

**DESKRIPSI METODE BEDA HINGGA UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN FITZHUGH-NAGUMO**

SKRIPSI

Oleh:
PANGESTUTI PRIMA DARAJAT
NIM. 09610074



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**DESKRIPSI METODE BEDA HINGGA UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN FITZHUGH-NAGUMO**

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
PANGESTUTI PRIMA DARAJAT
NIM. 09610074

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**DESKRIPSI METODE BEDA HINGGA UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN FITZHUGH-NAGUMO**

SKRIPSI

Oleh:
PANGESTUTI PRIMA DARAJAT
NIM. 09610074

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 10 Januari 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP.19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**DESKRIPSI METODE BEDA HINGGA UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN FITZHUGH-NAGUMO**

SKRIPSI

Oleh:
PANGESTUTI PRIMA DARAJAT
NIM. 09610074

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2013

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001 _____

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003 _____

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004 _____

Anggota Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP.19710420 200003 1 003 _____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Pangestuti Prima Darajat

NIM : 09610074

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Januari 2013
Yang membuat pernyataan,

Pangestuti Prima Darajat
NIM. 09610074

MOTTO

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ ۖ وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ ۖ

(QS. Al-Zalzalah)

~ *Just do the best for now and Allah will arrange everything in the future* ~

Persembahan



Karya ini penulis persembahkan kepada :

Ibu Siti Karomah & Bapak Sukur

M.Walid Assidiqi & M.Wildan Ahlul Firdaus

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan ridho-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana malik ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul “Deskripsi Metode Beda Hingga untuk Menyelesaikan Persamaan Fitzhugh-Nagumo” dengan baik. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad, keluarga, dan para sahabat beliau. Semoga penulis dapat meneladani beliau dalam berakhlaq.

Ucapan terimakasih penulis haturkan pada berbagai pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Dengan iringan syukur penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd dan H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu yang dapat dijadikan bekal di masa depan.
6. Kedua orang tua penulis Bapak Sukur dan Ibu Siti Karomah, yang mengajarkan optimisme, kerja keras, sabar, dan tawakkal dalam mencapai kesuksesan. Berkat do'a, kebaikan, dan ridho mereka pula Alloh memberi berbagai kemudahan pada penulis.
7. Adik-adik penulis M.Walid Assidiqi dan M.Wildan Ahlul Firdaus yang memberi motivasi penulis untuk menjadi teladan.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009, khususnya Wahyu Pradana yang menemani penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi *Amin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
ABSTRAK..	xvi
ABSTRACT.....	xvii
ملخص.....	xviii
BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
BAB II : KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial FitzHugh-Nagumo	8
2.2 Kajian Teoritik Neuron.....	12
2.3 Analisa Teoritik Persamaan FitzHugh-Nagumo	13
2.4 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan FitzHugh-Nagumo.....	15
2.5 Kestabilan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit	20
2.6 Ganjaran Bagi Orang yang Bertaqwa	22
BAB III : PEMBAHASAN	
3.1 Skema Beda Hingga Eksplisit pada Persamaan FitzHugh-Nagumo.....	24
3.2 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Persamaan FitzHugh-Nagumo...	27
3.3 Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo	31
3.4 Analisis Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo.....	46
3.5 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo.....	51
3.6 Petunjuk dan Kemudahan bagi Orang yang Bertaqwa	53

BAB IV : PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	56
4.2 Saran	56
DAFTAR PUSTAKA.....	57
LAMPIRAN.....	59



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.2.1 Bagian-bagian <i>Neuron</i>	13
Gambar 2.4.1 Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga	16
Gambar 2.4.2 Jaringan Titik Hitungan (<i>grid</i>) pada bidang $x - t$	16
Gambar 2.4.3 Skema Eksplisit.....	19
Gambar 3.1.1 Jaringan Titik Hitung skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo	26
Gambar 3.3.2 Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$	37
Gambar 3.3.3 Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.1$	42
Gambar 3.3.4 Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$ dan kondisi awal $f(x) = e^{Ax}$	45
Gambar 3.4.1 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik x terhadap v untuk $A = 0.03$	47
Gambar 3.4.2 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik t terhadap v untuk $A = 0.03$	47
Gambar 3.4.3 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik x terhadap v untuk $A = 0.1$	48
Gambar 3.4.4 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik t terhadap v untuk $A = 0.1$	48

DAFTAR TABEL

Tabel 3.4.1 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik untuk $A = 0.03$	47
Tabel 3.4.2 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik untuk $A = 0.1$	48
Tabel 3.4.3 Galat Skema Beda Hingga untuk Persamaan 3.3.1.....	49
Tabel 3.4.4 Galat Skema Beda Hingga untuk Persamaan 3.3.3.....	50
Tabel 3.4.5 Galat Maksimal untuk Nilai Awal yang Berbeda.....	50

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 3.3.1 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$	59
Lampiran 3.3.2 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.1$	60
Lampiran 3.3.3 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$ dan kondisi awal $f(x) = e^{Ax}$	61
Lampiran 3.4.1 Program untuk Membandingkan Penyelesaian Analitik dan Numerik serta Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.03$	62
Lampiran 3.4.2 Program untuk Membandingkan Penyelesaian Analitik dan Numerik serta Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Fitzhugh-Nagumo untuk $A = 0.1$	63
Lampiran 3.4.3 Program Matlab untuk Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan Fitzhugh-Nagumo untuk $A = 0.03$ dan Kondisi Awal $f(x) = e^{Ax}$	64
Lampiran 3.4.4 Program Matlab untuk Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.03$ dan Kondisi Awal $f(x) = 1/(1 + \exp(x/\sqrt{2A}))$	65

ABSTRAK

Darajat, Pangestuti Prima. 2013. **Deskripsi Metode Beda Hingga untuk Menyelesaikan Persamaan Fitzhugh-Nagumo**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Kata kunci: Metode Beda Hingga, Skema Eksplisit, Analisis Kestabilan, Persamaan FitzHugh-Nagumo

Metode beda hingga merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Persamaan FitzHugh-Nagumo merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan jalannya impuls saraf pada akson. Digunakan Metode beda hingga skema eksplisit beda maju untuk waktu dan beda pusat untuk ruang untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo. Dideskripsikan bahwa dengan metode ini diperoleh penyelesaian yang stabil dan mendekati solusi analitik. Pada skema eksplisit disyaratkan bahwa bilangan Courant (λ) harus memenuhi interval $0 < \lambda \leq 1/2$ sehingga didapatkan solusi numerik yang stabil pada interval x tertentu. Berdasarkan solusi numerik didapatkan beda potensial yang mengalir dalam implus saraf pada akson adalah sebesar satu atau mendekati satu.

ABSTRACT

Darajat, Pangestuti Prima. 2013. **Description Of Finite Difference Method for Solving Fitzhugh-Nagumo Equation**. Theses. Mathematics Programme. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Finite difference method is one of the numerical method for solving partially differential equation. The FitzHugh-Nagumo equation is partially differential equation that describe neuronal impulse nerve axon. Explicit scheme Finite difference method forward different for time and center different for space is used to solved FitzHugh-Nagumo equation. This method described stable solution and converges to the analytical solution. Courant number (λ) must in the interval $0 < \lambda \leq 1/2$, then we obtained stable numerical solution on the current interval x . Numerical solution show that voltage along axon is one approximately to one.

Keywords : Finite difference, Explicit Scheme, Stabillity Analipsis, FitzHugh-Nagumo Equation

ملخص

درجات، فنيستوت بريما. ٢٠١٣. وصف طرق مختلفة لحل المعادلات حفل فترهغ-ناجوم. البحث العلم. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج المشرف: (١) أري كوسومستوتي السرجان الماجستير (٢) الحج وحيو هينكي إراوان الماجستير

كلمات البحث: طرق مختلفة ، ومخطط صريح، تحليل الاستقرار، حفل فترهغ-ناجوم المعادلة

طريقة الفروق المحدودة هي طريقة العددية التي يمكن أن تستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. حفل فترهغ-ناجوم المعادلة تفاضلية جزئية تصف مسار النبض العصبي في محور عصبي . استخدام طرق الفروق المحددة صريحة مخطط وضعت لفترات مختلفة من الوقت والفضاء لاستكمال مركز لحفل فترهغ-ناجوم المعادلة. ووصف القرار التي تم الحصول عليها مع هذا الأسلوب هو مستقر وعلى مقربة من حلول التحليلية. في مخطط صريح يلزم أن عدد كورانت (λ) يجب تلبية الفاصل الزمني $0 < \lambda \leq 1/2$ إلى الحصول على الحل العددي مستقرة في فترة معينة x . على أساس حل العددية التي تم الحصول عليها المحتملة تدفق دفعة الفرق في محور عصبي الأعصاب هو واحد أو أعلى مقربة من أحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan bagian matematika yang memainkan peran penting dalam sains modern khususnya pada bidang fisika, biologi, geometri, dan analisis. Persamaan diferensial parsial dapat memodelkan objek yang merupakan fakta-fakta sains yang dipengaruhi lebih dari satu variabel bebas (Debnath, 2012). Persamaan diferensial parsial memuat fungsi dari dua atau lebih variabel bebas dan turunan parsial dari fungsi tersebut (Evans, 1997).

Allah berfirman dalam surat al-Anfal ayat 29 sebagai berikut:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِن تَتَّقُوا اللَّهَ تَجْعَلْ لَكُمْ فُرْقَانًا وَيُكَفِّرَ عَنْكُمْ سَيِّئَاتِكُمْ وَيَغْفِرَ لَكُمْ
وَاللَّهُ ذُو الْفَضْلِ الْعَظِيمِ ﴿٢٩﴾

Artinya : “Hai orang-orang beriman, jika kamu bertakwa kepada Allah, Kami akan memberikan kepadamu Furqaan, dan Kami akan jauhkan dirimu dari kesalahan-kesalahanmu, dan mengampuni (dosa-dosa)mu, dan Allah mempunyai karunia yang besar” (Qs. al-Anfal/8: 29).

Furqaan diartikan sebagai petunjuk sehingga dapat membedakan antara yang benar dan yang salah, dapat juga diartikan sebagai pertolongan. Perintah bertakwa ditujukan kepada orang yang beriman. Orang yang bertakwa yaitu seseorang yang memelihara diri dari kemurkaan Allah dengan melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi apa saja yang dilarang (Farid, 2008). Menurut penulis ayat tersebut diinterpretasi bahwa orang-orang yang beriman (mukmin) dengan ketakwaannya dipandang sebagai suatu model atau persamaan yang

digambarkan dengan tujuan mengukur nilai ketakwaan mukmin kepada Allah S.W.T. Berdasarkan ketakwaan tersebut mukmin memperoleh karunia yaitu petunjuk, perlindungan dari dosa, dan pengampunan.

Pada sistem saraf, salah satu aplikasi persamaan diferensial parsial adalah dalam memodelkan aktifitas *neuron*. *Neuron* merupakan unit fungsional utama sistem saraf yang bertugas menghantarkan impuls saraf. Komponen utama yang menjalankan aktivitas *neuron* adalah ion-ion natrium dan kalium. Ion-ion tersebut masuk dan keluar sel melalui membran sel dan menyebabkan beda potensial, sehingga impuls saraf dapat dihantarkan ke *neuron-neuron* lain (Feriyawati, 2006).

Pemodelan tentang aktivitas neuron dikemukakan oleh Richard FitzHugh dan Nagumo. Model FitzHugh-Nagumo merupakan penyederhanan dari model sebelumnya yang dikemukakan oleh Hodgkin dan Huxley (Soliman, 2012). Model FitzHugh-Nagumo merupakan representasi dari rangsangan dan pemulihan beda potensial pada sel saraf. Mula-mula sistem persamaan FitzHugh-Nagumo berbentuk persamaan diferensial biasa. Bertujuan untuk menggambarkan model gelombang yang berjalan sepanjang medium akson, persamaan difusi digabungkan dengan sistem persamaan Fitzhugh-Nagumo tersebut, maka terbentuklah suatu model sistem persamaan difusi FitzHugh-Nagumo. Griffiths dan William (2010) mengenakan asumsi bahwa pengaruh external dan variabel pemulihan diabaikan sehingga sistem persamaan FitzHugh Nagumo menjadi sebuah persamaan sebagai berikut :

$$v_t(x, t) = Av_{xx} + v(v - 1)(\mu - v)$$

Model tersebut merupakan persamaan diferensial parsial quasilinear orde dua. Dengan $v(x, t)$ didefinisikan sebagai beda potensial rangsangan, A merupakan difusifitas listrik pada akson, dan μ ambang batas rangsangan (Griffiths dan William, 2010).

Seiring berkembangnya penggunaan persamaan diferensial parsial untuk memodelkan suatu masalah sains, maka banyak berkembang metode-metode numerik untuk menyelesaikannya. Metode tersebut antara lain metode beda hingga, metode elemen hingga, *Adomian decomposition method*, *variational iteration method*, dan lain sebagainya.

Soliman (2012) menunjukkan simulasi numerik sistem persamaan FitzHugh-Nagumo. Simulasi tersebut melibatkan dua metode yaitu *variational iteration method*, dan *adomian decomposition method*, hasilnya *variational iteration method* lebih akurat dibandingkan metode lain. Namun, dibutuhkan pemahaman yang mendalam tentang kalkulus variasi untuk mengimplementasikan *variational iteration method* pada persamaan FitzHugh-Nagumo (Soliman, 2012).

Metode beda hingga merupakan salah satu alat dasar penyelesaian numerik suatu persamaan diferensial parsial (Bojovic, 2009). Secara umum proses penyelesaian metode ini adalah dengan mentransformasi persamaan diferensial parsial ke bentuk beda hingga menggunakan deret Taylor, selanjutnya dilakukan iterasi dengan kondisi awal dan kondisi batas sesuai dengan skema yang dipilih untuk memperoleh solusi numeriknya.

