.

3. Kasus $\lambda \geq 0, \lambda = k^2, k > 0$, persamaan diferensialnya menjadi

$$N = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$$N = \sqrt{-k^2}$$

$$N = \sqrt{-1 \cdot k^2}$$

$$N = \pm ik$$

Persamaan di atas menghasilkan akar kompleks $N = ik$ dan $N = -ik$. Maka solusi umum persamaan diferensialnya

$$X(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

Menggunakan identitas euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dan $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ maka

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$$

$$e^{-ikx} = \cos kx - i\sin kx$$

Substitusikan ke persamaan sebelumnya

$$X(x) = C_1(\cos kx + i\sin kx) + C_2(\cos kx - i\sin kx)$$

$$X(x) = C_1\cos kx + C_1 i\sin kx + C_2\cos kx - C_2 i\sin kx$$

$$X(x) = (C_1 + C_2)\cos kx + i(C_1 - C_2)\sin kx$$

Misalkan $A = C_1 + C_2$ dan $B = i(C_1 - C_2)$

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

Menerapkan $X(0) = 0$

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0$$

$$A = 0$$

maka persamaannya menjadi

$$X(x) = B\sin kx$$

selanjutnya $X(1) = 0$

$$X(1) = B \sin k = 0$$

Ada dua kemungkinan solusi :

1. Jika $B = 0$, maka solusi trivial (fungsi $X(x) = 0$).
2. Jika $\sin k = 0$, maka perlu mencari nilai k yang memenuhi persamaan ini. Fungsi sinus bernilai nol

$$\sin k = 0 \;\; ketika \; k = n\pi, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

Karena $\lambda = k^2$, maka

$$\lambda = n^2\pi^2, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

Sehingga solusi persamaan (4.4) ditulis menjadi

$$X_n(x) = \sin n\pi x$$

Nilai $\lambda \geq 0$ sesuai dengan kondisi *Dirichlet* karena menghasilkan sinusoidal yang memenuhi $X(0) = 0$ dan $X(1) = 0$. Nilai eigen $\lambda = n^2\pi^2$ ini memberikan solusi non-trivial, yakni $X_n(x) = \sin n\pi x$.

Menyelesaikan persamaan (4.3) menggunakan metode karakteristik, misalkan $T'(t) = M$ dan M adalah sebuah konstanta sehingga

$$M + 2\lambda = 0$$

$$M = -2\lambda$$

maka diperoleh

$$T(t) = Ce^{Mt}$$

$$T(t) = Ce^{-2\lambda t}$$

Diketahui untuk nilai $\lambda = n^2\pi^2$ sehingga menjadi

$$T(t) = T_n(t) = Ce^{-2n^2\pi^2 t}$$

Berdasarkan solusi dari $X_n(x)$ dan $T_n(t)$ maka diperoleh solusi umumnya

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = \sin n\pi x \cdot Ce^{-2n^2\pi^2 t}$$

Solusi umum yang memenuhi kondisi batas

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n(x,t)$$

dengan nilai B_n adalah koefisien Fourier yang ditentukan oleh kondisi awal. Substitusikan nilai $U_n(x,t)$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x \cdot e^{-2n^2\pi^2 t}$$

Kemudian menggunakan kondisi awal dari $U(x,0) = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x \cdot e^{-2n^2\pi^2 0} = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$$

$$B_1 \sin \pi x + B_2 \sin 2\pi x + B_3 \sin 3\pi x + B_4 \sin 4\pi x + B_5 \sin 5\pi x +$$

$$B_6 \sin 6\pi x + \cdots = -\sin 3\pi x + \tfrac{1}{4}\sin 6\pi x$$

Dari sini didapatkan bahwa $B_3 = -1$ dan $B_6 = \frac{1}{4}$ sehingga solusinya menjadi

$$U(x,t) = -\sin 3\pi x\ e^{-2(3)^2\pi^2 t} + \frac{1}{4}\sin 6\pi x\ \ e^{-2(6)^2\pi^2 t}$$

$$U(x,t) = -\sin 3\pi x\ e^{-18\pi^2 t} + \frac{1}{4}\sin 6\pi x\ \ e^{-72\pi^2 t} \qquad (4.5)$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung setiap nilai $U(x,t)$ dari solusi eksak

1. $t = 0$

$x = 0$	$U(0,0) = -\sin(0)\ e^0 + \frac{1}{4}\sin(0)\ \ e^0$	0

$x = 0.1$	$U(0.1,0) = -\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right)e^{0}$	-0.571253
$x = 0.2$	$U(0.2,0) = -\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right)e^{0}$	-1.098003
$x = 0.3$	$U(0.3,0) = -\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{0}$	-0.455963
$x = 0.4$	$U(0.4,0) = -\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{0}$	0.825549
$x = 0.5$	$U(0.5,0) = -\sin\left(\frac{15}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{30}{10}\pi\right)e^{0}$	1
$x = 0.6$	$U(0.6,0) = -\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{36}{10}\pi\right)e^{0}$	0.350021
$x = 0.7$	$U(0.7,0) = -\sin\left(\frac{21}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{42}{10}\pi\right)e^{0}$	-0.162071
$x = 0.8$	$U(0.8,0) = -\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{48}{10}\pi\right)e^{0}$	-0.804110

$x = 0.9$	$U(0.9,0) = -\sin\left(\frac{27}{10}\pi\right) e^{0} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{54}{10}\pi\right) e^{0}$	-1.046781
$x = 1$	$U(1,0) = -\sin(3\pi)e^{0} + \frac{1}{4}\sin(6\pi)\, e^{0}$	0

2. $t = 0.0025$

$x = 0$	$U(0, 0.0025) = -\sin(0)\, e^{-18\pi^2(0.0025)} + \frac{1}{4}\sin(0)\, e^{-72\pi^2(0.0025)}$	0
$x = 0.1$	$U(0.1, 0.0025) = -\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0025)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.478652
$x = 0.2$	$U(0.2, 0.0025) = -\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0025)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.634856
$x = 0.3$	$U(0.3, 0.0025) = -\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0025)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.223064

$x = 0.4$	$U(0.4, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	0.417230
$x = 0.5$	$U(0.5, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{15}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{30}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	0.641381
$x = 0.6$	$U(0.6, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{36}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	0.336759
$x = 0.7$	$U(0.7, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{21}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{42}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.173331
$x = 0.8$	$U(0.8, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{48}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.585122
$x = 0.9$	$U(0.9, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{27}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0025)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{54}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0025)}$	-0.559123

$x = 1$	$U(1, 0.0025) = -\sin(3\pi)e^{-18\pi^2(0.0025)} + \frac{1}{4}\sin(6\pi)\, e^{-72\pi^2(0.0025)}$	0

3. $t = 0.005$

$x = 0$	$U(0, 0.005) = -\sin(0)\, e^{-18\pi^2(0.005)} + \frac{1}{4}\sin(0)\, e^{-72\pi^2(0.005)}$	0
$x = 0.1$	$U(0.1, 0.005) = -\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)\, e^{-18\pi^2(0.005)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.3259956
$x = 0.2$	$U(0.2, 0.005) = -\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.395443
$x = 0.3$	$U(0.3, 0.005) = -\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.131328
$x = 0.4$	$U(0.4, 0.005) = -\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	0.248606

$x = 0.5$	$U(0.5, 0.005)$ $= -\sin\left(\frac{15}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{30}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	0.411369
$x = 0.6$	$U(0.6, 0.005)$ $= -\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{36}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	0.234988
$x = 0.7$	$U(0.7, 0.005)$ $= -\sin\left(\frac{21}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{42}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.122912
$x = 0.8$	$U(0.8, 0.0025)$ $= -\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{48}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.387027
$x = 0.9$	$U(0.9, 0.005)$ $= -\sin\left(\frac{27}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{54}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.005)}$	-0.339613
$x = 1$	$U(1, 0.005) = -\sin(3\pi)\, e^{-18\pi^2(0.005)}$ $+ \frac{1}{4}\sin(6\pi)\, e^{-72\pi^2(0.005)}$	0

4. $t = 0.0075$

$x = 0$	$U(0, 0.0075) = -\sin(0)e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin(0)\, e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0
$x = 0.1$	$U(0.1, 0.0075) = -\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.212302
$x = 0.2$	$U(0.2, 0.0075) = -\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.251643
$x = 0.3$	$U(0.3, 0.0075) = -\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.082244
$x = 0.4$	$U(0.4, 0.0075) = -\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0.156236
$x = 0.5$	$U(0.5, 0.0075) = -\sin\left(\frac{15}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.0075)} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{30}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0.263844

$x = 0.6$	$U(0.6, 0.0075)$ $= -\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{36}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0.153931
$x = 0.7$	$U(0.7, 0.0075)$ $= -\sin\left(\frac{21}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{42}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.080820
$x = 0.8$	$U(0.8, 0.0075)$ $= -\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{48}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.250219
$x = 0.9$	$U(0.9, 0.0075)$ $= -\sin\left(\frac{27}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{54}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	-0.214607
$x = 1$	$U(1, 0.0075) = -\sin(3\pi)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+\frac{1}{4}\sin(6\pi)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0

