INVERS MOORE PENROSE DAN APLIKASINYA PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER

SKRIPSI

Oleh:
ISWAHYUNI PURWANTI
NIM. 09610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INVERS MOORE PENROSE DAN APLIKASINYA PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ISWAHYUNI PURWANTI
NIM. 09610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2013

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INVERS MOORE PENROSE DAN APLIKASINYA PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER

SKRIPSI

Oleh:
ISWAHYUNI PURWANTI
NIM. 09610073

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 12 Januari 2013

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Ahmad Barizi, MA
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INVERS MOORE PENROSE DAN APLIKASINYA
PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER

SKRIPSI

Oleh:
ISWAHYUNI PURWANTI
NIM. 09610073

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 28 Maret 2013

Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	________________
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP.19731212 199803 1 001	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: ISWAHYUNI PURWANTI
NIM	: 09610073
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Invers Moore Penrose dan Aplikasinya pada Sistem Persamaan Linier

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2013

Yang membuat pernyataan,

Iswahyuni Purwanti
NIM. 09610073

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

Jangan menunggu hari esok

jika dapat diselesaikan sekarang!

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini kepada:

Ibu Isrofiyah & Bapak Puri Supriyantono

Adik Muhammad Rofiq Romadhon

Keluarga besar di Pasuruan dan Magelang

Terima kasih atas do'a, kasih sayang, dan dukungan

baik moril maupun spirituil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi ini dengan judul “ **Invers Moore Penrose dan Aplikasinya pada Sistem Persamaan Linier**” ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, dosen pembimbing dan wali dosen yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi serta yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak dan Ibu dosen serta staf Jurusan Matematika maupun Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Bapak dan ibu tercinta serta segenap keluarga yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, inspirasi dan motivasi serta dukungan kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
7. Teman–teman angkatan 2009. Khususnya Febrina M. S., F. Kurnia N., Tutik R., Arni H., Siti Mutmainah, Novita I., dan Junik Rahayu. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya yang mereka berikan dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
8. Teman-teman kos Asrama Wargadinata. Khususnya mbak Kiki, mbak Ifa, mbak Zilah, mbak Ria, Mifta, Fitri, Erika, Zakiyah, Ariani, dan Hasniyah. Terima kasih atas dukungan semangat dan doanya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang aljabar. Amin.

Malang, Januari 2013

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Purwanti, Iswahyuni. 2013. **Invers Moore Penrose dan Aplikasinya pada Sistem Persamaan Linier**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA

Kata Kunci: invers, invers Moore Penrose, sistem persamaan linier

Selama ini diketahui A^{-1} merupakan invers matriks bujur sangkar A $n \times n$ yang invertibel, namun saat ini telah diketahui adanya invers untuk suatu matriks yang non invertibel dan berukuran $m \times n$ yang disebut Invers Moore Penrose. Invers Moore Penrose biasa dinotasikan dengan A^{+}. Konsep invers matriks $n \times n$ dapat digunakan sebagai alternatif untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier yang berbentuk $Ax = b$. Jika A adalah suatu matriks yang invertibel, maka solusi sistem persamaan tersebut dapat dihitung menggunakan rumus $x = A^{-1}b$. Jika matriks A dari sistem tersebut non invertibel dan berukuran $m \times n$ maka solusi sistem tidak dapat dicari menggunakan aturan tersebut, sehingga dalam penelitian ini penulis akan mendeskripsikan cara menghitung invers matriks yang non invertibel dan mengaplikasikan invers Moore Penrose untuk menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linier.

Dari hasil studi pustaka diperoleh langkah-langkah bagaimana menghitung invers matriks yang non invertibel dengan Invers Moore Penrose. Dimulai dengan (1) mereduksi A sehingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi sebut E_A, (2) memilih kolom berbeda dari A dan tempatkan pada kolom-kolom matriks B yang berorder sama seperti tampak pada A, (3) memilih baris tak kosong dari E_A dan tempatkan pada baris matriks C yang berorder sama seperti tampak pada E_A, (4) menghitung $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$, dan (5) menghitung A^{+} dengan rumus $A^{+} = C^*(CC^*)^{-1}\,(B^*B)^{-1}B^*$.

Invers Moore Penrose ada untuk setiap matriks, baik itu matriks yang invertibel atau yang tidak sekalipun. Selain itu, konsep invers Moore Penrose dapat diaplikasikan untuk menentukan solusi sistem persamaan linier yang berbentuk $Ax = b$ dengan matriks A berukuran $m \times n$ dan non invertibel sehingga $x = A^{+}b$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Purwanti, Iswahyuni. 2013. **Moore Penrose Inverses and Aplication for System of Linear Equations**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
The Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA

Key Word: inverses, Moore Penrose inverses, system of linear equations.

Is known for A^{-1} is the inverse of the square matrix A $n \times n$ that invertible, it is now known of the inverse matrix of non invertible and size $m \times n$ is called Moore Penrose Inverse. Moore Penrose Inverse usual denoted by A^{+}. The concept of inverse matrix $n \times n$ can be used as an alternative to finding a solution of a system of linear equations $Ax = b$ form. If A is a matrix that invertibel, then the solution system of linear equations can be calculated using the formula $x = A^{-1}b$. If the matrix A of the system is non invertibel and size $m \times n$ then the solution can not be searched using the system rules, so in this study the authors will described how to calculate the inverse matrix of non invertible and apply the Moore Penrose inverse to determine the solution of a system of linear equations.

From the results obtained literature steps how to calculate the Moore Penrose Inverse. Starting with (1) reduces A to obtain a matrix in reduced row echelon form called EA, (2) selecting different columns of A and place it in columns B and the order with respect to the same matrix as shown in A, (3) select the row was non empty of EA and place it on the line the first order matrix C as shown in EA, (4) calculate $(CC^*)^{-1}$ and $(B^*B)^{-1}$, (5) calculate A^+ by the formula $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}\,(B^*B)^{-1}B^*$.

Moore Penrose inverse can be used for any matrix, either a invertible or not though. Besides, Moore Penrose inverse concept can be applied to determine the solution of system of linear equations in the form $Ax = b$ with a matrix A $m \times n$ and non invertible such that $x = \mathrm{A}^+ + b$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص البحث

فورونتي، إسوهيوني. 2013. **إنفريس موري فنروسي (Invers moore Penrose) وتطبيقها في نظام المساوة لينيير.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: 1. عبد الشاكر، الماجستير
2. الدكتور الحج أحمد بريزي، الماجستير

كلمة رئيسية : إنفريس، إنفريس موري فنروسي، نظام المساوة لينيير

كما نعرف بأن A^{-1} هي إنفريس متريك (invers matriks) مربع $n \times n$ A، لكن الآن قد عرفت عن إنفريس متريك بالقياس $m \times n$ ويسمى إنفريس موري فنروسي، بالرموز A^{+}. صيغة إنفريس متريك $n \times n$ يستعمل في بحث على حل نظام المساوة لينيير بِالشَكْلِ $Ax = b$. إذا A متريك إنفرتبل (matriks invertibel)، فيحللها بالعبارة $x = A^{-1}b$. إذا متريك A من تلك النظام على القياس $m \times n$ فيحللها لا يستطيع بالستخدام تلك الرموز. لذلك في هذا البحث، يريد الباحثة أن يصف كيف يحسب إنفريس متريك غير إتفرتبل وتطبق إنفريس موري فنروسي في تعيين حل نظام المساوة لينيير.

من نتائج دراسة المكتوبية يحصل إجراءات عن كيف يحسب إنفريس متريك غير إتفرتبل بإنفريس موري فنروسي . يبدأ (1) يحول A ويحصل متريك بشكل إيسيلون المحولة يسمى بـ E_A، (2) يحتار الجدول المحتلفة من A ويضع في جدول متريك B كما نفس موضع في A، (3) يحتار خط E_A وضعتهه في خط متريك C كما نفس موضع في E_A، (4) يحسب $(CC^{*})^{-1}$ و $(B^{*}B)^{-1}$، (5) يحسب A^{+} بالرموز $A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}\,(B^{*}B)^{-1}B^{*}$ إنفريس موري فنروسي موجود لكل متريك، من حيث متريك إنفيتبل وغيرها. دون ذلك، إنفريس موري فنروسي يستطيع أن يطبيقها لتعيين حل نظام المساوة لينيير بالشكل $Ax = b$ متريك A بالمقياس $(m \times n)$ وغير إنفيتبل يحصل $x = A^{+}b$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika dalam bahasa Belanda disebut wiskunde atau ilmu pasti, yang kesemuanya berkaitan dengan penalaran. Sedang menurut istilah Yunani, matematika berasal dari kata mathematikos yang berarti ilmu pasti dan mathema atau mathesis yang berarti ajaran, pengetahuan atau ilmu pengetahuan (Shadily, 1983:2171).

Informasi dalam bidang sains dan matematika seringkali ditampilkan dalam bentuk baris-baris dan kolom-kolom yang membentuk jajaran empat persegi panjang yang disebut matriks (Anton, 2004:1). Matriks adalah himpunan elemen-elemen yang membentuk susunan baris dan kolom (Anggraeni, 2006:49). Secara umum, suatu matriks terdiri dari entri-entri berbentuk konstanta atau fungsi. Konstanta dari matriks dapat berupa skalar atau bilangan, yaitu bilangan kompleks ataupun bilangan riil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sebenarnya matriks adalah kumpulan atau himpunan dari bilangan-bilangan yang ditampilkan dalam bentuk baris dan kolom. Dalam Al-Qur’an terdapat ayat yang menerangkan tentang himpunan (golongan) manusia. Firman Allah dalam surat Al-Fatihah ayat 7 sebagai berikut:

صِرَاطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya: *(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat.* (QS:Alfatihah.ayat 7)

Ayat tersebut menjelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok yaitu (1) kelompok yang mendapatkan nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

Selama ini, diketahui bahwa A^{-1} merupakan invers dari suatu matriks bujur sangkar A dan non singular (determinan tidak 0). Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A disebut invertibel dan A^{-1} disebut invers dari matriks A (Anton, 2004:46). Namun, pengetahuan saat ini menyatakan terdapat suatu generalisasi dari invers matriks berukuran $m \times n$ yang disebut invers Moore Penrose yang ditemukan oleh Moore (1935) dan Penrose (1955). Invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular dan bahkan untuk matriks yang tidak bujur sangkar sekalipun. Invers Moore Penrose dinotasikan dengan A^{+} dan disebut invers Moore Penrose apabila memenuhi:

(i) $A\,A^{+}A = A$

(ii) $A^{+}A\,A^{+} = A^{+}$

(iii) $(A\,A^{+})^{*} = AA^{+}$

(iv) $(A^{+}A)^{*}=A^{+}A$,

dengan $*$ adalah transpos konjugat (Campbell & Meyer, 2009:9).

Dengan munculnya invers Moore-Penrose ini, dapat ditemukan suatu cara untuk menghitung invers matriks yang non invertibel dan berukuran $m \times n$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sebagaimana dijelaskan di dalam Al-Qur'an Surat Al-Insyirah ayat 5-6 bahwa segala sesuatu pasti memiliki solusi.

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٦

Artinya: *"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan* (5) *Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan* (6)". (QS. Al-Insyirah:5-6)

Dari ayat tersebut nampak bahwa setiap masalah memiliki jalan keluar sebagaimana disebutkan bahwa sesudah kesulitan ada kemudahan begitu juga sebaliknya. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara maka pasti ada cara yang lain untuk menyelesaikannya. Seperti halnya pada invers matriks yang singular dan tidak bujur sangkar dapat dicari solusinya dengan invers Moore Penrose.

Konsep invers matriks $n \times n$ dapat digunakan sebagai alternatif untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier yang berbentuk $Ax = b$. Jika A adalah suatu matriks yang invertibel, maka solusi sistem persamaan tersebut dapat dihitung menggunakan rumus $x = A^{-1}b$. Jika matriks A dari sistem tersebut non invertibel dan berukuran $m \times n$ maka solusi sistem tidak dapat dicari menggunakan aturan tersebut, sehingga dalam penelitian ini penulis mencoba mengaplikasikan invers Moore Penrose untuk menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linier. Berdasarkan hal ini, dalam skripsi ini penulis mengambil judul **"*Invers Moore Penrose dan Aplikasinya pada Sistem Persamaan Linier*".**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang dibahas adalah:

1. Bagaimana cara menghitung invers Moore Penrose?
2. Bagaimana aplikasi invers Moore Penrose pada sistem persamaan linier?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendeskripsikan proses cara menghitung invers matriks yang non invertibel dengan invers Moore Penrose.
2. Mendeskripsikan aplikasi invers Moore Penrose untuk mencari solusi sistem persamaan linier.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

Untuk memperdalam pemahaman materi dan menambah pengetahuan serta mendapatkan pengalaman dalam mengaktualisasi diri sebagai insan akademik dalam menerapkan teori-teori ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama menjalani pendidikan hingga dapat melakukan penelitian ini khususnya teori invers Moore Penrose.