Lifeng Xi, Zhongdi Cen, dan Jingfeng Chen pada tahun 2008 mengaplikasikan metode beda hingga pada persamaan diferensial parsial tipe

backward parabolic, yang disebut persamaan Black-Scholes. Metode numerik tersebut menggabungkan metode Crank-Nicolson dan skema beda hingga hibrida (*hybrid finite difference scheme*). Hasilnya metode tersebut stabil dan konvergen pada waktu dan variabel spasial. Mutholiah tahun 2008 telah mengimplementasikan metode beda hingga untuk persamaan diferensial parsial linear menggunakan skema implisit dan Crank-Nicholson. Hasilnya skema implisit lebih mudah daripada metode beda hingga skema Crank-Nicholson (Mutholiah, 2008).

Metode beda hingga sebagai alat dasar untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial diharapkan dapat diimpletasikan pada persamaan FitzHugh-Nagumo secara sederhana namun diperoleh hasil yang stabil. Dengan mendeskripsikan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo didapatkan pemahaman secara utuh tentang metode beda hingga, juga didapatkan interpretasi tentang aktifitas *neuron* dalam menjalankan fungsi utama sistem saraf yaitu menghantarkan impuls saraf.

Sehubungan dengan alasan-alasan yang telah dijelaskan di atas maka dalam penelitian diangkat judul “Deskripsi Metode Beda Hingga untuk Menyelesaikan Persamaan FitzHugh-Nagumo”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah deskripsi metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah penelitian ini sebagai berikut:

1. Digunakan metode beda hingga skema eksplisit.
2. Persamaan yang diselesaikan adalah persamaan difusi FitzHugh-Nagumo dengan asumsi bahwa variabel pemulihan dan pengaruh eksternal diabaikan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat antara lain:

1. Memahami konsep metode beda hingga sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
2. Mendapatkan analisis penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo.
3. Mendapatkan interpretasi terhadap penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo pada aktifitas *neuron*.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Implementasi skema beda hingga eksplisit yang telah dibentuk dengan deret Taylor pada persamaan FitzHugh-Nagumo.

2. Analisis kestabilan skema eksplisit persamaan FitzHugh-Nagumo.
3. Penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo dengan kondisi awal, kondisi batas, serta parameter-parameter yang ditentukan.
4. Analisis penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo.
5. Interpretasi hasil penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari beberapa sub bab yang dirinci sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi persamaan diferensial parsial FitzHugh-Nagumo, kajian teoritik neuron, analisis teoritik persamaan FitzHugh-Nagumo, Metode beda hingga skema eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo, Kestabilan metode beda hingga skema eksplisit, dan Ganjaran bagi orang yang bertakwa.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini memaparkan kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial FitzHugh-Nagumo

Persamaan diferensial parsial (PDP) untuk fungsi $u(x, y, \dots)$ adalah relasi antara u dan turunan parsialnya yaitu $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$, atau dapat ditulis sebagai

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.1.1)$$

Dengan F adalah fungsi, x, y, \dots adalah variabel bebas, dan u adalah variabel terikat (Debnath, 2012). Dengan kata lain, persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat fungsi dari dua atau lebih variabel bebas dan turunan parsial dari fungsi tersebut (Evans, 1997).

Misalkan u adalah fungsi dua peubah x dan y . Turunan parsial u terhadap x di (x_0, y_0) dan ditulis sebagai $u_x(x_0, y_0)$ adalah

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2.1.2)$$

Demikian pula turunan parsial u terhadap y di (x_0, y_0) dan ditulis sebagai $u_y(x_0, y_0)$ adalah (purcell, 1987)

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2.1.3)$$

Orde dari persamaan diferensial parsial adalah orde tertinggi dari turunan parsial yang muncul pada persamaan tersebut (Debnath, 2012). Persamaan diferensial selanjutnya diklasifikasikan menjadi linier, kuasilinier, dan nonlinier.

Berikut merupakan persamaan diferensial parsial orde dua (Zauderer, 1998).

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \quad (2.1.4)$$

Menurut sasongko maka dapat dinyatakan kondisi-kondisi sebagai berikut :

1. Apabila koefisien A, B, C, D, F, G pada persamaan (2.1.4) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien A, B, C, D, F, G pada persamaan (2.1.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(u)$) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya ($\partial u/\partial x, \partial u/\partial t$), maka persamaan tersebut disebut kuasilinier.
3. Apabila koefisien A, B, C, D, F, G merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya ($\partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial t^2, \partial^2 u/\partial x \partial t$), maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier.

Sebagai contoh persamaan difusi berikut (Griffiths dan William, 2010) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1.5)$$

Misalkan $A = 0.08$ yang merupakan konstanta, maka persamaan (2.1.5) berbentuk

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.08 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1.5a)$$

sehingga persamaan (2.1.5a) merupakan persamaan diferensial parsial linier. Jika $A = f(v) = v(x, t) - 1$ yang merupakan fungsi dari variabel tak bebas, maka persamaan (2.1.5) berbentuk

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (v(x, t) - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1.5b)$$

sehingga persamaan (2.1.5b) merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear. Jika $A = \partial^2 v / \partial t^2$ yang merupakan turunan dengan pangkat sama dengan orde persamaan diferensialnya, maka persamaan (2.1.5) berbentuk

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.1.5c)$$

sehingga persamaan (2.1.5c) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Berikut merupakan bentuk persamaan diferensial parsial orde kedua dengan dua variabel bebas, selanjutnya diklasifikasikan dalam tiga bentuk yaitu eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Bentuk umum pada persamaan diferensial parsial orde kedua adalah

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g = 0 \quad (2.1.6)$$

dengan a, b, c, d, e, f dan g merupakan fungsi dari variabel x, t , dan u . Tiga bentuk tersebut didapatkan berdasarkan kriteria sebagai berikut (Sasongko, 2010):

- (i). Bentuk eliptik jika $b^2 - ac < 0$
- (ii). Bentuk parabolik jika $b^2 - ac = 0$
- (iii). Bentuk hiperbolik jika $b^2 - ac > 0$

Selanjutnya meninjau persamaan FitzHugh-Nagumo sebagai berikut :

$$v_t(x, t) = Av_{xx}(x, t) + v(x, t)(v(x, t) - 1)(\mu - v(x, t)) \quad (2.1.7)$$

$v_t(x, t)$ merupakan turunan parsial fungsi $v(x, t)$ pada t , sedangkan $v_{xx}(x, t)$ merupakan turunan parsial kedua fungsi $v(x, t)$ terhadap x . Persamaan (2.1.7) dapat ditulis sebagai

$$F(x, t, v, v_{xx}, v_t) = 0 \quad (2.1.8)$$

Sehingga persamaan FitzHugh-Nagumo tersebut merupakan persamaan diferensial parsial dari dua variabel bebas yaitu x dan t .

Turunan parsial berorde tertinggi yang dimuat dalam persamaan FitzHugh-Nagumo adalah $v_{xx}(x, t)$ yang berorde dua, sehingga persamaan (2.1.7) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua.

Meninjau kembali persamaan (2.1.7), Jika didefinisikan A merupakan konstanta. Bagian $v(x, t)(v(x, t) - 1)(\mu - v(x, t))$ merupakan fungsi dari variabel tak bebas $f(v)$, bagian ini membuat persamaan (2.1.7) terkategoriikan sebagai persamaan kuasilinear.

Berdasarkan persamaan (2.1.6) maka diperoleh koefisien untuk persamaan FitzHugh-Nagumo adalah $a = A$, $b = 0$, $c = 0$ sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial parabolik karena diskriminannya memenuhi

$$b^2 - ac = 0^2 - A0 = 0$$

Solusi persamaan FitzHugh-Nagumo adalah fungsi $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan (2.1.7). Solusi tersebut merupakan solusi umum, sehingga diperlukan substitusi kondisi batas dan kondisi awal agar didapatkan solusi khusus. Mengingat bahwa persamaan diferensial parsial merupakan model dari fenomena fisik dalam

suatu domain terbatas D , maka variabel terikat u dirumuskan pada batas dari domain D , kondisi tersebut merupakan kondisi batas (Majid, 2009). Kondisi batas yang digunakan pada persamaan FitzHugh-Nagumo adalah *Dirichlet Boundary Conditions*. Untuk interval $0 \leq t \leq 60$ dan $-60 \leq x \leq 20$. Nilai batas $v(-60, t) = 0$, dan $v(20, t) = 0$ untuk semua t . Sedangkan kondisi awal yang digunakan untuk persamaan FitzHugh-Nagumo adalah $f(x)$ yang dirumuskan sebagai berikut :

$$v(x, 0) = f(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x}{\sqrt{2A}}\right]} \quad (2.1.9)$$

Kondisi awal lain mungkin digunakan untuk persamaan FitzHugh-Nagumo asalkan sesuai dengan persamaan FitzHugh-Nagumo. Menurut Griffiths dan William (2010) solusi analitik persamaan FitzHugh-Nagumo (2.1.7) adalah

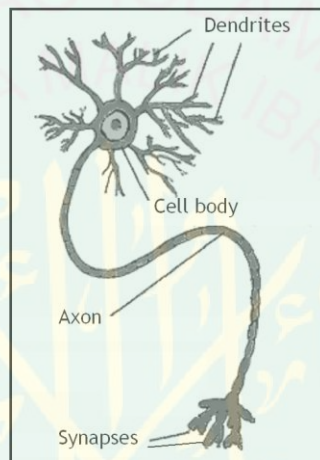
$$v(x, t) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x}{\sqrt{2A}} + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)t\right]} \quad (2.1.10)$$

Persamaan (2.1.10) tersebut akan digunakan untuk mengevaluasi solusi numerik yang diperoleh pada bab 3 (Griffiths dan William, 2010).

2.2 Kajian Teoritik Neuron

Sistem saraf merupakan sistem koordinasi atau sistem kontrol yang bertugas menerima rangsangan, menghantarkan rangsangan, sekaligus memberikan tanggapan terhadap rangsangan tersebut. Sistem saraf terdiri dari sel saraf (*neuron*) yang berfungsi untuk menghantarkan impuls saraf. Beberapa bagian dari *neuron* adalah dendrit, badan sel, akson dan synapsis. Bagian-bagian tersebut

dapat dilihat pada Gambar 2.2.1 Dendrit berfungsi menerima impuls saraf dan menghantarkannya menuju badan sel. Bagian memanjang yang menghantarkan impuls saraf keluar dari badan sel disebut akson, sedangkan bagian celah antara dua *neuron* yang berfungsi menghantarkan impuls saraf ke *neuron* lain disebut sinaps (Kimball, 1994).



Gambar 2.2.1 Bagian-bagian *Neuron*

Sistem persamaan FitzHugh-Nagumo merupakan representasi proses berjalannya impuls tersebut namun terbatas pada sel saraf bagian akson. Sistem tersebut terdiri dari dua persamaan, pertama merepresentasikan besar beda potensial pada saat adanya rangsangan, kedua merepresentasikan pemulihan beda potensial yang terjadi setelah impuls dijalankan ke *neuron* lain.

2.3 Analisa Teoritik Persamaan FitzHugh-Nagumo

Pemodelan matematika tentang konduksi impuls saraf pada akson dirintis oleh Alan Lloyd Hodgkin dan Andrew Fielding Huxley. Richard FitzHugh dan Nagumo membuat suatu model dengan cara menyederhanakan sistem empat variabel model Hodgkin-Huxley tersebut menjadi sistem dua variabel sehingga

lebih mudah untuk dianalisa. Sifat model ini mirip dengan model Hodgkin-Huxley secara kualitatif (Subiyanto, 2012). Berikut merupakan sistem persamaan FitzHugh-Nagumo:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v(v - 1)(\mu - v) - r \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \varepsilon(v - \gamma r)$$

μ menyatakan ambang rangsangan, ε menyatakan koefisien rangsangan, dan γ adalah parameter model (Griffiths dan William, 2010).

Bertujuan untuk menggambarkan model gelombang yang berjalan sepanjang medium akson, persamaan difusi digabungkan dengan persamaan FitzHugh-Nagumo (Griffiths dan William, 2010). Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan kesetimbangan dimana perpindahan molekul tetap terjadi walaupun tidak ada perbedaan konsentrasi (Anonim, 2012). Persamaan reaksi difusi adalah sebagai berikut (Zauderer, 1998):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.3.3)$$

dengan A merupakan koefisien difusi.

Berikut merupakan sistem persamaan Fitzhugh-Nagumo, persamaan difusi telah disubstitusikan kedalam sistem persamaan diferensial parsial (2.3.3) dan juga mencakup eksternal stimulus I .

$$v_t(x, t) = Av_{xx} + v(v - 1)(\mu - v) - r + I \quad (2.3.4)$$

$$r_t(x, t) = \varepsilon(v - \gamma r)$$

Stimulus I menunjukkan adanya arus eksternal tertentu pada akson dan A merupakan difusivitas listrik dari akson. Persamaan tersebut menggambarkan dinamika beda potensial yang melintasi sel saraf. Sistem persamaan Fitzhugh-Nagumo kemudian diklasifikasikan sebagai persamaan reaksi difusi dan disebut persamaan difusi Fitzhugh-Nagumo, namun pada umumnya tetap digunakan sebutan sistem persamaan FitzHugh-Nagumo.

Pada persamaan (2.3.4) dikenakan asumsi bahwa $\varepsilon \rightarrow 0$ maka $r_t(x, t) = 0$, juga mengabaikan pengaruh external (I), maka sistem persamaan FitzHugh Nagumo menjadi sebuah persamaan pada 2.1.4 sebagai berikut :

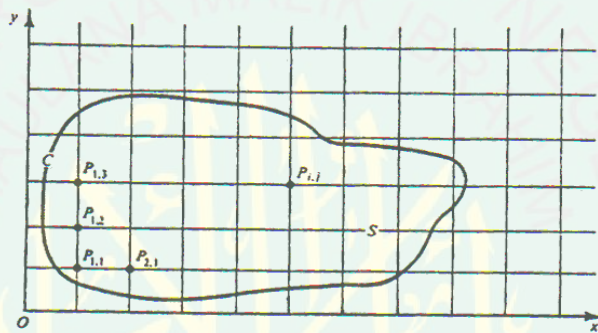
$$v_t(x, t) = Av_{xx}(x, t) + v(x, t)(v(x, t) - 1)(\mu - v(x, t))$$

dengan $A > 0$ dan $0 \leq \mu \leq 1$. Beberapa nilai A yang disarankan untuk analisis adalah 0.1 dan 0.03 dapat diinterpretasikan bahwa difusivitas listrik pada akson adalah sebesar 0.1 atau 0.03. Sedangkan $\mu = 0.139$ yang dapat diinterpretasikan bahwa ambang rangsangan pada akson adalah sebesar 0.139 (Griffiths dan William, 2010).