5. $t = 0.01$

$x = 0$	$U(0, 0.01) = -\sin(0)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin(0)e^{-72\pi^2(0.01)}$	0

$x = 0.1$	$U(0.1, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.136711
$x = 0.2$	$U(0.2, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{6}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.161063
$x = 0.3$	$U(0.3, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{9}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.052414
$x = 0.4$	$U(0.4, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{12}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	0.099663
$x = 0.5$	$U(0.5, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{15}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{30}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	0.169225
$x = 0.6$	$U(0.6, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{18}{10}\pi\right)e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{36}{10}\pi\right)e^{-72\pi^2(0.01)}$	0.099273

$x = 0.7$	$U(0.7, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{21}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{42}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.052173
$x = 0.8$	$U(0.8, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{24}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{48}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.160822
$x = 0.9$	$U(0.9, 0.01)$ $= -\sin\left(\frac{27}{10}\pi\right) e^{-18\pi^2(0.01)}$ $+ \frac{1}{4}\sin\left(\frac{54}{10}\pi\right) e^{-72\pi^2(0.01)}$	-0.137101
$x = 1$	$U(1, 0.0075) = -\sin(3\pi)e^{-18\pi^2(0.0075)}$ $+ \frac{1}{4}\sin(6\pi)e^{-72\pi^2(0.0075)}$	0

4.2 Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Metode FTCS

4.2.1 Diskritisasi Persamaan Difusi

$$U_t = 2U_{xx} \tag{4.6}$$

Formula dasar penyusun persamaan

$$U_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Substitusikan ke persamaan (4.6) menjadi

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 2\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$U_j^{n+1} - U_j^n = 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\ U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n$$

$$U_j^{n+1} = 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + U_j^n \tag{4.7}$$

atau misalkan $R = 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ sehingga

$$U_j^{n+1} = R(\ U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + U_j^n \tag{4.8}$$

4.2.2 Analisis Kestabilan

Substitusikan nilai

$U_j^n = \rho^n e^{iaj\Delta x}, U_j^{n+1} = \rho^{n+1} e^{iaj\Delta x}, U_{j-1}^n = \rho^n e^{ia(j-1)\Delta x}, U_{j-1}^n = \rho^n e^{ia(j+1)\Delta x}$

ke diskritisasi persamaan (4.8)

$$\rho^{n+1} e^{iaj\Delta x} = R\left(\rho^n e^{ia(j+1)\Delta x} + \rho^n e^{ia(j-1)\Delta x}\right) + (1 - 2R)\rho^n e^{iaj\Delta x}$$

Kemudian kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\rho^n e^{iaj\Delta x}}$ sehingga diperoleh

$$\rho = R\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) + (1 - 2R)$$

Identitas bahwa $e^{ia} + e^{-ia} = 2\cos a$

$$\rho = R(2\cos a) + 1 - 2R = 1 + 2R(\cos a - 1)$$

Agar skema stabil, maka $|\rho| \leq 1$, yaitu

$$|\rho| = |1 + R(\cos a - 1)| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 + R(\cos a - 1) \leq 1$$

$$-2 \leq R(\cos a - 1) \leq 0$$

Dikalikan dengan -1

$$2 \geq R(1 - \cos a) \geq 0$$

$$0 \leq R(1 - \cos a) \leq 2$$

Menggunakan identitas trigonometri $1 - \cos a = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$ sehingga menjadi

$$0 \leq R\left(2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) \leq 2$$

Bagi setiap ruas dengan 2

$$0 \leq R\sin^2\frac{a}{2} \leq 1 \tag{4.9}$$

1. Kasus $\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, maka R bisa bernilai berapapun karena persamaan akan selalu terpenuhi (sebab $R.0 = 0$).
2. Kasus $\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1$, maka pertidaksamaan menjadi $0 \leq R \leq 1$.

Agar pertidaksamaan (4.8) selalu terpenuhi, maka nilai R harus berada dalam interval : $0 \leq R \leq 1$. Jadi, skema akan stabil jika nilai $R = 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \in [0,1]$.

4.2.3 Analisis Konstitensi Numerik

Ekspansi deret Taylor dari $U_{j\pm1}^{n}, U_j^{n+1}$ dan U_j^{n-1} disekitar U_j^n adalah

$$U_{j\pm1}^{n} = U_j^n \pm \Delta x\, U_x\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 U_{xx}\Big|_j^n \pm \mathcal{O}(\Delta x^3) + \frac{1}{2}\Delta x^4 U_{4x}\Big|_j^n + \cdots$$

Menggabungkan ekspansi $U_{j+1}^n + U_{j-1}^n$ menjadi

$$U_{j+1}^n + U_{j-1}^n = 2(U_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 U_{xx}\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^4 U_{4x}\Big|_j^n + \cdots)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t U_t\Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 U_{tt}\Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \frac{1}{2}\Delta t^4 U_{4t}\Big|_j^n + \cdots$$

Substitusikan deret Taylor diatas ke dalam persamaan (4.6) maka diperoleh

$$U_j^n + \Delta t U_t \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 U_{tt} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \frac{1}{2}\Delta t^4 U_{4t} \Big|_j^n + \cdots$$

$$= 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(2(U_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 U_{xx} \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^4 U_{4x} \Big|_j^n + \cdots) - 2U_j^n\right)$$

$$+ U_j^n$$

Pindahkan U_j^n ke ruas kanan

$$\Delta t U_t \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 U_{tt} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) + \frac{1}{2}\Delta t^4 U_{4t} \Big|_j^n + \cdots$$

$$= 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{2}{2}\Delta x^2 U_{xx} \Big|_j^n + \frac{2}{2}\Delta x^4 U_{4x} \Big|_j^n + \cdots\right)$$

Bagi kedua ruas dengan Δt

$$U_t \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t U_{tt} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \frac{1}{2}\Delta t^3 U_{4t} \Big|_j^n + \cdots$$

$$= 2\left(\frac{2}{2!} U_{xx} \Big|_j^n + \frac{2}{4!}\Delta x^2 U_{4x} \Big|_j^n + \cdots\right)$$

$$U_t \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t U_{tt} \Big|_j^n + \cdots = 2\left(\frac{2}{2!} U_{xx} \Big|_j^n + \frac{2}{4!}\Delta x^2 U_{4x} \Big|_j^n + \cdots\right)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$(U_t - 2U_{xx})_j^n + \left(\frac{1}{2}\Delta t 2^2 U_{4x} - \frac{2}{4!}\Delta x^2 2U_{4x}\right)_j^n + \cdots = 0$$

Jelas bahwa skema konsisten, Kemudian suku pertama *truncation term* yaitu

$$\frac{1}{2}\Delta t 2^2 U_{4x} - \frac{2}{4!}\Delta x^2 2U_{4x} = \frac{2}{2}\left(2\Delta t - \frac{1}{6}\Delta x^2\right) U_{4x}$$

Suku difusi akan bernilai nol jika $R = \frac{1}{6}$ dan akurasi metode ini $\mathcal{O}(\Delta \mathrm{t}) + \mathcal{O}(\Delta \mathrm{x}^2)$.

4.2.4 Implementasi Metode FTCS untuk Persamaan Difusi

Berdasarkan hasil analisis kestabilan didapatkan bahwa nilai $U(x,t)$ akan stabil jika nilai $R = 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \in [0,1]$. Agar nilai R diantara 0 dan 1 maka digunakan nilai $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.0025$, dan $D = 1$ sehingga diperoleh

$$R = 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 2\frac{0.0025}{(0.1)^2} = 0.5,\quad N_x = \frac{1-0}{0.1} = 10,\quad N_t = \frac{0.01}{0.0025} = 4$$

Selanjutnya, nilai $0 \leq x \leq 1$ dengan $\Delta x = 0.1$ diperoleh

$$U_j^{n+1} = 0.5(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + U_j^n$$

$$x_j = 0 + (j-1)\Delta x = (j-1)0.1,\quad j = 1,2,\dots,(N_x+1)$$

atau

$$x_{11\times 1} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})^T$$

$$= (0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)^T$$

Maka nilai grid yang perlu dicari seperti pada tabel dibawah ini :

Solusi Numerik											
0.01	U_0^4	U_1^4	U_2^4	U_3^4	U_4^4	U_5^4	U_6^4	U_7^4	U_8^4	U_9^4	U_{10}^4
0.0075	U_0^3	U_1^3	U_2^3	U_3^3	U_4^3	U_5^3	U_6^3	U_7^3	U_8^3	U_9^3	U_{10}^3
0.005	U_0^2	U_1^2	U_2^2	U_3^2	U_4^2	U_5^2	U_6^2	U_7^2	U_8^2	U_9^2	U_{10}^2
0.0025	U_0^1	U_1^1	U_2^1	U_3^1	U_4^1	U_5^1	U_6^1	U_7^1	U_8^1	U_9^1	U_{10}^1
0	U_0^0	U_1^0	U_2^0	U_3^0	U_4^0	U_5^0	U_6^0	U_7^0	U_8^0	U_9^0	U_{10}^0
t / x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Langkah selanjutnya adalah menghitung setiap nilai dari grid menggunakan metode FTCS.