2. Bagi Pembaca

Hasil dari penelitian ini dapat dipergunakan sebagai bahan pembelajaran, tambahan informasi dan wawasan serta masukan khususnya tentang teori invers

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Moore Penrose dan aplikasinya pada sistem persamaan linier yang selanjutnya pembaca dapat melanjutkan penelitian ini secara lebih luas dengan menggunakan temuan yang lainnya.

3. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kepustakaan tambahan bagi pengajar dan untuk kajian lebih lanjut bagi mahasiswa.

1.5 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian pustaka (*Library Research*) yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah yang memuat topik tentang invers Moore Penrose. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Mengidentifikasi matriks yang berukuran $m \times n$, $n \times n$ invertibel dan $n \times n$ yang tidak invertibel.
b. Selanjutnya jika matriks tidak invertibel maka dalam mencari inversnya menggunakan cara untuk memperoleh invers Moore Penrose, jika matriks invertibel maka invers Moore Penrose yang diperoleh dibandingkan dengan hasil dari invers biasa.
c. Menentukan solusi sistem persamaan linier dengan invers Moore Penrose disertai contoh penyelesaiannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.6 Sistematika Penulisan

Sebagai acuan untuk memudahkan pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi penulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori, dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu tentang matriks, operasi pada matriks, jenis matriks, invers matriks, operasi baris elementer, sistem persamaan linier dan kajian agama tentang invers.

Bab III Pembahasan, dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang invers Moore Penrose baik definisi, teorema, algoritma dan contoh bagaimana menghitung invers matriks Moore Penrose serta aplikasinya pada sistem persamaan linier.

Bab IV Penutup, dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi, penjelasan, teorema, bukti dan contoh yang mendasari pembahasan di bab berikutnya. Beberapa teori yang diberikan diantaranya adalah matriks, operasi pada matriks, jenis matriks, invers matriks, operasi baris elementer dan sistem persamaan linier dengan matriks, serta konsep invers dalam Al-Qur'an.

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1

Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks (Anton & Rorres, 2004:1).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Masing-masing $n - triple$ horisontal

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_n), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

disebut baris-baris matriks, sedangkan $m - triple$ vertikal disebut kolom-kolom matriks. Secara sederhana, matriks di atas ditulis $A = (a_{ij})$. Matriks di atas mempunyai m baris dan n kolom, dikatakan ukuran matriks tersebut adalah $(m \times n)$. Apabila $m = n$, maka matriks itu disebut matriks bujur sangkar (Yahya, dkk., 2004:68).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.1.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+3i & 2 \\ 2 & 4+2i \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam banyak baris (arah horisontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Sebagai contoh, matriks pertama pada contoh 2.1.1 memiliki tiga kolom dua baris, sehingga ukurannya adalah 2×3.

Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom saja disebut matriks kolom dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris. Untuk menyatakan matriks digunakan huruf kapital. Entri yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi, matriks umum $m \times n$ dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notasi matriks yang singkat dapat ditulis sebagai $[a_{ij}]_{mn}$ atau $[a_{ij}]$. Entri pada baris i dan kolom j dalam matriks A juga dapat dinyatakan dengan simbol $(A)_{ij}$ (Anton & Rorres, 2004:27).

Suatu matriks A dengan banyak baris n dan banyak kolom n disebut matriks bujur sangkar ordo n (*square matrix of order* n) dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ yang diberi garis merupakan diagonal utama (*main diagonal*) matriks A (Anton & Rorres, 2004:28).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Operasi pada Matriks

Berikut ini dijelaskan beberapa definisi dan contoh dari operasi-operasi yang ada pada matriks.

Definisi 2.2.1 Kesetaraan Matriks

Dua matriks adalah setara (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Dalam notasi matriks jika $A = [a_{ij}]$dan $B = [b_{ij}]$memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika$(A)_{ij} = (B)_{ij}$, atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j (Anton & Rorres, 2004:28).

Contoh 2.2.1

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $x = 5$ maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai x yang lain matriks A dan B tidak setara, karena tidak semua entri keduanya yang bersesuaian adalah sama. Tidak ada nilai untuk x dimana $A = C$, karena A dan C memiliki ukuran yang berbeda (Anton & Rorres, 2004: 28).

Definisi 2.2.2. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan (Anton & Rorres, 2004:28-29).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka:

$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Contoh 2.2.2

Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \; dan \; A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.3 Kelipatan Skalar

Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari A. Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$ (Anton & Rorres, 2004:29).

Contoh 2.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$maka\; 2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.2.4 Perkalian Matriks

Jika A adalah matriks m × r dan B adalah matriks r × n maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks m × n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pada baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B, entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dikalikan kemudian hasil yang diperoleh dijumlahkan (Anton & Rorres, 2004:30).

Contoh 2.2.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4, maka hasilkali AB adalah matriks 2×4. Sehingga diperoleh

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$, dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui $(AB)_{ij} = a_{ij}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.3.1 Determinan Matriks

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij} (Anton & Rorres, 2004:115).

Contoh 2.3.1

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Minor dari entri a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16$

Kofaktor dari a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$

Definisi 2.3.2

Jika A dan B matriks-matriks bujur sangkar berordo n dan berlaku $AB = BA = I$ maka dikatakan B invers dari A dan ditulis $B = A^{-1}$, sebaliknya A adalah invers dari B dan ditulis B^{-1}. Suatu matriks yang inversnya adalah dirinya sendiri $AA = I$, disebut matriks yang Involutory (Yahya, dkk., 2004:78).

Contoh 2.3.2

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ memnpunyai invers } A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{karena } AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dari contoh tersebut matriks A dikatakan invertibel.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.3.1. Sifat-sifat Invers

a. Jika B dan C kedua-duanya adalah invers dari matriks A maka, $B = C$.

b. Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *invertibel* jika $ad - bc \neq 0$, dan inversnya dapat diHitung sesuai dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

c. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang *invertibel* dengan ukuran yang sama, maka AB *invertibel* dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Anton & Rorres, 2004:47-48).

Bukti :

a. Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$ dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan C diperoleh $(BA)C = IC = C$. Tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B$, sehingga $C = B$.

b. Karena $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} | ad - bc \neq 0$ maka akan ditunjukkan bahwa $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$.

(i) $AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ad - bc}{ad - bc} & \frac{-ab + ab}{ad - bc} \\ \frac{cd - cd}{ad - bc} & \frac{-bc + ad}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(ii) $A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ca+ac}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ac}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{Jadi } A = AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

c. Dapat ditunjukkan bahwa jika A dan B invertibel maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I\,B = B^{-1}B = I \blacksquare$$

Pada teorema 2.3.1 bagian (b) memperlihatkan bahwa invers suatu matriks hanya ada jika determinan matriks tersebut tidak nol. Jika determinannya sama dengan nol maka matriks A dikatakan singular dan tidak mempunyai invers. Sebagai penentuan, suatu matriks adalah singular jika semua elemen pada salah satu baris adalah nol, atau jika semua kofaktor dari elemen-elemen suatu baris sama dengan nol, atau jika ada dua baris yang sama, atau jika suatu baris merupakan kelipatan skalar dari baris yang lain. Semua keadaan ini juga berlaku untuk kolom matriks. Dalam banyak hal, tidak mungkin menyatakan suatu matriks adalah singular hanya dengan memeriksa matriks tersebut. Oleh karena itu, pemeriksaan yang sering dilakukan untuk mellihat kesingularan suatu matriks adalah dengan menghitung determinan matriks tersebut, untuk menentukan apakah determinan itu sama dengan nol (Weaver & Gere, 1987:65).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Transpos suatu Matriks

Definisi 2.4.1

Jika A adalah matriks $m \times n$ maka transpos dari A (*transpos of* A) dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton & Rorres, 2004:36).

Contoh 2.4.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4.1. Sifat-sifat Transpos

Jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, maka.

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

c. $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah skalar sebarang

d. $(AB)^T = B^T A^T$ (Anton & Rorres, 2004:51).

Bukti:

Misalkan $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = A + B = (c_{ij})$.

a. $(A^T)^T = A$

diket $A^T = (a_{ji})$ maka

$(A^T)^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$ (terbukti)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b. $(A+B)^T = A^T + B^T \; dan \; (A-B)^T = A^T - B^T$

$(A+B)^T = (a_{ij} + b_{ij})^T$

$= (c_{ij})^T$

$= c_{ji}$

$= a_{ji} + b_{ji}$

$= A^T + B^T$ (terbukti)

$(A-B)^T = (a_{ij} - b_{ij})^T$

$= (c_{ij})^T$

$= c_{ji}$

$= a_{ji} - b_{ji}$

$= A^T - B^T$ (terbukti)

c. $(kA)^T = kA^T$

$= (ka_{ij})^T$

$= k(a_{ji}) = kA^T$ (terbukti)

d. $(AB)^T = B^T A^T$

Akan ditunjukkan bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(AB)^T$ dan $B^T A^T$ adalah sama, yaitu:

$$(AB)^T = (AB)^T{}_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}$$

Misal entri-entri ke-ij dari A^T dan B^T masing-masing sebagai

$a'_{ij} = a_{ji}$ dan $b'_{ij} = b_{ji}$

$B^T A^T = (B^T A^T)_{ij}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj}$$

$$= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr}$$

$$= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \blacksquare$$

Teorema 2.4.2. Invers suatu Transpos

Jika A adalah matriks yang *invertibel*, maka A^T juga *invertibel* dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (Anton & Rorres, 2004:52).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$ dengan menggunakan Teorema 2.4.1 bagian (d) dan fakta bahwa $I^T = I$ diperoleh

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I \blacksquare$$

Definisi 2.4.2 Transpos konjugat

Jika A adalah matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks, maka transpos konjugat (*conjugate transpose*) matriks A, yang dinotasikan dengan A^*, didefinisikan sebagai $A^* = \bar{A}^T$ dimana $\bar{A}$ adalah suatu matriks yang entri-entrinya adalah konjugat-konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks A dan $\bar{A}^T$ adalah transpos dari matriks A (Anton & Rorres, 2005:115).

Contoh 2.4.2

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}, maka \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} sehingga \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.4.2 Sifat-sifat Transpos Konjugat

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan entri-entri bilangan kompleks dan k adalah sebarang bilangan kompleks, maka:

a. $(A^*)^* = A$

b. $(A + B)^* = A^* + B^*$

c. $(kA) = \bar{k}A^*$

d. $(AB)^* = B^*A^*$ (Anton & Rorres, 2005:116).

Bukti:

Misalkan $A = (a_{ij} + 0i)$, $B = (b_{ij} + 0i)$,

$C = A + B = \left((a_{ij} + 0i\right) + (b_{ij} + 0i) = c_{ij} + 0i)$.

a. $(A^*)^* = A$

diket $A^* = \bar{A}^T = (a_{ji} - 0i)$ maka

$(A^*)^* = \left(a_{ji} - 0i\right)^* = (a_{ij} + 0i) = A$ (terbukti)

b. $(A + B)^* = A^* + B^*$

$(A + B)^* = \left((a_{ij} + 0i) + (b_{ij} + 0i)\right)^*$

$= \left(c_{ij} + 0i\right)^*$

$= c_{ji} - 0i$

$= (a_{ji} - 0i) + (b_{ji} - 0i)$

$= A^* + B^*$ (terbukti)

c. $(kA)^T = \bar{k}A^*$

$= \left(ka_{ij} + 0i\right)^*$

$= k\left(a_{ji} - 0i\right) = kA^*$ (terbukti)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. $(AB)^* = B^*A^*$

Akan ditunjukkan bahwa entri-entri yang bersesuaian dari $(AB)^*$ dan B^*A^* adalah sama, yaitu:

$$(AB)^* = (AB)^*{}_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}\, b_{ri}$$

Misal entri-entri ke-ij dari A^* dan B^* masing-masing sebagai

$a^*_{ij} = a_{ji} - 0i$ dan $b^*_{ij} = b_{ji} - 0i$

$B^*A^* = (B^*A^*)_{ij}$

$= b^*_{i1}a^*_{1j} + b^*_{i2}a^*_{2j} + \cdots + b^*_{ir}\, a^*_{rj}$

$= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}\, a_{jr}$

$= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}\, b_{ri}$ ■

2.5 Jenis-jenis Matriks

Suatu matriks dengan entri-entri bilangan real disebut ortogonal jika inversnya sama dengan transposnya ($A^{-1} = A^T$). Analogi kompleks dari matriks ortogonal disebut matriks uniter. Matriks ini didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5.1 Suatu matriks bujur sangkar A dengan entri-entri kompleks dikatakan uniter (*unitary*) jika $A^{-1} = A^*$ (Anton & Rorres, 2005:117).