2.4 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan FitzHugh-Nagumo

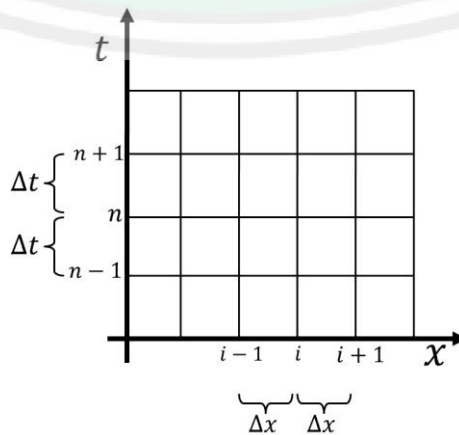
Metode beda hingga mendefinisikan suatu wilayah variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dengan suatu *grid* terbatas untuk mendekati variabel terikat (Causon dan Migham, 2010). Sebagai contoh penyelesaian persamaan

ellips pada daerah S yang dibatasi oleh kurve C seperti tampak pada Gambar 2.4.1 daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antara pias adalah Δx dan Δy . Kondisi di mana variabel terikat u harus memenuhi di sekeliling kurve C disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan nilai u pada titik-titik hitungan $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}$ (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.4.1. Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Bada Hingga

Meninjau persamaan Fitzhugh-Nagumo pada (2.1.4) memuat variabel bebas x dan t , skema beda hingga dibentuk dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang $x - t$ (Gambar 2.4.2) yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang (Δx) dan waktu (Δt).



Gambar 2.4.2. Jaringan titik hitungan (*grid*) pada bidang $x - t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v yang terdiri dari dua variabel bebas x dan t . Berikut merupakan deret Taylor (Causon dan Migham, 2010) :

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} v^{(n-1)}(x_0, t) + O(\Delta x^n) \quad (2.4.1)$$

dengan $O(\Delta x^n)$ merupakan galat. Memotong persamaan (2.4.1) sampai turunan pertama diperoleh

$$v(x_i + \Delta x, t_n) = v(x_i, t_n) + \Delta x v_x(x_i, t_n) + O(\Delta x^2) \quad (2.4.2)$$

Sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} \quad (2.4.3)$$

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan (2.4.3) menjadi

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_{i+1}, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad (2.4.4)$$

Apabila notasi $u(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai u_i^n , maka berikut merupakan skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi u pada x .

$$v_x(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} \quad (2.4.5)$$

Persamaan (2.4.4) disebut beda maju untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v pada t dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan

(2.4.1) dengan $v(x, t_0 + \Delta t)$, sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda maju untuk t .

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \quad (2.4.6)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga untuk turunan kedua fungsi u terhadap x dengan menggunakan deret Taylor orde 4 berikut

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \quad (2.4.7)$$

$$+ \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4)$$

$$v(x_0 - \Delta x, t) = v(x_0, t) - \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \quad (2.4.8)$$

$$- \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4)$$

Menjumlahkan persamaan (2.4.7) dan (2.4.8) maka diperoleh

$$v(x_0 + \Delta x, t) + v(x_0 - \Delta x, t) = 2v(x_0, t) + \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) + O(\Delta x^4) \quad (2.4.9)$$

$$v_{i+1}^n + v_{i-1}^n = 2v_i^n + \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4) \quad (2.4.10)$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (2.4.11)$$

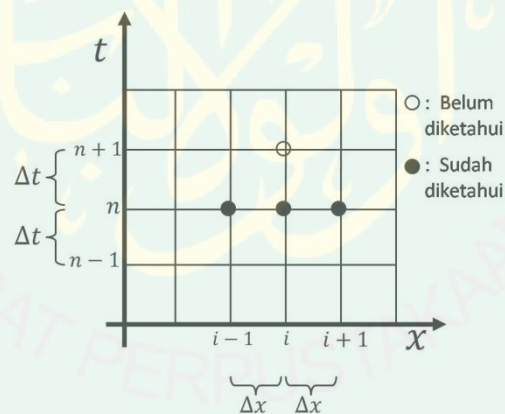
$$v_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.4.12)$$

Persamaan (2.4.12) merupakan beda pusat untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial kedua fungsi u pada t , dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.4.7) dan (2.4.8) dengan $v(x, t_0 + \Delta t)$ dan $v(x, t_0 - \Delta t)$. Sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda simetrik untuk t .

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.4.13)$$

Penyelesaian persamaan tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik disekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu yang besar (Triadmodjo, 2002).

Berikut merupakan langkah iterasi pada skema eksplisit :



Gambar 2.4.3. Skema Eksplisit

Adapun algoritma penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo dengan metode beda hingga skema eksplisit adalah sebagai berikut :

1. Ditentukan skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo.
2. Ditentukan parameter-parameter, Δt , Δx , serta batas daerah yang akan diselesaikan.

3. Ditentukan bilangan Courant.
4. Substitusi parameter-parameter, Δt , Δx , serta bilangan Courant pada skema beda hingga eksplisit persamaan FitzHugh-Nagumo.
5. Dilakukan iterasi untuk kondisi batas.
6. Dilakukan iterasi untuk kondisi awal
7. Dilakukan iterasi menggunakan skema beda hingga eksplisit untuk memperoleh nilai v_i^n pada setiap nilai x dari waktu ke waktu.

2.5 Kestabilan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan FitzHugh-Nagumo

Skema beda hingga disebut konvergen jika solusinya beda hingga mendekati solusi analik dan disebut stabil apabila solusi beda hingga tidak terlalu sensitif dengan adanya perubahan kecil (Flaherty dkk, 1989). Bertujuan agar skema beda hingga eksplisit stabil maka nilai mutlak kondisi Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) yang dilambangkan dengan λ harus memenuhi

$$|\lambda| \leq 1. \quad (2.5.1)$$

Sebagai contoh berikut merupakan skema beda hingga eksplisit untuk persamaan difusi pada (2.3.3)

$$v_j^{n+1} = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n) + v_j^n \quad (2.5.2)$$

maka bilangan Courant untuk persamaan tersebut didefinisikan sebagai

$$|\lambda| = \left| \frac{A\Delta t}{\Delta x^2} \right| \quad (2.5.3)$$

Analisis deret Fourier untuk mendapatkan bilangan Courant dilakukan dengan mentranformasi bentuk beda hingga dengan menggunakan deret Fourier diskrit. Misalkan solusi beda hingga periodik di j dengan periode J , solusi tersebut dapat dituliskan dalam deret Fourier kompleks diskrit sebagai berikut (Flaherty dkk, 1989):

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k, \quad j = 0, 1, \dots, J-1 \quad (2.5.4)$$

dimana

$$w_j = e^{2\pi i j / J} \quad (2.5.5)$$

Pada bentuk ini U_j^n merupakan aproksimasi dari solusi analitik yang periodik di x dengan periode 2π dengan $\Delta x = 2\pi/J$. Deret Fourier diskrit tersebut memenuhi relasi ortogonal

$$\sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = \begin{cases} J, & \text{jika } k \equiv l \pmod{J} \\ 0, & \text{untuk } k \text{ dan } l \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Jika diberikan solusi U_j^n dapat ditentukan koefisien Fourier A_k^n dengan menginverskan deret Fourier diskrit menggunakan relasi ortogonal sebagai berikut,

$$\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} = \sum_{j=0}^{J-1} w_j^{-l} \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad (2.5.7)$$

$$\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n \sum_{j=0}^{J-1} w_j^k w_j^{-l} = J A_l^n$$

dengan

$$A_l^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n w_j^{-l} \quad (2.5.8)$$

bentuk invers inilah yang disebut transformasi diskrit Fourier.

2.6 Ganjaran Bagi Orang yang Bertakwa

Orang yang bertakwa yaitu seseorang yang memelihara diri dari kemurkaan Allah dan siksa-Nya dengan melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi apa saja yang dilarang (Farid, 2008). Perintah untuk bertakwa ditujukan kepada orang yang beriman sebagaimana firman Alloh SWT dalam surat al-Hasyr ayat 18 sebagai berikut :

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ وَاتَّقُوا اللَّهَ إِنَّ اللَّهَ خَبِيرٌ بِمَا تَعْمَلُونَ ﴿١٨﴾

Artinya : “Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah Setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat), dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”(Qs. al-Hasyr/59: 18).

Balasan bagi orang yang bertakwa dijelaskan dalam Al-Quran antara lain dalam firman Alloh surat an-Naba’ ayat 31 berikut,

إِنَّ لِلْمُتَّقِينَ مَفَازًا ﴿٣١﴾

Artinya : “Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa mendapat kemenangan (Qs. an-Naba’/78: 31).

Kemenangan yang dimaksudkan adalah kejayaan, keselamatan, serta dijauhkan dari siksa api neraka. Manusia merupakan makhluk Allah yang tidak luput dari dosa, namun manusia yang bertakwa akan dihapuskan kesalahannya sehingga didapatinya surga. Sebaliknya bagi manusia yang zalim Allah mengganjarnya dengan siksa neraka. Hal tersebut sebagaimana dijelaskan pada firman Allah dalam surat Maryam ayat 71-72 sebagai berikut :

وَإِنْ مِنْكُمْ إِلَّا وَارِدُهَا كَانَ عَلَى رَبِّكَ حَتْمًا مَقْضِيًّا ﴿٧١﴾ ثُمَّ نُنَجِّي الَّذِينَ اتَّقَوْا وَنَذَرُ
الظَّالِمِينَ فِيهَا جَثِيًّا ﴿٧٢﴾

Artinya : “dan tidak ada seorangpun dari padamu, melainkan mendatangi neraka itu, hal itu bagi Tuhanmu adalah suatu kemestian yang sudah ditetapkan. Kemudian Kami akan menyelamatkan orang-orang yang bertakwa dan membiarkan orang-orang yang zalim di dalam neraka dalam keadaan berlutut” (Qs. Maryam/19: 71-72).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Skema Beda Hingga Eksplisit pada Persamaan FitzHugh-Nagumo

Berikut merupakan persamaan FitzHugh-Nagumo pada persamaan 2.1.7 :

$$v_t(x, t) = Av_{xx} + v(x, t)(v(x, t) - 1)(\mu - v(x, t))$$

Didefinisikan bahwa

$$v(x_i, t_n) = v_i^n$$

Transformasi beda maju untuk turunan waktu dan beda pusat untuk turunan kedua ruang sebagai berikut :

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Bentuk beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan 2.1.7 maka diperoleh

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = A \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} + v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n) \quad (3.1.1)$$

Penyederhanan persamaan 3.1.1 sehingga

$$\frac{v_i^{n+1}}{\Delta t} = A \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_i^n}{\Delta t} + v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n)$$

$$v_i^{n+1} = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + v_i^n + \Delta t v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n)$$

$$v_i^{n+1} = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i+1}^n + \left(1 - 2A \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) v_i^n + A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i-1}^n + \Delta t v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n) \quad (3.1.2)$$

Didefinisikan

$$\lambda = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

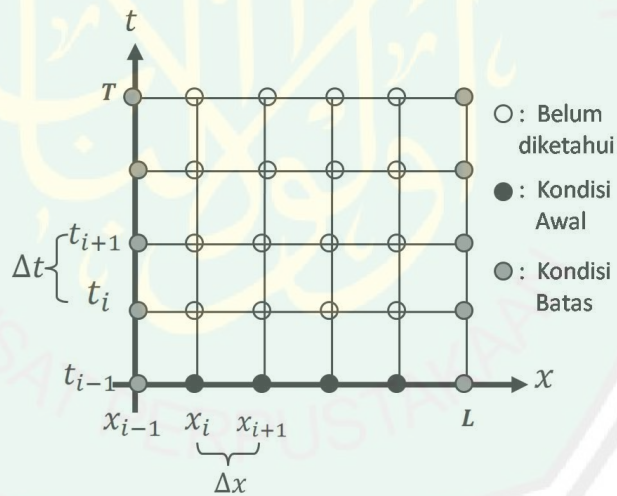
sehingga persamaan 3.1.2 dapat dituliskan sebagai,

$$v_i^{n+1} = \lambda v_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)v_i^n + \lambda v_{i-1}^n + \Delta t v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n) \quad (3.1.3)$$

Jika iterasi n dimulai dari $n - 1$ maka digunakan bentuk berikut :

$$v_i^n = \lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_i^{n-1} + \lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t v_i^{n-1} (v_i^{n-1} - 1)(\mu - v_i^{n-1}) \quad (3.1.4)$$

Stensil skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo pada daerah $x_0 < x < L$ dan $t_0 < t < T$ dengan $n = 1$ dan $i = 1$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.1.1 Jaringan titik hitung skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo

Didefinisikan $l = L/\Delta x$ sehingga banyak titik *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = T/\Delta t$ sehingga banyak titik *grid* untuk t adalah $k + 1$. Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Kondisi batas adalah $v(x_0, t) = 0$ dan $v(L, t) = 0$ sehingga,

$$v_0^n = v_l^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal. Digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$v(x, 0) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{\sqrt{2A}}\right]}$$

Kondisi awal pada waktu ke- n dan jarak ke- i dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_i^n = f(x_i) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{\sqrt{2A}}\right]}, \forall n = 0 \forall i = 0, 1, 2, \dots, l$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan 3.1.4 sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.1.1. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut :

untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$v_i^n = \lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_i^{n-1} + \lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t v_i^{n-1} (v_i^{n-1} - 1)(\mu - v_i^{n-1})$$

$$v_{i+1}^n = \lambda v_{i+2}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_{i+1}^{n-1} + \lambda v_i^{n-1} + \Delta t v_{i+1}^{n-1} (v_{i+1}^{n-1} - 1)(\mu - v_{i+1}^{n-1})$$

$$v_{i+2}^n = \lambda v_{i+3}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_{i+2}^{n-1} + \lambda v_{i+1}^{n-1} + \Delta t v_{i+2}^{n-1} (v_{i+2}^{n-1} - 1)(\mu - v_{i+2}^{n-1})$$