1. $t = 0$

$x = 0$	$U_0^0 = -\sin 3\pi(0) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0)$	0
$x = 0.1$	$U_1^0 = -\sin 3\pi(0.1) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.1)$	-0.571253
$x = 0.2$	$U_2^0 = -\sin 3\pi(0.2) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.2)$	-1.098003

$x = 0.3$	$U_3^0 = -\sin 3\pi(0.3) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.3)$	-0.455963
$x = 0.4$	$U_4^0 = -\sin 3\pi(0.4) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.4)$	0.825549
$x = 0.5$	$U_5^0 = -\sin 3\pi(0.5) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.5)$	1
$x = 0.6$	$U_6^0 = -\sin 3\pi(0.6) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.6)$	0.350021
$x = 0.7$	$U_7^0 = -\sin 3\pi(0.7) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.7)$	-0.162071
$x = 0.8$	$U_8^0 = -\sin 3\pi(0.8) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.8)$	-0.804110
$x = 0.9$	$U_9^0 = -\sin 3\pi(0.9) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(0.9)$	-1.046781
$x = 1$	$U_{10}^0 = -\sin 3\pi(1) + \frac{1}{4}\sin 6\pi(1)$	0

2. $t = 0.0025$

U_1^1	$U_1^{0+1} = 0.5(U_{1+1}^0 - 2U_1^0 + U_{1-1}^0) + U_1^0$ $U_1^1 = 0.5(U_2^0 - 2U_1^0 + U_0^0) + U_1^0$ $U_1^1 = 0.5(-1.098003$ $- 2(-0.571253) + 0)$ $+ (-0.571253)$	-0.549001
U_2^1	$U_2^{0+1} = 0.5(U_{2+1}^0 - 2U_2^0 + U_{2-1}^0) + U_2^0$ $U_2^1 = 0.5(U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0) + U_2^0$	-0.513608

	$U_2^1 = 0.5(-0.455963$ $- 2(-1.098003)$ $+ (-0.571253))$ $+ (-1.098003)$	
U_3^1	$U_3^{0+1} = 0.5(U_{3+1}^0 - 2U_3^0 + U_{3-1}^0) + U_3^0$ $U_3^1 = 0.5(U_4^0 - 2U_3^0 + U_2^0) + U_3^0$ $U_3^1 = 0.5(0.825549 - 2(-0.455963)$ $+ (-1.098003))$ $+ (-0.455963)$	-0.136227
U_4^1	$U_4^{0+1} = 0.5(U_{4+1}^0 - 2U_4^0 + U_{4-1}^0) + U_4^0$ $U_4^1 = 0.5(U_5^0 - 2U_4^0 + U_3^0) + U_4^0$ $U_4^1 = 0.5(1 - 2(0.825549)$ $+ (-0.455963))$ $+ 0.825549$	0.272018
U_5^1	$U_5^{0+1} = 0.5(U_{5+1}^0 - 2U_5^0 + U_{5-1}^0) + U_5^0$ $U_5^1 = 0.5(U_6^0 - 2U_5^0 + U_4^0) + U_5^0$ $U_5^1 = 0.5(0.350021 - 2(1)$ $+ 0.825549) + 1$	0.587785
U_6^1	$U_6^{0+1} = 0.5(U_{6+1}^0 - 2U_6^0 + U_{6-1}^0) + U_6^0$ $U_6^1 = 0.5(U_7^0 - 2U_6^0 + U_5^0) + U_6^0$ $U_6^1 = 0.5(-0.162071 - 2(0.350021)$ $+ 1) + 0.350021$	0.418965
U_7^1	$U_7^{0+1} = 0.5(U_{7+1}^0 - 2U_7^0 + U_{7-1}^0) + U_7^0$	-0.227045

	$U_7^1 = 0.5(U_8^0 - 2U_7^0 + U_6^0) + U_7^0$ $U_7^1 = 0.5(-0.804110$ $- 2(-0.162071)$ $+ 0.350021)$ $+ (-0.162071)$	
U_8^1	$U_8^{0+1} = 0.5(U_{8+1}^0 - 2U_8^0 + U_{8-1}^0) + U_8^0$ $U_8^1 = 0.5(U_9^0 - 2U_8^0 + U_7^0) + U_8^0$ $U_8^1 = 0.5((-1.046781)$ $- 2(-0.804110)$ $+ (-0.162071))$ $+ (-0.804110)$	-0.604426
U_9^1	$U_9^{0+1} = 0.5(U_{9+1}^0 - 2U_9^0 + U_{9-1}^0) + U_9^0$ $U_9^1 = 0.5(U_{10}^0 - 2U_9^0 + U_8^0) + U_9^0$ $U_9^1 = 0.5(0 - 2(-1.046781)$ $+ (-0.804110))$ $+ (-1.046781)$	-0.402055
U_{10}^1		0

3. $t = 0.005$

U_1^2	$U_1^{1+1} = 0.5(U_{1+1}^1 - 2U_1^1 + U_{1-1}^1) + U_1^1$ $U_1^2 = 0.5(U_2^1 - 2U_1^1 + U_0^1) + U_1^1$	-0.256804

	$U_1^1 = 0.5(-0.513608$ $- 2(-0.549001) + 0)$ $+ (-0.549001)$	
U_2^2	$U_2^{1+1} = 0.5(U_{2+1}^1 - 2U_2^1 + U_{2-1}^1) + U_2^1$ $U_2^2 = 0.5(U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1) + U_2^1$ $U_2^2 = 0.5(-0.136227$ $- 2(-0.513608)$ $+ (-0.549001))$ $+ (-0.513608)$	-0.342614
U_3^2	$U_3^{1+1} = 0.5(U_{3+1}^1 - 2U_3^1 + U_{3-1}^1) + U_3^1$ $U_3^2 = 0.5(U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1) + U_3^1$ $U_3^2 = 0.5(0.272018 - 2(-0.136227$ $+ (-0.513608))$ $+ (-0.136227)$	-0.120795
U_4^2	$U_4^{1+1} = 0.5(U_{4+1}^1 - 2U_4^1 + U_{4-1}^1) + U_4^1$ $U_4^2 = 0.5(U_5^1 - 2U_4^1 + U_3^1) + U_4^1$ $U_4^2 = 0.5(0.587785 - 2(0.272018)$ $+ (-0.136227))$ $+ 0.272018$	0.225779
U_5^2	$U_5^{1+1} = 0.5(U_{5+1}^1 - 2U_5^1 + U_{5-1}^1) + U_5^1$ $U_5^2 = 0.5(U_6^1 - 2U_5^1 + U_4^1) + U_5^1$ $U_5^2 = 0.5(0.418965 - 2(0.587785)$ $+ 0.272018) + 0.587785$	0.345492

U_6^2	$U_6^{1+1} = 0.5(U_{6+1}^1 - 2U_6^1 + U_{6-1}^1) + U_6^1$ $U_6^2 = 0.5(U_7^1 - 2U_6^1 + U_5^1) + U_6^1$ $U_6^2 = 0.5(-0.227045 - 2(0.418965)$ $+ 0.587785) + 0.418965$	0.180370
U_7^2	$U_7^{1+1} = 0.5(U_{7+1}^1 - 2U_7^1 + U_{7-1}^1) + U_7^1$ $U_7^2 = 0.5(U_8^1 - 2U_7^1 + U_6^1) + U_7^1$ $U_7^2 = 0.5(-0.604426$ $- 2(-0.227045)$ $+ 0.418965)$ $+ (-0.227045)$	-0.092731
U_8^2	$U_8^{1+1} = 0.5(U_{8+1}^1 - 2U_8^1 + U_{8-1}^1) + U_8^1$ $U_8^2 = 0.5(U_9^1 - 2U_8^1 + U_7^1) + U_8^1$ $U_8^2 = 0.5(-0.402055$ $- 2(-0.604426)$ $+ (-0.227045))$ $+ (-0.604426)$	-0.314550
U_9^2	$U_9^{1+1} = 0.5(U_{9+1}^1 - 2U_9^1 + U_{9-1}^1) + U_9^1$ $U_9^2 = 0.5(U_{10}^1 - 2U_9^1 + U_8^1) + U_9^1$ $U_9^2 = 0.5(0 - 2(-0.402055)$ $+ (-0.604426))$ $+ (-0.402055)$	-0.302213
U_{10}^2		0