Contoh 2.5.1

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$dan $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nampak bahwa $A^{-} = A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.5.2 Matriks Hermitian

Suatu matriks bujur sangkar A yang entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks Hermitian apabila $A = A^*$ (Anton & Rorres, 2005:118).

Contoh 2.5.2

$$Jika\ A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} maka\ \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix},$$

$$sehingga\ A^* = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} = A$$

Yang berarti bahwa A adalah matriks Hermitian.

Definisi 2.5.3 Matriks Normal

Suatu matriks bujur sangkar A dengan entri-entri kompleks disebut matriks normal jika $AA^* = A^*A$ (Anton & Rorres, 2005:119).

Contoh 2.5.3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} dan\ A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ matriks normal karena

$$AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} dan$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5.4 Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah matrik bujur sangkar $(n \times n)$ yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol. Dengan perkataan lain, (a_{ij}) adalah matriks diagonal bila $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ (Yahya, dkk., 2004:78).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.5.4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{adalah matriks diagonal}$$

Definisi 2.5.5 Matriks Pita

Matriks pita adalah matriks yang mempunyai elemen nol di semua tempat kecuali sepanjang pita atau jalur sepanjang diagonal matriks, tetapi tidak selalu berpusat pada diagonal utama (Weaver & Gere, 1987:25).

Contoh 2.5.5

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Lebar pita pada contoh di atas adalah tiga, dan pita itu berpusat pada diagonal, maka matriks ini dikatakan tridiagonal.

Definisi 2.5.6 Matriks Identitas

Matriks identitas ordo n, yang ditulis dengan I atau I_n adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai angka-angka satu sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas menuju kanan bawah) dan nol di mana-mana (Hadley, 1992:62).

Contoh 2.5.6

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.5.7 Matriks Nol

Suatu matriks yang elemen-elemennya adalah nol disebut matriks nol dan dinotasikan dengan simbol **0** (Hadley, 1992:64).

Contoh 2.5.7

$$0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

2.6 Operasi Baris Elementer dan Rank Matriks

Operasi baris elementer merupakan operasi yang dikenakan pada entri-entri pada baris suatu matriks untuk menyederhanakan baris tersebut (penulis).

Definisi 2.6.1 Suatu matriks $n \times n$ disebut matriks elementer (*elementary matrix*) jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks identitas $I_n n \times n$ dengan melakukan operasi baris elementer tunggal (Anton & Rorres, 2004:56).

Definisi 2.6.2

Matriks A disebut dalam Bentuk Eselon Baris Tereduksi (*reduced row-echelon form*) apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1. jika dalam satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka entri pertama yang bukan nol dalam baris itu adalah 1, disebut satu utama (*leading one*).
2. Jika ada baris nol (baris yang seluruh entrinya bernilai nol), maka baris nol tersebut terletak paling bawah atau paling akhir.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka satu utama dalam baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari satu utama pada baris yang lebih tinggi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Setiap kolom yang memuat satu utama mempunyai nol di tempat lain.

   Matriks yang memiliki 4 sifat pertama di atas disebut dalam bentuk eselon baris tereduksi (*reduced-row-echelon form*) (Anton & Rorres, 2004:9).

Definisi 2.6.3

Jika A matriks kuadrat dengan n baris dan n kolom, maka A dikatakan non-singular $(det \neq 0)$ apabila $rank(A) = r(A) = r = n$ dan singular $(det = 0)$ apabila $r < n$ (Supranto, 2003:111).

Rank suatu matriks dapat digunakan untuk menentukan ada tidaknya suatu solusi dari sistem persamaan linier. Apabila besarnya rank matriks A sama dengan jumlah baris atau kolom maka persamaan itu mempunyai solusi yang unik (*unique solution*) dan matriks A disebut *Full Rank Matrix*. Akan tetapi apabila besarnya nilai rank itu lebih kecil daripada banyak baris atau kolom maka persamaan itu tidak mempunyai pemecahan dan matriks koefisien A disebut *Non Full Rank Matrix*. Nilai rank dari suatu matriks dapat dicari mempergunakan transformasi elementer. Dengan cara ini besarnya rank suatu matriks dapat diketahui dengan melihat determinant yang tak nol dari minor matriks dengan jumlah baris dan kolom tertentu. Jumlah baris atau kolom itulah yang menentukan besarnya nilai rank (Supranto, 2003:112).

Contoh 2.6.3

Berikut adalah contoh operasi baris untuk mencari besarnya nilai rank matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tukar baris pertama dengan baris ketiga dari matriks A, maka diperoleh matriks baru, katakan sebagai A_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}_{-2R_2}$$

$(-2R_2)$, berarti baris ketiga dikurangi 2 kali baris kedua.

2. Dari matriks A_1 diperoleh matriks A_2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dari matriks A_2, baris pertama dikalikan dengan $\frac{1}{5}$ dan diperoleh matriks A_3 :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Dari matriks A_3, baris kedua dikurangi baris pertama, maka diperoleh matriks A_4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Dari matriks A_4 kolom kedua dikurangi 4 kali kolom pertama, maka diperoleh matriks A_5 sebagai berikut:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari matriks A_5 terlihat suatu minor matriks dengan dua baris dan dua kolom dimana determinannya adalah $(1 \times 1) - (0 \times 0) = 1$, maka disimpulkan bahwa matriks A mempunyai $rank = r = 2$.

2.7 Sistem Persamaan Linier dengan Matriks

Suatu persamaan linier dalam n peubah (*variable*) adalah persamaan dengan bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1, a_2, ..., a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan real dan $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah peubah. Dengan demikian maka suatu sistem linier dari m persamaan dalam n peubah adalah satu sistem berbentuk:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... + a_{mn}x_n = b_m \quad (1) \end{gathered}$$

di mana a_{ij} dan b_i semuanya adalah bilangan-bilangan real.

Dapat dilihat bahwa sistem persamaan linier tersebut dapat direpresentasikan sebagai persamaan perkalian matrik $Ax = b$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m \times n} \end{bmatrix} \text{berukuran } m \times n,$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matriks $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan matriks $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ adalah matriks kolom. Untuk selanjutnya jika disebut sistem $Ax = b$ berarti ekivalen dengan menyebutkan sistem persamaan linier dengan n variabel dan m persamaan yang dapat dipresentasikan sebagai sistem persamaan perkalian matriks $Ax = b$. Jika $b_1, b_2, \dots, b_n$ semuanya nol maka sistem ini disebut sistem persamaan linier homogen. Jika terdapat $b_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$ maka disebut sistem persamaan linier tak homogen. Sistem-sistem bentuk (1) disebut sebagai sistem linier $m \times n$. Berikut adalah contoh-contoh sistem linier:

a. $x_1 + 2x_2 = 5$
   $2x_1 + 3x_2 = 8$

b. $x_1 - x_2 + x_3 = 2$
   $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$

c. $x_1 + x_2 = 2$
   $x_1 - x_2 = 1$
   $x_1 = 4$

Sistem (a) adalah sistem 2×2, (b) adalah sistem 2×3, dan (c) adalah sistem 3×2. Jika sistem linier tidak memiliki penyelesaian maka dikatakan bahwa sistem tersebut tak konsisten (*inconsistent*). Jika sistem linier mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, maka dikatakan bahwa sistem tersebut (*consistent*). Himpunan semua penyelesaian dari sistem linier disebut himpunan penyelesaian dari sistem. Jika suatu sistem takkonsisten, maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong. Suatu sistem konsisten akan memiliki suatu himpunan penyelesaian yang takkosong (Leon, 2001:1-2).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.7.1

Setiap sistem persamaan linier memiliki salah satu dari tiga kemungkinan berikut ini, yaitu: tidak memiliki solusi, tepat satu solusi, atau takterhingga banyaknya solusi (Anton & Rorres, 2004:65).

Bukti:

Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem persamaan linier, salah satu dari yang berikut ini adalah benar: (a) sistem tidak memiliki solusi, (b) sistem memiliki tepat satu solusi, atau (c) sistem memiliki lebih dari satu solusi. Bukti ini akan lengkap jika dapat ditunjukkan bahwa sistem memiliki takterhingga banyaknya solusi pada kasus (c). Asumsikan bahwa $Ax = b$ memiliki solusi lebih dari satu, dan misalkan $x_0 = x_1 - x_2$, dimana x_1 dan x_2 adalah dua solusi yang berbeda. Karena x_1 dan x_2 berbeda, maka matriks x_0 adalah taknol, terlebih lagi,

$Ax_0 = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0.$

Jika dimisalkan k adalah skalar sebarang, maka

$$A(x_1 + kx_0) = Ax_1 + A(kx_0) = Ax_1 + k(Ax_0) = b + k0 = b + 0 = b$$

Dimana $x_1 + kx_0$ adalah solusi dari $Ax = b$. Karena x_0 adalah taknol dan terdapat banyak Memilihan untuk k, maka sistem $Ax = b$ memiliki takterhingga banyaknya solusi. ■

Ketiga kasus tersebut, dapat diilustrasikan dengan pencarian titik potong garis lurus, maka jelaslah bahwa sistem demikian ini mempunyai tiga kemungkinan:

1. Tidak ada solusi, kalau kedua garis itu sejajar.
2. Tepat satu solusi, kalau kedua garis itu berpotongan.
3. Ada terhingga banyaknya solusi, kalau kedua garis itu berimpit (Cullen, 1995).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.7.2

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang invertibel, maka untuk setiap matriks b, $n \times 1$, sistem persamaan $Ax = b$ memiliki tepat satu solusi, yaitu $x = A^{-1}b$ (Anton & Rorres, 2004:66).

Bukti:

Karena $AA^{-1}b = b$, maka $x = A^{-1}b$ adalah solusi untuk $Ax = b$. Untuk menunjukkan bahwa ini merupakan satu-satunya solusi, dapat diasumsikan bahwa x_0 adalah solusi sembarang, kemudian menunjukkan bahwa x_0 pasti merupakan solusi $A^{-1}b$. Jika x_0 adalah solusi sebarang, maka $Ax_0 = b$. Dengan mengalikan kedua sisi A^{-1}, diperoleh $x_0 = A^{-1}b$ ■

2.8 Konsep Invers dalam Al-qur'an

Sebagaimana bahasan tentang invers yang menyatakan suatu kebalikan atau lawan dalam kehidupan sehari-hari. Invers dapat dianalogikan sebagai lawan dari sesuatu. Misalkan saja A adalah laki-laki maka lawannya (A^{-1}) adalah perempuan. Begitu juga hal yang lainnya seperti hidup-mati, senang-susah, baik-buruk, langit-bumi, dan lain sebagainya. Jadi segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah SWT di dunia ini berpasang-pasangan. Sebagaimana dijelaskan dalam surat An-Najm Ayat 43-48 tentang kekuasaan Allah SWT yang telah menciptakan makhluknya secara berpasang-pasangan.

