KEKOMUTATIFAN PADA ALJABAR LIE DAN SIFAT-SIFAT IDEAL DARI ALJABAR LIE

SKRIPSI

OLEH:
DERA CAHYANI
NIM. 19610084

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

KEKOMUTATIFAN PADA ALJABAR LIE DAN SIFAT-SIFAT IDEAL DARI ALJABAR LIE

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dera Cahyani
NIM. 19610084

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

KEKOMUTATIFAN PADA ALJABAR LIE DAN SIFAT-SIFAT IDEAL DARI ALJABAR LIE

SKRIPSI

Oleh
Dera Cahyani
NIM. 19610084

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 9 Oktober 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M. Si	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19900215 201903 2 015	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

KEKOMUTATIFAN PADA ALJABAR LIE DAN SIFAT-SIFAT IDEAL DARI ALJABAR LIE

SKRIPSI

Oleh
Dera Cahyani
NIM. 19610084

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 10 Desember 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Intan Nisfulaila, M. Si	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Dera Cahyani

NIM : 19610084

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Kekomutatifan pada Aljabar Lie dan Sifat-Sifat Ideal dari Aljabar Lie

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Desember 2024

Yang Membuat Pernyataan,

10000
METERAI TEMPEL
9999EALX339393083

Dera Cahyani

NIM.19610084

MOTO

“ Lambat bukan berarti tertinggal,
cepat bukan berarti paling hebat.
Setiap orang sedang berproses digaris takdirnya masing-masing ”

“ Jangan terlalu memikirkan endingnya, nikmati prosesnya, banyakin rasa syukurnya, kuatkan lagi bahunya. Jangan lupa berdoa semoga Allah mempermudah segalanya ”

“ Nothing is impossible when Allah Said ‘Kun Fayakun’ ”

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahiim

Segala puji syukur kepada Allah SWT atas berkatnya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Tak lupa shalawat serta salam kita ucapkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umat Islam di dunia.

Tiada lembar yang paling indah dalam laporan skripsi ini kecuali lembar persembahan. Dengan mengucapkan syukur atas rahmat Allah SWT dan sebagai ucapan terima kasih skripsi ini saya persembahkan dengan rasa penuh terima kasih dan cinta kepada:

1. Kedua orang tua tercinta, Bapak Dede Supriyadi dan Ibu Yayah Juariah. Alhamdulillah kini saya sudah berada di tahap ini. Terima kasih tak terhingga atas kasih sayang, doa, dan dukungan tanpa henti yang telah memberikan arah dan kekuatan dalam perjalanan saya. Terima kasih juga telah sabar menunggu anak terakhir ini untuk lulus dan menjadi seorang sarjana.
2. Dewita Pratiwi, selaku kakak saya yang telah menjadi penyemangat saya untuk sampai di tahap ini. Terima kasih telah menjadi kakak terbaik yang mengajarkan saya untuk selalu berusaha dan mencoba.
3. Saya persembahkan skripsi ini untuk diri saya sendiri, Dera Cahyani. Terima kasih sudah bertahan sejauh ini. Terima kasih untuk tetap memilih berusaha walaupun sering kali putus asa atas apa yang diusahakan dan belum berhasil, namun terima kasih tetap mau berusaha mencoba.
4. Dan yang terakhir, saya persembahkan skripsi ini kepada saudara-saudara yang selalu bertanya “kapan selesai dan kapan lulus?”. Terima kasih telah bertanya hal tersebut karena hal tersebut membuat saya semangat untuk menyelesaikan skripsi ini. Terlambat lulus atau tidak lulus tepat waktu bukanlah sebuah kejahatan dan bukan pula sebuah aib.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahiim

Segala puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan kasih, karunia, kehendak dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul Kekomutatifan pada Aljabar Lie dan Sifat-Sifat Ideal dari Aljabar Lie sebagai persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana matematika (S.Mat).

Sholawat serta salam semoga tetap tercurah pada Nabi Muhammad SAW keluarga, sahabat, dan para pengikutnya hingga akhir zaman. Dalam penyelesaian penyusunan skripsi ini, penulis tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Semoga kebaikan semuanya menjadi amal ibadah dan mendapat pahala yang berlimpah dari Allah SWT. Skripsi ini tidak akan tersusun tanpa adanya bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Intan Nisfulaila, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa sabar memberikan bimbingan, arahan, saran dan motivasi kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang juga senantiasa sabar memberikan bimbingan, arahan, saran dan motivasi kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
6. Prof. Dr. H.Turmudi, M.Si, Ph.D., selaku ketua penguji skripsi yang senantiasa memberikan kontribusi penting dalam skripsi ini.
7. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku anggota penguji skripsi yang juga senantiasa memberikan kontribusi penting dalam skripsi ini.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah mendidik, membimbing dan mengajarkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
9. Kedua orang tua penulis, Dede Supriyadi dan Yayah Juariah serta kakak penulis, Dewita Pratiwi dan seluruh keluarga tercinta yang telah berusaha memenuhi segala kebutuhan, arahan, pengorbanan serta dengan iringan doanya kepada penulis.
10. Seluruh teman-teman mahasiswa angkatan 2019 yang selalu memberikan motivasi.
11. Serta semua pihak yang telah memberikan bantuan demi terselesaikannya skripsi ini.

Malang, 10 Desember 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Cahyani, Dera. 2024. **Kekomutatifan pada Aljabar Lie dan Sifat-Sifat Ideal dari Aljabar Lie**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Erna Herawati, M. Pd.

Kata Kunci: Aljabar Lie, Kekomutatifan aljabar Lie, Ideal Aljabar Lie.

Struktur aljabar adalah himpunan yang diberikan satu atau lebih operasi dan aksioma tertentu. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah aljabar Lie. Aljabar Lie pertama kali diperkenalkan oleh *Sophus Lie*. Aljabar Lie merupakan ruang vektor $\boldsymbol{L}$ atas lapangan F dengan operasi $bracket$ Lie dan memenuhi beberapa aksioma yaitu pemetaan bilinier, $[x, x] = 0$, dan memenuhi identitas Jacobi. Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk membuktikan kekomutatifan pada aljabar Lie, subaljabar Lie dan ideal pada aljabar Lie serta memberikan contoh aljabar Lie. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka, yaitu kumpulan teori yang didapatkan dari berbagai macam sumber yang digunakan sebagai bahan rujukan. Terdapat dua lema mengenai kekomutatifan pada aljabar Lie yaitu Lema 4.1 Suatu aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ disebut komutatif jika dan hanya jika $[x, y] = 0$, untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$ dan Lema 4.2 Misalkan $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie, $Z(L) = \boldsymbol{L}$ jika hanya jika $\boldsymbol{L}$ abelian. Selanjutnya terdapat beberapa lema tentang subaljabar Lie dan ideal pada aljabar Lie yaitu Lema 4.3 Misalkan I merupakan ideal di $\boldsymbol{L}$ maka I merupakan suatu subaljabar Lie, lema selanjutnya yaitu Lema 4.4 Misalkan I dan J merupakan ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ maka irisan $I \cap J$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{L}$. Lema berikutnya yaitu Lema 4.5 Misalkan I dan J merupakan ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ maka $I + J$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{L}$. Dan lema selanjutnya yaitu Misalkan $\boldsymbol{L_1}\ dan\ \boldsymbol{L_2}$ adalah aljabar Lie atas lapangan F. Jika $\varphi: \boldsymbol{L_1} \to \boldsymbol{L_2}$ adalah homomorfisma, maka kernel dari φ adalah ideal dari $\boldsymbol{L_1}$, dan image dari φ adalah subaljabar Lie dari $\boldsymbol{L_2}$. Selanjutnya memberikan contoh aljabar Lie dalam $\mathbb{R}^3$. Penelitian ini memberikan pemahaman mengenai kekomutatifan pada aljabar Lie dan sifat-sifat ideal dari aljabar Lie serta contoh aljabar Lie dalam $\mathbb{R}^3$.

ABSTRACT

Cahyani, Dera. 2024. **Commutativity in Lie Algebras and Ideal Properties of Lie Algebras**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Erna Herawati, M. Pd.

Keywords: Lie algebras, Commutativeness of Lie algebras, Ideal Lie Algebra

An algebraic structure is a set given one or more specific operations and axioms. One such algebraic structure is the algebra of Lie. Lie's algebra was first introduced by *Sophus Lie*. Algebra Lie is a vector space $\boldsymbol{L}$ over the field F with surgery $bracket$ Lie and fulfill several axioms, namely billiard mapping, $[x, x] = 0$, and fulfill Jacobi's identity. The purpose of this study is to prove commutaticity in Lie algebra, Lie subalgebra and ideal in Lie algebra and provide examples of Lie algebra. The method used in this study is a literature review, which is a collection of theories obtained from various sources used as reference materials. There are two lemmas regarding commutaticity in the Lie algebra, namely Lemma 4.1 An algebra Lie $\boldsymbol{L}$ called commutative if and only if $[x, y] = 0$, for each $x, y \in \boldsymbol{L}$ and Lema 4.2 Suppose $\boldsymbol{L}$ is the algebra of Lie, $Z(L) = \boldsymbol{L}$ if only if $\boldsymbol{L}$ abelian. Furthermore, there are several lemmas about the subalgebra Lie and the ideal for the algebra Lie is Lemma 4.3 Suppose I is ideal in $\boldsymbol{L}$ so I is a subalgebra of Lie, the next lemma is Lema 4.4 Suppose I and J is the ideal of the algebra Lie $\boldsymbol{L}$ then the intersection $I \cap J$ is the ideal of $\boldsymbol{L}$. The next lemma is Lema 4.5 Suppose I and J is the ideal of the algebra Lie $\boldsymbol{L}$ so $I + J$ is the ideal of $\boldsymbol{L}$. And the next lemma is suppose $\boldsymbol{L_1}$ and $\boldsymbol{L_2}$ is the algebra of Lie over the field F. If $\varphi: \boldsymbol{L_1} \to \boldsymbol{L_2}$ is homomorphism, then the kernel of φ is ideal of $\boldsymbol{L_1}$, and an image from φ is the subalgebraic of Lie from $\boldsymbol{L_2}$.. Next gives an example of the algebra Lie in $\mathbb{R}^3$. This research provides an understanding of commutativeness in Lie algebras and ideal properties of Lie algebras as well as examples of Lie algebras in $\mathbb{R}^3$.

مستخلص البحث

جهياني، ديرا. ٢٠٢٤. **التبادلية في جبر الكذب والخواص المثالية لجبر الكذب**. البحث الجامعي. قسم الرايضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة موالان مالك إبراهيم الإسلاميةالحكومية مالانج. المسرفةالأولي: إنتان نصف الليلة، الماجستيرة. المسرفة الثانية: إيرناهيراواتي، الماجستيرة.