4. $t = 0.0075$

U_1^3	$U_1^{2+1} = 0.5(U_{1+1}^2 - 2U_1^2 + U_{1-1}^2)$ $+ U_1^2$ $U_1^2 = 0.5(U_2^2 - 2U_1^2 + U_0^2) + U_1^2$ $U_1^2 = 0.5(-0.342614$ $- 2(-0.256804) + 0)$ $+ (-0.256804)$	-0.171307
U_2^3	$U_2^{2+1} = 0.5(U_{2+1}^2 - 2U_2^2 + U_{2-1}^2)$ $+ U_2^2$ $U_2^3 = 0.5(U_3^2 - 2U_2^2 + U_1^2) + U_2^2$ $U_2^3 = 0.5(-0.120795$ $- 2(-0.342614)$ $+ (-0.256804))$ $+ (-0.342614)$	-0.188799
U_3^3	$U_3^{2+1} = 0.5(U_{3+1}^2 - 2U_3^2 + U_{3-1}^2)$ $+ U_3^2$ $U_3^3 = 0.5(U_4^2 - 2U_3^2 + U_2^2) + U_3^2$ $U_3^3 = 0.5(0.225779$ $- 2(-0.120795)$ $+ (-0.342614))$ $+ (-0.120795)$	-0.058417
U_4^3	$U_4^{2+1} = 0.5(U_{4+1}^2 - 2U_4^2 + U_{4-1}^2)$ $+ U_4^2$ $U_4^3 = 0.5(U_5^2 - 2U_4^2 + U_3^2) + U_4^2$	0.112348

	$U_4^3 = 0.5(0.345492 - 2(0.225779)$ $+ (-0.120795))$ $+ 0.225779$	
U_5^3	$U_5^{2+1} = 0.5(U_{5+1}^2 - 2U_5^2 + U_{5-1}^2)$ $+ U_5^2$ $U_5^3 = 0.5(U_6^2 - 2U_5^2 + U_4^2) + U_5^2$ $U_5^3 = 0.5(0.180370 - 2(0.345492)$ $+ 0.225779)$ $+ 0.345492$	0.203075
U_6^3	$U_6^{2+1} = 0.5(U_{6+1}^2 - 2U_6^2 + U_{6-1}^2)$ $+ U_6^2$ $U_6^3 = 0.5(U_7^2 - 2U_6^2 + U_5^2) + U_6^2$ $U_6^3 = 0.5(-0.092731 - 2(0.180370)$ $+ 0.345492)$ $+ 0.180370$	0.126380
U_7^3	$U_7^{2+1} = 0.5(U_{7+1}^2 - 2U_7^2 + U_{7-1}^2)$ $+ U_7^2$ $U_7^3 = 0.5(U_8^2 - 2U_7^2 + U_6^2) + U_7^2$ $U_7^3 = 0.5(-0.314550$ $- 2(-0.092731)$ $+ 0.180370)$ $+ (-0.092731)$	-0.067090

U_8^3	$U_8^{2+1} = 0.5(U_{8+1}^2 - 2U_8^2 + U_{8-1}^2) + U_8^2$ $U_8^3 = 0.5(U_9^2 - 2U_8^2 + U_7^2) + U_8^2$ $U_8^3 = 0.5(-0.302213 - 2(-0.314550) + (-0.092731)) + (-0.314550)$	-0.197472
U_9^3	$U_9^{2+1} = 0.5(U_{9+1}^2 - 2U_9^2 + U_{9-1}^2) + U_9^2$ $U_9^3 = 0.5(U_{10}^2 - 2U_9^2 + U_8^2) + U_9^2$ $U_9^3 = 0.5(0 - 2(-0.302213) + (-0.314550)) + (-0.302213)$	-0.157275
U_{10}^3		0

5. $t = 0.01$

U_1^4	$U_1^{3+1} = 0.5(U_{1+1}^3 - 2U_1^3 + U_{1-1}^3) + U_1^3$ $U_1^2 = 0.5(U_2^3 - 2U_1^3 + U_0^3) + U_1^3$ $U_1^2 = 0.5(-0.188799 - 2(-0.1713070 + 0) + (-0.171307)$	-0.094400

U_2^4	$U_2^{3+1} = 0.5(U_{2+1}^3 - 2U_2^3 + U_{2-1}^3)$ $+ U_2^3$ $U_2^4 = 0.5(U_3^3 - 2U_2^3 + U_1^3) + U_2^3$ $U_2^4 = 0.5(-0.058417$ $- 2(-0.188799)$ $+ (-0.171307)$ $+ (-0.188799)$	-0.114862
U_3^4	$U_3^{3+1} = 0.5(U_{3+1}^3 - 2U_3^3 + U_{3-1}^3)$ $+ U_3^3$ $U_3^4 = 0.5(U_4^3 - 2U_3^3 + U_2^3) + U_3^3$ $U_3^4 = 0.5(0.112348$ $- 2(-0.058417)$ $+ (-0.188799))$ $+ (-0.058417)$	-0.038226
U_4^4	$U_4^{3+1} = 0.5(U_{4+1}^3 - 2U_4^3 + U_{4-1}^3)$ $+ U_4^3$ $U_4^4 = 0.5(U_5^3 - 2U_4^3 + U_3^3) + U_4^3$ $U_4^4 = 0.5(0.203075 - 2(0.112348)$ $+ (-0.058417))$ $+ 0.112348$	0.072329
U_5^4	$U_5^{3+1} = 0.5(U_{5+1}^3 - 2U_5^3 + U_{5-1}^3)$ $+ U_5^3$ $U_5^4 = 0.5(U_6^3 - 2U_5^3 + U_4^3) + U_5^3$	0.119364

	$U_5^4 = 0.5(0.126380 - 2(0.203075)$ $+ 0.112348)$ $+ 0.203075$	
U_6^4	$U_6^{3+1} = 0.5(U_{6+1}^3 - 2U_6^3 + U_{6-1}^3)$ $+ U_6^3$ $U_6^4 = 0.5(U_7^3 - 2U_6^3 + U_5^3) + U_6^3$ $U_6^4 = 0.5(-0.067090 - 2(0.126380)$ $+ 0.203075)$ $+ 0.126380$	0.067993
U_7^4	$U_7^{3+1} = 0.5(U_{7+1}^3 - 2U_7^3 + U_{7-1}^3)$ $+ U_7^3$ $U_7^4 = 0.5(U_8^3 - 2U_7^3 + U_6^3) + U_7^3$ $U_7^4 = 0.5(-0.197472$ $- 2(-0.067090)$ $+ 0.126380)$ $+ (-0.067090)$	-0.035546
U_8^4	$U_8^{3+1} = 0.5(U_{8+1}^3 - 2U_8^3 + U_{8-1}^3)$ $+ U_8^3$ $U_8^4 = 0.5(U_9^3 - 2U_8^3 + U_7^3) + U_8^3$ $U_8^4 = 0.5(-0.157275$ $- 2(-0.197472)$ $+ (-0.067090))$ $+ (-0.197472)$	-0.112182

U_9^4	$U_9^{3+1} = 0.5(U_{9+1}^3 - 2U_9^3 + U_{9-1}^3)$ $+ U_9^3$ $U_9^4 = 0.5(U_{10}^3 - 2U_9^3 + U_8^3) + U_9^3$ $U_9^4 = 0.5(0 - 2(-0.157275)$ $+ (-0.197472))$ $+ (-0.157275)$	-0.098736
U_{10}^4		0

4.3 Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Difusi

Setelah mencari nilai $U(x,t)$ dengan nilai $\Delta x = 0.1$ dimana $0 \leq x \leq 1$ dan $\Delta t = 0.0025$ dimana $0 \leq t \leq 1$ dari persamaan difusi diperoleh solusi analitik dan solusi numerik seperti pada tabel dibawah ini.