وَأَنَّهُۥ هُوَ أَضۡحَكَ وَأَبۡكَىٰ ﴿٤٣﴾ وَأَنَّهُۥ هُوَ أَمَاتَ وَأَحۡيَا ﴿٤٤﴾ وَأَنَّهُۥ خَلَقَ ٱلزَّوۡجَيۡنِ ٱلذَّكَرَ وَٱلۡأُنثَىٰ
﴿٤٥﴾ مِن نُّطۡفَةٍ إِذَا تُمۡنَىٰ ﴿٤٦﴾ وَأَنَّ عَلَيۡهِ ٱلنَّشۡأَةَ ٱلۡأُخۡرَىٰ ﴿٤٧﴾ وَأَنَّهُۥ هُوَ أَغۡنَىٰ وَأَقۡنَىٰ ﴿٤٨﴾

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya: “*Dan bahwasanya dialah yang menjadikan orang tertawa dan menangis (43), Dan bahwasanya dialah yang mematikan dan menghidupkan (44), Dan bahwasanya dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita (45), Dari air mani, apabila dipancarkan (46), Dan bahwasannya Dia-lah yang menetapkan kejadian yang lain(kebangkitan sesudah mati) (47), Dan bahwasannya dia yang memberikan kekayaan dan memberikan kecukupan (48)*”. (QS. An-Najm:43-48)

Penjelasan dari ayat tersebut yaitu sesungguhnya Allah SWT menciptakan pada hamba-hambanya tertawa dan menangis beserta sebab keduanya. Maksudnya bahwa Allah menciptakan hal-hal yang menyenangkan dan hal-hal yang menyedihkan yaitu perbuatan-perbuatan yang saleh dan juga perbuatan-perbuatan yang jahat. Dan menghidupkan siapa saja yang Dia kehendaki hidupnya. Dia tiupkan ruh pada *nuftah* yang mati lalu Dia jadikan *nuftah* itu hidup. Dan bahwa Allah menciptakan laki-laki dan perempuan, baik manusia maupun binatang lainnya dari mani yang dicurahkan pada rahim. Dan sesungguhnya menjadi tanggungan Allah untuk menghidupkan sesudah Dia mematikan, supaya Dia memberi balasan kepada orang yang berbuat baik maupun yang berbuat buruk atas perbuatan masing-masing. Dan bahwasannya Allah Ta’ala membuat kaya orang yang Dia kehendaki diantara hamba-hamba-Nya dan membuat fakir orang yang Dia kehendaki sesuai dengan kesiapan masing-masing yang Dia ketahui padanya, dan sesuai dengan kemampuannya untuk mencari harta menurut sunnah-sunnah yang diketahui pada kehidupan ini. Hal ini merupakan peringatan, betapa sempurnanya kekuasaan Allah karena *nuftah* adalah *jisim* menurut lahirnya. Allah menciptakan padanya anggota-anggota yang bermacam-macam dan tabiat-tabiat yang berbeda pada jenis jantan maupun betina (Al-Maraghi, 1989:116).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa jika A matriks bujur sangkar yang invertibel, maka terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, dengan I adalah matriks identitas. Dalam hal ini A^{-1} disebut sebagai invers dari A. Namun ada suatu matriks bujur sangkar yang tidak invertibel atau tidak dapat dicari inversnya dikarenakan determinannya adalah nol. Selain itu, matriks tidak bujur sangkar atau $m \times n$ juga tidak invertibel karena tidak dapat dicari inversnya dengan cara biasa.

Sehingga suatu matriks dapat diidentifikasi menjadi dua, yaitu matriks yang invertibel dan non invertibel. Matriks yang invertibel adalah matriks yang non singular atau determinannya tidak sama dengan nol dan matriks yang non invertibel adalah matriks yang singular atau determinannya sama dengan nol. Matriks yang non invertibel dibagi menjadi dua yaitu matriks non invertibel yang berukuran $n \times n$ dan $m \times n$.

Matematikawan Moore (1935) dan Penrose (1955) telah menemukan suatu generalisasi invers matriks untuk suatu matriks berukuran $m \times n$ yang dikenal dengan nama Invers Moore Penrose. Invers Moore Penrose biasa dinotasikan dengan A^{+}. Konsep invers Moore Penrose ini dapat digunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks yang singular dan non invertibel. Berikut ini akan dijelaskan definisi, teorema, bukti, algoritma, dan contoh menentukan invers Moore Penrose serta aplikasinya pada sistem persamaan linier.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1 Invers Moore Penrose

Definisi 3.1.1

Moore mendefinisikan generalisasi invers yaitu jika $A \in C^{m \times n}$ maka generalisasi invers A adalah matriks *unique* (tunggal) A^+ yang memenuhi:

(i) $A\,A^+ = P_{R(A)}$

(ii) $A^+A = P_{R(A)}$ (Campbell & Meyer, 2009:9).

Definisi Moore tersebut ditemukan pada tahun 1935, Moore menyatakan bahwa A^+ adalah generalisasi invers A dengan P (*Orthogonal projector*) dan $R(A)$ (*Range of* A) sehingga $P_{R(A)}$ adalah suatu proyeksi ortogonal dengan daerah hasil A. Kemudian pada tahun 1955, Penrose menyempurnakan definisi Moore sebagai berikut.

Definisi 3.1.2.

Jika $A \in C^{m \times n}$ maka A^+ adalah matriks *unique* (tunggal) pada $C^{n \times m}$ yang memenuhi sifat berikut:

(i) $A\,A^+A = A,$

(ii) $A^+A\,A^+ = A^+,$

(iii) $(A\,A^+)^* = A\,A^+,$

(iv) $(A^+A)^* = A^+A,$

dengan $*$ adalah transpos konjugat (Campbell & Meyer, 2009:9).

Definisi Moore dan Penrose tersebut kemudian dikenal dengan invers Moore Penrose. Dari definisi tersebut, jika A^+ ada maka tunggal dan disebut Invers Moore Penrose dari A atau jika diberikan A sebarang matriks berukuran $m \times n$, maka terdapat dengan tunggal invers Moore Penrose (A^+) berukuran $n \times m$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akan dibuktikan ketunggalan dari invers Moore Penrose tersebut. Misalkan jika X^+ dan Y^+ adalah invers Moore Penrose dari A, maka X^+ dan Y^+ memenuhi keempat sifat pada Definisi 3.1.2, sehingga berlaku:

$AY^+ = (AX^+A)Y^+ = (AX^+)(AY^+)$

$Y^+A = Y^+(AX^+A) = (Y^+A)(X^+A)$

dengan sifat (iii) dan (iv) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
AY^+ &= \left((AX^+)(AY^+)\right)^* && \text{. . . sifat (iii)}\\
&= (AY^+)^*(AX^+)^* && \text{. . . sifat transpos konjugat}\\
&= (AY^+)(AX^+) && \text{. . . sifat (iii)}\\
&= (AY^+A)X^+ && \text{. . . sifat (i)}\\
&= AX^+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y^+A &= \left((Y^+A)(X^+A)\right)^* && \text{. . . sifat (iv)}\\
&= (X^+A)^*(Y^+A)^* && \text{. . . sifat transpos konjugat}\\
&= (X^+A)(Y^+A) && \text{. . . sifat (iv)}\\
&= X^+(AY^+A) && \text{. . . sifat (i)}\\
&= X^+A
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $X^+ = Y^+$, artinya A^+ tunggal.

Teorema 3.1.1.

Misalkan bahwa $A \in C^{m\times n}$, maka $(A^+)^+ = A$ (Campbell & Meyer, 2009:11).

Bukti:

Berdasarkan sifat (i) – (iv) pada definisi 3.1.2, misalkan $B = A^+$ maka:

$ABA = A,$

$BAB = B,$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$(AB)^* = AB,$

$(BA)^* = BA.$

Di mana jika $B^+ = A$ sifat tersebut juga dapat dituliskan menjadi

$BAB = B,$

$ABA = A,$

$(AB)^* = AB,$

$(BA)^* = BA.$

Sehingga nampak bahwa $A = B^+$, karena $B = A^+$maka $A = B^+ = (A^+)^+$.

Jadi terbukti bahwa $A = (A^+)^+$.

Selanjutnya akan dijelaskan langkah-langkah untuk menghitung invers Moore Penrose. Untuk memudahkan dalam mengetahui bahwa invers Moore Penrose ada untuk setiap matriks baik yang invertibel maupun yang non invertibel maka terlebih dahulu dilakukan pengecekan determinan matriks yang bertujuan untuk mengetahui matriks tersebut singular atau tidak.

Algoritma 3.1.1

Menurut Campbell dan Meyer (2009), algoritma faktorisasi rank penuh untuk memperoleh generalisasi invers Moore Penrose dari sebarang matriks $A \in C^{m\times n}$, yaitu:

(i) Mereduksi A sehingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi sebut E_A

(ii) Memilih kolom berbeda (*distinguished*) dari A dan tempatkan pada kolom-kolom matriks B yang berorder sama seperti tampak pada A

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(iii) Memilih baris tak nol dari E_A dan tempatkan pada baris matriks C yang berorder sama seperti tampak pada E_A

(iv) Menghitung $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

(v) Menghitung A^+ dengan rumus $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}\,(B^*B)^{-1}B^*$.

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh menentukan invers Moore Penrose dan proses menghitungnya. Adapun untuk memudahkan dalam menghitung, penulis menggunakan alat bantu software Matlab.

Contoh 3.1.1 Invers Moore Penrose untuk suatu matriks yang berukuran $m \times n$ dengan $m = 8$ dan $n = 6$.

Diketahui suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}$

Pada contoh 3.1.1 ini, matriks $A_{m\times n}$ berukuran 8×6. Jelas bahwa A tidak invertible karena A bukan matriks bujur sangkar dan tidak dapat dihitung determinannya. Sehingga untuk mencari inversnya dihitung menggunakan algoritma untuk menghitung invers Moore Penrose.

Langkah pertama yaitu dengan menghitung A^+ berdasarkan algoritma 3.1.1 sebagai berikut:

(i) Menggunakan operasi baris elementer, reduksi A dengan eselon baris

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Memilih matriks B yang terbentuk dari kolom yang berbeda dari A, sehingga

$$B = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 \\ 9 & 55 & 54 \\ 17 & 47 & 46 \\ 40 & 26 & 27 \\ 32 & 34 & 35 \\ 41 & 23 & 22 \\ 49 & 15 & 14 \\ 8 & 58 & 59 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 64 & 9 & 17 & 40 & 32 & 41 & 49 & 8 \\ 2 & 55 & 47 & 26 & 34 & 23 & 15 & 58 \\ 3 & 54 & 46 & 27 & 35 & 22 & 14 & 59 \end{bmatrix}$$

(iii) Memilih matriks C yang terbentuk dari baris tak nol dari E_A sehingga

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(iv) Menghitung CC^*, B^*B , $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

$$CC^* = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -7 \\ 7 & 35 & -37 \\ -7 & -37 & 42 \end{bmatrix}, B^*B = \begin{bmatrix} 11236 & 5692 & 5720 \\ 5692 & 11188 & 11168 \\ 5720 & 11168 & 11156 \end{bmatrix},$$

$$(CC^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6474 & -0.2244 & -0.0897 \\ -0.2244 & 0.4936 & 0.3974 \\ -0.0897 & 0.3974 & 0.3590 \end{bmatrix} \; dan \; (B^*B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0005 & -0.0006 \\ 0.0005 & 0.1274 & -0.1278 \\ -0.0006 & -0.1278 & 0.1284 \end{bmatrix}$$

(v) Mensubstitusikan hasil dari step (II), (III), dan (IV) ke dalam rumus

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$A^{+}=\begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^{+} adalah invers Moore Penrose dengan mengecek bahwa A^{+} memenuhi keempat sifat pada definisi 3.1.2 sebagai berikut:

(i) $A\,A^{+}A = A,$

$$\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5417 & -0.2083 & -0.1250 & 0.2917 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & -0.0417 \\ -0.2083 & 0.3988 & 0.3393 & -0.0298 & 0.0298 & 0.1607 & 0.1012 & 0.2083 \\ -0.1250 & 0.3393 & 0.3036 & -0.0179 & 0.0179 & 0.1964 & 0.1607 & 0.1250 \\ 0.2917 & -0.0298 & -0.0179 & 0.2560 & 0.2440 & 0.0179 & 0.0298 & 0.2083 \\ 0.2083 & 0.0298 & 0.0179 & 0.2440 & 0.2560 & -0.0179 & -0.0298 & 0.2917 \\ 0.1250 & 0.1607 & 0.1964 & 0.0179 & -0.0179 & 0.3036 & 0.3393 & -0.1250 \\ 0.2083 & 0.1012 & 0.1607 & 0.0298 & -0.0298 & 0.3393 & 0.3988 & -0.2083 \\ -0.0417 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & 0.2917 & -0.1250 & -0.2083 & 0.5417 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 \end{bmatrix}$$

Dari peritungan di atas nampak bahwa sifat (i) terpenuhi.