الكلمات المفتاحية: جبر الكذب، تبادلية جبر الكذب، جبر الكذب المثالي

البنية الجبرية هي مجموعة تعطى واحدة أو أكثر من العمليات والبديهيات المحددة. أحد هذه الهياكل الجبرية هو جبر الكذب. تم تقديم جبر *Lie* لأول مرة بواسطة *Sophus Lie*. الجبر هو عبارة عن مساحة متجهة $\boldsymbol{L}$ فوق الحقل F مع قوس جراحي يكذب ويحقق العديد من البديهيات، وهي رسم خرائط البليياردو، $[x,x]=0$، ويحقق هوية جاكوبي. الغرض من هذا الحث هو إثبات التبادلية في جبر لاي وجبر لاي الفرعي والمثالي في جبر لاي وتقديم أمثلة على جبر لاي. الطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هي مراجعة الأدبيات، وهي عبارة عن مجموعة من النظريات التي تم الحصول عليها من مصادر مختلفة تستخدم كمواد مرجعية. هناك نوعان من المصطلحات فيما يتعلق بالتبادلية في جبر *Lie*، وهما *Lemma* ٤.١ يُطلق على جبر *Lie* $\boldsymbol{L}$ اسم تبادلي إذا وفقط إذا كان $[x,y]=0$، لكل $x,y\in\boldsymbol{L}$ و *Lemma* ٤.٢ دع $\boldsymbol{L}$ يكون جبرًا كاذبًا، $Z(\boldsymbol{L})=\boldsymbol{L}$ فقط إذا كان $\boldsymbol{L}$ هو أبيليان. بعد ذلك، هناك العديد من الكلمات حول جبر Lie الفرعي والمثل العليا في جبر Lie، وهي *Lemma* ٤.٣ لنفترض أن I مثالي في $\boldsymbol{L}$ ثم أنا جبر فرعي *Lie*، *lemma* التالي هو *Lemma* ٤.٤ لنفترض أن I وJ مثاليان لجبر *Lie* $\boldsymbol{L}$، فإن التقاطع $I\cap J$ مثالي لـ $\boldsymbol{L}$. *lemma* التالي هو*Lemma* ٤.٥ لنفترض أن I وJ هما المثل الأعلى لجبر *Lie* $\boldsymbol{L}$، ثم $I+J$ هو المثل الأعلى لجبر $\boldsymbol{L}$. والإدخال التالي هو دع $\boldsymbol{L_1}$ و$\boldsymbol{L_2}$ يكونان جبرين فوق الحقل F. إذا كانت $\varphi:\boldsymbol{L_1}\to\boldsymbol{L_2}$ عبارة عن تجانس، فإن نواة φ هي مثالية لـ $\boldsymbol{L_1}$، وصورة φ عبارة عن جبر فرعي Lie لـ $\boldsymbol{L_2}$. التالي يعطي مثالا على جبر الكذب في $\mathbb{R}^3$. يقدم هذا البحث فهمًا للتبادلية في جبر *Lie* والخصائص المثالية في جبر *Lie* بالإضافة إلى أمثلة على جبر *Lie* في $\mathbb{R}^3$.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah hukum-hukum operasi bilangan (Lolang, 2013). Aljabar abstrak merupakan salah satu bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti himpunan, teori grup, ring, modul, lapangan, dan ruang vektor (Fraleigh, 2003). Istilah aljabar abstrak dikembangkan pada awal abad ke-20 untuk membedakannya dari bidang yang lebih umum dikenal sebagai aljabar, yang fokus pada aturan manipulasi rumus dan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel serta bilangan riil atau kompleks, yang sekarang dikenal sebagai aljabar elementer (Nugroho et al., 2017).

Aljabar abstrak memegang peranan penting dalam perkembangan ilmu lain, seperti pada ilmu persandian (*cryptography*) dan teori pengkodean (*coding theory*). Peran aljabar abstrak terhadap perkembangan ilmu dalam bidang lainnya mengakibatkan kajian aljabar abstrak semakin meluas. Kajian aljabar abstrak meluas dengan cepat berkat penerapan sifat-sifat dari berbagai struktur aljabar, ini sangat berguna untuk mengembangkan cara menyelesaian permasalahan abstrak dan sulit dipresentasikan dengan operasi aljabar biasa (Manik, 2011).

Struktur aljabar merupakan himpunan yang memuat satu atau lebih operasi dan aksioma tertentu (Arifin, 2012). Contoh dari struktur aljabar seperti itu adalah aljabar Lie. Pada abad ke-19 seorang matematikawan Norwegia bernama Sophus Lie pertama kali memperkenalkan aljabar Lie untuk mengkaji mengenai konsep Grup Transformasi Kontinu atau disebut grup Lie (Utama et al., 2021) dan ditemukan secara independen oleh Wilhelm Killing pada tahun 1880-an. Pada tahun 1873, Sophus Lie melakukan penelitian yang kemudian dikenal dengan nama Grup Lie, setelah itu diperluas menjadi aljabar Lie. Grup Lie mempelajari tentang kesimetrian persamaan diferensial (Winter, 2024). Sebelum ditemukannya teori kuantum, grup Lie banyak digunakan di bidang fisika. Setelah lebih dari satu abad penemuan mengenai Lie, terdapat beberapa hal yang berkaitan dengan aljabar Lie yang masih dikembangkan, misalnya struktur konstan, Weyl *groups*, teori representasi dan sebagainya, yang menunjukkan pentingnya teori Lie dalam matematika modern (Utama et al., 2021).

Aljabar Lie adalah struktur aljabar yang terdapat di berbagai bidang matematika dan fisika. Salah satu aspek penting dari aljabar Lie adalah sifat kekomutatifan, yang berkaitan dengan operasi biner yang didefinisikan di dalamnya. Aljabar Lie didefinisikan dengan dua sifat utama yaitu adanya operasi biner yang disebut komutator dan memenuhi identitas Jacobi. Kekomutatifan dalam aljabar Lie menunjukkan bahwa urutan operasi dapat mempengaruhi hasilnya.

Di sisi lain, sifat-sifat ideal dalam aljabar Lie juga sangat penting. Ideal adalah substruktur yang memungkinkan membangun aljabar Lie baru dengan sifat-sifat tertentu. Ideal dalam aljabar Lie memberikan cara untuk mempelajari sifat-sifat aljabar Lie yang lebih kompleks. Dengan mempelajari kekomutatifan dan sifat ideal dalam aljabar Lie tidak hanya membantu memahami struktur aljabar tersebut, tetapi juga membuka jalan untuk aplikasi lebih lanjut di berbagai bidang matematika dan fisika. Sehingga penelitian dalam bidang ini akan semakin berkembang dalam mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi modern.

Aljabar Lie merupakan suatu ruang vektor atas lapangan F yang dilengkapi dengan pemetaan bilinier yang disebut *bracket* lie (dilambangkan $[-,-]$). Dalam ayat-ayat Al-Qur’an terdapat konsep mengenai vektor, vektor merupakan sesuatu yang mempunyai orientasi yang dapat diibaratkan seperti manusia (Kusumastuti, 2008). Manusia diibaratkan seperti vektor yang berawal dan berujung. Maksud dari berawal adalah manusia mempunyai asal-usul penciptanya, sedangkan berujung memiliki arti manusia akan mencapai pada suatu fase yaitu kematian. Konsep tersebut juga ada pada surat Al-Alaq ayat 2 (Kementrian Agama, 1971)

خَلَقَ الْاِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍۚ

Artinya: *“Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah”*

Dalam ayat tersebut berisi tentang asal mula manusia yaitu berasal dari gumpalan darah yang bergantung di dinding rahim. Istilah “*alaq*” di pada kamus bahasa Arab artinya segumpal darah, tetapi ada juga yang mengartikan Al-Alaq adalah sesuatu yang bergantung pada dinding rahim (Maskhuroh et al., 2020). Manusia merupakan makhluk ciptaan Allah SWT yang luar biasa yang memiliki peran dalam memanfaatkan seluruh ciptaan Allah SWT lainnya untuk kepentingan bersama (Husaini, 2020).

Konsep yang ada pada aljabar Lie hampir sama dengan grup dan ring (Dwi et al., 2019). Merujuk pada hal tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang kekomutatifan pada aljabar Lie serta subaljabar Lie dan ideal dari aljabar Lie. Dengan demikian, judul pada penelitian ini adalah Kekomutatifan pada Aljabar Lie dan Sifat-Sifat Ideal dari Aljabar Lie.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah

1. Bagaimana kekomutatifan pada aljabar Lie?
2. Bagaimana sifat-sifat ideal dari aljabar Lie?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui tentang kekomutatifan pada Aljabar Lie dan sifat-sifat ideal dari aljabar Lie.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini memiliki batasan masalah yaitu membahas kekomutatifan pada aljabar Lie dan sifat-sifat ideal dari aljabar Lie.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan, keilmuan dan wawasan tentang aljabar Lie yang berkaitan dengan kekomutatifan pada aljabar Lie dan ideal dari aljabar Lie.
2. Dengan adanya penelitian ini diharapkan dapat menambah pustaka untuk referensi penelitian ke depannya dan bahan di bangku perkuliahan khususnya tentang materi aljabar Lie.
3. Penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai bahan pembelajaran dan informasi tentang aljabar Lie serta sebagai dasar referensi untuk penelitian ke depannya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 *Field* (Lapangan)

Lapangan adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian, strukturnya adalah grup abelian, himpunan bukan nol dengan operasi perkalian merupakan grup abelian, dan operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Suatu lapangan $(F, +, \times)$ adalah suatu himpunan tidak kosong F dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ pada F yang memenuhi aksioma-aksioma berikut (Manik & Tasman, 2014).

1. Himpunan F tertutup terhadap operasi penjumlahan

   untuk setiap $a, b \in F$, maka $a + b \in F$.

2. Operasi penjumlahan di F bersifat asosiatif

   untuk setiap $a, b, c \in F$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. Himpunan F mempunyai unsur kesatuan terhadap operasi penjumlahan

   Terdapat elemen identitas α sehingga $a + \alpha = \alpha + a = a$.

4. Setiap unsur di F memiliki invers terhadap operasi penjumlahan

   untuk setiap $a \in F$ terdapat invers yang dilambangkan a^{-1} sedemikian sehingga

   $$a + a^{-1} = a^{-1} + a = \alpha$$

5. Operasi penjumlahan di F bersifat komutatif

   untuk setiap $a, b \in F$, maka $a + b = b + a$

6. Himpunan F tertutup terhadap operasi perkalian

   untuk setiap $a, b \in F$, maka $a \times b \in F$.

7. Operasi perkalian di F bersifat asosiatif

   untuk setiap $a, b, c \in F$, maka $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

8. Himpunan F mempunyai unsur kesatuan terhadap operasi perkalian

   Terdapat elemen identitas β sehingga $a \times \beta = \beta \times a = a$.

9. Setiap unsur di F taknol memiliki invers terhadap operasi perkalian

   untuk setiap $a \in F$-$\{0\}$ terdapat invers yang dilambangkan a^{-1} sehingga

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = \beta$$

10. Operasi perkalian di F bersifat komutatif

    untuk setiap $a, b \in F$, maka $a \times b = b \times a$

11. Pada F berlaku sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan

    untuk setiap $a, b, c \in F$ memenuhi $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

12. Pada F berlaku sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan

    untuk setiap $a, b, c \in F$ memenuhi $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

    Maka F bersifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Contoh:

Himpunan bilangan kompleks ($\mathbb{C}$) yang dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian merupakan lapangan.

Akan dibuktikan $\langle \mathbb{C}, +, \times \rangle$ merupakan lapangan.

Misalkan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, dengan

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i,\ z_3 = a_3 + b_3 i$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$, memenuhi aksioma berikut:

1. Himpunan $\mathbb{C}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \in \mathbb{C}$$

2. Operasi penjumlahan di $\mathbb{C}$ bersifat komutatif

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

3. Operasi penjumlahan di $\mathbb{C}$ bersifat asosiatif

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= \big((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)\big) + (a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + \big((a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)\big) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

4. Terdapat $0 + 0i \in \mathbb{C}$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 + z_1 &= (0 + 0i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (0 + 0i) \\ &= (a_1 + 0) + (b_1 i + 0i) \\ &= a_1 + b_1 i \\ &= z_1 \end{aligned}$$

5. Untuk setiap $z_1 \in \mathbb{C}$ terdapat $-z_1 = -a_1 - b_1 i \in \mathbb{C}$, sehingga

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_1) &= (a_1 + b_1 i) + (-a_1 - b_1 i) \\ &= (-a_1 - b_1 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= (-a_1 + a_1) + (-b_1 i + b_1 i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Himpunan $\mathbb{C}$ tertutup terhadap operasi perkalian

$$z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \in \mathbb{C}$$

7. Operasi perkalian di $\mathbb{C}$ bersifat komutatif

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \end{aligned}$$

$$= z_2 \times z_1$$

8. Operasi perkalian di $\mathbb{C}$ bersifat asosiatif

$$(z_1 \times z_2) \times z_3 = \big((a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i)\big) \times (a_3 + b_3 i)$$

$$= (a_1 + b_1 i) \times \big((a_2 + b_2 i) \times (a_3 + b_3 i)\big)$$

$$= z_1 \times (z_2 \times z_3)$$

9. Terdapat $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$, sehingga

$$1 \times z_1 = (1 + 0i)(a_1 + b_1 i)$$

$$= (a_1 + b_1 i)(1 + 0i)$$

$$= (a_1 + b_1 i)1$$

$$= a_1 + b_1 i$$

$$= z_1$$

10. Misalkan $z^{-1} = x + yi$, maka

$$z \times z^{-1} = 1$$

$$(a + bi)(x + yi) = (1 + 0i)$$

$$= (ax - by) + (bx + ay)i = (1 + 0i)$$

Asumsikan sistem persamaan dua variabel x dan y, dengan koefisien a dan b, sehingga

$$ax - by = 1$$

$$bx + ay = 0$$

didapatkan

$x = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$

Dengan demikian

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

11. Terdapat $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i \in \mathbb{C}$, sehingga

$$z_1 \times z_1^{-1} = (a_1 + b_1 i)\left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} i\right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} i\right)(a_1 + b_1 i)$$

$$= \frac{a_1^2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b_1}{a_1^2 + b_1^2} i - \frac{a_1 b_1}{a_1^2 + b_1^2} i - \frac{b_1^2 i^2}{a_1^2 + b_1^2}$$

$$= 1 + 0i$$

$$= 1$$

12. Pada $\mathbb{C}$ berlaku sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

$$z_1(z_2 + z_3) = (a_1 + b_1 i)\big((a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)\big)$$

$$= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)(a_3 + b_3 i)$$

$$= z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Jadi terbukti bahwa $\langle \mathbb{C}, +, \times \rangle$ adalah *field*.

2.2 Ruang Vektor dan Transformasi Linier

2.2.1 Ruang Vektor

Pada bagian ini akan membahas konsep tentang ruang vektor dan subruang serta sifat-sifat ruang vektor. Untuk mengetahui lebih jelasnya mengenai ruang vektor, maka berikut akan disajikan definisi mengenai ruang vektor dan sifat-sifat pada ruang vektor.

Definisi Ruang Vektor

Misalkan F merupakan suatu lapangan, anggota atau unsurnya disebut skalar. Ruang vektor $\boldsymbol{V}$ atas lapangan F merupakan himpunan yang tidak kosong, di mana unsur-unsurnya disebut vektor dan dilengkapi dengan dua jenis operasi. Operasi pertama, yang disebut penjumlahan dan dilambangkan +, menggabungkan setiap pasangan vektor $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ dalam $\boldsymbol{V}$ menjadi suatu vektor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ dalam $\boldsymbol{V}$. Operasi kedua, dikenal sebagai perkalian skalar, mengoperasikan setiap pasangan $(r, \boldsymbol{u}) \in F \times \boldsymbol{V}$ ke suatu vektor $r\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{V}$. Beberapa sifat berikut harus dipenuhi: (Gozali, 2010)

1. Operasi penjumlahan di V bersifat asosiatif, untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$$

2. Operasi penjumlahan di V bersifat komutatif, untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$$

3. Keberadaan vektor nol, terdapat suatu vektor nol yaitu $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$ dengan sifat

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$$

4. Keberadaan invers terhadap operasi penjumlahan, untuk semua $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, terdapat suatu vektor di $\boldsymbol{V}$, dinotasikan dengan $-u$, dengan sifat

$$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}=0$$

5. Sifat perkalian skalar, untuk semua $a, b \in F$ dan semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

$$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$$

$$(a+b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$$

$$(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u})$$

$$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

Contoh:

Diberikan $\boldsymbol{V}=R^2$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\binom{x_1}{y_1}+\binom{x_2}{y_2}=\binom{x_1+x_2}{y_1+y_2}$$

$$k\binom{x_1}{y_1}=\binom{kx_1}{ky_1}$$

Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{V}$ merupakan ruang vektor atas lapangan.

Bukti

Ambil sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ dan $k, l \in \mathbb{R}$, dengan

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Maka berlaku

1. Himpunan V tertutup terhadap operasi penjumlahan

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Operasi penjumlahan di $\boldsymbol{V}$ bersifat komutatif

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

3. Operasi penjumlahan di $\boldsymbol{V}$ bersifat asosiatif,

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

4. Misalkan bahwa $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah elemen identitas di $\boldsymbol{V}$, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Sehingga $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah elemen identitas di $\boldsymbol{V}$.

5. Ambil sebarang $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ dan anggap bahwa $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, maka

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (-x_1) \\ y_1 + (-y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_1) + x_1 \\ (-y_1) + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga $-u \in \mathbb{R}^2$ merupakan invers dari sebarang $u \in \mathbb{R}^2$

6. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{V}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$k\boldsymbol{u} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

7. Berlaku $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

$$= k \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(x_1 + x_2) \\ k(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 + kx_2 \\ ky_1 + ky_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$$

$$= k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$$

8. Berlaku $(k+l)\boldsymbol{u} = (k+l)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}(k+l)x_1\\(k+l)y_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}kx_1 + lx_1\\ky_1 + ly_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}kx_1\\ky_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}lx_1\\ly_1\end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$= k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$$

9. Berlaku $k(lu) = k\left(l\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)$

$$= \left(kl\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)$$

$$= (kl)\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$= (kl)\boldsymbol{u}$$

10. Berlaku $1\boldsymbol{u} = 1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1x_1\\1y_1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{u}$$

Jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{V}$ merupakan ruang vektor.

Pada ruang vektor terdapat subruang vektor. Subruang vektor merupakan himpunan bagian dari ruang vektor $\boldsymbol{V}$. Untuk lebih jelasnya maka akan disajikan definisi mengenai subruang vektor.

Definisi Subruang Vektor

Misalkan $\boldsymbol{V}$ merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$, dan $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}, (W \neq \emptyset)$. $\boldsymbol{W}$ dapat disebut subruang dari $\boldsymbol{V}$ jika $\boldsymbol{W}$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar $\boldsymbol{V}$ (Gozali, 2010).

Selanjutnya diberikan pernyataan yang menunjukkan syarat-syarat suatu subruang dari suatu ruang vektor juga merupakan ruang vektor.

Teorema Subruang Vektor

Jika $\boldsymbol{W}$ adalah suatu himpunan bagian satu atau lebih vektor dari suatu ruang vektor $\boldsymbol{V}$, maka $\boldsymbol{W}$ adalah subruang dari $\boldsymbol{V}$ jika dan hanya jika memenuhi dua syarat berikut (Syarifuddin et al., 2016).

1. Jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$
2. Jika k skalar, dan $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$, maka $k\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$

Contoh:

Diberikan $S = \{(a_1, a_2, a_3) | a_2 = a_3), S$ merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$, karena:

1. Ambil sebarang $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_2)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_2)$ masing-masing merupakan elemen dari S, maka

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_2) + (b_1, b_2, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_2 + b_2) \in S$$

2. Ambil sebarang $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_2) \in S$, maka

$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha(a_1, a_2, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_2) \in S$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

2.2.2 Transformasi Linier

Transformasi linier merupakan dasar dari aljabar linier yang berbentuk fungsi. Salah satu pembahasan dalam transformasi linier adalah fungsi yang dapat memetakan suatu ruang vektor ke ruang vektor lainnya, sehingga operasi standar pada ruang vektor (penjumlahan dan perkalian skalar) masih berlaku (Syafnuri et al., 2018).

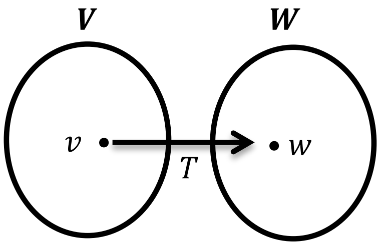
Tranformasi (pemetaan atau fungsi) T dari $\boldsymbol{V}$ (domain) ke $\boldsymbol{W}$ (kodomain) dapat dituliskan sebagai

$$T: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$$

(Syafnuri et al., 2018)

dengan, $w = T(v)$

$\boldsymbol{V}$ dan $\boldsymbol{W}$ merupakan vektor atas lapangan F.



Gambar 2.1 Transformasi Linier $\boldsymbol{V}$ ke $\boldsymbol{W}$

Untuk mengetahui lebih jelasnya mengenai definisi transformasi linier maka akan disajikan definisi transformasi linier sebagai berikut.

Definisi Transformasi Linier

Transformasi $T: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$ disebut transformasi linier jika:

1. $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.
2. $T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ dan skalar $k \in F$.

(Syafnuri et al., 2018)

Contoh:

Diketahui $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$

Akan dibuktikan bahwa $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$ merupakan transformasi linier.

Misalkan $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ maka

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$$

2. Untuk sebarang skalar k, $k\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$ maka

$$T(k\boldsymbol{u}) = T\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k\,T(\boldsymbol{u})$$

Karena kedua syarat terpenuhi, maka $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$ merupakan transformasi linier.

Dalam transformasi linier terdapat himpunan bagian vektor yang dipetakan ke vektor nol yang dinamakan kernel atau *nullspace*. Untuk mengetahui lebih jelasnya maka akan disajikan definisi mengenai kernel sebagai berikut.

Definisi Kernel Transformasi Linier

Misalkan $T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ merupakan transformasi linier, maka himpunan bagian dari vektor-vektor di $\boldsymbol{V}$ yang dipetakan T ke $\boldsymbol{0}$ dinamakan kernel atau ruang null dari T dan dinyatakan $ker(T)$.

Berdasarkan definisi, maka

$$ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} | T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_w\}$$

(Syafnuri et al., 2018)

Selain terdapat kernel, terdapat juga yang dinamakan jangkauan. Selanjutnya akan disajikan definisi mengenai jangkauan sebagai berikut.

Definisi Jangkauan (*Range*)

Himpunan semua vektor-vektor di $\boldsymbol{W}$ yang merupakan bayangan T paling sedikit satu vektor di $\boldsymbol{V}$ disebut sebagai jangkauan dari T dan dinotasikan dengan $R(T)$.

Berdasarkan definisi di atas, maka

$$R(T) = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} | T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}, \text{untuk } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$$

Himpunan $R(T)$ bukan merupakan himpunan kosong, paling tidak memuat $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{W}$.

(Syafnuri et al., 2018)

Contoh

Berikut merupakan sebuah transformasi linier.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\ker(T)$ dan $R(T)$

(Syafnuri et al., 2018)

Penyelesaian

1. Untuk mencari $ker(T)$ berarti mencari vektor (x_1, x_2) yang petanya sama dengan $\boldsymbol{0}$ sehingga $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) = (0,0,0)$ maka

$$x_1 + x_2 \quad = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan maka didapatkan penyelesaian $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$

Jadi $\ker(T) = \{(0,0)\}$

2. Untuk mencari $R(T)$ berarti vektor $(y_1, y_{2,} y_3)$ memenuhi persamaan berikut

$$\left(y_1, y_{2,} y_3\right) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$$

maka

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = -x_1 + x_2$$

$$y_3 = x_1 + 2x_2$$

Dari persamaan di atas maka dapat dibentuk menjadi matriks

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor $\left(y_1, y_{2,} y_3\right)$ menjadi anggota $R(T)$ jika vektor $\left(y_1, y_{2,} y_3\right)$ menjadi anggota dari ruang kolom matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2.3 Pemetaan Bilinear

Salah satu konsep yang hampir dikenal di semua cabang matematika adalah konsep mengenai himpunan dan pemetaan (fungsi). Pada cabang matematika seperti aljabar abstrak, istilah pemetaan lebih umum digunakan daripada istilah fungsi. Pada dasarnya fungsi adalah suatu relasi atau hubungan dengan sifat-sifat khusus (Rosjanuardi, 2014). Berikut akan disajikan definisi mengenai suatu pemetaan.

Definisi Pemetaan

Diketahui A dan B himpunan tidak kosong. Sebuah pemetaan φ dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu aturan yang mengaitkan setiap unsur dari himpunan A dengan tepat satu unsur dalam himpunan B (Ruhama, 2012).

Jika φ merupakan suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B, maka pemetaan tersebut dilambangkan dengan $\varphi: A \to B$ atau $A \xrightarrow{\varphi} B$. Himpunan A dikatakan domain atau daerah asal dari φ dan dilambangkan dengan $D(\varphi)$ dan himpunan B dikatakan kodomain atau daerah kawan dan dilambangkan dengan $C(\varphi)$. Jika φ menghubungkan $a \in A$ ke $b \in B$, maka b disebut sebagai bayangan dari a oleh pemetaan φ dan dilambangkan dengan $\varphi(a) = b$. Sedangkan untuk himpunan range atau daerah hasil dapat ditulis $R(\varphi) = \{\varphi(a): a \in D(\varphi)\}$ (Ruhama, 2012).

Contoh:

Relasi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 3$. Tunjukkan bahwa relasi tersebut merupakan fungsi.

Bukti

1. Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}$ pilih $y = 2x - 3 \in \mathbb{R}$ akan ditunjukkan $y = f(x)$

   Karena $x \in \mathbb{R}$ maka $f(x) = 2x - 3 = y \in \mathbb{R}$.

2. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $x_1 = x_2$ akan ditunjukkan $f(x_1) = f(x_2)$.

   Perhatikan bahwa

$$f(x_1) = 2x_1 - 3$$

$$f(x_2) = 2x_2 - 3$$

   Dengan $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$.

   Jadi $f(x) = 2x - 3$ merupakan fungsi.

Setelah mengetahui tentang definisi dari pemetaan kemudian akan disajikan definisi mengenai pemetaan bilinier.

Definisi Pemetaan Bilinear

Misalkan $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ merupakan ruang vektor. $\varphi: \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ dikatakan bilinear jika memenuhi:

1. $\varphi(\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.
2. $\varphi(\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ dan λ adalah sebarang skalar.
3. $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v_1}) + \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v_2})$, $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{V}$.
4. $\varphi(\boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ dan λ adalah sebarang skalar.

(Ruhama, 2012)

Contoh:

Himpunan $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(x, y) = 2xy$. Pemetaan φ adalah pemetaan bilinier.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa pemetaan φ merupakan pemetaan bilinier.

1. Untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = 2(x_1 + x_2)y = 2x_1y + 2x_2y = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).$$

2. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(\lambda x, y) = 2\lambda xy = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y), \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Untuk setiap $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = 2x(y_1 + y_2) = 2xy_1 + 2xy_2 = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).$$

4. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x, \lambda y) = 2x\lambda y = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y), \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Sehingga terbukti bahwa pemetaan φ merupakan pemetaan bilinier.

(Rasiman et al., 2018)

2.4 Ring dan Subring

Sistem bilangan seperti bilangan bulat, bilangan rasional, dan bilangan kompleks memiliki dua operasi yang didefinisikan padanya, yaitu penjumlahan dan perkalian. Operasi terhadap perkalian himpunan bilangan-bilangan tersebut merupakan grup abelian. Sistem aljabar dengan dua operasi seperti di atas termasuk ke dalam sistem aljabar yang disebut ring (Setiawan, 2014). Berikut akan disajikan definisi mengenai ring.

Definisi Ring

Misalkan R merupakan himpunan yang tidak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu + (operasi penjumlaan) dan × (operasi perkalian), serta disimbolkan dengan $(R, +, \times)$. $(R, +, \times)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. $(R,+)$ grup abelian

    a. Tertutup terhadap operasi penjumlahan

$$\forall a,b \in R, a+b \in R$$

    b. Assosiatif terhadap operasi penjumlahan

$$\forall a,b,c \in R, (a+b)+c = a+(b+c)$$

    c. Tedapat elemen identitas yaitu $e \in R$

$$\forall a \in R, a+e = e+a = a$$

    d. Setiap elemen memiliki invers

$$\forall a \in R, \exists a^{-1} \in R$$

    sehingga

$$a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$$

    e. R bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan

$$\forall a,b \in R, a+b = b+a$$

2. $(R,\times)$ semigrup

    a. Tertutup terhadap operasi perkalian

$$\forall a,b \in R, a \times b \in R$$

    b. Assosiatif terhadap operasi perkalian

$$\forall a,b,c \in R, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

3. Sifat distributif kiri dan kanan

    $\forall a,b,c \in R$ maka,

    a. $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$

    b. $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

(Rasiman et al., 2018)

Selanjutnya akan disajikan definisi mengenai ring yang bersifat komutatif.

Definisi Ring Komutatif

Ring R disebut sebagai ring komutatif jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif (Rasiman et al., 2018).

Selanjutnya akan disajikan definisi mengenai subring.

Definisi Subring

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah suatu ring, $S \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari R $(S \subseteq R)$. Apabila operasi yang sama dengan $(S, +, \times)$ membentuk suatu ring maka S disebut subring dari R (Rasiman et al., 2018).

Di dalam ring terdapat subring khusus yang memiliki sifat-sifat istimewa yaitu tertutup terhadap perkalian unsur di luar subring, subring tersebut dinamakan suatu ideal (Rasiman et al., 2018). Pada ring dikenal dengan ideal kanan dan ideal kiri. Dikatakan ideal kiri apabila tertutup terhadap perkalian unsur di sebelah kiri dan dikatakan ideal kanan apabila tertutup terhadap perkalian unsur di sebelah kanan. Untuk lebih jelas terdapat definisi berikut.

Definisi Ideal

Misalkan $(R, +, \times)$ merupakan suatu ring dan $I \subset R$ dengan $I \neq \emptyset$, I disebut ideal dua sisi (ideal kiri sekaligus ideal kanan) dari R jika

1. Untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $\left(a + (-b)\right) \in I$.
2. Untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R \Rightarrow ra \in I$ dan $ar \in I$.

Terdapat beberapa ideal yaitu:

1. Ideal I disebut ideal trivial jika $I = \{0\}$.
2. Ideal I disebut ideal sejati jika $I \neq R$.
3. Ideal I disebut ideal tak sejati jika $I = R$.

(Rasiman et al., 2018)

2.5 Aljabar

Aljabar adalah salah satu cabang yang terdapat di dalam matematika yang mempunyai peran yang sangat penting dalam kehidupan. Tanpa disadari, aljabar sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Seorang pedagang yang menjual barang-barang akan menghadapi masalah tentang keuangan. Permasalahan tersebut merupakan salah satu penerapan aljabar dalam kehidupan sehari-hari. Berikut diberikan definisi mengenai aljabar.

Definisi Aljabar

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong dan "$*$" merupakan operasi biner di F. Pasangan terurut $(X,*)$ disebut aljabar.

2.6 Aljabar Lie

Aljabar Lie abstrak adalah struktur aljabar yang digunakan dalam mempelajari grup Lie. Yang merupakan endomorfisme ruang vektor dari tranformasi linier yang memiliki operasi baru yang bukan asosiatif, tetapi disebut *bracket* atau *commutator*. Aljabar asosiatif mengawetkan perkalian bilinier antar elemen dalam ruang vektor $\boldsymbol{V}$ atas lapangan F, di mana $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ didefinisikan oleh $(x, y) \rightarrow xy$ untuk $x, y \in \boldsymbol{V}$. Operasi *bracket* menghasilkan pemetaan bilinier yang baru, di atas ruang vektor yang sama, yang mengubah aljabar asosiatif menjadi aljabar Lie, di mana $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$ didefinisikan oleh $[x, y] \rightarrow (xy - yx)$ (Talley, 2007). Berikut akan disajikan definisi mengenai aljabar Lie untuk memperjelas.

Definisi Aljabar Lie

Suatu aljabar Lie adalah ruang vektor $\boldsymbol{L}$ atas lapangan F dengan operasi $[-,-]$: $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} \rightarrow \boldsymbol{L}$ (disebut *bracket* Lie) yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Pemetaan bilinier pada *bracket* Lie $[-,-]$
2. $[x,x]=0$ untuk setiap $x\in \boldsymbol{L}$
3. $\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0$ untuk setiap $x,y,z\in \boldsymbol{L}$

(Imani, 2012)

Aksioma (3) disebut juga sebagai identitas Jacobi. Perhatikan bahwa *bracket* Lie merupakan pemetaan bilinear sehingga aksioma (2) ekivalen dengan

$$\begin{aligned}0&=[x+y,x+y]\\&=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]\\&=0+[x,y]+[y,x]+0\\&=[x,y]+[y,x]\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$[x,y]=-[y,x]$ untuk setiap $x,y\in \boldsymbol{L}$

Bracket Lie $[x,y]$ atau disebut *commutator* dari x dan y. Definisi dari komutator (*commutator*) akan diberikan sebagai berikut.

Definisi Komutator (*Commutator*)

Diberikan $x,y\ \in R$ dan R merupakan ring dengan pusat $Z(R)$. *Commutator* $xy-yx$ dinotasikan dengan $[x,y]$ atau dapat didefinisikan sebagai berikut

$$[x,y]=xy-yx,\forall x,y\in R$$

Sehingga penulisan komutator $xy-yx$ ditulis $xy-yx$ (Halim Mahmud et al., 2013). Selanjutnya akan disajikan definisi mengenai subaljabar Lie

Definisi Subaljabar

Misalkan $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie. Subruang K dari $\boldsymbol{L}$ disebut subaljabar Lie jika

$$[x,y]\in K$$

untuk setiap $x, y \in K$ (Erdmann & Wildon, 2006)

Definisi Ideal

Suatu subruang I dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ disebut ideal dari $\boldsymbol{L}$ jika

$$[x, y] \in I$$

untuk setiap $x \in \boldsymbol{L}, y \in I$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Definisi Pusat

Pusat dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ adalah himpunan

$$Z(\boldsymbol{L}) = \{x \in \boldsymbol{L} | [x, z] = 0, \forall z \in \boldsymbol{L}\}$$

(Erdmann & Wildon, 2006)

Definisi Pemetaan Homomorfisma

Misalkan $\boldsymbol{L_1}$ dan $\boldsymbol{L_2}$ adalah aljabar Lie atas lapangan F. Suatu pemetaan $\varphi: \boldsymbol{L_1} \rightarrow \boldsymbol{L_2}$ disebut homomorfisma jika φ adalah pemetaan linear dan

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \forall x, y \in \boldsymbol{L_1}$$

(Erdmann & Wildon, 2006)

2.7 Kajian Aljabar Lie dalam Perspektif Islam

Aljabar merupakan salah satu cabang matematika. Aljabar dibagi menjadi dua berdasarkan periodenya yaitu aljabar klasik dan aljabar abstrak atau aljabar modern. Pada penelitian ini membahas tentang aljabar abstrak. Aljabar abstrak mengkaji tentang struktur aljabar, seperti himpunan, teori grup, ring, modul, lapangan, dan ruang vektor. Selain itu dalam struktur aljabar juga membahas mengenai aljabar Lie, dimana aljabar Lie merupakan topik pembahasan pada penelitian ini. Aljabar Lie merupakan suatu ruang vektor atas lapangan F yang dilengkapi dengan pemetaan bilinier. Dalam Al-Qur'an terdapat konsep mengenai vektor. Suatu vektor memiliki nilai dan arah sehingga dalam vektor terdapat titik pangkal dan ujung. Dalam surat Al-Mu’minun ayat 12-14 (Kementrian Agama, 1971)

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْاِنْسَانَ مِنْ سُلٰلَةٍ مِّنْ طِيْنٍ ۚ ١٢ ثُمَّ جَعَلْنٰهُ نُطْفَةً فِيْ قَرَارٍ مَّكِيْنٍ ۖ ١٣ ثُمَّ خَلَقْنَا النُّطْفَةَ
عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظٰمًا فَكَسَوْنَا الْعِظٰمَ لَحْمًا ثُمَّ اَنْشَأْنٰهُ خَلْقًا اٰخَرَ ۗ فَتَبَارَكَ اللّٰهُ
اَحْسَنُ الْخٰلِقِيْنَ ۗ

Artinya: “*Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dari saripati (berasal) dari tanah. Kemudian Kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu Kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu Kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta Yang Paling Baik*”

Dengan memahami konsep vektor dengan benar dan memahami tentang asal-usul manusia dari surat di atas, maka konsep terciptanya manusia dapat dimisalkan sebagai titik awal atau titik pangkal sebuah vektor. Dimana manusia diciptakan dari tanah. Titik awal tersebut juga dapat dimisalkan seorang bayi yang baru lahir dalam keadaan suci dan tidak mengerti apa-apa sehingga diarahkan orang tuanya untuk menjadi orang yang rendah hati dan mensyukuri nikmat Allah SWT (Kusumastuti, 2008). Allah SWT berfirman seraya memberitahukan tentang asal mula penciptaan manusia dari saripati (berasal) dari tanah, yaitu Adam, Allah SWT menciptakannya dari tanah liat kering yang berasal dari lumpur hitam yang dibentuk (Al-Sheikh, 2003). Dalam hadist yang telah diriwayatkan Abu Dawud dan at-Tirmidzi juga disampaikan mengenai asal mula penciptaan manusia (Al-Sheikh, 2003). Dalam hadist itu disampaikan

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ بَشَّارٍ حَدَّثَنَا يَحْيَى بْنُ سَعِيدٍ وَابْنُ أَبِي عَدِيٍّ وَمُحَمَّدُ بْنُ جَعْفَرٍ وَعَبْدُ الْوَهَّابِ قَالُوا حَدَّثَنَا
عَوْفُ بْنُ أَبِي جَمِيلَةَ الْأَعْرَابِيُّ عَنْ قَسَامَةَ بْنِ زُهَيْرٍ عَنْ أَبِي مُوسَى الْأَشْعَرِيِّ قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ
عَلَيْهِ وَسَلَّمَ إِنَّ اللَّهَ تَعَالَى خَلَقَ آدَمَ مِنْ قَبْضَةٍ قَبَضَهَا مِنْ جَمِيعِ الْأَرْضِ فَجَاءَ بَنُو آدَمَ عَلَى قَدْرِ الْأَرْضِ

فَجَاءَ مِنْهُمْ الْأَحْمَرُ وَالْأَبْيَضُ وَالْأَسْوَدُ وَبَيْنَ ذَلِكَ وَالسَّهْلُ وَالْحَزْنُ وَالْخَبِيثُ وَالطَّيِّبُ قَالَ أَبُو عِيسَى هَذَا حَدِيثٌ حَسَنٌ صَحِيحٌ

Artinya: *"Telah menceritakan kepada kami [Muhammad bin Basyar] telah menceritakan kepada kami [Yahya bin Sa'id] dan [Ibnu Abu Adi] dan [Muhammad bin Ja'far] dan [Abdul Wahhab], mereka berkata; telah menceritakan kepada kami ['Auf bin Abu Jamilah Al-A'rabi] dari [Qasamah bin Zuhair] dari [Abu Musa Al Asy'ari] ia berkata; Rasulullah shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: "Sesungguhnya Allah Ta'ala menciptakan Adam dari satu genggaman tanah yang digenggam-Nya dari seluruh permukaan bumi. Kemudian anak-anak Adam datang sesuai dengan kadar warna tanah. Di antara mereka ada yang merah, putih, hitam,dan di antara hal tersebut, juga ada yang jahat dan ada juga yang baik, serta diantara keduanya" Abu Isa berkata; Hadist ini hasan shahih.*

Vektor juga dapat diibaratkan sebagai sebuah garis yang memiliki titik awal, maka dari titik awal itu akan terjadi perkembangan hingga menjadi sebuah bentuk, bentuk tersebut yang disebut garis, sehingga dapat diibaratkan sebagai manusia yang melakukan proses perkembangan (Kusumastuti, 2008). Konsep tersebut terdapat pada surat Ar-Rum ayat 20 (Kementrian Agama, 1971)

وَمِنْ اٰيٰتِهٖٓ اَنْ خَلَقَكُمْ مِّنْ تُرَابٍ ثُمَّ اِذَآ اَنْتُمْ بَشَرٌ تَنْتَشِرُوْنَ

Artinya: *"Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah Dia menciptakan kamu dari tanah, kemudian tiba-tiba kamu (menjadi) manusia yang berkembang biak"*

Selain terdapat titik awal atau titik pangkal, vektor juga memiliki ujung atau titik akhir. Konsep tersebut ada di dalam surat Al-Jumu'ah ayat 8 (Kementrian Agama, 1971)

قُلْ اِنَّ الْمَوْتَ الَّذِيْ تَفِرُّوْنَ مِنْهُ فَاِنَّهٗ مُلٰقِيْكُمْ ثُمَّ تُرَدُّوْنَ اِلٰى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُوْنَ

Artinya: *"Sesungguhnya kematian yang kamu lari dari padanya, ia pasti menemui kamu, kemudian kamu akan dikembalikan kepada (Allah), yang mengetahui yang gaib dan yang nyata, lalu Dia beritakan kepadamu apa yang telah kamu kerjakan"*

Sama halnya seperti vektor yang memiliki titik akhir, dalam proses kehidupan manusia sebaiknya memiliki tujuan yang jelas untuk mencapai atau menuju ke titik akhir tersebut. Titik akhir yang dimaksudkan dari manusia adalah kematian. Dan bekal untuk mencapai tujuan dengan sebaik-baiknya sampai akhir proses adalah ridha Allah SWT (Kusumastuti, 2008).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis atau pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka atau riset pustaka. Menurut Embun, penelitian kepustakaan adalah penelitian yang dilakukan semata-mata atas dasar karya tulis, termasuk hasil kajian yang dipublikasikan dan tidak dipublikasikan (Melfianora, 2019). Studi pustaka atau kepustakaan juga dapat dipahami sebagai rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca, mencatat dan mengolah bahan penelitian (Supriyadi, 2016).

3.2 Pra Penelitian

Pada tahap pra penelitian ini, yang pertama dilakukan peneliti adalah mempelajari mengenai konsep dasar tentang aljabar Lie dan mempelajari konsep-konsep yang masih berkaitan dengan aljabar Lie seperti konsep mengenai lapangan, ruang vektor, transformasi linier, pemetaan bilinier, ring, dan aljabar. Kemudian peneliti akan membuktikan sifat aljabar Lie yang berkaitan dengan kekomutatifan pada aljabar Lie dan sifat ideal dari aljabar Lie.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka sehingga langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mempelajari buku-buku dan jurnal untuk mendapatkan data-data penelitian. Adapun langkah-lagkah yang peneliti gunakan untuk membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan lema terkait kekomutatifan pada Aljabar Lie yaitu suatu aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ disebut komutatif jika dan hanya jika $[x, y] = 0$, untuk

setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$ dan membuktikan bahwa $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ jika hanya jika $\boldsymbol{L}$ abelian.

2. Membuktikan lema terkait sifat ideal dari aljabar Lie yaitu ideal merupakan suatu subaljabar Lie dan membuktikan bahwa irisan $I \cap J$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{L}$ serta membuktikan bahwa $I + J$ merupakan ideal dari $\boldsymbol{L}$.
3. Memberikan contoh aljabar Lie.
4. Menarik kesimpulan dari lema dan contoh aljabar Lie.

BAB IV

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas tentang kekomutatifan pada aljabar Lie dan sifat-sifat ideal dari aljabar Lie. Serta pada bagian akhir terdapat integrasi Aljabar Lie dalam Al-Qur'an. Pada bagian awal dituliskan mengenai kekomutatifan pada aljabar Lie dan akan dituliskan lema mengenai kekomutatifan pada aljabar Lie serta membuktikan lema tersebut.

4.1 Kekomutatifan pada Aljabar Lie

Misalkan $\boldsymbol{L}$ merupakan ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan F. Setiap ruang vektor tersebut dapat disebut aljabar Lie jika $[x, y] = 0$. Aljabar Lie dengan kondisi tersebut disebut aljabar Lie yang komutatif. Berikut akan disajikan lema mengenai kekomutatifan pada Aljabar Lie.

Lema 4.1

Suatu aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ disebut komutatif jika dan hanya jika $[x, y] = 0$, untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ komutatif jika dan hanya jika $[x, y] = 0$.

($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ komutatif maka $[x, y] = 0$

Misalkan $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie komutatif, maka $[x, y] = [y, x]$

Ambil sebarang $x, y \in \boldsymbol{L}$

Akibat dari aksioma (2) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= [x + y, x + y] \\ &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \end{aligned}$$

$$= 0 + [x, y] + [y, x] + 0$$

$$= [x, y] + [y, x]$$

Dengan demikian diperoleh

$[x, y] = -[y, x]$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$

$[y, x] = [x, y] = -[y, x]$

Sehingga diperoleh $[y, x] = -[y, x]$

Kondisi ini terpenuhi jika $[y, x] = 0, \forall x, y \in \boldsymbol{L}$

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika $[x, y] = 0$ maka $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie komutatif.

Misalkan terdapat aljabar Lie $\boldsymbol{L}$, untuk semua elemen $x, y \in \boldsymbol{L}$, berlaku

$$[x, y] = 0$$

Ambil sebarang $x \in \boldsymbol{L}$ dan $y \in \boldsymbol{L}$.

Berdasarkan asumsi maka diperoleh

$$[x, y] = 0 \text{ untuk sebarang } x, y \in \boldsymbol{L}$$

Pilih x dan y sebarang dari $\boldsymbol{L}$. Misalkan $x = a$ dan $y = b$, untuk sebarang $a, b \in \boldsymbol{L}$ maka diperoleh

$$[a, b] = 0$$

Untuk menunjukkan bahwa $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie komutatif, maka perlu ditunjukkan bahwa

$$[a, b] = [b, a] \ \forall a, b \in \boldsymbol{L}$$

Dengan asumsi $[a, b] = 0$, maka diperoleh

$$[b, a] = 0$$

Karena $[a, b] = 0$ dan $[b, a] = 0$ untuk semua $a, b \in \boldsymbol{L}$, maka didapatkan $[x, y] = 0$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$.

Sehingga terbukti bahwa jika $[x, y] = 0$ maka $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie komutatif.

Aljabar lie dapat dikatakan sama dengan pusat dari aljabar Lie jika memenuhi lema sebagai berikut

Lema 4.2

Misalkan $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie. $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ jika hanya jika $\boldsymbol{L}$ abelian (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti

Akan ditunjukkan $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ jika hanya jika $\boldsymbol{L}$ abelian.

($\Rightarrow$) Misalkan $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ berarti bahwa setiap elemen $x \in \boldsymbol{L}$ merupakan elemen pusat, sehingga

$$Z(\boldsymbol{L}) = \{x \in \boldsymbol{L} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \boldsymbol{L}\} = \boldsymbol{L}$$

Perhatikan bahwa, untuk setiap $x \in \boldsymbol{L}$ maka

$$[x, y] = 0, \forall y \in \boldsymbol{L}$$

Ambil sebarang elemen $x, y \in \boldsymbol{L}$.

Karena $x \in Z(\boldsymbol{L})$, maka berdasarkan definisi diperoleh

$$[x, y] = 0$$

untuk sebarang $y \in \boldsymbol{L}$.

Selanjutnya ambil $y = x$ maka

$$[x, x] = 0$$

Karena y merupakan elemen dari $\boldsymbol{L}$ dan berada dalam pusat, maka untuk sebarang y

$$[y, x] = 0$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $[x, y] = 0$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{L}$.

Jadi terbukti bahwa $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ jika hanya jika $\boldsymbol{L}$ abelian.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika $\boldsymbol{L}$ abelian maka $Z(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$

Misalkan L abelian maka $[x, y] = [y, x], \forall x, y \in \boldsymbol{L}$

Karena $[x, y] = -[y, x]$ dan $[x, y] = [y, x]$ diperoleh $[y, x] = -[y, x]$

Sehingga $[y, x] = 0$ dan $[x, y] = 0$

Akibat dari $[x, y] = [y, x] = 0, \forall x, y \in \boldsymbol{L}$ maka $x, y \in Z(\boldsymbol{L})$

Jelas bahwa $x \in Z(\boldsymbol{L})$ maka $x \in \boldsymbol{L}$.

Jadi terbukti bahwa jika $\boldsymbol{L}$ abelian maka $\boldsymbol{L} = Z(\boldsymbol{L})$.

4.2 Ideal dari Aljabar Lie

Dalam subbab ini akan membahas tentang sifat-sifat ideal dari aljabar Lie. Berikut akan diberikan lema mengenai suatu ideal di $\boldsymbol{L}$ adalah subaljabar Lie di $\boldsymbol{L}$.

Lema 4.3

Misalkan I adalah ideal di aljabar Lie $\boldsymbol{L}$. I merupakan suatu subaljabar Lie (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa jika ideal I merupakan suatu subaljabar Lie

1. $I \subset \boldsymbol{L}$ dan $I \neq \emptyset$

   Perhatikan bahwa I adalah subaljabar Lie, sehingga memuat elemen nol.

   Diasumsikan bahwa aljabar Lie memiliki elemen nol. Jika I adalah ideal dan I tidak kosong, maka terdapat satu elemen pada I.

   Misalkan x adalah elemen nol pada I. Maka dengan menggunakan sifat ideal, dapat ditunjukkan bahwa

$$[x, y] \in I, \forall y \in \boldsymbol{L}$$

   Misalkan dipilih y sebagai elemen nol dari $\boldsymbol{L}$, maka diperoleh

$$[y,x] = [\vec{0},x] = \vec{0} \in I$$

Jadi terdapat elemen nol pada I sehingga $I \subset \boldsymbol{L}$ dan $I \neq \emptyset$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $[x,y] \in I, \forall x,y \in I$

a. Ideal I tertutup terhadap operasi penjumlahan

Ambil $x,y \in I$. Akan ditunjukkan bahwa $x+y \in I$.