Tabel 4.1 Hasil dari Solusi Analitik Persamaan Difusi

Solusi Analitik											
0.01	0	−0.136711	−0.161063	−0.052414	0.099663	0.169225	0.099273	−0.052173	−0.160822	−0.137101	0
0.0075	0	−0.212302	−0.251643	−0.082244	−0.156236	0.263844	0.153931	−0.080820	−0.250219	−0.214607	0
0.05	0	−0.325996	−0.395443	−0.131328	−0.248606	0.411369	0.234988	−0.122912	−0.387027	−0.339613	0
0.0025	0	−0.478652	−0.634856	−0.223064	0.417230	0.641381	0.336759	−0.173331	−0.585122	−0.559123	0
0	0	−0.571253	−1.098003	−0.455963	0.825549	1	0.350021	−0.162071	−0.804110	−1.046781	0
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Tabel 4.2 Hasil dari Solusi Numerik Persamaan Difusi

Solusi Numerik											
0.01	0	−0.094400	−0.114862	−0.038226	0.072329	0.119364	−0.067993	−0.03546	−0.112182	−0.098736	0
0.0075	0	−0.171307	−0.188799	−0.058417	0.112348	0.203075	0.126380	−0.067090	−0.197472	−0.157275	0
0.05	0	−0.256804	−0.342614	−0.120795	0.225779	0.345492	−0.180370	−0.092731	−0.314550	−0.302213	0
0.0025	0	−0.549001	−0.513608	−0.136227	0.272018	0.587785	0.418965	−0.227045	−0.604426	−0.402055	0
0	0	−0.571253	−1.098003	−0.455963	0.825549	1	0.350021	−0.162071	−0.804110	−1.046781	0
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

Untuk mengetahui hasil perbandingannya perlu mengetahui nilai error yang dihasilkan

Tabel 4.3 Error pada $t = 0$

x	t	Analitik	Numerik	Error
0	0	0	0	0
0.1	0	-0.571253	-0.571253	0
0.2	0	-1.098003	-1.098003	0
0.3	0	-0.455963	-0.4559633	0
0.4	0	0.825549	0.825549	0
0.5	0	1	1	0
0.6	0	0.350021	0.350021	0
0.7	0	-0.162071	-0.162071	0
0.8	0	-0.804110	-0.804110	0
0.9	0	-1.046781	-1.046781	0
1	0	0	0	0

Tabel 4.4 Error pada $t = 0.0025$

x	t	Analitik	Numerik	Error
0	0.0025	0	0	0
0.1	0.0025	-0.478652	-0.549001	0.070349
0.2	0.0025	-0.634856	-0.513608	-0.121248
0.3	0.0025	-0.223064	-0.136227	-0.086838
0.4	0.0025	0.417230	0.272018	0.145211
0.5	0.0025	0.641381	0.587785	0.053595
0.6	0.0025	0.336759	0.418965	-0.082206
0.7	0.0025	-0.173331	-0.227045	0.053714
0.8	0.0025	-0.585122	-0.604426	0.019304
0.9	0.0025	-0.559123	-0.402055	-0.157068
1	0.0025	0	0	0

Tabel 4.5 Error pada $t = 0.005$

x	t	Analitik	Numerik	Error
0	0.005	0	0	0
0.1	0.005	-0.325996	-0.256804	-0.069192
0.2	0.005	-0.395443	-0.342614	-0.052829
0.3	0.005	-0.131328	-0.120795	-0.010533
0.4	0.005	0.248606	0.225779	0.022826
0.5	0.005	0.411369	0.345492	0.065878
0.6	0.005	0.234988	0.180370	0.054617

0.7	0.005	−0.122912	−0.092731	−0.030181
0.8	0.005	−0.387027	−0.314550	0.072477
0.9	0.005	−0.339613	−0.302213	−0.037400
1	0.005	0	0	0

Tabel 4.6 Error pada $t = 0.0075$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{t}$	**Analitik**	**Numerik**	**Error**
0	0.0075	0	0	0
0.1	0.0075	−0.212302	−0.171307	−0.040995
0.2	0.0075	−0.251643	−0.188799	−0.062843
0.3	0.0075	−0.082244	−0.058417	−0.023827
0.4	0.0075	0.156236	0.112348	0.043888
0.5	0.0075	0.263844	0.203075	0.060769
0.6	0.0075	0.153931	0.126380	0.027551
0.7	0.0075	−0.080820	−0.067090	−0.013730
0.8	0.0075	−0.250219	−0.197472	−0.052747
0.9	0.0075	−0.214607	−0.157275	−0.057332
1	0.0075	0	0	0

Tabel 4.7 Error pada $t = 0.01$

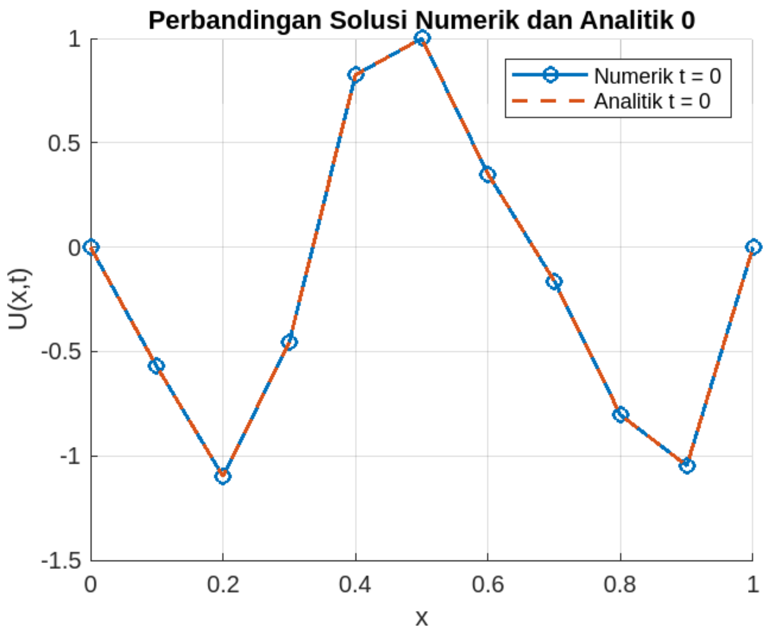
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{t}$	**Analitik**	**Numerik**	**Error**
0	0.01	0	0	0
0.1	0.01	−0.136711	−0.094400	−0.042311
0.2	0.01	−0.161063	−0.114862	−0.046200
0.3	0.01	−0.052414	−0.038226	−0.014188
0.4	0.01	0.099663	0.072329	0.027334
0.5	0.01	0.169225	0.119364	0.049860
0.6	0.01	0.099273	0.067993	0.031280
0.7	0.01	−0.052173	−0.035546	−0.016627
0.8	0.01	−0.160822	−0.112182	−0.048639
0.9	0.01	−0.137101	−0.098736	−0.038365
1	0.01	0	0	0

Kemudian, perhitungan menggunakan pemrograman menghasilkan nilai yang sama dengan perhitungan manual seperti pada tabel dibawah ini.

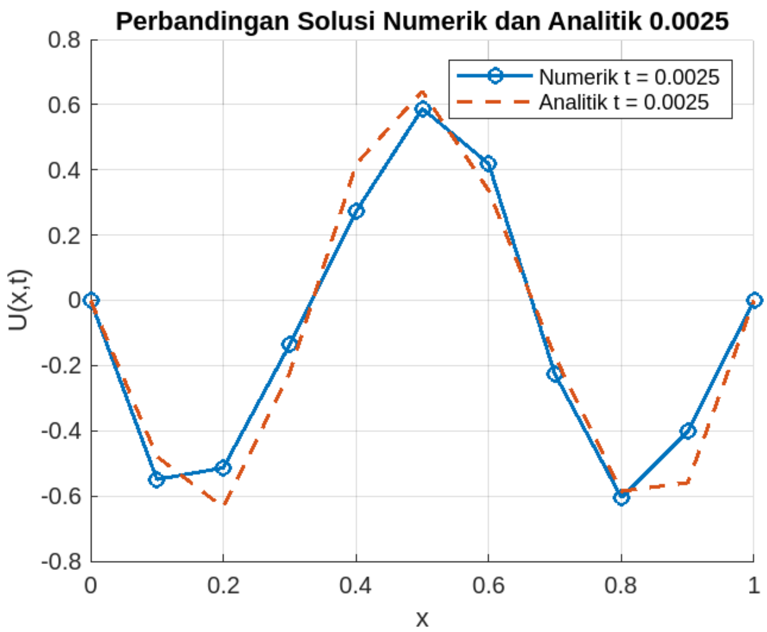
```
   x       t        Analitik      Numerik       Error
 0.00  0.0000     0.000000     0.000000     0.000000
 0.00  0.0025     0.000000     0.000000     0.000000
 0.00  0.0050     0.000000     0.000000     0.000000
 0.00  0.0075     0.000000     0.000000     0.000000
 0.00  0.0100     0.000000     0.000000     0.000000
```

```
0.10  0.0000   -0.571253   -0.571253    0.000000
0.10  0.0025   -0.478652   -0.549001    0.070349
0.10  0.0050   -0.325996   -0.256804    0.069192
0.10  0.0075   -0.212302   -0.171307    0.040995
0.10  0.0100   -0.136711   -0.094400    0.042311
0.20  0.0000   -1.098003   -1.098003    0.000000
0.20  0.0025   -0.634856   -0.513608    0.121248
0.20  0.0050   -0.395443   -0.342614    0.052829
0.20  0.0075   -0.251643   -0.188799    0.062843
0.20  0.0100   -0.161063   -0.114862    0.046200
0.30  0.0000   -0.455963   -0.455963    0.000000
0.30  0.0025   -0.223064   -0.136227    0.086838
0.30  0.0050   -0.131328   -0.120795    0.010533
0.30  0.0075   -0.082244   -0.058417    0.023827
0.30  0.0100   -0.052414   -0.038226    0.014188
0.40  0.0000    0.825549    0.825549    0.000000
0.40  0.0025    0.417230    0.272018    0.145211
0.40  0.0050    0.248606    0.225779    0.022826
0.40  0.0075    0.156236    0.112348    0.043888
0.40  0.0100    0.099663    0.072329    0.027334
                       ---
0.50  0.0000    1.000000    1.000000    0.000000
0.50  0.0025    0.641381    0.587785    0.053595
0.50  0.0050    0.411369    0.345492    0.065878
0.50  0.0075    0.263844    0.203075    0.060769
0.50  0.0100    0.169225    0.119364    0.049860
0.60  0.0000    0.350021    0.350021    0.000000
0.60  0.0025    0.336759    0.418965    0.082206
0.60  0.0050    0.234988    0.180370    0.054617
0.60  0.0075    0.153931    0.126380    0.027551
0.60  0.0100    0.099273    0.067993    0.031280
0.70  0.0000   -0.162071   -0.162071    0.000000
0.70  0.0025   -0.173331   -0.227045    0.053714
0.70  0.0050   -0.122912   -0.092731    0.030181
0.70  0.0075   -0.080820   -0.067090    0.013730
0.70  0.0100   -0.052173   -0.035546    0.016627
0.80  0.0000   -0.804110   -0.804110    0.000000
0.80  0.0025   -0.585122   -0.604426    0.019304
0.80  0.0050   -0.387027   -0.314550    0.072477
0.80  0.0075   -0.250219   -0.197472    0.052747
0.80  0.0100   -0.160822   -0.112182    0.048639
0.90  0.0000   -1.046781   -1.046781    0.000000
0.90  0.0025   -0.559123   -0.402055    0.157068
0.90  0.0050   -0.339613   -0.302213    0.037400
0.90  0.0075   -0.214607   -0.157275    0.057332
0.90  0.0100   -0.137101   -0.098736    0.038365
                       ---
1.00  0.0000   -0.000000   -0.000000    0.000000
1.00  0.0025   -0.000000    0.000000    0.000000
1.00  0.0050   -0.000000    0.000000    0.000000
1.00  0.0075   -0.000000    0.000000    0.000000
1.00  0.0100   -0.000000    0.000000    0.000000
```