(ii) $A^{+}A\,A^{+} = A^{+},$

$$\begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0165 & -0.0164 & 0.0174 & 0.0173 & -0.0161 & -0.0160 & 0.0170 \\ -0.0121 & 0.0132 & 0.0130 & -0.0114 & -0.0112 & 0.0124 & 0.0122 & -0.0106 \\ -0.0055 & 0.0064 & 0.0060 & -0.0043 & -0.0040 & 0.0049 & 0.0045 & -0.0028 \\ -0.0020 & 0.0039 & 0.0046 & -0.0038 & -0.0044 & 0.0064 & 0.0070 & -0.0063 \\ -0.0086 & 0.0108 & 0.0115 & -0.0109 & -0.0117 & 0.0139 & 0.0147 & -0.0141 \\ 0.0142 & -0.0140 & -0.0149 & 0.0169 & 0.0178 & -0.0176 & -0.0185 & 0.0205 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (ii) terpenuhi

(iii) $(A\,A^{+})^{*} = A\,A^{+}$,

$$\begin{bmatrix} 0.5417 & -0.2083 & -0.1250 & 0.2917 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & -0.0417 \\ -0.2083 & 0.3988 & 0.3393 & -0.0298 & 0.0298 & 0.1607 & 0.1012 & 0.2083 \\ -0.1250 & 0.3393 & 0.3036 & -0.0179 & 0.0179 & 0.1964 & 0.1607 & 0.1250 \\ 0.2917 & -0.0298 & -0.0179 & 0.2560 & 0.2440 & 0.0179 & 0.0298 & 0.2083 \\ 0.2083 & 0.0298 & 0.0179 & 0.2440 & 0.2560 & -0.0179 & -0.0298 & 0.2917 \\ 0.1250 & 0.1607 & 0.1964 & 0.0179 & -0.0179 & 0.3036 & 0.3393 & -0.1250 \\ 0.2083 & 0.1012 & 0.1607 & 0.0298 & -0.0298 & 0.3393 & 0.3988 & -0.2083 \\ -0.0417 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & 0.2917 & -0.1250 & -0.2083 & 0.5417 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 0.5417 & -0.2083 & -0.1250 & 0.2917 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & -0.0417 \\ -0.2083 & 0.3988 & 0.3393 & -0.0298 & 0.0298 & 0.1607 & 0.1012 & 0.2083 \\ -0.1250 & 0.3393 & 0.3036 & -0.0179 & 0.0179 & 0.1964 & 0.1607 & 0.1250 \\ 0.2917 & -0.0298 & -0.0179 & 0.2560 & 0.2440 & 0.0179 & 0.0298 & 0.2083 \\ 0.2083 & 0.0298 & 0.0179 & 0.2440 & 0.2560 & -0.0179 & -0.0298 & 0.2917 \\ 0.1250 & 0.1607 & 0.1964 & 0.0179 & -0.0179 & 0.3036 & 0.3393 & -0.1250 \\ 0.2083 & 0.1012 & 0.1607 & 0.0298 & -0.0298 & 0.3393 & 0.3988 & -0.2083 \\ -0.0417 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & 0.2917 & -0.1250 & -0.2083 & 0.5417 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5417 & -0.2083 & -0.1250 & 0.2917 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & -0.0417 \\ -0.2083 & 0.3988 & 0.3393 & -0.0298 & 0.0298 & 0.1607 & 0.1012 & 0.2083 \\ -0.1250 & 0.3393 & 0.3036 & -0.0179 & 0.0179 & 0.1964 & 0.1607 & 0.1250 \\ 0.2917 & -0.0298 & -0.0179 & 0.2560 & 0.2440 & 0.0179 & 0.0298 & 0.2083 \\ 0.2083 & 0.0298 & 0.0179 & 0.2440 & 0.2560 & -0.0179 & -0.0298 & 0.2917 \\ 0.1250 & 0.1607 & 0.1964 & 0.0179 & -0.0179 & 0.3036 & 0.3393 & -0.1250 \\ 0.2083 & 0.1012 & 0.1607 & 0.0298 & -0.0298 & 0.3393 & 0.3988 & -0.2083 \\ -0.0417 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & 0.2917 & -0.1250 & -0.2083 & 0.5417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5417 & -0.2083 & -0.1250 & 0.2917 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & -0.0417 \\ -0.2083 & 0.3988 & 0.3393 & -0.0298 & 0.0298 & 0.1607 & 0.1012 & 0.2083 \\ -0.1250 & 0.3393 & 0.3036 & -0.0179 & 0.0179 & 0.1964 & 0.1607 & 0.1250 \\ 0.2917 & -0.0298 & -0.0179 & 0.2560 & 0.2440 & 0.0179 & 0.0298 & 0.2083 \\ 0.2083 & 0.0298 & 0.0179 & 0.2440 & 0.2560 & -0.0179 & -0.0298 & 0.2917 \\ 0.1250 & 0.1607 & 0.1964 & 0.0179 & -0.0179 & 0.3036 & 0.3393 & -0.1250 \\ 0.2083 & 0.1012 & 0.1607 & 0.0298 & -0.0298 & 0.3393 & 0.3988 & -0.2083 \\ -0.0417 & 0.2083 & 0.1250 & 0.2083 & 0.2917 & -0.1250 & -0.2083 & 0.5417 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (iii) terpenuhi

(iv) $(A^{+}A\,)^{*} = \; A^{+}A.$

$$\begin{bmatrix} 0.6474 & -0.2244 & -0.0897 & 0.2436 & 0.1090 & 0.3141 \\ -0.2244 & 0.4936 & 0.3974 & 0.0641 & 0.1603 & 0.1090 \\ -0.0897 & 0.3974 & 0.3590 & 0.0256 & 0.0641 & 0.2436 \\ 0.2436 & 0.0641 & 0.0256 & 0.3590 & 0.3974 & -0.0897 \\ 0.1090 & 0.1603 & 0.0641 & 0.3974 & 0.4936 & -0.2244 \\ 0.3141 & 0.1090 & 0.2436 & -0.0897 & -0.2244 & 0.6474 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 0.6474 & -0.2244 & -0.0897 & 0.2436 & 0.1090 & 0.3141 \\ -0.2244 & 0.4936 & 0.3974 & 0.0641 & 0.1603 & 0.1090 \\ -0.0897 & 0.3974 & 0.3590 & 0.0256 & 0.0641 & 0.2436 \\ 0.2436 & 0.0641 & 0.0256 & 0.3590 & 0.3974 & -0.0897 \\ 0.1090 & 0.1603 & 0.0641 & 0.3974 & 0.4936 & -0.2244 \\ 0.3141 & 0.1090 & 0.2436 & -0.0897 & -0.2244 & 0.6474 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6474 & -0.2244 & -0.0897 & 0.2436 & 0.1090 & 0.3141 \\ -0.2244 & 0.4936 & 0.3974 & 0.0641 & 0.1603 & 0.1090 \\ -0.0897 & 0.3974 & 0.3590 & 0.0256 & 0.0641 & 0.2436 \\ 0.2436 & 0.0641 & 0.0256 & 0.3590 & 0.3974 & -0.0897 \\ 0.1090 & 0.1603 & 0.0641 & 0.3974 & 0.4936 & -0.2244 \\ 0.3141 & 0.1090 & 0.2436 & -0.0897 & -0.2244 & 0.6474 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6474 & -0.2244 & -0.0897 & 0.2436 & 0.1090 & 0.3141 \\ -0.2244 & 0.4936 & 0.3974 & 0.0641 & 0.1603 & 0.1090 \\ -0.0897 & 0.3974 & 0.3590 & 0.0256 & 0.0641 & 0.2436 \\ 0.2436 & 0.0641 & 0.0256 & 0.3590 & 0.3974 & -0.0897 \\ 0.1090 & 0.1603 & 0.0641 & 0.3974 & 0.4936 & -0.2244 \\ 0.3141 & 0.1090 & 0.2436 & -0.0897 & -0.2244 & 0.6474 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (iv) terpenuhi.

Sehingga karena matriks A^{+} memenuhi keempat sifat maka matriks A^{+} pada contoh ini disebut sebagai invers Moore Penrose dari A.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 3.1.2 Invers Moore Penrose untuk suatu matriks yang berukuran $n \times n$ yang tidak invertibel dengan $n = 4$.

Diketahui suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Untuk mengetahui apakah matriks A invertible atau tidak maka harus dicek determinannya. Dengan menggunakan program matlab dapat diketahui bahwa determinannya adalah nol (0). Sehingga matriks A tersebut tidak dapat dicari inversnya dengan cara biasa. Untuk kasus ini penulis menghitung inversnya dengan menggunakan cara untuk memperoleh invers matriks Moore penrose berdasarkan algoritma 3.1.1.

Adapun langkahnya adalah sebagai berikut:

(i) Menggunakan operasi baris elementer, reduksi A dengan eselon baris

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Memilih matriks B yang terbentuk dari kolom yang berbeda dari A, sehingga

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Memilih matriks C yang terbentuk dari baris tak nol dari E_A sehingga

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(iv) Hitung CC^*, B^*B , $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

$$CC^* = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B^*B = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(CC^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1053 & -0.1579 \\ -0.1579 & 0.7368 \end{bmatrix} dan\ (B^*B)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1111 & -0.1111 \\ -0.1111 & 1.111 \end{bmatrix}$$

(v) Mensubstitusikan hasil dari step (II), (III), dan (IV) ke dalam rumus

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^+ adalah invers Moore Penrose dengan mengecek bahwa A^+ memenuhi keempat sifat pada definisi 3.1.2 sebagai berikut:

(i) $A\,A\,^+A\; = A,$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, nampak bahwa sifat (i) terpenuhi.

(ii) $A^+A\,A^+ = A^+,$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, nampak bahwa sifat (ii) terpenuhi.

(iii) $(A\,A^{+})^{*} = A\,A^{+}$,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1579 & 0.0585 & 0.0292 & 0.0585 \\ -0.3158 & 0.1170 & 0.0585 & 0.1170 \\ 0.7368 & -0.1988 & -0.994 & -0.1988 \\ 0.2632 & -0.0234 & -0.0117 & -0.0234 \end{bmatrix} \right)^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, nampak bahwa sifat (iii) terpenuhi.

(iv) $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left(\begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right)^* = \begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1053 & 0.2105 & -0.1579 & 0.1579 \\ 0.2105 & 0.4211 & -0.3158 & 0.3158 \\ -0.1579 & -0.3158 & 0.7368 & 0.2632 \\ 0.1579 & 0.3158 & 0.2632 & 0.7368 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, dapat diketahui bahwa (iv) terpenuhi.

Berdasarkan contoh 3.1.2 tersebut, dapat dilihat bahwa matriks A adalah matriks bujur sangkar 4×4 yang tidak invertible, sehingga matriks A disebut singular. Hal ini menunjukkan bahwa untuk mencari invers matriks A tidak dapat menggunakan cara biasa tetapi harus menggunakan cara lain, yaitu invers Moore Penrose. Dari perhitungan di atas diperoleh bahwa matriks A^+ memenuhi keempat sifat. Sehingga dapat dikatakan bahwa A^+ merupakan invers Moore Penrose dari A.

Contoh 3.1.3 Invers Moore Penrose untuk suatu matriks yang berukuran $n \times n$ dan invertibel dengan $n = 4$.

Diketahui suatu matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk mengetahui bahwa matriks A invertibel maka harus dicek determinannya dengan menggunakan perhitungan biasa. Dengan menggunakan program matlab dapat diketahui bahwa determinannya adalah 6 dan invers dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.0000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menghitung A^+ atau invers Moore Penrose dari A sebagai berikut:

(i) Menggunakan operasi baris elementer, reduksi A dengan eselon baris

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Memilih matriks B yang terbentuk dari kolom yang berbeda dari A, sehingga

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(iii) Memilih matriks C yang terbentuk dari baris tak nol dari E_A sehingga

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iv) Menghitung CC^*, B^*B , $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

$$CC^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^*B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 15 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 11 \end{bmatrix},$$

$$(CC^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dan\ (B^*B)^{-1} = \begin{bmatrix} 4.7500 & 2.7500 & -5.000 & 2.2500 \\ 27500. & 1.9722 & -3.1111 & 1.3611 \\ -5.000 & -3.1111 & 5.5556 & -2.5556 \\ 2.2500 & 1.3611 & -2.5556 & 1.3056 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(v) Mensubstitusikan hasil dari step (II), (III), dan (IV) ke dalam rumus

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^{+} adalah invers Moore Penrose dengan mengecek bahwa A^{+} memenuhi keempat sifat pada definisi 3.1.2 sebagai berikut:

(i) $A\,A^{+}A = A$, terpenuhi. Dari perhitungan dengan matlab diperoleh bahwa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (i) terpenuhi.

(ii) $A^{+}A\,A^{+} = A^{+}$,

$$\begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 2.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.8333 & -0.1667 \\ 1.000 & -2.0000 & -0.6667 & 0.3333 \\ -0.5000 & 1.0000 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (ii) terpenuhi.

(iii) $(A\,A^{+})^{*} = A\,A^{+}$,

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}\right)^{*} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (iii) terpenuhi.

(iv) $(A^{+}A\,)^{*} = A^{+}A.$

$$\left(\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{*} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0 & -0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari perhitungan di atas dapat diketahui bahwa sifat (i) - (iv) terpenuhi.