Berdasarkan definisi ideal, $[x,y] \in I$ karena I merupakan subaljabar Lie, sehingga

$$[x,y] \in I$$

Untuk menunjukkan $x+y \in I$, perhatikan bahwa ideal I harus memenuhi sifat penjumlahan sehingga I merupakan subaljabar Lie.

b. Ideal I tertutup terhadap operasi *bracket*

Ambil $x,y \in I$

Karena I merupakan ideal, untuk setiap $x \in I$ dan $y \in \boldsymbol{L}$, maka diperoleh

$$[y,x] \in I$$

Dengan sifat antisimetri dari *bracket* dalam aljabar Lie diperoleh

$$[x,y] = -[y,x]$$

Diketahui bahwa $[y,x] \in I$. Karena I ideal maka didapatkan

$$-[y,x] \in I$$

Sehingga dapat ditunjukkan bahwa I tertutup terhadap operasi *bracket*.

Jadi ideal I merupakan suatu subaljabar Lie $\boldsymbol{L}$.

Selanjutnya diberikan lemma mengenai irisan dari suatu ideal pada aljabar Lie.

Lema 4.4

Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$. Maka irisan $I \cap J$ adalah ideal dari $\boldsymbol{L}$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti

Akan dibuktikan bahwa irisan $I \cap J$ adalah ideal dari $\boldsymbol{L}$ di mana I dan J adalah ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $I \cap J \subset \boldsymbol{L}$ dan $I \cap J \neq \emptyset$

   Irisan $I \cap J$ didefinisikan sebagai

   $$I \cap J = \{x \in \boldsymbol{L} \mid x \in I \text{ dan } x \in J\}$$

   Berarti bahwa $I \cap J$ terdiri dari elemen yang terdapat pada kedua ideal I dan J. Karena I merupakan ideal dari aljabar Lie L maka $I \subset \boldsymbol{L}$ dan karena J merupakan ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ maka $J \subset \boldsymbol{L}$.

   Oleh karena itu, setiap elemen $x \in I \cap J$ merupakan elemen dari $\boldsymbol{L}$.

   Ideal dari aljabar Lie memuat elemen nol, sehingga diperoleh

   $$\vec{0} \in I \text{ dan } \vec{0} \in J$$

   Karena elemen nol terdapat dalam ideal I dan J, maka didapatkan

   $$\vec{0} \in I \cap J$$

   Dengan demikian irisan $I \cap J \neq \emptyset$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $[x, y] \in I \cap J, \forall x \in I, y \in I \cap J$

   Misalkan $x \in I$ dan $y \in I \cap J$.

   Karena $y \in I \cap J$ maka $y \in I$ dan $y \in J$.

   Akibat I merupakan ideal, $x \in I$ dan $y \in I$, maka diperoleh

   $$[x, y] \in I$$

Kemudian, karena $y \in J$ dan $x \in I$, maka akan ditunjukkan bahwa $[x, y] \in J$

Karena J merupakan ideal diperoleh

$$[y, x] \in J$$

Dengan menggunakan sifat asimetri dari operasi *bracket*

$$[x, y] = -[y, x]$$

Sehingga $[y, x] \in J$ berakibat $-[y, x] \in J$.

Maka didapatkan $[x, y] \in J$.

Oleh karena itu diperoleh $[x, y] \in I \cap J$.

Sehingga terbukti bahwa irisan $I \cap J$ adalah ideal dari $\boldsymbol{L}$.

Selanjutnya akan diberikan lema mengenai $I + J$ adalah ideal dari $\boldsymbol{L}$.

Lema 4.5

Misalkan I dan J adalah ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$. Maka $I + J$ adalah ideal dari $\boldsymbol{L}$ dimana

$$I + J \coloneqq \{x + y : x \in I, y \in J\}$$

(Erdmann & Wildon, 2006)

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $I + J$ merupakan ideal dari L dimana

$$I + J \coloneqq \{x + y : x \in I, y \in J\}$$

1. Akan ditunjukkan bahwa $I + J \subset \boldsymbol{L}$ dan $I + J \neq \emptyset$

   Misalkan $z \in I + J$, dimana terdapat elemen $x \in I$ dan $y \in J$ sehingga

   $$z = x + y$$

   Karena I merupakan ideal di $\boldsymbol{L}$ maka $x \in I$ dan $x \in \boldsymbol{L}$ dan karena J merupakan ideal di $\boldsymbol{L}$ maka $y \in J$ berarti $y \in \boldsymbol{L}$.

Dengan demikian diperoleh

$$z = x + y \in \boldsymbol{L}$$

Maka setiap elemen $I + J$ merupakan elemen dari $\boldsymbol{L}$.

Karena I dan J merupakan ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$ maka terdapat elemen nol

$$\vec{0} \in I \text{ dan } \vec{0} \in J$$

Sehingga dapat ditulis

$$\vec{0} + \vec{0} \in I + J$$

berarti

$$\vec{0} \in I + J$$

Sehingga diperoleh bahwa $I + J \neq \emptyset$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $[x, y] \in I + J, \forall x \in \boldsymbol{L}, y \in I + J$

Misalkan $y \in I + J$. Berdasarkan definisi dapat ditulis

$$y = a + b,\ \ a \in I \text{ dan } b \in J$$

Dengan menggunakan substitusi maka diperoleh

$$\begin{aligned}[x, y] &= [x, a + b] \\ &= [x, a] + [x, b]\end{aligned}$$

Karena $a \in I$ dan I adalah ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$, maka $[x, a]$ adalah elemen dari I

$$[x, a] \in I$$

dan karena $b \in J$ dan J adalah ideal dari aljabar Lie $\boldsymbol{L}$, maka $[x, b]$ adalah elemen dari J

$$[x, b] \in J$$

Dengan $[x, a] \in I$ dan $[x, b] \in J$ maka diperoleh bahwa $[x, y] \in I + J$.

Selanjutnya akan disajikan lema mengenai *kernel* dan *image*

Lema 4.6

Misalkan $\boldsymbol{L_1}\ dan\ \boldsymbol{L_2}$ merupakan aljabar Lie atas lapangan F. Jika $\varphi: \boldsymbol{L_1} \rightarrow \boldsymbol{L_2}$ merupakan pemetaan homomorfisma, maka kernel dari φ merupakan ideal dari $\boldsymbol{L_1}$, dan image dari φ merupakan subaljabar Lie dari $\boldsymbol{L_2}$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti

Misalkan $\boldsymbol{L_1}$ dan $\boldsymbol{L_2}$ merupakan aljabar Lie atas lapangan F. Jika φ merupakan pemetaan homomorfisma $\boldsymbol{L_1} \rightarrow \boldsymbol{L_2}$, maka akan ditunjukkan bahwa kernel dari φ adalah ideal dari L_1.

1. Akan ditunjukkan $ker(\varphi) \subset \boldsymbol{L_1}$ dan $\ker(\varphi) \neq \emptyset$

   Perhatikan bahwa definisi kernel dari φ sebagai berikut:

   $$ker(\varphi) = \{x \in \boldsymbol{L_1} | \varphi(x) = 0\}$$

   Karena kernel φ merupakan himpunan semua elemen x dalam $\boldsymbol{L_1}$ yang dipetakan ke elemen nol dalam $\boldsymbol{L_2}$, maka untuk setiap $x \in ker(\varphi)$ berlaku

   $$\varphi(x) = 0$$

   Karena x merupakan elemen dari $ker(\varphi)$ dan $ker(\varphi)$ didefinisikan sebagai semua elemen x yang memenuhi $\varphi(x) = 0.$ Maka jelas bahwa setiap x berasal dari $\boldsymbol{L_1}$.

   Sehingga diperoleh bahwa $ker(\varphi) \subset \boldsymbol{L_1}$.

   Selanjutnya elemen nol untuk setiap homomorfisme φ, berlaku

   $$\varphi(\vec{0}) = 0$$

   Karena $\vec{0}$ merupakan elemen dari $\boldsymbol{L_1}$maka didapatkan $\vec{0} \subset \boldsymbol{L_1}$.

Dan karena $\varphi(\vec{0}) = 0$, maka diperoleh

$$0 \in ker(\varphi)$$

Sehingga diperoleh bahwa $ker(\varphi) \neq \emptyset$.

2. Akan ditunjukkan $[x, y] \in ker(\varphi), \forall x \in \boldsymbol{L_1}, y \in ker(\varphi)$

a. $ker(\varphi)$ tertutup terhadap penjumlahan

Ambil $x, y \in ker(\varphi)$, berarti bahwa

$$\varphi(x) = 0 \text{ dan } \varphi(y) = 0$$

Ditunjukkan bahwa $x + y \in ker(\varphi)$

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, $x + y \in ker(\varphi)$ yang menunjukkan bahwa $ker(\varphi)$ tertutup terhadap penjumlahan.

b. $ker(\varphi)$ tertutup terhadap operasi *bracket*

Misalkan $x \in ker(\varphi)$ maka

$$\varphi(x) = 0$$

Ambil sebarang elemen $y \in \boldsymbol{L_1}$.

Kemudian berdasarkan homomorfisme aljabar Lie diperoleh

$$\begin{aligned} \varphi([x, y]) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= 0 + \varphi(y) \\ &= \varphi(y) \end{aligned}$$

Jika y merupakan elemen dari $ker(\varphi)$, maka $\varphi(y) = 0$.

Sehingga diperoleh $\varphi([x, y]) = 0$.

Dengan demikian $ker(\varphi)$ tertutup terhadap operasi *bracket*.

Jadi terbukti bahwa $[x, y] \in ker(\varphi), \forall x \in \boldsymbol{L_1}, y \in ker(\varphi)$.

Misalkan $\boldsymbol{L_1}$ dan $\boldsymbol{L_2}$ merupakan aljabar Lie atas lapangan F. Jika φ merupakan pemetaan homomorfisma $\boldsymbol{L_1} \rightarrow \boldsymbol{L_2}$, maka akan ditunjukkan bahwa image dari φ adalah subaljabar Lie dari $\boldsymbol{L_2}$.

1. Akan ditunjukkan $Im(\varphi) \subset \boldsymbol{L_2}$ dan $Im(\varphi) \neq \emptyset$

   Perhatikan bahwa definisi image dari φ sebagai berikut:

$$Im(\varphi) = \{\varphi(x) | x \in \boldsymbol{L_2}\}$$

   Karena φ merupakan pemetaan $\boldsymbol{L_1} \rightarrow \boldsymbol{L_2}$, maka untuk setiap elemen $x \in \boldsymbol{L_1}$, hasil pemetaan $\varphi(x)$ adalah elemen dari $\boldsymbol{L_2}$. Sehingga setiap elemen di $Im(\varphi)$ adalah hasil dari pemetaan φ yang berada di $\boldsymbol{L_2}$, maka

$$Im(\varphi) \subset \boldsymbol{L_2}$$

   Dengan demikian diperoleh $Im(\varphi) \subset \boldsymbol{L_2}$.

   Selanjutnya, karena φ merupakan homomorfisme pada aljabar Lie, maka diketahui

$$\varphi(\vec{0}) = 0_{\boldsymbol{L_2}}$$

   dimana 0_{L_2}merupakan elemen nol di $\boldsymbol{L_2}$.

   Karena $0_{\boldsymbol{L_2}}$ merupakan hasil dari pemetaan φ untuk elemen nol di $\boldsymbol{L_1}$, maka

$$0_{\boldsymbol{L_2}} \in Im(\varphi)$$

   Dengan demikian diperoleh bahwa $Im(\varphi) \neq \emptyset$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $[x, y] \in Im(\varphi), \forall x, y \in Im(\varphi)$

   Misalkan $x, y \in Im(\varphi)$.

   Terdapat elemen $a, b \in \boldsymbol{L_1}$ sehingga

$$x = \varphi(a) \text{ dan } y = \varphi(b)$$

Ditunjukkan bahwa $[x, y] \in Im(\varphi)$

$$[x, y] = [\varphi(a), \varphi(b)]$$

Dengan menggunakan sifat homomorfisma aljabar Lie

$$\varphi([a, b]) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

Selanjutnya dengan sifat *bracket* diperoleh

$$[x, y] = [\varphi(a), \varphi(b)]$$

$$= \varphi([a, b])$$

Karena $[a, b] \in \boldsymbol{L_1}$, maka $\varphi([a, b])$ terdapat dalam $Im(\varphi)$.

Dengan demikian diperoleh bahwa $[x, y] \in Im(\varphi)$.

4.3 Contoh Aljabar Lie

Di bagian ini akan diberikan contoh mengenai aljabar Lie yang dapat membantu memahami lebih dalam tentang topik ini.

Contoh Aljabar Lie pada Ruang Vektor Berdimensi 3

Misalkan $\boldsymbol{L} = \mathbb{R}^3$ dan misalkan $[-,-]: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$[x, y] = x \times y$$

$x \times y$ merupakan perkalian silang (*cross product*). Maka $\boldsymbol{L}$ adalah aljabar Lie.

Bukti

1. Akan ditunjukkan bahwa $[x, y]$ merupakan pemetaan bilinear

   a. $[x_a + x_b, y] = [x_a, y] + [x_b, y], \forall x_a, x_b, y \in \mathbb{R}^3$

   b. $[\alpha_1 x_a, y] = \alpha_1 [x_a, y], \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}, \forall x_a, y \in \mathbb{R}^3$

   c. $[x, y_a + y_b] = [x, y_a] + [x, y_b], \forall y_a, y_b, y \in \mathbb{R}^3$

   d. $[x, \alpha_2 y_a] = \alpha_2 [x, y_a], \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x, y_a \in \mathbb{R}^3$

Pertama-tama misalkan $x_a = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1})$, $x_b = (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2})$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y_a = (y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})$, $y_b = (y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2})$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ maka didapatkan

$$x_a + x_b = (x_{1,1} + x_{1,2}, x_{2,1} + x_{2,2}, x_{3,1} + x_{3,2})$$

$$y_a + y_b = (y_{1,1} + y_{1,2}, y_{2,1} + y_{2,2}, y_{3,1} + y_{3,2})$$

a. Untuk sebarang $x_a, x_b, y \in \mathbb{R}^3$ maka

$$\begin{aligned}[x_a + x_b, y] &= \Big(\big(x_{2,1} + x_{2,2}\big)y_3 - \big(x_{3,1} + x_{3,2}\big)y_2, \big(x_{3,1} + x_{3,2}\big)y_1 - \\ &\quad \big(x_{1,1} + x_{1,2}\big)y_3, \big(x_{1,1} + x_{1,2}\big)y_2 - \big(x_{2,1} + x_{2,2}\big)y_1\Big) \\ &= \big(x_{2,1}y_3 - x_{3,1}y_2, x_{3,1}y_1 - x_{1,1}y_3, x_{1,1}y_2 - x_{2,1}y_1\big) + \\ &\quad \big(x_{2,2}y_3 - x_{3,2}y_2, x_{3,2}y_1 - x_{1,2}y_3, x_{1,2}y_2 - x_{2,2}y_1\big) \\ &= [x_a, y] + [x_b, y], \forall x_a, x_b, y \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

b. Untuk sebarang $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ dan $x_a, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}[\alpha_1 x_a, y] &= \big(\alpha_1 x_{2,1}y_3 - \alpha_1 x_{3,1}y_2, \alpha_1 x_{3,1}y_1 - \alpha_1 x_{1,1}y_3, \alpha_1 x_{1,1}y_2 - \\ &\quad \alpha_1 x_{2,1}y_1\big) \\ &= \alpha_1\big(x_{2,1}y_3 - x_{3,1}y_2, x_{3,1}y_1 - x_{1,1}y_3, x_{1,1}y_2 - x_{2,1}y_1\big) \\ &= \alpha_1[x_a, y], \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}, \forall x_a, y \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

c. Untuk sebarang $y_a, y_b, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}[x, y_a + y_b] &= \Big(\big(y_{2,1} + y_{2,2}\big)x_3 - \big(y_{3,1} + y_{3,2}\big)x_2, \big(y_{3,1} + y_{3,2}\big)x_1 - \\ &\quad \big(y_{1,1} + y_{1,2}\big)x_3, \big(y_{1,1} + y_{1,2}\big)x_2 - \big(y_{2,1} + y_{2,2}\big)x_1\Big) \\ &= \big(y_{2,1}x_3 - y_{3,1}x_2, y_{3,1}x_1 - y_{1,1}x_3, y_{1,1}x_2 - y_{2,1}x_1\big) + \\ &\quad \big(y_{2,2}x_3 - y_{3,2}x_2, y_{3,2}x_1 - y_{1,2}x_3, y_{1,2}x_2 - y_{2,2}x_1\big) \\ &= [x, y_a] + [x, y_b], \forall y_a, y_b, x \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

d. Untuk sebarang $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ dan $x, y_a \in \mathbb{R}^3$

$$[x, \alpha_2 y_a] = \big(\alpha_2 y_{2,1} x_3 - \alpha_2 y_{3,1} x_2, \alpha_2 y_{3,1} x_1 - \alpha_2 y_{1,1} x_3, \alpha_2 y_{1,1} x_2 - \alpha_2 y_{2,1} x_1\big)$$

$$= \alpha_2\big(y_{2,1} x_3 - y_{3,1} x_2, y_{3,1} x_1 - y_{1,1} x_3, y_{1,1} x_2 - y_{2,1} x_1\big)$$

$$= \alpha_2[x, y_a], \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall x, y_a \in \mathbb{R}^3$$

2. Selanjutnya akan ditunjukkan $[x, x] = 0$ untuk setiap $x \in \boldsymbol{L}$

$$[x, x] = (x_2 x_3 - x_3 x_2, x_3 x_1 - x_1 x_3, x_1 x_2 - x_2 x_1)$$

$$= (0,0,0)$$

3. Kemudian akan ditunjukkan $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$

Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ maka akan ditunjukkan

$$\big[x, [y, z]\big] = [(x_1, x_2, x_3), (y_2 z_3 - y_3 z_2, y_3 z_1 - y_1 z_3, y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \big(x_2(y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3(y_3 z_1 - y_1 z_3), x_3(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1), x_1(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_2(y_2 z_3 - y_3 z_2)\big)$$

$$= (x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3, x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1, x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2)$$

$$= (x_2 y_1 z_2 + x_3 y_1 z_3 + x_1 y_1 z_1 - x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1, x_3 y_2 z_3 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_2 z_2 - x_2 y_2 z_2 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2, x_1 y_3 z_1 + x_2 y_3 z_2 + x_3 y_3 z_3 - x_3 y_3 z_3 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3)$$

$$= (x_2 y_1 z_2 + x_3 y_1 z_3 + x_1 y_1 z_1, x_3 y_2 z_3 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_2 z_2, x_1 y_3 z_1 + x_2 y_3 z_2 + x_3 y_3 z_3) - (x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 +$$

$x_3y_3z_1, x_2y_2z_2 \ + x_3y_3z_2 + x_1y_1z_2, x_3y_3z_3 + x_1y_1z_3 +$

$x_2y_2z_3)$

$= (x_2z_2 + x_3z_3 + x_1z_1)(y_1, y_2, y_3) - (x_1y_1 + x_2y_2 +$

$x_3y_3)(z_1, z_2, z_3)$

$= (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$

dengan operator $\cdot$ merupakan hasil kali titik di $\mathbb{R}^3$

Sehingga

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z + (y \cdot x)z - (y \cdot z)x + (z \cdot y)x - (z \cdot x)y = 0$$

Contoh Pusat Aljabar Lie

Tentukan $Z(\boldsymbol{L})$ dimana $\boldsymbol{L} = sl(2, F)$

Penyelesaian

Berdasarkan definisi mengenai pusat

$$Z(\boldsymbol{L}) = \{x \in sl(2, F) | [x, z] = 0, \forall z \in sl(2, F)\}$$

Misalkan $x \in sl(2, F)$ dan $z \in sl(2, F)$

Misalkan

$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix}$

maka $[x, z] = 0$

$xz - zx = 0$

$xz = zx$

Kemudian

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} au + bw & av - bu \\ cu - aw & cv + au \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ua + cv & ub - av \\ wa - cu & wb + au \end{bmatrix}$$

diperoleh

$bw = cv$, $2av = 2bu$

$2cu = 2aw$, $cv = wb$

Jika $char\ F = 2$, maka $bw = cv$ memenuhi persamaan berikut

$b = c = 0$, untuk sebarang w, v

Sehingga $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ dimana $a \in F$

Jadi diperoleh $Z(\boldsymbol{L}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, a \in F \right\}$

Jika $char \neq 2$ maka $bw = cv, cu = aw, av = bu$

sehingga $a = b = c = 0$, untuk sebarang u, v, w

Jadi diperoleh $Z(\boldsymbol{L}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Contoh Ideal pada Aljabar Lie

Tunjukkan bahwa $sl(n, F)$ adalah ideal dari $gl(n, F)$

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $sl(n, F)$ adalah ideal dari $gl(n, F)$

Misalkan $x \in gl(n, F)$ dan $z \in sl(n, F)$

maka

$$\begin{aligned} tr[x, z] &= tr(xz - zx) \\ &= tr(xz) - tr(zx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga $[x, z] \in sl(n, F)$.

4.4 Kajian Aljabar Lie dalam Perspektif Islam

Dalam ruang semesta ini, terdapat kompenen yang terdiri dari vektor dan skalar yang, yang bersama-sama membentuk suatu ruang vektor yang disimbolkan

$\boldsymbol{V}$ berdasarkan suatu lapangan ($field$) yang disimbolkan F. Vektor dan skalar dalam ruang vektor ini akan menghasilkan kombinasi linear. Dari kombinasi linear tersebut, dapat ditentukan apakah vektor-vektor itu bebas linear atau bergantung linear. Jika himpunan vektor yang bebas linear ditambahkan dengan satu vektor tambahan menjadi bergantung linear, maka himpunan tersebut dianggap sebagai basis dari ruang vektor $\boldsymbol{V}$ berdasarkan lapangan F. Jumlah vektor yang membangun suatu basis disebut dimensi.

Misalkan V_1 merupakan ruang vektor dengan dimensi satu ($dim(V_1) = 1$) atas lapangan F, maka $\boldsymbol{V_1}$ hanya terdiri dari satu vektor yang berfungsi sebagai vektor basis disimbolkan $\{v_1\}$. Misalkan $\boldsymbol{V_2}$ merupakan ruang vektor berdimensi dua atas lapangan F yang mencakup $\boldsymbol{V_1}$, dengan $\{v_1,\ v_2\}$ sebagai basis $\boldsymbol{V_2}$. Ini berarti ruang vektor berdimensi satu dapat terkandung dalam ruang vektor berdimensi dua. Begitupula untuk ruang vektor berdimensi tiga, misalkan $\boldsymbol{V_3}$ merupakan ruang vektor berdimensi tiga atas lapangan F yang mencakup $\boldsymbol{V_2}$ dengan $\{v_1,\ v_2, v_3\}$ sebagai basis $\boldsymbol{V_3}$. Dengan demikian, $\boldsymbol{V_2}$ dapat dianggap sebagai subruang dari $\boldsymbol{V_3}$, yang berarti $\boldsymbol{V_2}$ terkandung dalam $\boldsymbol{V_3}$, dan $\boldsymbol{V_1}$ juga termasuk dalam $\boldsymbol{V_3}$. Sehingga untuk ruang vektor berdimensi n yaitu $\boldsymbol{V_n}$ atas lapangan F maka $\boldsymbol{V_{n-1}}$ termuat di dalam $\boldsymbol{V_n}$. Dan $\boldsymbol{V_n}$ termuat di dalam $\boldsymbol{V_{n+1}}$. Sehingga diperoleh $\boldsymbol{V_1} \subseteq \boldsymbol{V_2} \subseteq \boldsymbol{V_3} \subseteq \ldots \subseteq \boldsymbol{V_{n-1}} \subseteq \boldsymbol{V_n} \subseteq \boldsymbol{V_{n+1}} \subseteq \ldots$

Diberikan definisi $d(\boldsymbol{V_i}, \boldsymbol{V_j})$ adalah jarak $\boldsymbol{V_i}$ dan $\boldsymbol{V_j}$, $i \leq j$. Misalkan pada ruang vektor berdimensi satu atas lapangan F adalah V_1, karena $\boldsymbol{V_1} \subseteq \boldsymbol{V_2}$ maka $d(\boldsymbol{V_1}, \boldsymbol{V_2}) = 0$. Demikian pula $\boldsymbol{V_2} \subseteq \boldsymbol{V_3}$ maka $d(\boldsymbol{V_2}, \boldsymbol{V_3}) = 0$, dan untuk $\boldsymbol{V_{n-1}} \subseteq \boldsymbol{V_n}$ maka $d(\boldsymbol{V_{n-1}},\ \boldsymbol{V_n}) = 0$, dan untuk $\boldsymbol{V_n} \subseteq \boldsymbol{V_{n+1}}$ maka $d(\boldsymbol{V_n}, \boldsymbol{V_{n+1}}) = 0$. Sehingga untuk setiap ruang vektor $\boldsymbol{V_i}$ dan $\boldsymbol{V_j}$ atas lapangan F dengan $i \leq j$ dan

$\boldsymbol{V_i} \subseteq \boldsymbol{V_j}$ berlaku $d(\boldsymbol{V_i}, \boldsymbol{V_j}) = 0$. Sehingga jika suatu ruang vektor berdimensi i terkandung di dalam ruang vektor berdimensi j, artinya jarak antara $\boldsymbol{V_i}$ dan $\boldsymbol{V_j}$ adalah nol.

Allah SWT mengisi dan menguasai suatu ruang vektor dengan dimensi yang Maha Besar karena keagungan dan kebesaran Allah SWT melampaui segala sesuatu yang terdapat dalam ciptaan Allah SWT. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa Allah SWT mengisi dan menguasai suatu suatu ruang vektor yang Maha Besar, di mana seluruh ruang vektor yang ada di ruang semesta ini terdapat dalam ruang vektor yang Maha Besar tersebut. Dengan demikian, setiap ruang vektor dari ciptaan Allah SWT, berapa pun dimensi besarnya, pasti akan selalu terkandung dalam ruang vektor yang Maha Besar milik Allah SWT. Dengan demikian, jarak antara ciptaan Allah SWT, yang merupakan bagian dari suatu ruang vektor, dengan Allah SWT adalah nol. Ini sejalan dengan ayat dalam Al Qur’an yang menyatakan bahwa Allah SWT itu dekat, yang terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 186 (Kementrian Agama, 1971)

وَاِذَا سَاَلَكَ عِبَادِيْ عَنِّيْ فَاِنِّيْ قَرِيْبٌ ۗ اُجِيْبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ اِذَا دَعَانِۙ فَلْيَسْتَجِيْبُوْا لِيْ وَلْيُؤْمِنُوْا بِيْ
لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُوْنَ

Artinya: *“Apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu (Nabi Muhammad) tentang Aku, sesungguhnya Aku dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila dia berdoa kepada-Ku. Maka, hendaklah mereka memenuhi (perintah)-Ku dan beriman kepada-Ku agar mereka selalu berada dalam kebenaran”*

Dari surat Al-Baqarah ayat 186 ini Allah SWT menyatakan bahwa Dia dekat kepada setiap hamba-hamba-Nya sehingga dapat dikatakan jarak antara ciptaan Allah SWT dengan Allah SWT sama dengan nol. Dan setiap ciptaan Allah SWT yang terdapat di ruang semesta ini pasti akan selalu terkandung dalam Maha ruang vektor Allah SWT.

Abu Musa al-Asy'ari diriwayatkan oleh Imam Ahmad, yang menceritakan bahwa saat kami bersama Rasulullah SAW dalam sebuah peperangan, kami selalu mengumandangkan takbir setiap kali mendaki tanjakan, menaiki bukit, atau menuruni lembah. Setelah itu, Rasulullah SAW menghampiri kami dan berkata, "Wahai sekalian manusia, sayangilah diri kalian, sesungguhnya kalian tidak berdo'a kepada Dzat yang tuli dan jauh. Tetapi kalian berdo'a kepada Rabb yang Maha mendengar lagi Maha melihat. Sesungguhnya yang kalian seru itu lebih dekat kepada seorang di antara kalian dari pada leher binatang tunggangannya" (Al-Sheikh, 2003). Dari riwayat tersebut, kita juga dapat mengetahui bahwa Allah SWT dekat dengan setiap hamba-Nya. Kita tidak berdo'a kepada Dzat yang tuli dan jauh, melainkan kepada Dzat yang Maha mendengar Maha melihat.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari penjelasan pada bab IV maka dapat disimpulkan bahwa aljabar Lie dapat dikatakan komutatif jika memenuhi $[x, y] = 0$ dan pusat pada aljabar Lie akan sama dengan aljabar Lie jika aljabar Lie tersebut abelian. Dalam aljabar Lie juga terdapat subaljabar Lie dan ideal pada aljabar Lie dimana jika I merupakan ideal di $\boldsymbol{L}$ maka I adalah subaljabar dari $\boldsymbol{L}$. Misalkan terdapat ideal pada aljabar Lie maka irisan dari kedua ideal tersebut merupakan ideal pada aljabar Lie, begitu pula pada penjumlahan ideal pada aljabar Lie yang juga merupakan ideal di $\boldsymbol{L}$. Kemudian pada pemetaan homomorfisma pada aljabar Lie menghasilkan kernel dari φ adalah ideal dari $\boldsymbol{L_1}$, dan image dari φ adalah subaljabar Lie dari $\boldsymbol{L_2}$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, pembahasan tepatnya memfokuskan untuk sifat kekomutatifan pada aljabar Lie dan sifat-sifat ideal dari aljabar Lie. Maka untuk penelitian selanjutnya dapat membahas mengenai aplikasi pada aljabar Lie.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Sheikh, A. bin M. bin A. bin I. (2003). *Lubaabut Tafsiir Min Ibni Katsiir* (M. Y. Harun, Y. A. Q. Jawas, F. Okbah, T. S. Alkatsiri, F. G. Anuz, & F. Dloifur (eds.); Jilid 5). Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Arifin, F. (2012). *K-Aljabar pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dwi, S., Meitia, D. W. I., & Bakar, N. N. (2019). *Sifat-Sifat Aljabar Lie*. *VIII*(2), 135–140.

Erdmann, K., & Wildon, M. J. (2006). *Introduction to Lie Algebras*. Springer.

Fraleigh, J. B. (2003). *A First Course In Abstract Algebra* (pp. 1–520).

Gozali, S. M. (2010). *Aljabar linear*. Universitas Pendidikan Indonesia. https://www.researchgate.net/publication/361844628

Halim Mahmud, A., Richard Persulessy, E., & M Patty, H. W. (2013). *Komutator dan Identitas Komutator*. *7*(1), 29–30.

Husaini. (2020). Pendidikan Islam Dalam Perspektif Wahyu Pertama (Surah Al-Alaq Ayat 1-5). *Jurnal Ilmiah Pendidikan Agama Islam*, *10*(1), 1–11.

Imani, P. (2012). Introduction to Lie algebras. *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, 1–7.

Kementrian Agama, S. A. (1971). Al-Qur'an dan Terjemahnya. In *Komplek Percetakan Al Qur'anul Karim Kepunyaan Raja Fahd* (p. 1281). https://d1.islamhouse.com/data/id/ih_books/single/id_Translation_of_the_meaning_of_the_holy_quran_in_indonesian.pdf

Lolang, E. (2013). Aljabar abstrak. In *Teori Grup*. UKI Toraja Press.

Manik, N. I. (2011). *Perancangan Piranti Lunak Pengujian Struktur ALJABAR GRUP KHUSUS (Abelian, Siklik & Homomorfisma)*. *semnasIF*, 19–28.

Manik, N. I., & Tasman, D. (2014). Piranti Lunak Pengujian Struktur Matematika Grup, Ring, Field Berbasis Osp (Open Source Program). *ComTech: Computer, Mathematics and Engineering Applications*, *5*(1), 373. https://doi.org/10.21512/comtech.v5i1.2631

Maskhuroh, L., A'yun, K., & Lestari, Z. (2020). Tafsir Surat Al-Alaq Ayat Satu Sampai Lima. *Ilmuna*, *2*(2), 197–218.

Melfianora. (2019). Penulisan Karya Tulis Ilmiah dengan Studi Literatur. *Open*

Science Framework, 1–3.

Nugroho, D., Budhiati Veronica, R., & Mashuri. (2017). Struktur Dan Sifat-Sifat K-Aljabar. *Unnes Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 82–91.

Rasiman, Rubowo, M. R., & Pramasdyahsari, A. S. (2018). Teori Ring. In *Maret*. http://eprints.upgris.ac.id/637/1/Buku Teori Ring.pdf

Rosjanuardi, R. (2014). *Aljabar* (1st ed.). Universitas Terbuka.

Ruhama, M. A. H. (2012). Sifat-Sifat Pemetaan Bilenear. *Delta-Pi: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *01*(01), 1–9.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup & Teori Ring*. https://www.researchgate.net/publication/301202791_DASAR-DASAR_ALAJABAR_MODERN_TEORI_GRUP_DAN_TEORI_RING

Supriyadi. (2016). Community of Practitioners: Solusi Alternatif Berbagi Pengetahuan antar Pustakawan. *Lentera Pustaka: Jurnal Kajian Ilmu Perpustakaan, Informasi Dan Kearsipan*, *2*(2), 83.

Syafnuri, R. A., Netriwati, & Pratiwi, D. D. (2018). Aljabar Linear Model Knisley Transformasi Linear. *Modul Transformasi Linier Dengan Model Pembelajaran Knisley, Desember*.

Syarifuddin, Mikrayanti, & Muslim. (2016). *Aljabar Linear* (M. Z. Aminy & Sudarsono (eds.)). Lembaga Penelitian dan Pendidikan (LPP) Mandala.

Talley, A. R. (2007). An Introduction to Lie Groups. In *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory* (Vol. 10, Issue 03). https://doi.org/10.4236/alamt.2020.103004

Utama, G. A. Y. T., Kusumastuti, N., & Fran, F. (2021). *Representasi Adjoin pada Aljabar Lie*. *10*(4).

Winter. (2024). Lie Groups and Lie Algebras. *Unitary Symmetry and Elementary Particles, Winter*, 1–111.

RIWAYAT HIDUP

Dera Cahyani lahir di Kota Bogor, Provinsi Jawa Barat pada tanggal 08 Januari 2001. Lahir dari pasangan Dede Supriyadi dan Yayah Juariah dan merupakan anak bungsu dari satu bersaudara yakni Dewita Pratiwi. Dan beralamatkan di Jalan Sumber Taman No. 8A Kabupaten Malang.

Pada tahun 2007 penulis masuk Sekolah Dasar Negeri Cibeureum 01 Kota Bogor kemudian pindah pada kelas 2 SD ke Sekolah Dasar Negeri Kalirejo 02 Lawang dan lulus pada tahun 2013. Kemudian melanjutkan sekolah tingkat pertama pada tahun yang sama di SMPN 1 Lawang dan lulus tiga tahun kemudian pada tahun 2016. Selanjutnya masuk pada sekolah menengah akhir di SMAN 1 Lawang dan lulus pada tahun 2019. Dan ditahun yang sama terdaftar sebagai Mahasiswa di program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dera Cahyani
NIM : 19610084
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Kekomutatifan pada Aljabar Lie dan Sifat-Sifat Ideal dari Aljabar Lie
Pembimbing I : Intan Nisfulaila, M. Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	11 Januari 2023	Konsultasi Bab I	1.
2.	10 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	16 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I	3.
4.	21 Maret 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab I	4.
5.	30 Maret 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	5.
6.	3 April 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	5 April 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	7.
8.	10 April 2023	Konsultasi Revisi Bab I, II, dan III	8.
9.	13 April 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	9.
10.	13 April 2023	ACC Seminar Proposal	10.
11.	22 Mei 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11.
12.	11 Juni 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	5 Oktober 2023	Konsultasi Bab IV	13.
14.	7 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	14.
15.	11 Maret 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	24 April 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	22 April 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	17.
18.	29 April 2024	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	18.
19.	2 Mei 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama Bab IV	19.
20.	2 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	20.
21.	10 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	21.
22.	14 Juni 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama	22.
23.	20 Juni 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama	23.
24.	20 Juni 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	24.
25.	20 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	25.
26.	10 Desember 2024	ACC Keseluruhan	26.

Malang, 10 Desember 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005