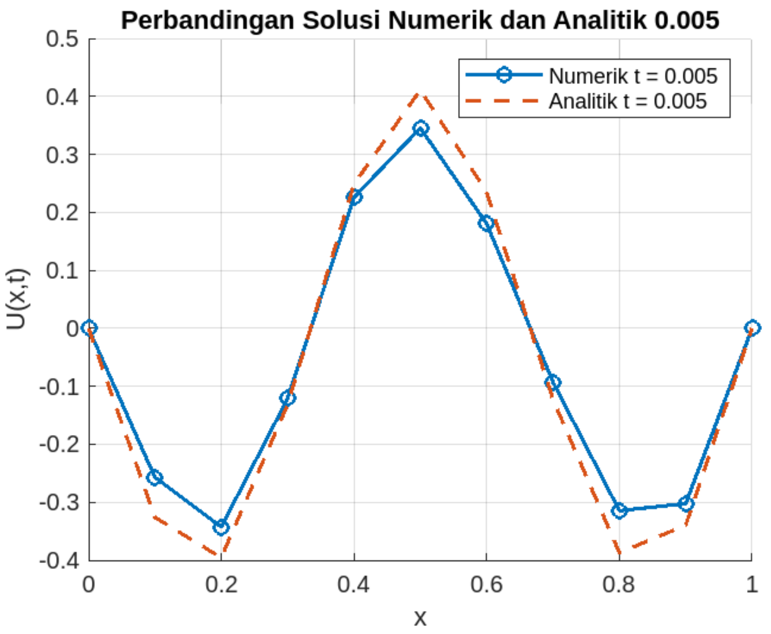
Dari kolom error memberitahukan bahwa semakin tinggi nilai t maka error yang dihasilkan semakin konsistensi pada orde 2. Hal ini sesuai dengan hasil dari analisis konsistensi. Kemudian, solusi analitik dan numerik dibandingkan menggunakan grafik dot seperti pada gambar dibawah ini.



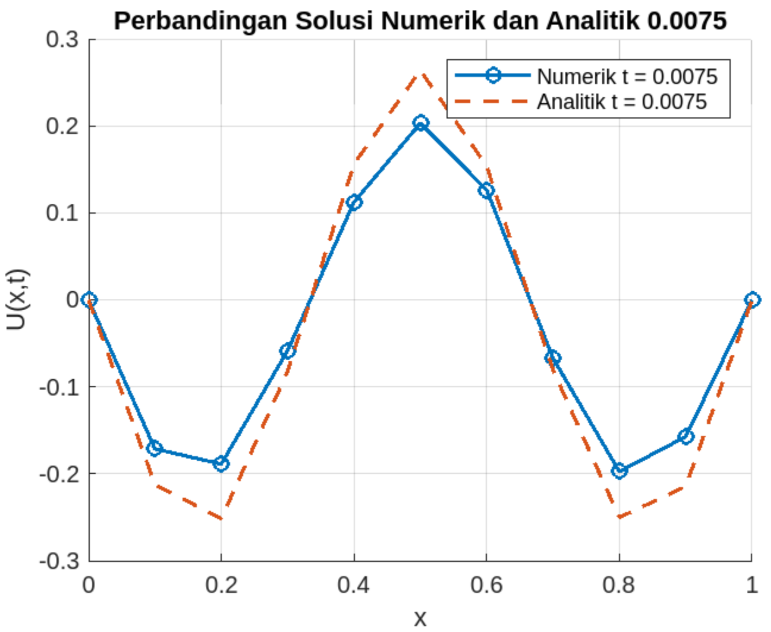
Gambar 4.1 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik pada $t = 0$



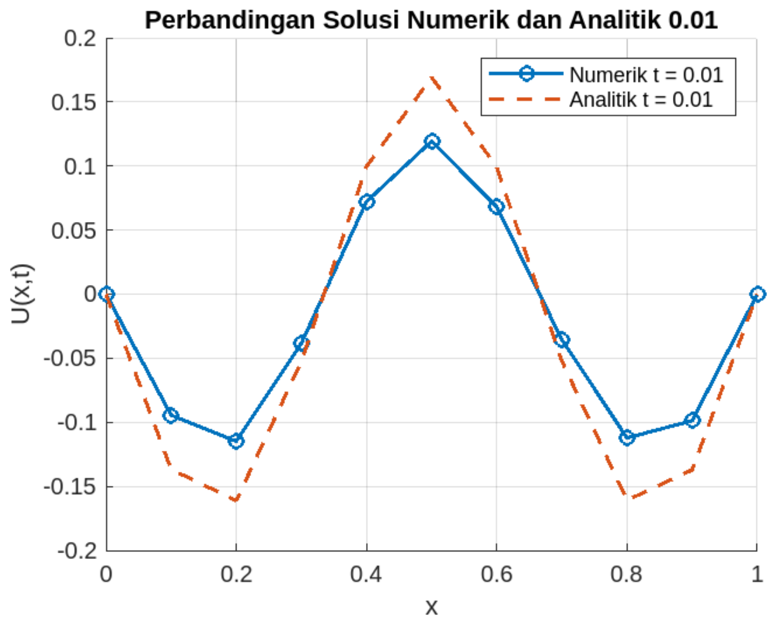
Gambar 4.2 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik pada $t = 0.0025$



Gambar 4.3 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik pada $t = 0.005$

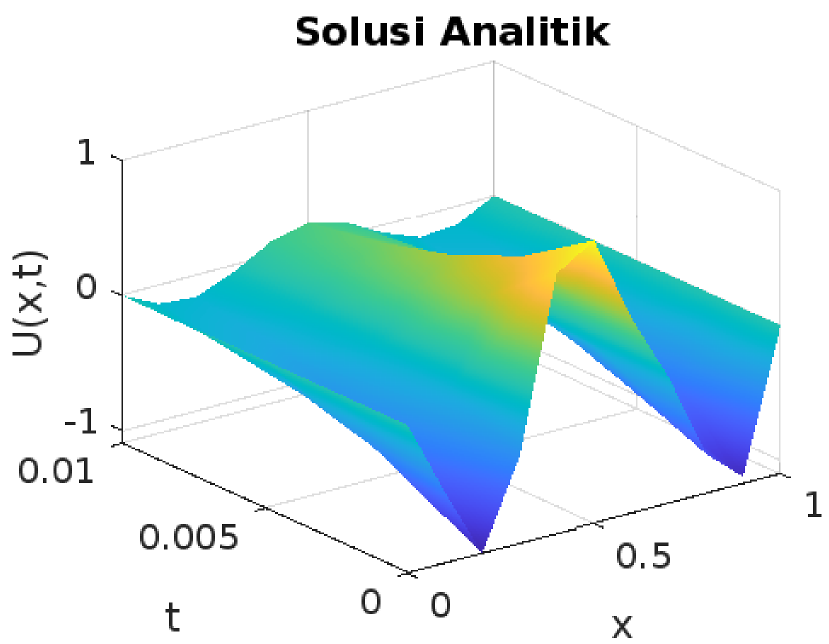


Gambar 4.4 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik pada $t = 0.0075$