Contoh 3.1.3 tersebut merupakan proses menghitung invers Moore Penrose untuk matriks $n \times n$ yang invertible. Dapat dilihat bahwa hasil perhitungan invers $n \times n$ dengan invers Moore Penrose adalah sama. Sehingga dapat dinyatakan jika $A_{n\times n}$ dan invertibel maka $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{-}$. Adapun untuk menghitung invers Moore Penrose berdasarkan pada Algoritma 3.1.1, pada step yang ke-2 dalam memilih kolom berbeda dari A dipilih semua kolom maksudnya adalah bahwa yang dipilih tak lain adalah matriks A itu sendiri. Hal ini dikarenakan jika hanya memilih beberapa kolom saja maka tidak akan diperoleh hasilnya. Begitu juga untuk pemilihan baris tak nol dari matriks A yang dipilih adalah semua baris atau hasil dari eselon baris tereduksi A.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, penulis simpulkan bahwa invers Moore Penrose ada untuk setiap matriks, baik matriks yang invertibel dan matriks yang non invertibel. Adapun algoritma umum untuk memperoleh invers Moore Penrose dari sebarang matriks $A \in C^{m\times n}$, yaitu:

(i) Mengidentifikasi matriks dengan cara menghitung determinannya untuk mengetahui matriks tersebut singular atau tidak.

(ii) Mereduksi matriks A sehingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi sebut E_A

(iii) Memilih kolom berbeda dari A dan tempatkan pada kolom-kolom matriks B yang berorder sama seperti tampak pada A. Adapun dalam memilih kolom yang berbeda ini maksudnya adalah entri-entri pada kolom yang dipilih bukan merupakan kelipatan dari entri-entri kolom

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

lain. Jika matriks A $n \times n$, maka kolom yang dipilih adalah semua kolom pada A, maksudnya adalah bahwa yang dipilih tak lain adalah matriks A itu sendiri. Hal ini dikarenakan jika hanya memilih beberapa kolom saja tidak akan diperoleh hasilnya. Selain itu, jika salah memilih kolom maka A^+ yang diperoleh bukan invers Moore Penrose.

(iv) Memilih baris tak nol dari E_A dan tempatkan pada baris matriks C yang berorder sama seperti tampak pada E_A. Adapun untuk pemilihan baris tak nol dari matriks A yang berukuran $n \times n$ yang dipilih adalah semua baris atau hasil dari eselon baris tereduksi A.

(v) Menghitung $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

(vi) Menghitung A^+ dengan rumus $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}\,(B^*B)^{-1}B^*$

(vii) Mengecek A^+ dengan sifat-sifat pada definisi 3.1.2. jika A^+ yang diperoleh tidak memenuhi keempat sifat tersebut maka A^+ bukanlah invers Moore Penrose sebaliknya jika keempat sifat terpenuhi maka A^+ merupakan invers Moore Penrose dari A.

3.2 Aplikasi A^+ terhadap $Ax = b$

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa suatu sistem persamaan $Ax = b$ dapat diselesaikan menggunakan konsep invers. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang invertibel, maka untuk setiap matriks b, $n \times 1$, sistem persamaan $Ax = b$ memiliki tepat satu solusi, yaitu $x = A^{-1}b$. Konsep ini hanya berlaku jika matriks A dari sistem tersebut berukuran $n \times n$ dan invertibel. Untuk mendapatkan solusi dari suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ dan non

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

invertibel, konsep tersebut dapat digeneralisasi dengan invers Moore Penrose sehingga solusi sistem menjadi $x = A^{+}b$ dengan A^{+} adalah invers Moore Penrose dari A.

Contoh 3.2.1 Analisis solusi sistem persamaan linier dengan invers Moore Penrose

Diketahui suatu sistem persamaan linier

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 6x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 6x_5 = 2$$

Sistem tersebut dapat dinyatakan dalam matriks $Ax = b$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Untuk menunjukkan bahwa A^{+} dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi sistem pada contoh ini maka digunakan dua cara yaitu dengan operasi baris elementer dan $x = A^{+}b$ kemudian membandingkan hasilnya.

a. Solusi sistem dengan operasi baris elementer

Dari bentuk sistem di atas, didapatkan matriks yang diperbesar (B), sehingga:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya melakukan operasi baris elementer untuk mereduksi B menjadi eselon baris

$$E_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari martiks elementer B tersebut didapatkan solusi umum berikut

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 1$$

$$x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$

Atau

$$x_1 = -2x_2 - 3x_4 - 3x_5 + 1$$

$$x_3 = -x_4 - 2x_5$$

Misalkan $x_2 = p, x_4 = q, x_5 = r,$ dengan p, q dan r adalah sebarang nilai maka

$$x_1 = -2p - 3q - 3r + 1$$

$$x_2 = p$$

$$x_3 = -q - 2r$$

$$x_4 = q$$

$$x_5 = r$$

Sehingga jika diambil $p = 0, q = 0$ dan $r = 0$ didapatkan solusi berikut

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ dan $x_5 = 0$

Apabila solusi tersebut disubstitusikan ke persamaan awal maka solusi tersebut akan terbukti memenuhi $Ax = b$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Artinya, solusi tersebut benar untuk nilai $p = 0, q = 0$ dan $r = 0$.

b. Solusi sistem dengan $x = A^+b$

Langkah pertama yaitu dengan menghitung A^+ berdasarkan algoritma 3.1.1 sebagai berikut:

(i) Menggunakan operasi baris elementer, reduksi A dengan eselon baris

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Memilih matriks B yang terbentuk dari kolom yang berbeda dari A, sehingga

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(iii) Memilih matriks C yang terbentuk dari baris tak nol dari E_A sehingga

$$C=\begin{bmatrix}1&2&0&3&3\\0&0&1&1&-2\end{bmatrix}$$

(iv) Menghitung CC^*, B^*B , $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

$$CC^*=\begin{bmatrix}23&-3\\-3&6\end{bmatrix},\ B^*B=\begin{bmatrix}10&1\\1&1\end{bmatrix},$$

$$(CC^*)^{-1}=\begin{bmatrix}0.0465&0.0233\\0.0233&0.1783\end{bmatrix}\ dan\ (B^*B)^{-1}=\begin{bmatrix}0.1111&-0.1111\\-0.1111&1.1111\end{bmatrix}$$

(v) Mensubstitusikan hasil dari step (II), (III), dan (IV) ke dalam rumus

$$A^+=C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$A^+=\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0130\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^+ adalah invers Moore Penrose dengan mengecek bahwa A^+ memenuhi keempat sifat pada definisi 3.1.2 sebagai berikut:

(i) $A\,A^+A=A,$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0.4444&0.2222&0.4444\\0&0.2222&0.1111&0.2222\\0&0.4444&0.2222&0.4444\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (i) terpenuhi.

(ii) $A^{+}A\,A^{+}=A^{+}$,

$$\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.0465&0.0930&0.0233&0.1628&0.0930\\0.0930&0.1860&0.0465&0.3256&0.1860\\0.0233&0.0465&0.1783&0.2481&-0.2868\\0.1628&0.3256&0.2481&0.7364&-0.0078\\0.0930&0.1860&-0.2868&-0.0078&0.8527\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (ii) terpenuhi.

(iii) $(A\,A^{+})^{*}=A\,A^{+}$,

$$\left(\begin{bmatrix}1&2&1&4&1\\2&4&0&6&6\\1&2&0&3&3\\2&4&0&6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0233&0.0052&0.0026&0.0052\\0.0465&0.0103&0.0052&0.0103\\0.1783&-0.0345&-0.0172&-0.0345\\0.2481&-0.0189&-0.0095&-0.0189\\-0.2868&0.0844&0.0422&0.0844\end{bmatrix}\right)^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0.4444&0.2222&0.4444\\0&0.2222&0.1111&0.2222\\0&0.4444&0.2222&0.4444\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0.4444&0.2222&0.4444\\0&0.2222&0.1111&0.2222\\0&0.4444&0.2222&0.4444\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0.4444&0.2222&0.4444\\0&0.2222&0.1111&0.2222\\0&0.4444&0.2222&0.4444\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \\ 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0.2222 \\ 0 & 0.4444 & 0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (iii) terpenuhi.

(iv) $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A.$

$$\left(\begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0052 & 0.0026 & 0.0052 \\ 0.0465 & 0.0103 & 0.0052 & 0.0103 \\ 0.1783 & -0.0345 & -0.0172 & -0.0345 \\ 0.2481 & -0.0189 & -0.0095 & -0.0189 \\ -0.2868 & 0.0844 & 0.0422 & 0.0844 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \right)^{*} = \begin{bmatrix} 0.0465 & 0.0930 & 0.0233 & 0.1628 & 0.0930 \\ 0.0930 & 0.1860 & 0.0465 & 0.3256 & 0.1860 \\ 0.0233 & 0.0465 & 0.1783 & 0.2481 & -0.2868 \\ 0.1628 & 0.3256 & 0.2481 & 0.7364 & -0.0078 \\ 0.0930 & 0.1860 & -0.2868 & -0.0078 & 0.8527 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0465 & 0.0930 & 0.0233 & 0.1628 & 0.0930 \\ 0.0930 & 0.1860 & 0.0465 & 0.3256 & 0.1860 \\ 0.0233 & 0.0465 & 0.1783 & 0.2481 & -0.2868 \\ 0.1628 & 0.3256 & 0.2481 & 0.7364 & -0.0078 \\ 0.0930 & 0.1860 & -0.2868 & -0.0078 & 0.8527 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 0.0465 & 0.0930 & 0.0233 & 0.1628 & 0.0930 \\ 0.0930 & 0.1860 & 0.0465 & 0.3256 & 0.1860 \\ 0.0233 & 0.0465 & 0.1783 & 0.2481 & -0.2868 \\ 0.1628 & 0.3256 & 0.2481 & 0.7364 & -0.0078 \\ 0.0930 & 0.1860 & -0.2868 & -0.0078 & 0.8527 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0465 & 0.0930 & 0.0233 & 0.1628 & 0.0930 \\ 0.0930 & 0.1860 & 0.0465 & 0.3256 & 0.1860 \\ 0.0233 & 0.0465 & 0.1783 & 0.2481 & -0.2868 \\ 0.1628 & 0.3256 & 0.2481 & 0.7364 & -0.0078 \\ 0.0930 & 0.1860 & -0.2868 & -0.0078 & 0.8527 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0465 & 0.0930 & 0.0233 & 0.1628 & 0.0930 \\ 0.0930 & 0.1860 & 0.0465 & 0.3256 & 0.1860 \\ 0.0233 & 0.0465 & 0.1783 & 0.2481 & -0.2868 \\ 0.1628 & 0.3256 & 0.2481 & 0.7364 & -0.0078 \\ 0.0930 & 0.1860 & -0.2868 & -0.0078 & 0.8527 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas nampak bahwa sifat (i) – (iv) terpenuhi.

Jadi $$A^{+} = \begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0052 & 0.0026 & 0.0052 \\ 0.0465 & 0.0103 & 0.0052 & 0.0103 \\ 0.1783 & -0.0345 & -0.0172 & -0.0345 \\ 0.2481 & -0.0189 & -0.0095 & -0.0189 \\ -0.2868 & 0.0844 & 0.0422 & 0.0844 \end{bmatrix}$$

Merupakan invers Moore Penrose dari A.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kemudian menghitung $x = A^{+}b$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0052 & 0.0026 & 0.0052 \\ 0.0465 & 0.0103 & 0.0052 & 0.0130 \\ 0.1783 & -0.0345 & -0.0172 & -0.0345 \\ 0.2481 & -0.0189 & -0.0095 & -0.0189 \\ -0.2868 & 0.0844 & 0.0422 & 0.0844 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0465 \\ 0.0930 \\ 0.0233 \\ 0.1628 \\ 0.0930 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya karena $x_2 = p, x_4 = q, x_5 = r$, maka dari perhitungan di atas dapat diketahui bahwa $p = 0.0930, q = 0.1628$ dan $r = 0.0930$.

Sehingga apabila solusi tersebut disubstitusikan ke persamaan awal maka solusi tersebut akan terbukti memenuhi $Ax = b$ dengan $x = A^{+}b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0465 \\ 0.0930 \\ 0.0233 \\ 0.1628 \\ 0.0930 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.9998 \\ 0.9999 \\ 1.9998 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Artinya, solusi tersebut mendekati solusi sebenarnya.

Jadi, sistem persamaan linier tersebut dapat diselesaikan menggunakan generalisasi dari invers matriks A^{+} sehingga $x = A^{+}b$ walaupun hanya untuk satu selesaian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di bab III, dapat disimpulkan bahwa:

1. Invers matriks yang non invertibel dapat dihitung dengan Invers Moore Penrose karena invers Moore Penrose ada untuk setiap matriks, baik matriks yang invertibel dan matriks yang non invertibel. Adapun algoritma umum untuk memperoleh invers Moore Penrose dari sebarang matriks $A \in C^{m \times n}$, yaitu:

   (i) Mengidentifikasi matriks dengan cara menghitung determinannya untuk mengetahui matriks tersebut singular atau tidak.