⋮

$$v_{i-1}^n = \lambda v_i^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_{i-1}^{n-1} + \lambda v_{i-2}^{n-1} + \Delta t v_{i-1}^{n-1} (v_{i-1}^{n-1} - 1)(\mu - v_{i-1}^{n-1})$$

untuk $i = 1$ dan $n + 1 = 2$

$$v_i^{n+1} = \lambda v_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)v_i^n + \lambda v_{i-1}^n + \Delta t v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n)$$

$$v_{i+1}^{n+1} = \lambda v_{i+2}^n + (1 - 2\lambda)v_{i+1}^n + \lambda v_i^n + \Delta t v_{i+1}^n (v_{i+1}^n - 1)(\mu - v_{i+1}^n)$$

$$v_{i+2}^{n+1} = \lambda v_{i+3}^n + (1 - 2\lambda)v_{i+2}^n + \lambda v_{i+1}^n + \Delta t v_{i+2}^n (v_{i+2}^n - 1)(\mu - v_{i+2}^n)$$

⋮

$$v_{i-1}^{n+1} = \lambda v_i^n + (1 - 2\lambda)v_{i-1}^n + \lambda v_{i-2}^n + \Delta t v_{i-1}^n (v_{i-1}^n - 1)(\mu - v_{i-1}^n)$$

untuk $i = 1$ dan $n + 2 = 3$

$$v_i^{n+2} = \lambda v_{i+1}^{n+1} + (1 - 2\lambda)v_i^{n+1} + \lambda v_{i-1}^{n+1} + \Delta t v_i^{n+1}(v_i^{n+1} - 1)(\mu - v_i^{n+1})$$

$$v_{i+1}^{n+2} = \lambda v_{i+2}^{n+1} + (1 - 2\lambda)v_{i+1}^{n+1} + \lambda v_i^{n+1} + \Delta t v_{i+1}^{n+1}(v_{i+1}^{n+1} - 1)(\mu - v_{i+1}^{n+1})$$

$$v_{i+2}^{n+2} = \lambda v_{i+3}^{n+1} + (1 - 2\lambda)v_{i+2}^{n+1} + \lambda v_{i+1}^{n+1} + \Delta t v_{i+2}^{n+1}(v_{i+2}^{n+1} - 1)(\mu - v_{i+2}^{n+1})$$

⋮

$$v_{l-1}^{n+2} = \lambda v_l^{n+1} + (1 - 2\lambda)v_{l-1}^{n+1} + \lambda v_{l-2}^{n+1} + \Delta t v_{l-1}^{n+1}(v_{l-1}^{n+1} - 1)(\mu - v_{l-1}^{n+1})$$

untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$v_i^k = \lambda v_{i+1}^{k-1} + (1 - 2\lambda)v_i^{k-1} + \lambda v_{i-1}^{k-1} + \Delta t v_i^{k-1}(v_i^{k-1} - 1)(\mu - v_i^{k-1})$$

$$v_{i+1}^k = \lambda v_{i+2}^{k-1} + (1 - 2\lambda)v_{i+1}^{k-1} + \lambda v_i^{k-1} + \Delta t v_{i+1}^{k-1}(v_{i+1}^{k-1} - 1)(\mu - v_{i+1}^{k-1})$$

$$v_{i+2}^k = \lambda v_{i+3}^{k-1} + (1 - 2\lambda)v_{i+2}^{k-1} + \lambda v_{i+1}^{k-1} + \Delta t v_{i+2}^{k-1}(v_{i+2}^{k-1} - 1)(\mu - v_{i+2}^{k-1})$$

⋮

$$v_{l-1}^k = \lambda v_l^{k-1} + (1 - 2\lambda)v_{l-1}^{k-1} + \lambda v_{l-2}^{k-1} + \Delta t v_{l-1}^{k-1}(v_{l-1}^{k-1} - 1)(\mu - v_{l-1}^{k-1})$$

skema beda hingga eksplisit dapat dituliskan dalam bentuk matriks $(l + 1) \times (k +$

1) yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} v_{i-1}^{n-1} & v_i^{n-1} & v_{i+1}^{n-1} & \dots & v_{l-1}^{n-1} & v_l^{n-1} \\ v_{i-1}^n & v_i^n & v_{i+1}^n & \vdots & v_{l-1}^n & v_l^n \\ v_{i-1}^{n+1} & v_i^{n+1} & v_{i+1}^{n+1} & \dots & v_{l-1}^{n+1} & v_l^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ v_{i-1}^k & v_i^k & v_{i+1}^k & \dots & v_{l-1}^k & v_l^k \end{bmatrix}, i = 1, \text{ dan } n = 1$$

3.2 Analisis Kestabilan Skema Eksplisit Persamaan FitzHugh-Nagumo

Skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo pada

(3.1.3) dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$v_j^{n+1} = \lambda v_{j+1}^n + (1 - 2\lambda)v_j^n + \lambda v_{j-1}^n + \Delta t v_j^n (v_j^n - 1)(\mu - v_j^n) \quad (3.2.1)$$

dengan

$$\lambda = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

merupakan bilangan Courant untuk persamaan FitzHugh-Nagumo. Didefinisikan

$$\Delta t v_j^n (v_j^n - 1)(\mu - v_j^n) = K$$

Sehingga persamaan (3.2.1) menjadi bentuk berikut,

$$v_j^{n+1} = \lambda v_{j+1}^n + (1 - 2\lambda)v_j^n + \lambda v_{j-1}^n + K \quad (3.2.2)$$

diasumsikan bahwa $\Delta t \rightarrow 0$ sehingga berlaku

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t v_i^n (v_i^n - 1)(\mu - v_i^n) = 0 \text{ atau } K = 0$$

Persamaan (3.2.2) menjadi persamaan berikut :

$$v_j^{n+1} = \lambda v_{j+1}^n + (1 - 2\lambda)v_j^n + \lambda v_{j-1}^n \quad (3.2.3)$$

Substitusi deret Fourier diskrit pada persamaan (2.5.4) pada persamaan (3.2.3)

diperoleh,

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} [\lambda A_k^n w_{j+1}^k + (1 - 2\lambda) A_k^n w_j^k + \lambda A_k^n w_{j-1}^k] \quad (3.2.4)$$

sesuai persamaan (2.5.5) maka w_{j-1} dapat diubah sebagai berikut,

$$w_{j-1} = e^{2\pi i (j-1)/J}$$

$$w_{j-1} = e^{2\pi i j / J} e^{-2\pi i / J}$$

$$w_{j-1} = w_j e^{-2\pi i / J} \quad (3.2.5)$$

sesuai persamaan (2.5.5) maka w_{j+1} dapat diubah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= e^{2\pi i(j+1)/J} \\ w_{j+1} &= e^{2\pi i j / J} e^{2\pi i / J} \\ w_{j+1} &= w_j e^{2\pi i / J} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Substitusi (3.2.5) dan (3.2.6) pada persamaan (3.2.4) maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k &= \sum_{k=0}^{J-1} \left[\lambda A_k^n w_j^k e^{\frac{2\pi i}{J}} + (1 - 2\lambda) A_k^n w_j^k + \lambda A_k^n w_j^k e^{-\frac{2\pi i}{J}} \right] \\ A_k^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} w_j^k \right) \left[\lambda e^{2\pi i / J} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{-2\pi i / J} \right] A_k^n \\ A_k^{n+1} &= \left[\lambda e^{2\pi i / J} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{-2\pi i / J} \right] A_k^n \\ A_k^{n+1} &= M_k A_k^n \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

dengan

$$M_k = \lambda e^{2\pi i / J} + (1 - 2\lambda) + \lambda e^{-2\pi i / J} \quad (3.2.8)$$

M_k merupakan faktor amplifikasi yang membuat bentuk Fourier pada (3.2.9) semakin besar atau semakin kecil pada salah satu step ke- k . Salah satu iterasi untuk persamaan (3.2.7) adalah,

$$A_k^{n+1} = (M_k)^n A_k^n \quad (3.2.10)$$

Selanjutnya akan ditentukan konstanta c sehingga,

$$\|M_k^n\| \leq c, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T$$

atau

$$P(M_k) = |M_k| \leq 1 + c\Delta t, \quad \forall \Delta t \rightarrow 0$$

Sehingga diperoleh,

$$|M_k| \leq 1$$

Selanjutnya akan disederhanakan $|M_k|$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} |M_k| &= |(1 - 2\lambda) + \lambda e^{2\pi i/J} + \lambda e^{-2\pi i/J}| \leq 1 \\ |M_k| &= |(1 - 2\lambda) + \lambda(e^{2\pi i/J} + e^{-2\pi i/J})| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Digunakan identitas Euler sebagai berikut,

$$e^{2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} + i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.2.12)$$

$$e^{-2\pi i/J} = \cos \frac{2\pi}{J} - i \sin \frac{2\pi}{J} \quad (3.2.13)$$

Substitusi persamaan (3.2.12) dan (3.2.13) pada persamaan (3.2.11) sehingga,

$$\left| (1 - 2\lambda) + 2\lambda \cos \frac{2\pi}{J} \right| \leq 1 \quad (3.2.14)$$

Karena

$$\cos \frac{2\pi}{J} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J}$$

Maka,

$$\left| (1 - 2\lambda) + 2\lambda \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{J} \right) \right| \leq 1$$

Di ambil nilai sinus maksimum yaitu,

$$\sin^2 \frac{\pi}{J} = 1$$

diperoleh ketaksamaan

$$|1 - 4\lambda| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - 4\lambda \leq 1$$

sehingga didapatkan interval untuk nilai λ sebagai berikut :

$$0 \leq 4\lambda \leq 2$$

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$$

Namun karena $\lambda = 0$ tidak mungkin digunakan pada iterasi, maka bilangan Courant untuk persamaan FitzHugh-Nagumo (3.2.1) harus memenuhi ketaksamaan berikut :

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.15)$$

3.3 Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo

Diselesaikan contoh persamaan FitzHugh-Nagumo pada daerah batas $-60 < x < 20$ dan $0 < t < 60$. Ambang rangsangan pada akson $\mu = 0.139$, dan nilai difusifitas listrik pada akson $A = 0.03$ sehingga persamaan (2.1.7) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_t(x, t) = 0.03v_{xx} + v(x, t)(v(x, t) - 1)(0.139 - v(x, t)) \quad (3.3.1)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.6$, dan $\Delta x = 0.8$ sehingga bilangan Courant adalah

$$\begin{aligned} \lambda &= A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ &= 0.03 \frac{0.6}{0.8^2} \\ &= 0.028125 < 0.5 \end{aligned}$$

Substitusi nilai λ pada skema beda hingga untuk persamaan (3.3.1) sesuai dengan persamaan (3.1.4) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} v_i^n &= \lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_i^{n-1} + \lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(\mu - v_i^{n-1}) \\ v_i^n &= 0.028125v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \cdot 0.028125)v_i^{n-1} + 0.028125v_{i-1}^{n-1} \\ &\quad + 0.6v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(0.139 - v_i^{n-1}) \end{aligned}$$

$$v_i^n = 0.028125v_{i+1}^{n-1} + 0.94375v_i^{n-1} + 0.028125v_{i-1}^{n-1} + 0.6v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(0.139 - v_i^{n-1}) \quad (3.3.2)$$

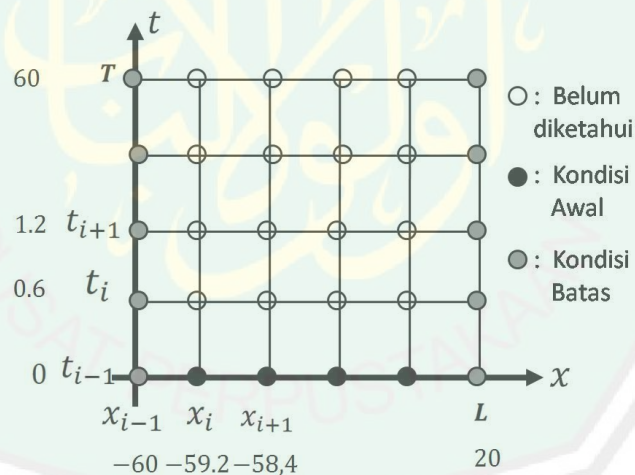
Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut :

$$l = \frac{L - x_0}{\Delta x} = \frac{20 - (-60)}{0.8} = 100$$

secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k ebagai berikut :

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{60 - 0}{0.6} = 100$$

Stensil untuk kondisi tersebut adalah sebagai berikut :



Gambar 3.3.1 Jaringan titik hitung skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan 3.3.1 sebagai berikut,

$$v(x_0, t) = v(-60, t) = 0 \text{ dan } v(L, t) = v(20, t) = 0, \forall 0 < t < 60$$

sehingga diperoleh $v_i^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100. \forall i = 0, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$v_0^0 = 0$$

$$v_0^1 = 0$$

$$v_0^2 = 0$$

⋮

$$v_0^{100} = 0$$

$$v_{100}^0 = 0$$

$$v_{100}^1 = 0$$

$$v_{100}^2 = 0$$

⋮

$$v_{100}^{100} = 0$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut,

$$v_i^n = f(x_i) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{\sqrt{2A}}\right]}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

karena $A = 0.03$ maka

$$v_i^n = f(x_i) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{0.2449}\right]}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Iterasi untuk nilai awal adalah sebagai berikut :

$$v_1^0 = f(-59.2) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-59.2}{0.2449}\right]} = 1$$

$$v_2^0 = f(-58.4) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-58.4}{0.2449}\right]} = 1$$

$$v_3^0 = f(-57.6) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-57.6}{0.2449}\right]} = 1$$

:

$$v_{99}^0 = f(19.2) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{19.2}{0.2449}\right]} = 9.086651656683376 \times 10^{-35} \approx 0$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan

3.3.4 sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.3.1

$$v_i^n = 0.028125v_{i+1}^{n-1} + 0.94375v_i^{n-1} + 0.028125v_{i-1}^{n-1} \\ + 0.6v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(0.139 - v_i^{n-1})$$

untuk $n = 1$

$$v_1^1 = 0.028125v_2^0 + 0.94375v_1^0 + 0.028125v_0^0 + 0.6v_1^0(v_1^0 - 1)(0.139 - v_1^0)$$

$$v_1^1 = 9.718749999999999 \times 10^{-1}$$

$$v_2^1 = 0.028125v_3^0 + 0.94375v_2^0 + 0.028125v_1^0 + 0.6v_2^0(v_2^0 - 1)(0.139 - v_2^0)$$

$$v_2^1 = 1$$

$$v_3^1 = 0.028125v_4^0 + 0.94375v_3^0 + 0.028125v_2^0 + 0.6v_3^0(v_3^0 - 1)(0.139 - v_3^0)$$

$$v_3^1 = 1$$

:

$$v_{99}^1 = 0.028125v_{100}^0 + 0.94375v_{99}^0 + 0.028125v_{98}^0$$

$$+ 0.6v_{99}^0(v_{99}^0 - 1)(0.139 - v_{99}^0)$$

$$v_{99}^1 \approx 0 = 1.451494671173652 \times 10^{-34}$$

untuk $n = 2$

$$v_1^2 = 0.028125v_2^1 + 0.94375v_1^1 + 0.028125v_0^1 + 0.6v_1^1(v_1^1 - 1)(0.139 - v_1^1)$$

$$v_1^2 = 9.589915065917968 \times 10^{-1}$$

$$v_2^2 = 0.028125v_3^1 + 0.94375v_2^1 + 0.028125v_1^1 + 0.6v_2^1(v_2^1 - 1)(0.139 - v_2^1)$$

$$v_2^2 = 9.992089843749999 \times 10^{-1}$$

$$v_3^2 = 0.028125v_4^1 + 0.94375v_3^1 + 0.028125v_2^1 + 0.6v_3^1(v_3^1 - 1)(0.139 - v_3^1)$$

$$v_3^2 = 1$$

⋮

$$v_{99}^2 = 0.028125v_{100}^1 + 0.94375v_{99}^1 + 0.028125v_{98}^1 \\ + 0.6v_{99}^1(v_{99}^1 - 1)(0.139 - v_{99}^1)$$

$$v_{99}^2 = 2.319325071355362 \times 10^{-34} \approx 0$$

untuk $n = 3$

$$v_1^3 = 0.028125v_2^2 + 0.94375v_1^2 + 0.028125v_0^2 + 0.6v_1^2(v_1^2 - 1)(0.139 - v_1^2)$$

$$v_1^3 = 9.524995706837152 \times 10^{-1}$$

$$v_2^3 = 0.028125v_3^2 + 0.94375v_2^2 + 0.028125v_1^2 + 0.6v_2^2(v_2^2 - 1)(0.139 - v_2^2)$$

$$v_2^3 = 9.985080554326354 \times 10^{-1}$$

$$v_3^3 = 0.028125v_4^2 + 0.94375v_3^2 + 0.028125v_2^2 + 0.6v_3^2(v_3^2 - 1)(0.139 - v_3^2)$$

$$v_3^3 = 9.999777526855469 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^3 = 0.028125v_{100}^2 + 0.94375v_{99}^2 + 0.028125v_{98}^2 \\ + 0.6v_{99}^2(v_{99}^2 - 1)(0.139 - v_{99}^2)$$

$$v_{99}^3 = 3.706638384577980 \times 10^{-34} \approx 0$$

⋮

untuk $n = 100$

$$v_1^{100} = 0.028125v_2^{99} + 0.94375v_1^{99} + 0.028125v_0^{99} \\ + 0.6v_1^{99}(v_1^{99} - 1)(0.139 - v_1^{99})$$

$$v_1^{100} = 9.450601660746346 \times 10^{-1}$$

$$v_2^{100} = 0.028125v_3^{99} + 0.94375v_2^{99} + 0.028125v_1^{99} \\ + 0.6v_2^{99}(v_2^{99} - 1)(0.139 - v_2^{99})$$

$$v_2^{100} = 9.972816876674200 \times 10^{-1}$$

$$v_3^{100} = 0.028125v_4^{99} + 0.94375v_3^{99} + 0.028125v_2^{99} \\ + 0.6v_3^{99}(v_3^{99} - 1)(0.139 - v_3^{99})$$

$$v_3^{100} = 9.998661817927104 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^{100} = 0.028125v_{100}^{99} + 0.94375v_{99}^{99} + 0.028125v_{98}^{99} \\ + 0.6v_{99}^{99}(v_{99}^{99} - 1)(0.139 - v_{99}^{99})$$

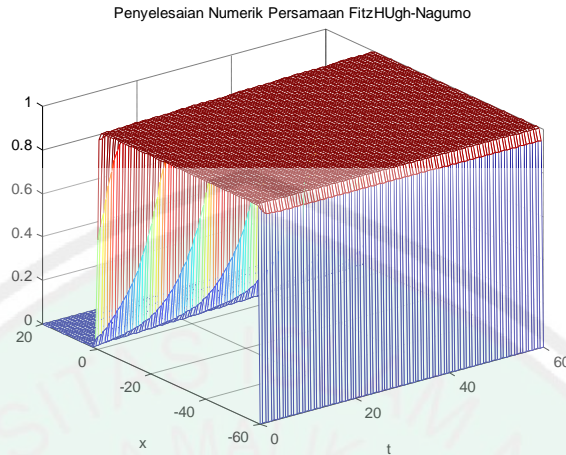
$$v_{99}^{100} = 2.159560759065296 \times 10^{-19} \approx 0$$

maka penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo 3.3.1 dapat dituliskan dalam bentuk matriks 101×101 yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & \cdots & v_{99}^0 & v_{100}^0 \\ v_0^1 & v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_{99}^1 & v_{100}^1 \\ v_0^2 & v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_{99}^2 & v_{100}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_0^{100} & v_1^{100} & v_2^{100} & \cdots & v_{99}^{100} & v_{100}^{100} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & & & & 1 & & & & & & 1 & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 9.718750000 \times 10^{-1} & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 9.589915066 \times 10^{-1} & & & & & 9.992089844 \times 10^{-1} & & & & & & 1 & & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 9.524995707 \times 10^{-1} & & & & & 9.985080554 \times 10^{-1} & & & & & & 9.999777527 \times 10^{-1} & & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 9.450601661 \times 10^{-1} & & & & & 9.972816877 \times 10^{-1} & & & & & & 9.998661818 \times 10^{-1} & & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada

Lampiran 3.3.1



Gambar 3.3.2 Penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$

Contoh kedua diambil nilai difusivitas listrik pada akson $A = 0.1$, sehingga persamaan (2.1.7) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_t(x, t) = 0.1v_{xx} + v(x, t)(v(x, t) - 1)(0.139 - v(x, t)) \quad (3.3.3)$$

sehingga bilangan Courant adalah

$$\begin{aligned} \lambda &= A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ &= 0.1 \frac{0.6}{0.8^2} \\ &= 0.09375 < 0.5 \end{aligned}$$

Skema beda hingga untuk persamaan (3.3.3) sesuai dengan persamaan (3.1.4)

adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v_i^n &= \lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)v_i^{n-1} + \lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(\mu - v_i^{n-1}) \\ v_i^n &= 0.09375v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \cdot 0.09375)v_i^{n-1} + 0.09375v_{i-1}^{n-1} \\ &\quad + 0.6v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(0.139 - v_i^{n-1}) \\ v_i^n &= 0.09375v_{i+1}^{n-1} + 0.8125v_i^{n-1} + 0.0937v_{i-1}^{n-1} \\ &\quad + 0.6v_i^{n-1}(v_i^{n-1} - 1)(0.139 - v_i^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan 3.3.3 sebagai berikut,

$v(x_0, t) = v(-60, t) = 0$ dan $v(L, t) = v(20, t) \forall 0 < t < 60$ sehingga diperoleh

$v_i^n = 0, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100. \forall i = 0, 100$ yang dapat dijabarkan sebagai

berikut :

$$v_0^0 = 0$$

$$v_0^1 = 0$$

$$v_0^2 = 0$$

:

$$v_0^{100} = 0$$

$$v_{100}^0 = 0$$

$$v_{100}^1 = 0$$

$$v_{100}^2 = 0$$

:

$$v_{100}^{100} = 0$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut,

$$v_i^n = f(x_i) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{\sqrt{2A}}\right]}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

karena $A = 0.1$ maka

$$v_i^n = f(x_i) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x}{0.4472}\right]}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Iterasi untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$v_1^0 = f(-59.2) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-59.2}{0.4472}\right]} = 1$$

$$v_2^0 = f(-58.4) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-58.4}{0.44472}\right]} = 1$$

$$v_3^0 = f(-57.6) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-57.6}{0.44472}\right]} = 1$$

⋮

$$v_{99}^0 = f(19.2) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{19.2}{0.44472}\right]} = 2.262819492757409 \times 10^{-19} \approx 0$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan

3.3.4 sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.3.1

untuk $n = 1$

$$v_1^1 = 0.09375v_2^0 + 0.8125v_1^0 + 0.09375v_0^0 + 0.6v_1^0(v_1^0 - 1)(0.139 - v_1^0)$$

$$v_1^1 = 9.0625 \times 10^{-1}$$

$$v_2^1 = 0.09375v_3^0 + 0.8125v_1^0 + 0.09375v_0^0 + 0.6v_2^0(v_2^0 - 1)(0.139 - v_2^0)$$

$$v_2^1 = 1$$

$$v_3^1 = 0.09375v_4^0 + 0.8125v_1^0 + 0.09375v_0^0 + 0.6v_3^0(v_3^0 - 1)(0.139 - v_3^0)$$

$$v_3^1 = 1$$

⋮

$$v_{99}^1 = 0.09375v_{100}^0 + 0.8125v_{99}^0 + 0.09375v_{98}^0 \\ + 0.6v_{99}^0(v_{99}^0 - 1)(0.139 - v_{99}^0)$$

$$v_{99}^1 \approx 0 = 2.918965323213293e - 019 \times 10^{-34}$$

Untuk $n = 2$

$$v_1^2 = 0.09375v_2^1 + 0.8125v_1^1 + 0.09375v_0^1 + 0.6v_1^1(v_1^1 - 1)(0.139 - v_1^1)$$

$$v_1^2 = 8.69189892578125 \times 10^{-1}$$

$$v_2^2 = 0.09375 + 0.8125v_2^1 + 0.09375v_1^1 + 0.6v_2^1(v_2^1 - 1)(0.139 - v_2^1)$$

$$v_2^2 = 9.912109375 \times 10^{-1}$$

$$v_3^2 = 0.09375v_4^1 + 0.8125v_3^1 + 0.09375v_2^1 + 0.6v_3^1(v_3^1 - 1)(0.139 - v_3^1)$$

$$v_3^2 = 1$$

⋮

$$v_{99}^2 = 0.09375v_{100}^1 + 0.8125v_{99}^1 + 0.09375v_{98}^1 + 0.6v_{99}^1(v_{99}^1 - 1)(0.139 - v_{99}^1)$$

$$v_{99}^2 \approx 0 = 3.785260680220439e - 019 \times 10^{-34}$$

untuk $n = 3$

$$v_1^3 = 0.09375v_2^2 + 0.8125v_1^2 + 0.09375v_0^2 + 0.6v_1^2(v_1^2 - 1)(0.139 - v_1^2)$$

$$v_1^3 = 8.489558520175047 \times 10^{-1}$$

$$v_2^3 = 0.09375v_3^2 + 0.8125v_2^2 + 0.09375v_1^2 + 0.6v_2^2(v_2^2 - 1)(0.139 - v_2^2)$$

$$v_2^3 = 9.850500215038657 \times 10^{-1}$$

$$v_3^3 = 0.09375v_4^2 + 0.8125v_3^2 + 0.09375v_2^2 + 0.6v_3^2(v_3^2 - 1)(0.139 - v_3^2)$$

$$v_3^3 = 9.99176025390625 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^3 = 0.09375v_{100}^2 + 0.8125v_{99}^2 + 0.09375v_{98}^2 + 0.6v_{99}^2(v_{99}^2 - 1)(0.139 - v_{99}^2)$$

$$v_{99}^3 = 4.923021487012622 - 019 \times 10^{-34} \approx 0$$

⋮

untuk $n = 100$

$$v_1^{100} = 0.09375v_2^{99} + 0.8125v_1^{99} + 0.09375v_0^{99} \\ + 0.6v_1^{99}(v_1^{99} - 1)(0.139 - v_1^{99})$$

$$v_1^{100} = 8.139270907291767 \times 10^{-1}$$

$$v_2^{100} = 0.09375v_3^{99} + 0.8125v_2^{99} + 0.09375v_1^{99} \\ + 0.6v_2^{99}(v_2^{99} - 1)(0.139 - v_2^{99})$$

$$v_2^{100} = 9.972816876674200 \times 10^{-1}$$

$$v_3^{100} = 0.09375v_4^{99} + 0.8125v_3^{99} + 0.09375v_2^{99} \\ + 0.6v_3^{99}(v_3^{99} - 1)(0.139 - v_3^{99})$$

$$v_3^{100} = 9.736617938832347 \times 10^{-1}$$

⋮

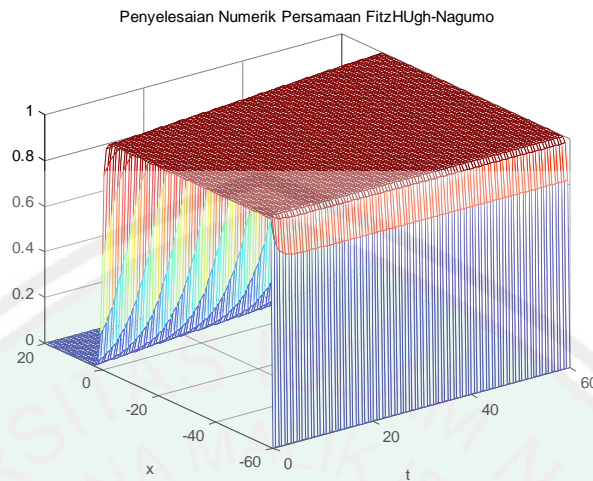
$$v_{99}^{100} = 0.09375v_{100}^{99} + 0.8125v_{99}^{99} + 0.09375v_{98}^{99} \\ + 0.6v_{99}^{99}(v_{99}^{99} - 1)(0.139 - v_{99}^{99})$$

$$v_{99}^{100} = 1.206902282899787 \times 10^{-9} \approx 0$$

Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program MATLAB pada Lampiran 3.3.2 Hasil tersebut secara sederhana dapat digambarkan pada matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & \cdots & v_{99}^0 & v_{100}^0 \\ v_0^1 & v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_{99}^1 & v_{100}^1 \\ v_0^2 & v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_{99}^2 & v_{100}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_0^{100} & v_1^{100} & v_2^{100} & \cdots & v_{99}^{100} & v_{100}^{100} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 1 & & & & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 9.0625 \times 10^{-1} & & & 1 & & & & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 8.691898925 \times 10^{-1} & 9.912109375 \times 10^{-1} & & & & & & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 8.489558520 \times 10^{-1} & 9.850500215 \times 10^{-1} & 9.991760254 \times 10^{-1} & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 8.139270907 \times 10^{-1} & 9.972816877 \times 10^{-1} & 9.736617939 \times 10^{-1} & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Gambar 3.3.3 Penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.1$.