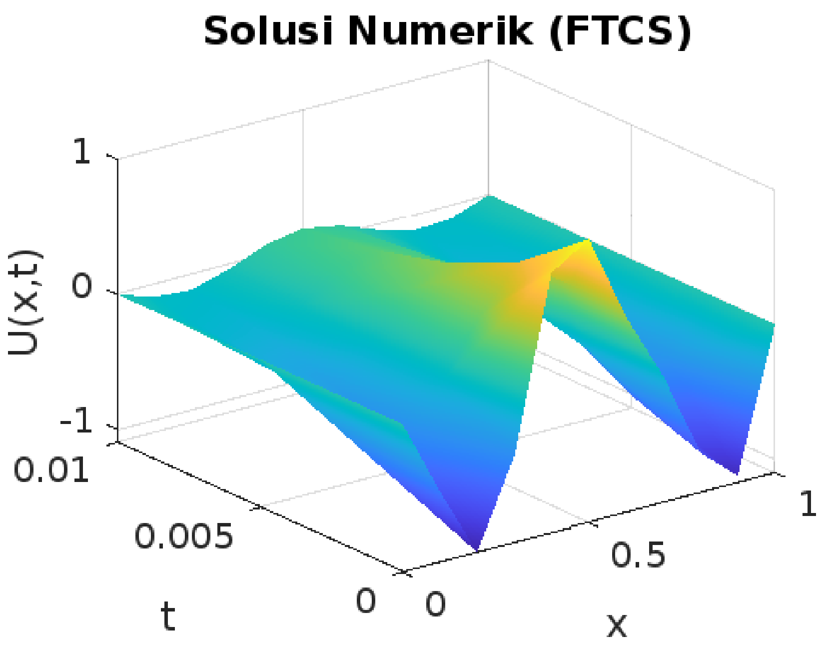


Gambar 4.5 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik pada $t = 0.01$

Pada grafik $t = 0$ bernilai sama karena merupakan kondisi awal. Semakin tinggi nilai t yang diberikan errornya semakin tinggi seperti diperlihatkan pada gambar.



Gambar 4.6 Solusi Analitik Persamaan Difusi



Gambar 4.7 Solusi Numerik Persamaan Difusi

4.4 Kajian Integrasi Keagamaan

Pada Bab II telah dijelaskan terkait berpikir kritis yang terkandung dalam Al-Qur'an. Berpikir kritis merupakan bagian yang tak terpisahkan dalam hal penelitian. Proses berpikir ini tidak hanya sebatas melihat secara dangkal, tetapi juga melibatkan refleksi mendalam hingga mencapai pemahaman yang kuat. Hal ini sejalan dengan penelitian ini mengenai analisis numerik.

Analisis numerik merupakan cabang matematika yang mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan suatu permasalahan secara numeris dengan mempergunakan serangkaian operasi perhitungan matematik (Soedijono, n.d.). Analisis numerik akan menghasilkan *error* dalam operasi perhitungannya. Hal ini perlu diperhatikan besar dan kecilnya *error* sehingga hasil yang didapatkan mendekati solusi eksak.

Dalam Q.S Al Mulk ayat 3-4 Allah menegaskan akan kesempurnaan ciptaan-Nya, sehingga manusia tidak akan menemukan cacat dalam pengaturan alam semesta. Manusia dianjurkan banyak berpikir dan mempergunakan akalnya (Asep Sunarko, 2015) untuk melihat dengan sungguh-sungguh, mengulanginya, dan meneliti untuk memahami keteraturan itu. Perlu digarisbawahi juga kata dalam ayat ini, “melihat berulang kali” dan “pandanganmu itu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat”. Ini adalah sebuah isyarat bahwa pengujian berulang sangat penting dilakukan untuk meminimalisir kesalahan dan meningkatkan akurasi hasil penelitian.

Manusia harus berupaya mendekati kesempurnaan melalui perhatian terhadap *error* dari sebuah model dan penelitian. Melalui itu juga membantu dalam membangun kesadaran bahwa mengurangi kesalahan dalam penelitian merupakan bentuk tanggungjawab intelektual dan ibadah. Al-Qur’an mendorong manusia tak hanya dalam hal eksplorasi ilmiah, tetapi juga memberikan landasan filosofis. Dengan demikian, analisis numerik memberikan prinsip untuk melakukan proses pengulangan hingga mencapai akurasi yang diinginkan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Hasil solusi analitik dari persamaan difusi dengan syarat batas Dirichlet dan kondisi awal

$$U(x,0) = -\sin 3\pi x + \frac{1}{4}\sin 6\pi x$$

adalah

$$U(x,t) = -\sin 3\pi x\ e^{-18\pi^2 t} + \frac{1}{4}\sin 6\pi x\ \ e^{-72\pi^2 t}$$

2. Solusi numerik persamaan difusi menggunakan metode FTCS dengan langkah awal melakukan diskritisasi persamaan untuk menghampiri solusi analitiknya. Selanjutnya, menganalisis kestabilan dan konsistensi untuk mengetahui bahwa metode FTCS yang digunakan memiliki kedekatan hasil dengan solusi analitiknya. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa persamaan difusi stabil dengan syarat tertentu.
3. Hasil perbandingan kedua solusi persamaan difusi menggunakan metode FTCS menunjukkan bahwa solusi numerik mendekati solusi analitik. Akan tetapi, tingkat keakuratannya bergantung pada x dan t . Seiring bertambahnya nilai t, error yang dihasilkan semakin konsistensi dan tetap dalam orde 2, sesuai dengan syarat konsistensi metode numerik.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mencari solusi numerik dari persamaan difusi menggunakan metode yang berbeda sehingga bisa dibandingkan hasilnya dengan metode FTCS.

DAFTAR PUSTAKA

Asep Sunarko. (2015). Iptek dalam Perspektif Al- Qur'an. *Manarul Qur'an*, 1–14. https://ojs.unsiq.ac.id/index.php/mq/article/view/899

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations*.

Brio, M., Zakharian, A. R., & Webb, G. M. (2010). *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*. Elseiver.

Chiu, M.-S. (2007). Mathematics As Mother/Basis of Science in Affect: Analysis of Timss 2003 Data. *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 145–152.

Coleman, M. P. (2013). *An Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB* (Second). CRC Press.

Harper, P. G., & Weaire, D. L. (2009). The diffusion equation. In *Introduction to Physical Mathematics* (pp. 173–183). https://doi.org/10.1017/cbo9780511564277.027

Kementerian Agama RI. (2024). *Qur'an Kemenag*. https://quran.kemenag.go.id/

Loskor, W. Z., & Sarkar, R. (2022). A Numerical Solution of Heat Equation for Several Thermal Diffusivity Using Finite Difference Scheme with Stability Conditions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, *10*(02), 449–465. https://doi.org/10.4236/jamp.2022.102034

Nyakebogo, A. O., Kerongo, J. M., & Obogi, R. K. (2021). *Stability and Consistency Analysis of FTCS Scheme for Unsteady Magnetohydrodynamic Fluid Flow over a Vertical Stretching Sheet*. *4*, 38–43.

Pudjaprasetya, S. R. (2013). *MA5271 Persamaan Diferensial Parsial*.

Rahaman, M. M., Sikdar, M., Hossain, M. B., Rahaman, M., Hossain, Mj., & Professor, A. (2015). Numerical Solution of Diffusion Equation by Finite Difference Method. *IOSR Journal of Mathematics*, *11*(6), 2278–5728. https://doi.org/10.9790/5728-11641925

Rahardhian, A. (2022). Kajian Kemampuan Berpikir Kritis (Critical Thinking Skill) Dari Sudut Pandang Filsafat. *Jurnal Filsafat Indonesia*, *5*(2), 87–94. https://doi.org/10.23887/jfi.v5i2.42092

Ross, S. L. (1984). *Differential Equations* (Third Edit). Wiley.

Sari, M., & Asmendri. (2020). Penelitian Kepustakaan (Library Research) dalam Penelitian Pendidikan IPA. *Natural Science [Diakses 11 Juli 2022]*, *6*(1), 41–53.

Sholeh, M. J., & Ramadhan. (2020). Konsep Terpisahnya Langit dan Bumi (Studi Analisis Atas Penafsiran Fakhruddin ar-Razi dalam Mafatih al-Ghaib terhadap Q.S Al-Anbiya Ayat 30). *El-Waroqoh*, *4*(1), 120–140.

Soedijono, P. D. B. (n.d.). *Galat dan Perambatannya*.