   (ii) Mereduksi matriks A sehingga diperoleh matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi sebut E_A

   (iii) Memilih kolom berbeda dari A dan tempatkan pada kolom-kolom matriks B yang berorder sama seperti tampak pada A. Adapun dalam memilih kolom yang berbeda ini maksudnya adalah entri-entri pada kolom yang dipilih bukan merupakan kelipatan dari entri-entri kolom lain. Jika matriks A $n \times n$, maka kolom yang dipilih adalah semua kolom pada A, maksudnya adalah bahwa yang dipilih tak lain adalah matriks A itu sendiri. Hal ini dikarenakan jika hanya memilih beberapa kolom saja tidak akan diperoleh hasilnya. Selain itu, jika salah memilih kolom maka A^{+} yang diperoleh bukan invers Moore Penrose.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(iv) Memilih baris tak nol dari E_A dan tempatkan pada baris matriks C yang berorder sama seperti tampak pada E_A. Adapun untuk pemilihan baris tak nol dari matriks A yang berukuran $n \times n$ yang dipilih adalah semua baris atau hasil dari eselon baris tereduksi A.

(v) Menghitung $(CC^*)^{-1}$ dan $(B^*B)^{-1}$

(vi) Menghitung A^+ dengan rumus $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}\ (B^*B)^{-1}B^*$

(vii) Mengecek A^+ dengan sifat-sifat pada definisi 3.1.2. jika A^+ yang diperoleh tidak memenuhi keempat sifat tersebut maka A^+ bukanlah invers Moore Penrose sebaliknya jika keempat sifat terpenuhi maka A^+ merupakan invers Moore Penrose dari A.

2. Konsep invers Moore Penrose dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi dari sistem persamaan linier yang berbentuk $Ax = b$ dengan matrik A non invrtibel dan berukuran $m \times n$ sehingga $x = A^+b$, walaupun yang diperoleh hanya untuk satu selesaian.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis mencari invers Moore Penrose dengan metode faktorisasi rank penuh Campbell & Meyer dalam bukunya "*Generalized Inverses of Linier Transformations*". Bagi pembaca yang ingin membahas kembali masalah serupa, maka penulis menyarankan pembaca untuk menggunakan metode lain dalam menghitung invers Moore Penrose dan membuktikan teorema-teorema yang lain sekaligus mengkonstruksi program komputer untuk aplikasinya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Maliki Press.

Al-Maraghi, A. M.. 1989. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi 27*. Semarang: CV.Toha Putra.

Anggraeni, W.. 2006: *Aljabar Linier Dilengkapi dengan Program Matlab*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi aplikasi edisi kedelapan jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2005. *Aljabar Linier Elementer versi aplikasi edisi kedelapan jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Campbell, S. L. dan Meyer, C. D.. 2009. *Generalized Inverses of Linier Transformations*. New York: siam.

Cullen, C. G.. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia.

Hadley, G.. 1992. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Leon, S. J.. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya edisi kelima*. Jakarta: Erlangga.

Shadily, H.. 1983. *Ensiklopedia Indonesia*. Jakarta: Ikhtisar Baru.

Supranto, J.. 2003. *Pengantar Matrix*. Jakarta: PT Rineka Cipta.

Weaver, W. dan Gere, J. M.. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Bandung: Erlangga.

Yahya, Y., Suryadi, H. S., dan Agus, S.. 2004. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telep./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Iswahyuni Purwanti
Nim : 09610073
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Invers Moore Penrose dan Aplikasinya pada Sistem Persamaan Linier
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Oktober 2012	Konsultasi Bab I	1.
2.	27 November 2012	Kajian Agama Bab I	2.
3.	06 Desember 2012	Revisi Judul Skripsi	3.
4.	13 Desember 2012	Kajian Agama Bab II	4.
5.	14 Desember 2012	Konsultasi Bab I, Bab II, III	5.
6.	07 Januari 2013	Revisi Kajian Agama Proposal	6.
7.	07 Januari 2013	Revisi Proposal	7.
8.	11 Januari 2013	Kajian Agama	8.
9.	10 Januari 2013	Konsultasi Bab I- Bab IV	9.
10.	12 Januari 2013	ACC Kajian Agama	10.
11.	11 Januari 2013	Revisi Bab I- Bab IV	11.
12.	12 Januari 2013	ACC Skripsi	12.

Malang, 12 Januari 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran. Program menghitung invers Moore Penrose dengan Matlab

Program contoh 3.1.1.

```
clc,clear
%algoritma mencari IMP
%diketahui matriks A berukuran m x n
  A=[64     2     3    61    60     6
     ;9    55    54    12    13    51
    ;17    47    46    20    21    43
    ;40    26    27    37    36    30
    ;32    34    35    29    28    38
    ;41    23    22    44    45    19
    ;49    15    14    52    53    11
     ;8    58    59     5     4    62]
%selanjutnya melakukan operasi baris elementer A
EA=rref(A)
%tentukan matrik kolom B yg terbentuk dari kolom yg berbeda dari A
B=[64 2 3;9 55 54;17 47 46;40 26 27;32 34 35;41 23 22;49 15 14;8
58 59]
%B=A
BT=B.'
%tentukan matrik baris B yg terbentuk dari baris tak nol EA
C=[1 0 0 1 1 0;0 1 0 3 4 -3;0 0 1 -3 -4 4]
%C=EA
CT=C.'
%hitung D=BTranspos*B,E=C*CTranspos,invers(D),invers(E)
D=B.'*B
iD=inv(D)
E=C*C.'
iE=inv(E)
%hitung A+ dengan rumus CTranspos*invers(E)*invers(D)*BTranspos
IMPA=CT*iE*iD*BT
%cek sifat-sifat Moore Penrose
sft1=A*IMPA
sifat1=A*IMPA*A
sft2=IMPA*A
sifat2=IMPA*A*IMPA
sft3=(A*IMPA)
sifat3=(A*IMPA).'
sft4=(IMPA*A)
sifat4=(IMPA*A).'
```

Output:

```
A =
    64     2     3    61    60     6
     9    55    54    12    13    51
    17    47    46    20    21    43
    40    26    27    37    36    30
    32    34    35    29    28    38
    41    23    22    44    45    19
    49    15    14    52    53    11
     8    58    59     5     4    62
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
EA =
     1     0     0     1     1     0
     0     1     0     3     4    -3
     0     0     1    -3    -4     4
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0

B =
    64     2     3
     9    55    54
    17    47    46
    40    26    27
    32    34    35
    41    23    22
    49    15    14
     8    58    59

BT =
    64     9    17    40    32    41    49     8
     2    55    47    26    34    23    15    58
     3    54    46    27    35    22    14    59

C =
     1     0     0     1     1     0
     0     1     0     3     4    -3
     0     0     1    -3    -4     4

CT =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     1     3    -3
     1     4    -4
     0    -3     4

D =
       11236        5692        5720
        5692       11188       11168
        5720       11168       11156
iD =
    0.0001    0.0005   -0.0006
    0.0005    0.1274   -0.1278
   -0.0006   -0.1278    0.1284

E =
     3     7    -7
     7    35   -37
    -7   -37    42

iE =
    0.6474   -0.2244   -0.0897
   -0.2244    0.4936    0.3974
   -0.0897    0.3974    0.3590
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
IMPA =
    0.0177   -0.0165   -0.0164    0.0174    0.0173   -0.0161   -0.0160    0.0170
   -0.0121    0.0132    0.0130   -0.0114   -0.0112    0.0124    0.0122   -0.0106
   -0.0055    0.0064    0.0060   -0.0043   -0.0040    0.0049    0.0045   -0.0028
   -0.0020    0.0039    0.0046   -0.0038   -0.0044    0.0064    0.0070   -0.0063
   -0.0086    0.0108    0.0115   -0.0109   -0.0117    0.0139    0.0147   -0.0141
    0.0142   -0.0140   -0.0149    0.0169    0.0178   -0.0176   -0.0185    0.0205

sft1 =
    0.5417   -0.2083   -0.1250    0.2917    0.2083    0.1250    0.2083   -0.0417
   -0.2083    0.3988    0.3393   -0.0298    0.0298    0.1607    0.1012    0.2083
   -0.1250    0.3393    0.3036   -0.0179    0.0179    0.1964    0.1607    0.1250
    0.2917   -0.0298   -0.0179    0.2560    0.2440    0.0179    0.0298    0.2083
    0.2083    0.0298    0.0179    0.2440    0.2560   -0.0179   -0.0298    0.2917
    0.1250    0.1607    0.1964    0.0179   -0.0179    0.3036    0.3393   -0.1250
    0.2083    0.1012    0.1607    0.0298   -0.0298    0.3393    0.3988   -0.2083
   -0.0417    0.2083    0.1250    0.2083    0.2917   -0.1250   -0.2083    0.5417

sifat1 =
   64.0000    2.0000    3.0000   61.0000   60.0000    6.0000
    9.0000   55.0000   54.0000   12.0000   13.0000   51.0000
   17.0000   47.0000   46.0000   20.0000   21.0000   43.0000
   40.0000   26.0000   27.0000   37.0000   36.0000   30.0000
   32.0000   34.0000   35.0000   29.0000   28.0000   38.0000
   41.0000   23.0000   22.0000   44.0000   45.0000   19.0000
   49.0000   15.0000   14.0000   52.0000   53.0000   11.0000
    8.0000   58.0000   59.0000    5.0000    4.0000   62.0000

sft2 =
    0.6474   -0.2244   -0.0897    0.2436    0.1090    0.3141
   -0.2244    0.4936    0.3974    0.0641    0.1603    0.1090
   -0.0897    0.3974    0.3590    0.0256    0.0641    0.2436
    0.2436    0.0641    0.0256    0.3590    0.3974   -0.0897
    0.1090    0.1603    0.0641    0.3974    0.4936   -0.2244
    0.3141    0.1090    0.2436   -0.0897   -0.2244    0.6474

sifat2 =
    0.0177   -0.0165   -0.0164    0.0174    0.0173   -0.0161   -0.0160    0.0170
   -0.0121    0.0132    0.0130   -0.0114   -0.0112    0.0124    0.0122   -0.0106
   -0.0055    0.0064    0.0060   -0.0043   -0.0040    0.0049    0.0045   -0.0028
   -0.0020    0.0039    0.0046   -0.0038   -0.0044    0.0064    0.0070   -0.0063
   -0.0086    0.0108    0.0115   -0.0109   -0.0117    0.0139    0.0147   -0.0141
    0.0142   -0.0140   -0.0149    0.0169    0.0178   -0.0176   -0.0185    0.0205

sft3 =
    0.5417   -0.2083   -0.1250    0.2917    0.2083    0.1250    0.2083   -0.0417
   -0.2083    0.3988    0.3393   -0.0298    0.0298    0.1607    0.1012    0.2083
   -0.1250    0.3393    0.3036   -0.0179    0.0179    0.1964    0.1607    0.1250
    0.2917   -0.0298   -0.0179    0.2560    0.2440    0.0179    0.0298    0.2083
    0.2083    0.0298    0.0179    0.2440    0.2560   -0.0179   -0.0298    0.2917
    0.1250    0.1607    0.1964    0.0179   -0.0179    0.3036    0.3393   -0.1250
    0.2083    0.1012    0.1607    0.0298   -0.0298    0.3393    0.3988   -0.2083
   -0.0417    0.2083    0.1250    0.2083    0.2917   -0.1250   -0.2083    0.5417

sifat3 =
    0.5417   -0.2083   -0.1250    0.2917    0.2083    0.1250    0.2083   -0.0417
   -0.2083    0.3988    0.3393   -0.0298    0.0298    0.1607    0.1012    0.2083
   -0.1250    0.3393    0.3036   -0.0179    0.0179    0.1964    0.1607    0.1250
    0.2917   -0.0298   -0.0179    0.2560    0.2440    0.0179    0.0298    0.2083
    0.2083    0.0298    0.0179    0.2440    0.2560   -0.0179   -0.0298    0.2917
    0.1250    0.1607    0.1964    0.0179   -0.0179    0.3036    0.3393   -0.1250
    0.2083    0.1012    0.1607    0.0298   -0.0298    0.3393    0.3988   -0.2083
   -0.0417    0.2083    0.1250    0.2083    0.2917   -0.1250   -0.2083    0.5417
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
sft4 =
    0.6474   -0.2244   -0.0897    0.2436    0.1090    0.3141
   -0.2244    0.4936    0.3974    0.0641    0.1603    0.1090
   -0.0897    0.3974    0.3590    0.0256    0.0641    0.2436
    0.2436    0.0641    0.0256    0.3590    0.3974   -0.0897
    0.1090    0.1603    0.0641    0.3974    0.4936   -0.2244
    0.3141    0.1090    0.2436   -0.0897   -0.2244    0.6474

sifat4 =
    0.6474   -0.2244   -0.0897    0.2436    0.1090    0.3141
   -0.2244    0.4936    0.3974    0.0641    0.1603    0.1090
   -0.0897    0.3974    0.3590    0.0256    0.0641    0.2436
    0.2436    0.0641    0.0256    0.3590    0.3974   -0.0897
    0.1090    0.1603    0.0641    0.3974    0.4936   -0.2244
    0.3141    0.1090    0.2436   -0.0897   -0.2244    0.6474
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Program contoh 3.1.2.