Contoh ketiga semua kondisi sama dengan contoh satu kecuali kondisi awal.

Iterasi kondisi awal adalah sebagai berikut,

$$v_i^n = f(x_i) = e^{Ax_i}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

karena $A = 0.03$ maka

$$v_i^n = f(x_i) = e^{0.03x_i}, \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Iterasi untuk nilai awal adalah sebagai berikut :

$$v_1^0 = f(-59.2) = e^{0.03 \cdot -59.2} = 1.693140507634552 \times 10^{-1}$$

$$v_2^0 = f(-58.4) = e^{0.03 \cdot -58.4} = 1.734267428798484 \times 10^{-1}$$

$$v_3^0 = f(-57.6) = e^{0.03 \cdot -57.6} = 1.776393335951350 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^0 = f(19.2) = e^{0.03 \cdot 19.2} = 1.778908546302479$$

Setelah didapatkan nilai awal dan digunakan nilai batas yang sama dengan contoh pertama, iterasi dilakukan dengan persamaan 3.3.4 sesuai jaringan titik hitung pada Gambar 3.3.1

untuk $n = 1$

$$v_1^1 = 0.028125v_2^0 + 0.94375v_1^0 + 0.028125v_0^0 + 0.6v_1^0(v_1^0 - 1)(0.139 - v_1^0)$$

$$v_1^1 = 1.672259071466136 \times 10^{-1}$$

$$v_2^1 = 0.028125v_3^0 + 0.94375v_1^0 + 0.028125v_0^0 + 0.6v_2^0(v_2^0 - 1)(0.139 - v_2^0)$$

$$v_2^1 = 1.763905947771859 \times 10^{-1}$$

$$v_3^1 = 0.028125v_4^0 + 0.94375v_1^0 + 0.028125v_0^0 + 0.6v_3^0(v_3^0 - 1)(0.139 - v_3^0)$$

$$v_3^1 = 1.810289552798850 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^1 = 0.028125v_{100}^0 + 0.94375v_{99}^0 + 0.028125v_{98}^0 \\ + 0.6v_{99}^0(v_{99}^0 - 1)(0.139 - v_{99}^0)$$

$$v_{99}^1 = 3.643289493885280 \times 10^{-1}$$

untuk $n = 2$

$$v_1^2 = 0.028125v_2^1 + 0.94375v_1^1 + 0.028125v_0^1 + 0.6v_1^1(v_1^1 - 1)(0.139 - v_1^1)$$

$$v_1^2 = 1.847711643256630 \times 10^{-1}$$

$$v_2^2 = 0.028125v_3^1 + 0.94375v_2^1 + 0.028125v_1^1 + 0.6v_2^1(v_2^1 - 1)(0.139 - v_2^1)$$

$$v_2^2 = 1.900441792885640 \times 10^{-1}$$

$$v_3^2 = 0.028125v_4^1 + 0.94375v_3^1 + 0.028125v_2^1 + 0.6v_3^1(v_3^1 - 1)(0.139 - v_3^1)$$

$$v_3^2 = 1.954769707050003 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^2 = 0.028125v_{100}^1 + 0.94375v_{99}^1 + 0.028125v_{98}^1 \\ + 0.6v_{99}^1(v_{99}^1 - 1)(0.139 - v_{99}^1)$$

$$v_{99}^2 = 3.643289493885280 \times 10^{-1}$$

untuk $n = 3$

$$v_1^3 = 0.028125v_2^2 + 0.94375v_1^2 + 0.028125v_0^2 + 0.6v_1^2(v_1^2 - 1)(0.139 - v_1^2)$$

$$v_1^3 = 1.889085765591393 \times 10^{-1}$$

$$v_2^3 = 0.028125v_3^2 + 0.94375v_2^2 + 0.028125v_1^2 + 0.6v_2^2(v_2^2 - 1)(0.139 - v_2^2)$$

$$v_2^3 = 1.947629313525844 \times 10^{-1}$$

$$v_3^3 = 0.028125v_4^2 + 0.94375v_3^2 + 0.028125v_2^2 + 0.6v_3^2(v_3^2 - 1)(0.139 - v_3^2)$$

$$v_3^3 = 2.008107341188264 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^3 = 0.028125v_{100}^2 + 0.94375v_{99}^2 + 0.028125v_{98}^2 \\ + 0.6v_{99}^2(v_{99}^2 - 1)(0.139 - v_{99}^2)$$

$$v_{99}^3 = 3.894954873806926 \times 10^{-1}$$

⋮

untuk $n = 100$

$$v_1^{100} = 0.028125v_2^{99} + 0.94375v_1^{99} + 0.028125v_0^{99} \\ + 0.6v_1^{99}(v_1^{99} - 1)(0.139 - v_1^{99})$$

$$v_1^{100} = 9.998661817927103 \times 10^{-1}$$

$$v_2^{100} = 0.028125v_3^{99} + 0.94375v_2^{99} + 0.028125v_1^{99} \\ + 0.6v_2^{99}(v_2^{99} - 1)(0.139 - v_2^{99})$$

$$v_2^{100} = 9.999934139795692 \times 10^{-1}$$

$$v_3^{100} = 0.028125v_4^{99} + 0.94375v_3^{99} + 0.028125v_2^{99} \\ + 0.6v_3^{99}(v_3^{99} - 1)(0.139 - v_3^{99})$$

$$v_3^{100} = 4.191909779492710 \times 10^{-1}$$

⋮

$$v_{99}^{100} = 0.028125v_{100}^{99} + 0.94375v_{99}^{99} + 0.028125v_{98}^{99} \\ + 0.6v_{99}^{99}(v_{99}^{99} - 1)(0.139 - v_{99}^{99})$$

$$v_{99}^{100} = 9.450601660746345 \times 10^{-1}$$

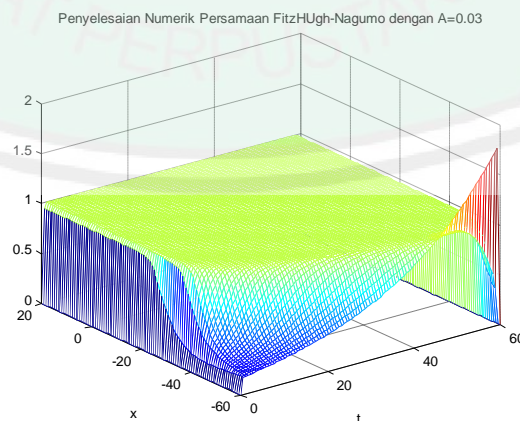
maka penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo 3.3.1 dapat dituliskan dalam bentuk matriks 101×101 yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut

:

$$\begin{bmatrix} v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & \cdots & v_{99}^0 & v_{100}^0 \\ v_0^1 & v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_{99}^1 & v_{100}^1 \\ v_0^2 & v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_{99}^2 & v_{100}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_0^{100} & v_1^{100} & v_2^{100} & \cdots & v_{99}^{100} & v_{100}^{100} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1.69314 \times 10^{-1} & 1.73426 \times 10^{-1} & 1.77639 \times 10^{-1} & \cdots & 1.77890854 & 0 \\ 0 & 1.67225 \times 10^{-1} & 1.76390 \times 10^{-1} & 1.81028 \times 10^{-1} & \cdots & 3.64328 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 1.65138 \times 10^{-1} & 1.79522 \times 10^{-1} & 1.84771 \times 10^{-1} & \cdots & 3.89495 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 1.63061 \times 10^{-1} & 1.82846 \times 10^{-1} & 1.88908 \times 10^{-1} & \cdots & 4.19190 \times 10^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 9.45060 \times 10^{-1} & 9.97281 \times 10^{-1} & 9.99866 \times 10^{-1} & \cdots & 9.45060 \times 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada

Lampiran 3.3.3



Gambar 3.3.4 Penyelesaian numerik persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$ dan kondisi awal $f(x) = e^{Ax}$.

3.4 Analisis Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo

Skema beda hingga disebut konvergen jika solusinya beda hingga mendekati solusi analik dan disebut stabil apabila solusi beda hingga tidak terlalu sensitif dengan adanya perubahan kecil (Flaherty dkk, 1989). Menurut Griffiths dan William penyelesaian analitik persamaan Fitzhugh-Nagumo (2.1.7) adalah sebagai berikut:

$$v_A(x, t) = \frac{1}{1 + \exp \left[\frac{x}{\sqrt{2A}} + \left(\mu - \frac{1}{2} \right) t \right]}$$

Sehingga penyelesaian analitik untuk persamaan (3.3.1) yaitu:

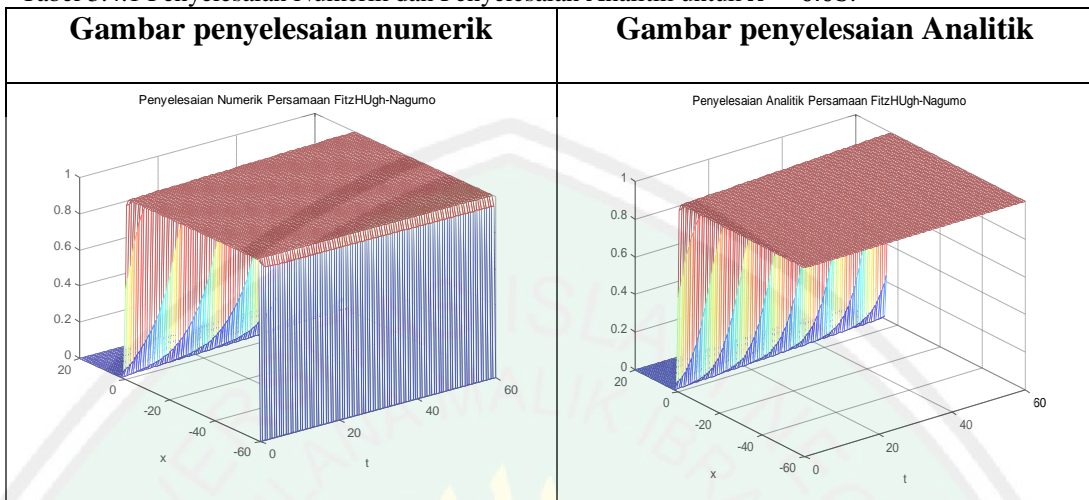
$$v_A(x, t) = \frac{1}{1 + \exp \left[\frac{x}{0.2449} - 0.361t \right]}$$

sedangkan penyelesaian analitik untuk persamaan (3.3.3) yaitu:

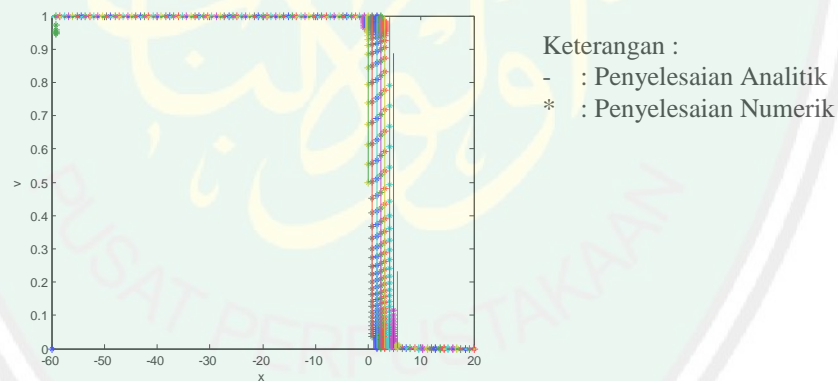
$$v_A(x, t) = \frac{1}{1 + \exp \left[\frac{x}{0.4472} - 0.361t \right]}$$

Bertujuan menunjukkan bahwa penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga eksplisit adalah benar maka akan ditunjukkan perbandingan gambar penyelesaian numerik dan analitik dengan menjalankan program pada Lampiran 3.4.1 dan Lampiran 3.4.2 dan ditunjukkan pada tabel berikut:

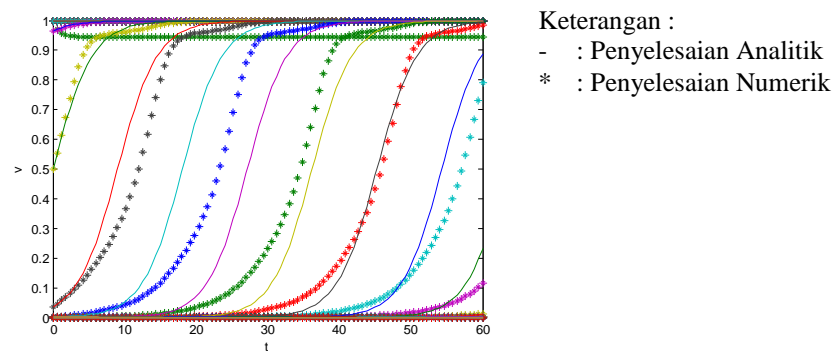
Tabel 3.4.1 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik untuk $A = 0.03$.



Untuk menunjukkan penyelesaian numerik mendekati penyelesaian analitik disajikan gambar berikut :

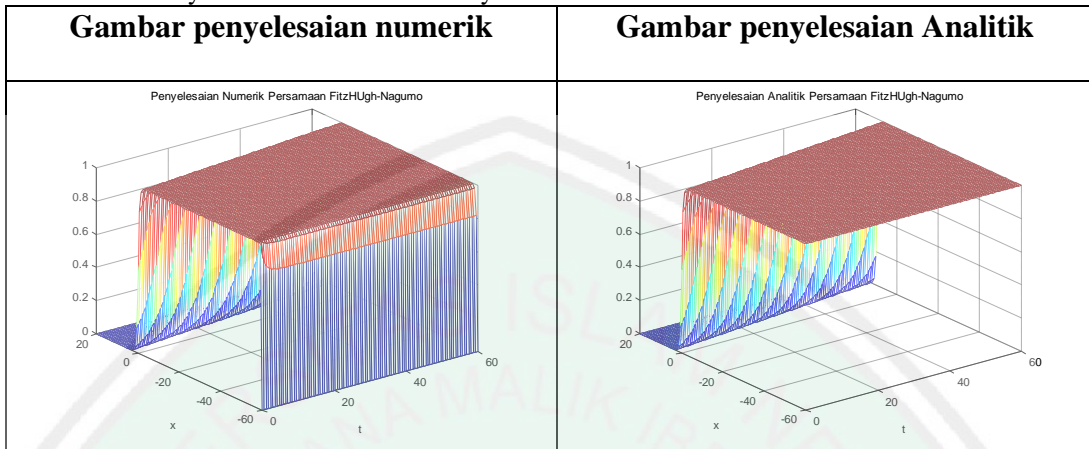


Gambar 3.4.1 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik x Terhadap v untuk $A = 0.03$.

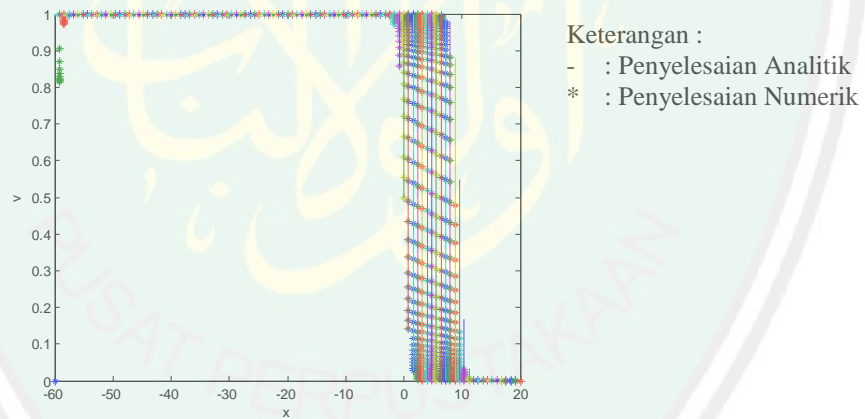


Gambar 3.4.2 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik t Terhadap v untuk $A = 0.03$

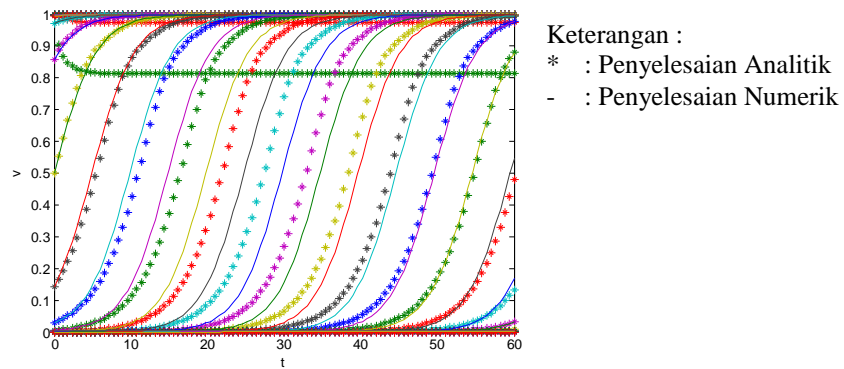
Tabel 3.4.2 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik untuk $A = 0.1$



Untuk menunjukkan penyelesaian numerik mendekati penyelesaian analitik disajikan gambar berikut :



Gambar 3.4.3 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik x Terhadap v untuk $A = 0.1$



Gambar 3.4.4 Penyelesaian Numerik dan Penyelesaian Analitik t Terhadap v untuk $A = 0.1$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa dengan memberikan parameter A berbeda penyelesaian analitik maupun numerik stabil. Selanjutnya akan ditunjukkan galat dari masing-masing contoh pada subbab 3.3. Didefinisikan galat pada waktu t_n dan pada jarak x_i sebagai berikut :

$$e(x_i, t_n) = e_i^n$$

$$e_i^n = |v_{A_i}^n - v_{N_i}^n| \quad (3.4.1)$$

$v_{A_i}^n = v$ analitik pada waktu t_n dan pada jarak x_i

$v_{N_i}^n = v$ numerik pada waktu t_n dan pada jarak x_i

Untuk contoh pertama dengan menjalankan program MATLAB pada lampiran 3.4.1 diperoleh galat dengan rincian sifat sebagai berikut :

Tabel 3.4.3 Galat Skema Beda Hingga untuk Persamaan 3.3.1

i	x_i	Sifat Galat Dari Waktu Ke Waktu
1 sd 12	-59.2 sd. -50.4	Konstan
13 sd. 62	-49.6 sd. -9.6	nol
63 sd. 73	-50.4 sd. -1.6	Semakin kecil
74 sd. 79	-0.8 sd. 3.2	Naik Turun
80 sd. 99	4 sd. 19.2	Semakin besar

Dari tabel tersebut maka dapat diambil kesimpulan bahwa solusi numerik skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo 3.3.1 konvergen pada interval $-59.2 < x < -1.6$. Sedangkan untuk contoh kedua dengan menjalankan program MATLAB pada lampiran 3.4.2 diperoleh galat dengan rincian sifat sebagai berikut:

Tabel 3.4.4 Galat Skema Beda Hingga untuk Persamaan 3.3.3

i	x_i	Sifat Galat Dari Waktu Ke Waktu
1 sd 19	-59.2 sd. -44.8	Konstan
20 sd. 53	-44 sd. -17.6	nol
54 sd. 64	-16.8 sd. -8.8	Konstan
64 sd. 74	-8 sd. -0.8	Semakin kecil
75 sd. 85	0 sd. 8	Naik Turun
79 sd. 99	8.8 sd. 19.2	Semakin besar

Dari tabel tersebut maka dapat diambil kesimpulan bahwa galat solusi numerik skema beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo 3.3.3 konvergen pada interval $-59.2 < x < -0.8$.

Selanjutnya akan dianalisis galat untuk contoh pertama dan ketiga pada subbab 3.3. Dengan menjalankan program pada Lampiran 3.4.3 dan lampiran 3.4.4 diperoleh galat sebagai berikut:

Tabel 3.4.5 Galat Maksimal untuk Nilai Awal yang Berbeda

n	Galat maksimal	
	Kondisi Awal : $f(x) = e^{Ax}$	Kondisi awal : $f(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x}{\sqrt{2A}}\right]}$
20	1.000000035725712	$2.422341588085524 \times 10^{-1}$
40	$9.99999999999857 \times 10^{-1}$	$3.272906726708433 \times 10^{-1}$
	$9.99999999999891 \times 10^{-1}$	$3.977305869539975 \times 10^{-1}$
80	$9.999999999998885 \times 10^{-1}$	$6.318467670583007 \times 10^{-1}$

Kondisi awal $f(x) = e^{Ax}$ memiliki galat yang besar, sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk kondisi awal $f(x) = e^{Ax}$ tidak sesuai dengan persamaan FitzHugh-Nagumo dan tidak dapat digunakan kondisi awal sembarang untuk persamaan FitzHugh-Nagumo.

3.5 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo

Kondisi batas yang digunakan pada bahasan ini adalah $v(x_0, t) = 0$ dan $v(L, t) = 0$. Hal tersebut diinterpretasi bahwa x_0 dan L merupakan batas daerah akson yang diselesaikan sehingga beda potensial sebelum x_0 dan setelah L diabaikan. Nilai batas 0 dapat dimaknai bahwa tidak ada beda potensial yang mengalir pada titik x_0 dan L di akson pada semua waktu.

Kondisi awal pada persamaan 2.1.1.2 sebagai berikut:

$$v(x_i, t_0) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{x_i}{\sqrt{2A}}\right]}$$

Kondisi tersebut dapat dimaknai bahwa beda potensial yang mengalir pada titik x_i di akson pada waktu t_0 dipengaruhi oleh difusivitas listrik pada akson yang sesuai dengan persamaan 2.1.1.2 .

Berdasarkan analisis kestabilan diperoleh bilangan Courant yang didefinisikan

$$\lambda = A \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

harus memenuhi interval

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$$

Misal nilai Δx adalah 0.8 dan nilai Δt adalah 0.6 maka besar difusivitas listrik yang diperkenankan adalah

$$0 < A \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Substitusi nilai Δx serta Δt pada ketaksamaan tersebut diperoleh,

$$0 < A \frac{0.6}{0.64} \leq \frac{1}{2}$$

Sehingga didapat nilai difusivitas listrik harus memenuhi keadaan berikut,

$$0 < A \leq 0.533$$

Misal diambil nilai difusivitas listrik pada akson sebesar 0.03 dan Δt sebesar 0.6 maka interval nilai Δx haruslah memenuhi keadaan berikut:

$$0 < 0.03 \frac{0.6}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{0.018}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta x^2 \geq 0.036$$

$$\Delta x \geq 1.897366596101028 \times 10^{-2}$$

Dapat diinterpretasi bahwa agar penyelesaian numerik metode beda hingga eksplisit untuk persamaan FitzHugh-Nagumo stabil pada maka, nilai difusivitas listrik yang digunakan adalah lebih besar 0 dan kurang dari sama dengan 0.533. Sedangkan panjang penampang akson adalah harus lebih besar dari $1.897366596101028 \times 10^{-2}$.

Hasil penyelesaian yang akan diinterpretasi adalah pada penyelesaian yang konvergen. Pada contoh pertama yaitu pada interval $-59.2 < x < -1.6$ untuk nilai difusivitas listrik 0.03 diperoleh nilai beda potensial adalah satu atau

mendekati satu. Sama halnya pada contoh kedua dengan nilai difusivitas listrik 0.1 pada interval $-59.2 < x < -0.8$ diperoleh nilai beda potensial adalah satu atau mendekati satu.

3.6 Petunjuk dan Kemudahan bagi Orang yang Bertakwa

Allah berfirman dalam surat al-Baqarah ayat 2 sebagai berikut :

ذَلِكَ الْكِتَابُ لَا رَيْبَ فِيهِ هُدًى لِّلْمُتَّقِينَ ﴿٢﴾

Artinya : “Kitab (Alquran) ini tidak ada keraguan padanya, petunjuk bagi mereka yang bertakwa” (Qs. al-Baqarah/1: 2).

Allah juga berfirman pada surat al-Lail ayat 5-7 sebagai berikut :

فَأَمَّا مَنْ أَعْطَىٰ وَاتَّقَىٰ ﴿٥﴾ وَصَدَّقَ بِالْحُسْنَىٰ ﴿٦﴾ فَسَنِيَرُهُ لِّلْيَسْرَىٰ ﴿٧﴾

Artinya : “Adapun orang yang memberikan (hartanya di jalan Allah), dan bertakwa, dan membenarkan adanya pahala yang terbaik (syurga). Maka Kami kelak akan menyiapkan baginya jalan yang mudah” (Qs. Al-Lail/92: 5-7).

Berdasarkan kedua ayat tersebut penulis berpendapat bahwa manusia yang bertakwa akan dikaruniai petunjuk oleh Allah SWT. berupa Al-Quran. Petunjuk tersebut dapat menjauhkan manusia dari perbuatan dosa, dengan petunjuk tersebut pula manusia dapat membedakan yang benar dan yang salah. Dengan Bertakwa maka jalan manusia akan mudah dalam setiap urusan merupakan tujuan pokok yang diharapkan setiap manusia, dengan kemudahan tersebut dapat diraih apa yang diinginkannya.

Perlindungan Allah terhadap orang yang bertakwa juga dijelaskan pada firman Allah surat al-A'raf ayat 21 sebagai berikut :

إِنَّ الَّذِينَ اتَّقَوْا إِذَا مَسَّهُمْ طَٰئِفٌ مِّنَ الشَّيْطٰنِ تَذَكَّرُوا فَإِذَا هُمْ مُبْصِرُونَ ﴿٢١﴾

Artinya : “*Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa bila mereka ditimpa waswas dari syaitan, mereka ingat kepada Allah, maka ketika itu juga mereka melihat kesalahan-kesalahannya*”(Qs. al-A'raf/7: 21).

Ibnu katsir r.a berkata bahwa orang yang bertakwa saat dihadapkan pada kemarahan atau kebingungan maka mereka ingat kepada siksa Allah, pahala yang dijanjikan-Nya, ancaman-Nya, dan janji-Nya sehingga ketika itu mereka melihat kesalahan yang diperbuatnya. Hal tersebut membuat orang yang bertakwa bertaubat dan terhindar dari kelalaian untuk berbuat dosa (Farid, 2008) .

Penulis dapat menyimpulkan bahwa orang-orang beriman diperintahkan untuk bertakwa sebagai perwujudan dari keimanannya tersebut. Ketakwaan tersebut akan dibalas Allah dengan surga. Hal itu dapat terjadi karena orang yang bertakwa diberkahi petunjuk dalam kehidupannya juga kemudahan dalam segala urusannya. Petunjuk dan kemudahan tersebut dapat menjauhkan manusia dari dosa sehingga dapat diraihinya surga.

Penulis menginterpretasi dalam konteks persamaan diferensial parsial, orang-orang yang beriman (mukmin) dengan ketakwaannya dipandang sebagai suatu model atau persamaan yang digambarkan dengan tujuan mengukur nilai ketakwaan mukmin kepada Allah SWT. Pada tinjauan matematis turunan pertama menggambarkan gradien atau dapat diinterpretasi sebagai arah, arah atau tujuan orang yang bertakwa adalah surga. Turunan kedua dalam tinjauan matematis

menggambarkan nilai maksimum dan nilai minimum, pada bahasan ini diinterpretasi takwa sebagai nilai maksimum dari ketaatan manusia, sedangkan kezaliman diinterpretasi sebagai nilai minimum ketaatan manusia. Ketakwaan manusia membuahkan karunia yaitu petunjuk, perlindungan dari dosa, sehingga mengantarkan kepada surga, sedangkan kezaliman mengantarkan manusia pada siksa api neraka.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan deskripsi metode beda hingga skema eksplisit untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo dapat disimpulkan bahwa, persamaan FitzHugh-Nagumo ditransformasi ke bentuk skema beda hingga eksplisit menggunakan beda maju untuk waktu dan beda pusat untuk ruang. Analisis kestabilan yang dilakukan pada bentuk beda hingga tersebut mensyaratkan bahwa bilangan Courant (λ) untuk persamaan FitzHugh-Nagumo harus memenuhi $0 < \lambda \leq 1/2$. Metode beda hingga skema eksplisit memberikan penyelesaian yang konvergen pada interval x tertentu apabila bilangan Courant memenuhi syarat kestabilan. Beda potensial yang mengalir dalam jalannya implus saraf pada akson adalah sebesar satu atau mendekati satu.

4.2 Saran

Pembaca dapat mendeskripsikan metode numerik lain yang stabil tanpa syarat untuk menyelesaikan persamaan FitzHugh-Nagumo, seperti *variational iteration method*.

Daftar Pustaka

- Anonim. 2012. Difusi. <http://id.wikipedia.org/wiki/Difusi> (diunduh pada tanggal 18 Oktober 2012).
- Bojovic, Dejan R. 2009. *Finite difference method for the parabolic problem with delta function*. Serbia: Faculty of Science.
- Causon, D.M, dan Mingham, C.G. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. United Kingdom: Ventus Publishing ApS.
- Debnath, Lokenath. 2012. *Nonlinear Partial Differential Equations For Scientist and Engineers Third Edition*. Springer Science+Business Media: New York.
- Duffy. Daniel J. 2006. *Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach*. England: John Wiley & Sons Ltd.
- Evans, Lawrence. 1997. *Partial Differential Equations*. Berkeley: American Mathematical Society.
- Feriyawati, Lita. 2006. *Anatomi Sistem Saraf dan Peranannya dalam Regulasi Kontraksi Otot Rangka*. Sumatra Utara: Fakultas Kedokteran Universitas Sumatra Utara.
- Farid, Ahmad. 2008. *Hidup Mudah Bebas Masalah dengan Taqwa*. Klaten: Inas Media
- Flaherty, Joseph E. dkk. 1989. *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. New York: Defense Technical Information Center.
- Griffiths, Graham W dan William E. Schiesser. 2010. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations*. USA: Academic Press is an imprint of Elsevier.
- Kimball, John W. 1994. *Biologi jilid 1*. Jakarta: Erlangga
- Lifeng Xi, Zhongdi Cen, dan Jingfeng Chen. 2008. *A Second-order Finite Difference Scheme for a Type of Black-Scholes Equation*. China: Zhejiang Wanli University.
- Majid, Abdul Wazwaz. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. London: Higher Education Press.
- Mutholi'ah, Emy. 2008. Analisis Perbandingan metode beda hingga skema implisit dan crank-nicholson pada penyelesaian persamaan diferensial parsial.

Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sa'diy. Abdurrahman bin Nashir. Tanpa tahun. *Tafsir Juz Amma Karimirrahman*. Solo: At-Tibyan.

Sasongko, Setia Budi. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta : C.V ANDI OFFSET.

Soliman, A.A. 2012. *Numerical Simulation Of FitzHugh-Nagumo Equations*. Egypt: Suez Canal University.

Subiyanto. 2012. *Simulasi propagasi pada sel saraf terkopel menggunakan mobil Fitzhugh-Nagumo*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Varberg dan Purcell, Edwin J. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2*. Penj. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Zauderer, Erich. 1998. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Second Edition*. New York: Wiley Interscience publication.

LAMPIRAN

Lampiran 3.3.1 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$

```

%Program penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
%Kondisi batas  $v(0,t)=g_1(t)$ ;  $u(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $v(x,0)=f(x)$ 
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.03; %Difusivitas listrik pada aksion
f=inline('1./(1+exp(x/sqrt(2*A)))'),'x','A');
g1=inline('0*t','t');
g2=inline('0*t','t');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v = zeros(n+1,m+1);
format long e
v(1,:) = f(x,A);
v(:,1) = g1(t);
v(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v(j+1,2:m) = r*v(j,1:m-1) + r*v(j,3:m+1)+ rr*v(j,2:m)+
dt.*v(j,2:m).*(v(j,2:m)-1).*(miu-v(j,2:m));
drawnow;
mesh(t,x,v),title('Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHUgh-Nagumo
dengan A=0.03');xlabel ('t');ylabel ('x')
end;
disp (v)

```

Lampiran 3.3.2 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.1$.

```

%Program penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan
 $T_0 < t < T$ 
%Kondisi batas  $v(0,t)=g_1(t)$ ;  $u(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $v(x,0)=f(x)$ 
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.1; %Difusivitas listrik pada akson
f=inline('1./(1+exp(x/sqrt(2*A)))'),'x','A');
g1=inline('0*t','t');
g2=inline('0*t','t');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v = zeros(n+1,m+1);
format long e
v(1,:) = f(x,A);
v(:,1) = g1(t);
v(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v(j+1,2:m) = r*v(j,1:m-1) + r*v(j,3:m+1)+ rr*v(j,2:m)+
dt.*v(j,2:m).*(v(j,2:m)-1).*(miu-v(j,2:m));
drawnow;
mesh(t,x,v),title('Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHUGH-Nagumo
dengan A=0.03');xlabel ('t');ylabel ('x')

end;
disp (v)

```

Lampiran 3.3.3 Program Matlab Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo dengan $A = 0.03$ dan Kondisi Awal $f(x) = e^{Ax}$.

```

%Program penyelesaian persamaan FitzHugh-Nagumo untuk  $L_0 \leq x \leq L$  dan  $T_0 < t < T$ 
%Kondisi batas  $v(0,t)=g_1(t)$ ;  $u(L,t)=g_2(t)$ 
%Kondisi awal  $v(x,0)=f(x)$ 
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.03; %Difusivitas listrik pada akson
f=inline('exp(A*x)', 'x', 'A');
g1=inline('0*t', 't');
g2=inline('0*t', 't');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v = zeros(n+1,m+1);
format long e
v(1,:) = f(x,A);
v(:,1) = g1(t);
v(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v(j+1,2:m) = r*v(j,1:m-1) + r*v(j,3:m+1)+ rr*v(j,2:m) +
dt.*v(j,2:m).*(v(j,2:m)-1).*(miu-v(j,2:m));
drawnow;
mesh(t,x,v),title('Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHUGH-Nagumo
dengan A=0.03');xlabel ('t');ylabel ('x')

end;
disp (v)

```

Lampiran 3.4.1 Program untuk Membandingkan Penyelesaian Analitik dan Numerik serta Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.03$.

```

%Program untuk menghitung galat penyelesaian numerik persamaan
FitzHugh-Nagumo
%v1 Penyelesaian Numerik
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.03; %Difusivitas listrik pada aksion
f=inline('1./(1+exp(x/sqrt(2*A)))','x','A');
g1=inline('0*t','t');
g2=inline('0*t','t');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v1 = zeros(n+1,m+1);
format long e
v1(1,:) = f(x,A);
v1(:,1) = g1(t);
v1(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v1(j+1,2:m) = r*v1(j,1:m-1) + r*v1(j,3:m+1)+ rr*v1(j,2:m) +
dt.*v1(j,2:m).*(v1(j,2:m)-1).*(miu-v1(j,2:m));
end;
% Solusi Analitik
x=meshgrid(-60:dx:L);
y=meshgrid(0:dt:T);
t=y';
v2=1./(1+exp(x/sqrt(2*A)+((miu-0.5).*t)));
% Kalkulasi Error
e =zeros(n+1,m+1);
e = abs(v1 - v2)
% Plot hasil
figure (1),mesh(t,x,v1),title('Penyelesaian Numerik Persamaan
FitzHUGH-Nagumo');xlabel ('t');ylabel('x');
figure (2),mesh(t,x,v2),title('Penyelesaian Analitik Persamaan
FitzHUGH-Nagumo');xlabel ('t');ylabel('x');
figure (3),plot(t,v1,'*',t,v2,'-');xlabel ('t');ylabel('v');
figure (4),plot(x,v1,'*',x,v2,'-');xlabel ('x');ylabel('v');

```

Lampiran 3.4.2 Program untuk Membandingkan Penyelesaian Analitik dan Numerik serta Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.1$.

```

%Program untuk menghitung galat penyelesaian numerik persamaan
FitzHugh-Nagumo
%v1 Penyelesaian Numerik
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.1; %Difusivitas listrik pada akson
f=inline('1./(1+exp(x/sqrt(2*A))))','x','A');
g1=inline('0*t','t');
g2=inline('0*t','t');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v1 = zeros(n+1,m+1);
format long e
v1(1,:) = f(x,A);
v1(:,1) = g1(t);
v1(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v1(j+1,2:m) = r*v1(j,1:m-1) + r*v1(j,3:m+1)+ rr*v1(j,2:m) +
dt.*v1(j,2:m).*(v1(j,2:m)-1).*(miu-v1(j,2:m));
end;
% Solusi Analitik
x=meshgrid(-60:dx:L);
y=meshgrid(0:dt:T);
t=y';
v2=1./(1+exp(x/sqrt(2*A)+((miu-0.5).*t)));
% Kalkulasi Error
e =zeros(n+1,m+1);
e = abs(v1 - v2)
% Plot hasil
figure (1),mesh(t,x,v1),title('Penyelesaian Numerik Persamaan
FitzHUgh-Nagumo');xlabel ('t');ylabel ('x');
figure (2),mesh(t,x,v2),title('Penyelesaian Analitik Persamaan
FitzHUgh-Nagumo');xlabel ('t');ylabel ('x');
figure (3),plot(t,v1,'*',t,v2,'-');xlabel ('t');ylabel ('v');
figure (4),plot(x,v1,'*',x,v2,'-');xlabel ('x');ylabel ('v');

```

Lampiran 3.4.3 Program untuk Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.03$ dan Kondisi Awal $f(x) = e^{Ax}$.

```

%Program untuk menghitung galat penyelesaian numerik persamaan
FitzHugh-Nagumo dengan kondisi awal exp(A*x)
%v1 Penyelesaian Numerik
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batas interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.03; %Difusivitas listrik pada akson
f=inline('exp(A*x)', 'x', 'A');
g1=inline('0*t', 't');
g2=inline('0*t', 't');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v1 = zeros(n+1,m+1);
format long e
v1(1,:) = f(x,A);
v1(:,1) = g1(t);
v1(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v1(j+1,2:m) = r*v1(j,1:m-1) + r*v1(j,3:m+1)+ rr*v1(j,2:m)+
dt.*v1(j,2:m).*(v1(j,2:m)-1).*(miu-v1(j,2:m));
end;
% Solusi Analitik
x=meshgrid(-60:dx:L);
y=meshgrid(0:dt:T);
t=y';
v2=1./(1+exp(x/sqrt(2*A)+((miu-0.5).*t)));
% Kalkulasi Error
e =zeros(n+1,m+1);
e = abs(v1 - v2)

erormaksimal1=max(max(e(21,2:101)))
erormaksimal2=max(max(e(41,2:101)))
erormaksimal3=max(max(e(61,2:101)))
erormaksimal4=max(max(e(81,2:101)))

```

Lampiran 3.4.4 Program untuk Menghitung Galat Penyelesaian Numerik Persamaan FitzHugh-Nagumo untuk $A = 0.03$ dan Kondisi Awal $f(x) = 1/(1 + \exp(x/\sqrt{2 * A}))$.

```

%Program untuk menghitung galat penyelesaian numerik persamaan
FitzHugh-Nagumo
%v1 Penyelesaian Numerik
clc,clear;
miu=0.139; %Ambang batas rangsangan
L0=-60;%Batas interval x
L=20; %Batas interval x
T0=0; %Batsa interval t
T=60; %Batas interval t
m=100;%banyak subinterval untuk x
n=100;%banyak subinterval untuk t
A=0.03; %Difusivitas listrik pada akson
f=inline('1./(1+exp(x/sqrt(2*A)))','x','A');
g1=inline('0*t','t');
g2=inline('0*t','t');
dx = (L-(-60))/m;
dt = T/n;
r=A*dt/dx^2 %r=lamda
rr= 1 - 2*r;
x = linspace(-60,L,m+1);
t = linspace(0,T,n+1);
v1 = zeros(n+1,m+1);
format long e
v1(1,:) = f(x,A);
v1(:,1) = g1(t);
v1(:,m+1) = g2(t);
for j = 1:n ;
v1(j+1,2:m) = r*v1(j,1:m-1) + r*v1(j,3:m+1)+ rr*v1(j,2:m)+
dt.*v1(j,2:m).*(v1(j,2:m)-1).*(miu-v1(j,2:m));
end;
% Solusi Analitik
x=meshgrid(-60:dx:L);
y=meshgrid(0:dt:T);
t=y';
v2=1./(1+exp(x/sqrt(2*A)+((miu-0.5).*t)));
% Kalkulasi Error
e =zeros(n+1,m+1);
e = abs(v1 - v2)

erormaksimal1=max(max(e(21,2:101)))
erormaksimal2=max(max(e(41,2:101)))
erormaksimal3=max(max(e(61,2:101)))
erormaksimal4=max(max(e(81,2:101)))

```