Yudhi, D. N. Y. (2019). Solusi Persamaan Difusi Pada Larutan Gula Dengan Metode Beda Hingga. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *8*(3), 573–578. https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i3.34026

LAMPIRAN

Lampiran 1. Script Pemrograman

```
% Parameter domain
L = 1;          % Panjang domain
t_max = 0.01;   % Waktu maksimum
Nx = 11;        % Jumlah grid ruang berdasarkan delta x = 0.1
Nt = 5;         % Jumlah grid waktu berdasarkan delta t = 0.0025
dx = 0.1;       % Lebar grid ruang
dt = 0.0025;    % Lebar grid waktu
x = linspace(0, L, Nx);  % Grid ruang
t = linspace(0, t_max, Nt);  % Grid waktu
alpha = 2;  % Konstanta difusi (U_t = 2 U_xx)
r = alpha * dt / dx^2;  % Parameter FTCS

% Pastikan nilai r memenuhi kondisi stabilitas
if r > 0.5
    error('Nilai r tidak stabil. Pastikan r <= 0.5.');
end

% Inisialisasi matriks solusi numerik dan analitik
U_numerik = zeros(Nx, Nt);
U_analitik = zeros(Nx, Nt);

% Kondisi awal solusi numerik dan analitik
U_numerik(:, 1) = -sin(3 * pi * x) + 1/4 * sin(6 * pi * x);  % Kondisi
awal numerik
U_analitik(:, 1) = U_numerik(:, 1);  % Kondisi awal analitik sama

% Hitung solusi analitik pada setiap waktu
for n = 2:Nt
    for j = 2:Nx-1
        % Skema FTCS untuk solusi numerik
        U_numerik(j, n) = r * (U_numerik(j+1, n-1) - 2 * U_numerik(j, n-
1) + U_numerik(j-1, n-1)) + U_numerik(j, n-1);
    end
    % Solusi analitik di setiap titik ruang dan waktu
    U_analitik(:, n) = -sin(3 * pi * x) * exp(-18 * pi^2 * t(n)) + ...
                        (1/4) * sin(6 * pi * x) * exp(-72 * pi^2 *
t(n));
end

% Plot Solusi 3D untuk solusi numerik
figure;
[X, T] = meshgrid(x, t);  % Buat grid untuk plot
surf(X, T, U_numerik')  % Transpose karena MATLAB memplot ruang pada
sumbu x dan waktu pada sumbu y
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('U(x,t)')
title('Solusi Numerik (FTCS)')
shading interp

% Plot Solusi 3D untuk solusi analitik
figure;
surf(X, T, U_analitik')  % Transpose untuk analitik
```

```
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('U(x,t)')
title('Solusi Analitik')
shading interp

% Plot garis perbandingan solusi analitik dan numerik untuk nilai waktu
yang dipilih
figure;
hold on;

% Set a valid t_index within the range 1 to Nt
t_index = 2;  % Contoh: Waktu spesifik untuk grafik (misalnya t = t(2))

plot(x, U_numerik(:, t_index), '-o', 'DisplayName', ['Numerik t = ',
num2str(t(t_index))], 'LineWidth', 1.5);
plot(x, U_analitik(:, t_index), '--', 'DisplayName', ['Analitik t = ',
num2str(t(t_index))], 'LineWidth', 1.5);

xlabel('x')
ylabel('U(x,t)')
legend show
title(['Perbandingan Solusi Numerik dan Analitik ',
num2str(t(t_index))])
grid on


% Tampilkan hasil pada Command Window untuk perbandingan manual
disp('Perbandingan Solusi Numerik dan Analitik pada beberapa titik
waktu');
fprintf('  x       t         Analitik       Numerik         Error\n');
for j = 1:Nx
    for n = 1:Nt
        fprintf('%5.2f  %5.4f  %10.6f  %10.6f  %10.6f\n', x(j), t(n),
U_analitik(j,n), U_numerik(j,n), abs(U_numerik(j,n) - U_analitik(j,n)));
    end
    if mod(j, 5) == 0
        disp('---');
    end
end
```

Lampiran 2. Script Solusi Eksak

```
# Define the differential equation for X(x) with lambda as a parameter
de_X := diff(X(x), x$2) + lambda*X(x) = 0;

# Apply boundary conditions X(0) = 0 and X(1) = 0
# Use dsolve to find the solution with boundary conditions explicitly
sol_X := dsolve({de_X, X(0) = 0, X(1) = 0}, X(x));

# Substitute the eigenvalues for lambda (lambda = (n*Pi)^2)
lambda := (n*Pi)^2;

# Define the differential equation for T(t) using the eigenvalue for
lambda
```

```
de_T := diff(T(t), t) + 2*lambda*T(t) = 0;

# Solve for T(t)
sol_T := dsolve(de_T, T(t));

# Combine the solutions in the product form u(x, t)
u := sum(C[n]*exp(-2*(n*Pi)^2*t)*sin(n*Pi*x), n = 1..infinity);

# Display the combined solution
u;

# Define parameters for the eigenvalues
n3 := 3;
n6 := 6;

# Define the specific solution for u(x, t) based on initial condition
u_xt := -exp(-2*(n3*Pi)^2*t)*sin(n3*Pi*x) + (1/4)*exp(-
2*(n6*Pi)^2*t)*sin(n6*Pi*x);

# Display the solution with initial condition applied
u_xt;
```

RIWAYAT HIDUP

Septia Wulan Ndari, lebih dikenal dengan nama panggilan Septi atau Septia. Lahir di Cilacap, 25 September 2001 sebagai anak pertama dari pasangan Arif Mulyanto dan Watinah. Mengawali pendidikan dasar di TK Dharma Wanita dan melanjutkannya di SDN Karangrena 02 yang lulus pada tahun 2013. Pada tahun yang sama melanjutkan ke jenjang Menengah di SMPN 2 Maos hingga tahun 2016. Selanjutnya, menempuh pendidikan di SMAN 1 Maos hingga tahun 2018. Setelah lulus mengambil *gap year* satu tahun, selanjutnya penulis diterima sebagai mahasiswa angkatan 2019 di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Selama masa perkuliahan penulis aktif dalam kegiatan keorganisasian baik di dalam maupun di luar kampus. Penulis pernah mengemban amanah sebagai Ketua Umum Himpunan Mahasiswa Islam (HMI) Komisariat Saintek UIN Malang. Bergabung di HMJ “Integral” Matematika sebagai anggota divisi pengembangan minat bakat pada tahun 2021. Dimana pada masa itu, penulis terlibat dalam pembentukan komunitas baru di Program Studi Matematika bernama Literasi Matematika (LIMIT) dan menjadi Kepala Divisi Editor. Penulis juga pernah menjadi pengurus di komunitas Al-Farazi, sebuah komunitas yang bergerak dalam hal Al-Qur’an dan Bahasa Arab di Program Studi Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Pernah bergabung menjadi anggota Mathematics English Club (MEC). Anggota Departemen Informasi dan Komunikasi (INFOKOM) KM Plat R Malang. Aktif menjadi anggota UKM UNIOR UIN Malang dan pernah menjadi bagian kepanitian di dalamnya. Penulis juga menjadi bagian di *Indonesian Islamic Astronomy Club* (IIAC) Cabang Malang sebagai Bendahara. Jika ada pertanyaan, saran, dan kritik mengenai penelitian ini, bisa menghubungi penulis melalui email : septiawulan886@gmail.com .

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Septia Wulan Ndari
NIM	:	19610040
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Solusi Persamaan Difusi Menggunakan Metode *Forward Time Centered Space* (FTCS)
Pembimbing I	:	Juhari, M.Si.
Pembimbing II	:	Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Agustus 2023	Konsultasi Bab I - III	1.
2.	29 Agustus 2023	Revisi Bab I dan III	2.
3.	3 September 2023	ACC Bab I - III	3.
4.	11 September 2023	Revisi Ayat Bab I dan II	4.
5.	18 September 2023	Revisi Ayat Bab II	5.
6.	25 September 2023	ACC Kajian Agama Bab II	6.
7.	5 Oktober 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	5 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	12 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	19 Maret 2024	ACC Bab IV dan V	10.
11.	27 Maret 2024	Konsultasi Agama Bab IV	11.
12.	23 April 2024	Revisi Kajian Agama Bab II	12.
13.	30 April 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	7 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	14.
15.	11 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	15.

16.	24 September 2024	Revisi Bab III	16.
17.	7 Oktober 2024	Revisi Bab II, Bab IV, dan Bab V	17.
18.	16 Oktober 2024	Revisi Bab IV	18.
19.	14 November 2024	Revisi Kajian Agama Bab II dan Bab IV	19.
20.	26 November 2024	ACC Kajian Agama Bab II dan Bab IV	20.
21.	29 November 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	29 November 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	22.
23.	18 Desember 2024	ACC Keseluruhan	23.

Malang, 20 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005