```
clc,clear
%algoritma mencari IMP
%diketahui matriks A berukuran n x n tidak invertible
A=[1 2 1 4;2 4 0 6;1 2 0 3;2 4 0 6]
%cek A invertible
I=inv (A)
%selanjutnya melakukan operasi baris elementer A
EA=rref(A)
%tentukan matrik kolom B yg terbentuk dari kolom yg berbeda dari A
B=[1 4;2 6;1 3;2 6]
BT=B.'
%tentukan matrik baris B yg terbentuk dari baris tak nol EA
C=[1 2 0 3;0 0 1 1]
CT=C.'
%hitung D=BTranspos*B,E=C*CTranspos,invers(D),invers(E)
D=B.'*B
iD=inv(D)
E=C*C.'
iE=inv(E)
%hitung A+ dengan rumus CTranspos*invers(E)*invers(D)*BTranspos
IMPA=CT*iE*iD*BT
%cek sifat-sifat Moore Penrose
sft1=A*IMPA
sifat1=A*IMPA*A
sft2=IMPA*A
sifat2=IMPA*A*IMPA
sft3=(A*IMPA)
sifat3=(A*IMPA).'
sft4=(IMPA*A)
sifat4=(IMPA*A).'
```

Output:

```
A =

     1     2     1     4
     2     4     0     6
     1     2     0     3
     2     4     0     6
Warning: Matrix is singular to working precision.
> In mp at 6

I =
   Inf   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf   Inf   Inf
   Inf   Inf   Inf   Inf

EA =
     1     2     0     3
     0     0     1     1
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
B =
     1     4
     2     6
     1     3
     2     6

BT =
     1     2     1     2
     4     6     3     6

C =
     1     2     0     3
     0     0     1     1

CT =
     1     0
     2     0
     0     1
     3     1

D =
    10    31
    31    97

iD =
   10.7778   -3.4444
   -3.4444    1.1111

E =
    14     3
     3     2

iE =
    0.1053   -0.1579
   -0.1579    0.7368

IMPA =
   -0.4737    0.1287    0.0643    0.1287
   -0.9474    0.2573    0.1287    0.2573
    1.2105   -0.3041   -0.1520   -0.3041
   -0.2105    0.0819    0.0409    0.0819

sft1 =
   -2.0000    0.6667    0.3333    0.6667
   -6.0000    1.7778    0.8889    1.7778
   -3.0000    0.8889    0.4444    0.8889
   -6.0000    1.7778    0.8889    1.7778

sifat1 =
    1.0000    2.0000   -2.0000    1.0000
    2.0000    4.0000   -6.0000    0.0000
    1.0000    2.0000   -3.0000    0.0000
    2.0000    4.0000   -6.0000    0.0000
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
sft2 =
    0.1053    0.2105   -0.4737   -0.1579
    0.2105    0.4211   -0.9474   -0.3158
   -0.1579   -0.3158    1.2105    0.7368
    0.1579    0.3158   -0.2105    0.2632

sifat2 =
   -0.7895    0.1988    0.0994    0.1988
   -1.5789    0.3977    0.1988    0.3977
    1.6842   -0.4094   -0.2047   -0.4094
   -0.6842    0.1871    0.0936    0.1871

sft3 =
   -2.0000    0.6667    0.3333    0.6667
   -6.0000    1.7778    0.8889    1.7778
   -3.0000    0.8889    0.4444    0.8889
   -6.0000    1.7778    0.8889    1.7778

sifat3 =
   -2.0000   -6.0000   -3.0000   -6.0000
    0.6667    1.7778    0.8889    1.7778
    0.3333    0.8889    0.4444    0.8889
    0.6667    1.7778    0.8889    1.7778

sft4 =
    0.1053    0.2105   -0.4737   -0.1579
    0.2105    0.4211   -0.9474   -0.3158
   -0.1579   -0.3158    1.2105    0.7368
    0.1579    0.3158   -0.2105    0.2632

sifat4 =
    0.1053    0.2105   -0.1579    0.1579
    0.2105    0.4211   -0.3158    0.3158
   -0.4737   -0.9474    1.2105   -0.2105
   -0.1579   -0.3158    0.7368    0.2632
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Program contoh 3.1.3.

```
clc,clear
%algoritma mencari IMP
%diketahui matriks A berukuran n x n
A=[2 1 3 1;1 0 1 1;0 2 1 0;0 1 2 3]
%cek invertible atau tidak
I=inv(A)
%selanjutnya melakukan operasi baris elementer A
EA=rref(A)
%tentukan matrik kolom B yg terbentuk dari kolom yg berbeda dari A
B=A
BT=B.'
%tentukan matrik baris B yg terbentuk dari baris tak nol EA
C=EA
CT=C.'
%hitung D=BTranspos*B,E=C*CTranspos,invers(D),invers(E)
D=B.'*B
iD=inv(D)
E=C*C.'
iE=inv(E)
%hitung A+ dengan rumus CTranspos*invers(E)*invers(D)*BTranspos
IMPA=CT*iE*iD*BT
%cek sifat-sifat Moore Penrose
sft1=A*IMPA
sifat1=A*IMPA*A;
sft2=IMPA*A
sifat2=IMPA*A*IMPA
sft3=(A*IMPA)
sifat3=(A*IMPA).'
sft4=(IMPA*A)
sifat4=(IMPA*A).'
```

Output:

```
A =
     2     1     3     1
     1     0     1     1
     0     2     1     0
     0     1     2     3

I =
   -0.5000    2.0000    0.5000   -0.5000
   -0.5000    1.0000    0.8333   -0.1667
    1.0000   -2.0000   -0.6667    0.3333
   -0.5000    1.0000    0.1667    0.1667

EA =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
B =
     2     1     3     1
     1     0     1     1
     0     2     1     0
     0     1     2     3
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
BT =
     2     1     0     0
     1     0     2     1
     3     1     1     2
     1     1     0     3

C =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

CT =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

D =
     5     2     7     3
     2     6     7     4
     7     7    15    10
     3     4    10    11

iD =
    4.7500    2.7500   -5.0000    2.2500
    2.7500    1.9722   -3.1111    1.3611
   -5.0000   -3.1111    5.5556   -2.5556
    2.2500    1.3611   -2.5556    1.3056

E =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

iE =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1

IMPA =
   -0.5000    2.0000    0.5000   -0.5000
   -0.5000    1.0000    0.8333   -0.1667
    1.0000   -2.0000   -0.6667    0.3333
   -0.5000    1.0000    0.1667    0.1667

sft1 =
    1.0000    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    1.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000    1.0000         0
   -0.0000         0         0    1.0000
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
sifat1 =
    2.0000    1.0000    3.0000    1.0000
    1.0000   -0.0000    1.0000    1.0000
    0.0000    2.0000    1.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000    2.0000    3.0000

sft2 =
    1.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000   -0.0000
         0   -0.0000         0    1.0000

sifat2 =
   -0.5000    2.0000    0.5000   -0.5000
   -0.5000    1.0000    0.8333   -0.1667
    1.0000   -2.0000   -0.6667    0.3333
   -0.5000    1.0000    0.1667    0.1667

sft3 =
    1.0000    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    1.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000    1.0000         0
   -0.0000         0         0    1.0000

sifat3 =
    1.0000    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    1.0000   -0.0000         0
    0.0000   -0.0000    1.0000         0
   -0.0000   -0.0000         0    1.0000

sft4 =
    1.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000   -0.0000
         0   -0.0000         0    1.0000

sifat4 =
    1.0000    0.0000   -0.0000         0
   -0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000    1.0000         0
    0.0000    0.0000   -0.0000    1.0000
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Program contoh 3.2.1.

```
clc,clear
%algoritma mencari IMP
%diketahui matriks A berukuran 4x5 tidak invertible
A=[1 2 1 4 1;2 4 0 6 6;1 2 0 3 3;2 4 0 6 6]
%selanjutnya melakukan operasi baris elementer A
EA=rref(A)
%tentukan matrik kolom B yg terbentuk dari kolom yg berbeda dari A
B=[1 1;2 0;1 0;2 0]
BT=B.'
%tentukan matrik baris B yg terbentuk dari baris tak nol EA
C=[1 2 0 3 3;0 0 1 1 -2]
CT=C.'
%hitung D=BTranspos*B,E=C*CTranspos,invers(D),invers(E)
D=B.'*B
iD=inv(D)
E=C*C.'
iE=inv(E)
%hitung A+ dengan rumus CTranspos*invers(E)*invers(D)*BTranspos
IMPA=CT*iE*iD*BT
%cek sifat-sifat Moore Penrose
sft1=A*IMPA
sifat1=A*IMPA*A
sft2=IMPA*A
sifat2=IMPA*A*IMPA
sft3=(A*IMPA)
sifat3=(A*IMPA).'
sft4=(IMPA*A)
sifat4=(IMPA*A).'
```

Output:

```
A =
     1     2     1     4     1
     2     4     0     6     6
     1     2     0     3     3
     2     4     0     6     6

EA =
     1     2     0     3     3
     0     0     1     1    -2
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0

B =
     1     1
     2     0
     1     0
     2     0

BT =
     1     2     1     2
     1     0     0     0
C =
     1     2     0     3     3
     0     0     1     1    -2
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
CT =
     1     0
     2     0
     0     1
     3     1
     3    -2

D =
    10     1
     1     1

iD =
    0.1111   -0.1111
   -0.1111    1.1111

E =
    23    -3
    -3     6

iE =
    0.0465    0.0233
    0.0233    0.1783

IMPA =
    0.0233    0.0052    0.0026    0.0052
    0.0465    0.0103    0.0052    0.0103
    0.1783   -0.0345   -0.0172   -0.0345
    0.2481   -0.0189   -0.0095   -0.0189
   -0.2868    0.0844    0.0422    0.0844

sft1 =
    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444
    0.0000    0.2222    0.1111    0.2222
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444

sifat1 =
    1.0000    2.0000    1.0000    4.0000    1.0000
    2.0000    4.0000    0.0000    6.0000    6.0000
    1.0000    2.0000    0.0000    3.0000    3.0000
    2.0000    4.0000    0.0000    6.0000    6.0000

sft2 =
    0.0465    0.0930    0.0233    0.1628    0.0930
    0.0930    0.1860    0.0465    0.3256    0.1860
    0.0233    0.0465    0.1783    0.2481   -0.2868
    0.1628    0.3256    0.2481    0.7364   -0.0078
    0.0930    0.1860   -0.2868   -0.0078    0.8527

sifat2 =
    0.0233    0.0052    0.0026    0.0052
    0.0465    0.0103    0.0052    0.0103
    0.1783   -0.0345   -0.0172   -0.0345
    0.2481   -0.0189   -0.0095   -0.0189
   -0.2868    0.0844    0.0422    0.0844
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
sft3 =
    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444
    0.0000    0.2222    0.1111    0.2222
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444

sifat3 =

    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444
    0.0000    0.2222    0.1111    0.2222
    0.0000    0.4444    0.2222    0.4444

sft4 =
    0.0465    0.0930    0.0233    0.1628    0.0930
    0.0930    0.1860    0.0465    0.3256    0.1860
    0.0233    0.0465    0.1783    0.2481   -0.2868
    0.1628    0.3256    0.2481    0.7364   -0.0078
    0.0930    0.1860   -0.2868   -0.0078    0.8527

sifat4 =
    0.0465    0.0930    0.0233    0.1628    0.0930
    0.0930    0.1860    0.0465    0.3256    0.1860
    0.0233    0.0465    0.1783    0.2481   -0.2868
    0.1628    0.3256    0.2481    0.7364   -0.0078
    0.0930    0.1860   -0.2868   -0.0078    0.8527
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG