

**DISKRETISASI MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*) DENGAN  
METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ERNAWATI EFENDI**  
**NIM. 09610072**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**DISKRETISASI MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*) DENGAN  
METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada :  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**ERNAWATI EFENDI**  
**NIM. 09610072**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**DISKRETISASI MODEL REAKSI-DIFUSI (*TURING*) DENGAN  
METODE BEDA HINGGA EKSPRESIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ERNAWATI EFENDI**  
**NIM. 09610072**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji :  
Tanggal: 13 Maret 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**DISKRETISASI MODEL REAKSI-DIFUSI (TURING) DENGAN  
METODE BEDA HINGGA EKSPRESIT**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
ERNAWATI EFENDI  
NIM. 09610072**

Skripsi ini Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 2 April 2013

1. Penguji Utama : Dr. Agus Suryanto, M.Sc  
NIP. 19690807 199412 1 001
2. Ketua Penguji : Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001
3. Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001
4. Anggota Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,  
Kaetua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Ernawati Efendi

NIM : 09610072

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode Beda Hingga Eksplisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Maret 2013

Yang membuat pernyataan,

Ernawati Efendi  
NIM. 09610072

## MOTTO

“Berdiam diri dan menunggu kesuksesan datang  
adalah kegiatan sia-sia yang bodoh”

*“Seperti lilin yang rela menerangi keadaan  
sekitarnya  
meskipun harus mengorbankan  
dirinya sendiri”*

## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Penulis persembahkan  
karya ini untuk :

*Ayahanda tercinta Tangguh Efendi yang selalu menginspirasi  
penulis dengan kegigihan dan kesabarannya,  
Ibunda terkasih Sutik yang selalu memberikan dorongan  
semangat yang selalu menyebut nama penulis  
dalam doa-doanya, Belahan jiwa Jemy Febrianto  
yang selalu terjaga dari tingkah laku penulis  
dan adik tersayang Indah Wati yang selalu memberikan  
warna baru ketika penulis mulai jenuh.*

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode Beda Hingga Eksplisit” dengan baik dan lancar.

Shalawat dan salam senantiasa penulis persembahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, yang telah memberikan inspirasi kepada seluruh umat manusia tidak terkecuali penulis, untuk berkarya dengan penuh semangat berlandaskan keagungan moral dan spiritual.

Ucapan terimakasih pun tidak lupa disampaikan kepada seluruh pihak yang telah mendukung lancarnya penyusunan skripsi ini, dengan hormat penulis ucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku pembimbing skripsi bidang matematika.
5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku pembimbing skripsi bidang keagamaan.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi di Jurusan Matematika.

7. Bapak Tangguh Efendi dan Ibu Sutik yang senantiasa memberikan dukungan moril, spirituil dan materiil.
8. Jemy Febrianto yang selalu menemani penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Indah Wati selaku saudara terkasih.
10. Segenap keluarga besar di Gondang, Pasuruan.
11. Lismiyati Marfoah, Nita Sugiarti, Ani Afifah, F. Kurnia Nirmala dan Kholidah selaku orang terdekat dan rekan diskusi yang memperlancar penelitian untuk skripsi ini.
12. Seluruh teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2009.
13. Saudara-saudara lain yang namanya tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca sekalian.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Maret 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan .....	6
1.4 Batasan Masalah .....	6
1.5 Metode Penelitian .....	7
1.6 Sistematika Penulisan .....	7
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial .....	9
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Parsial .....	14
2.3 Diferensial Numerik Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	15
2.4 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	17
2.5 Analisis Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	22
2.6 Kajian Difusi dalam Al-Qur'an .....	29
<b>BAB III PEMBAHSAN</b>	
3.1 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	34
3.2 Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	39
3.3 Interpretasi Hasil Diskretisasi Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	50
3.4 Manfaat Gerakan Sholat yang Benar untuk Kesehatan Tubuh .....	51

**BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	58
4.2 Saran .....	58

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	60
-----------------------------	----

**LAMPIRAN**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Bada Hingga .....	17
Gambar 2.2	Jaringan Titik Hitungan ( <i>grid</i> ) pada bidang $x - t$ .....	18
Gambar 3.1	Stensil Metode Bada Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$ .....	37
Gambar 3.2	Stensil Metode Bada Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$ .....	37
Gambar 3.3	Jaringan Titik Hitung Metode Bada Hingga Skema Eksplisit untuk Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) .....	41
Gambar 3.4	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $u(x, t)$ dengan $\rho = 0,01$ .....	42
Gambar 3.5	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $v(x, t)$ dengan $\rho = 0,01$ .....	43
Gambar 3.6	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $u(x, t)$ dengan $\rho = 0,001$ .....	46
Gambar 3.7	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $v(x, t)$ dengan $\rho = 0,001$ .....	46
Gambar 3.8	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $u(x, t)$ dengan $\rho = 0,0001$ .....	50
Gambar 3.9	Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi ( <i>Turing</i> ) untuk Persamaan $v(x, t)$ dengan $\rho = 0,0001$ .....	50

## DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1 Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,01$
- Lampiran 2 Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,001$
- Lampiran 3 Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,0001$



## ABSTRAK

Efendi, Ernawati. 2013. **Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode Beda Hingga Eksplisit**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

**Kata Kunci :** diskretisasi, model Reaksi-Difusi (*Turing*), metode beda hingga skema eksplisit, model kontinu, model diskret

Diskretisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskret. Diskretisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga maju (*Forward Finite Difference*), yaitu dengan menganalogikan persamaan diferensial yang menggunakan aturan limit, dengan persamaan beda yang menggunakan beda antar titik waktu diskret. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model reaksi-difusi (*Turing*) yang merepresentasikan difusi cairan di dalam sel yang menyebabkan sel-sel bergerak.

Parameter-parameter yang digunakan dalam Model Reaksi-Difusi (*Turing*) yaitu, panjang domain yang tumbuh secara eksponensial  $L(t) = 1$ , tingkat pertumbuhan domain  $\rho = 0,01; 0,001; 0,0001$ , energi kinetik  $a = 0,9$  dan  $b = 0,1$  serta rasio koefisien difusi  $d = 0,06$ .

Metode beda hingga merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode beda hingga yang digunakan yaitu metode beda hingga skema eksplisit, beda maju untuk waktu dan beda pusat untuk ruang. Dideskripsikan bahwa dengan metode beda hingga skema eksplisit diperoleh penyelesaian yang stabil dan mendekati solusi analitik. Bentuk diskret yang diperoleh yaitu :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \Delta t(a - u_i^n(v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ v_i^{n+1} = d\lambda v_{i+1}^n + (1 - 2d\lambda)v_i^n + d\lambda v_{i-1}^n + \Delta t(b + u_i^n(v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \end{cases}$$

Berdasarkan solusi numerik yang diperoleh maka besarnya tingkat pertumbuhan domain ( $\rho$ ) tidak berpengaruh terhadap perilaku dinamik model reaksi-difusi (*Turing*).

## ABSTRACT

Efendi, Ernawati. 2013. **Discretization Reaction-Diffusion (*Turing*) Model by Explicit Finite Difference Method**. Thesis. Department of Mathematic. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Dr. Usman Pagalay, M. Si  
(II) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

**Keywords** : discretization, reaction-diffusion (*Turing*) model, forward finite differences method, continuous model, discrete model

Discretization model is a continuous model transformation procedure to discrete model. Discretization is done using advanced finite difference method, by analogy differential equations using limit rules, with different equations using the different between discrete time points. The model used in this paper is a model of reaction-diffusion (*Turing*) that represents the diffusion of fluid in the cells that cause the cells to move.

The parameters used in the reaction-diffusion model (*Turing*), the domain length grows exponentially  $L(t) = 1$ , the domain growth rate  $\rho = 0,01, 0,001; 0,0001$ , the kinetic energy of  $a = 0,9$  and  $b = 0,1$ , and the ratio of the diffusion coefficient  $d = 0,06$ .

Finite difference method is a numerical method that can be used to solve partial differential equations. Methods used explicit finite difference scheme developed for the time difference and central difference for the space to complete the reaction-diffusion equation (*Turing*). Described the resolution obtained with this method is stable and close to analytic solutions discrete models obtained is:

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \Delta t(a - u_i^n(v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ v_i^{n+1} = d\lambda v_{i+1}^n + (1 - 2d\lambda)v_i^n + d\lambda v_{i-1}^n + \Delta t(b + u_i^n(v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \end{cases}$$

Based on the numerical solution obtained then the amount of domain growth ( $\rho$ ) does not affect the stability of reaction-diffusion models (*Turing*).

## ملخص

إفندي إرناواتي . ٣ ٠١ ٢٠٢٠ "ديسكرتيبيسي الموديل رياكسي- ديفوسي (تورينج) بالموديل بيذا هينججا". الأطروحة. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، والدولة الإسلامية جامعة مالانج مولانا مالك إبراهيم.

المشرف: (١). الدكتور عثمان فاجالي  
(٢). أري كوسوماستوتي , الماجستير

مفتاح الكلمات: ديسكريتيبيسي، الموديل رياكسي- ديفوسي (تورينج)، الموديل بيذا هينججا سكيما إكفليسييت، الموديل كونثيوتو، الموديل ديسكريت.

الموديل ديسكريتيبيسي هو فروسيدور ترانسفورماسي، الموديل كونثيوتو إلى الموديل ديسكريت. ديسكريتيبيسي يعمل بالموديل بيذا هينججا إلى الأمام هو بالتفكر فرسامان ديفيرينسيال باستخدام حكم ليميت، بالفرسامان بيذا الذي يستخدم بيذا بين مرحلة ديسكريت. الموديل في هذا الأطروحة الموديل رياكسي- ديفوسي (تورينج) الذي مقدم ديفوسي السوائل في الخلايا التي تتسبب في الخلايا على التحرك. المعايير المستخدمة في الموديل رياكسي- ديفوسي (تورينج) هو طول المجال ينمو باطراد  $L(t)=1$ ، ف-المجال معدل النمو = 0.01، 0.001، 0.0001، الطاقة الحركية  $L=0.9=0.1$  وب، ونسبة انتشار معامل  $d=0.06$ .

الموديل بيذا هينججا هو الموديل نومريك العددية الأساليب التي يمكن أن تستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. استخدام طرق الفروق المحددة صريحة مخطط تطوير لفرق التوقيت والاختلاف المركزي للمساحة لإكمال المعادلة الرد نشرها (تورينج). ووصف القرار التي تم الحصول عليها مع هذا الأسلوب هو مستقر وعلى مقربة من حلول التحليلية:

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \Delta t(a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ v_i^{n+1} = d\lambda v_{i+1}^n + (1 - 2d\lambda)v_i^n + d\lambda v_{i-1}^n + \Delta t(b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \end{cases}$$

على أساس حل العددية التي تم الحصول عليها ثم مقدار النمو مجال لا يؤثر على استقرار رد فعل نشر النماذج (تورينج).

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an merupakan pedoman hidup umat Islam sejak dahulu. Tidak hanya sebagai pedoman hidup Al-Qur'an juga merupakan salah satu sumber inspirasi bagi umat Islam khususnya. Berbagai macam informasi telah terkandung di dalamnya tidak hanya masalah akidah dan akhlak, Al-Qur'an juga memberikan banyak informasi tentang ilmu pengetahuan. Salah satunya adalah mengenai perintah untuk melaksanakan sholat tahajjud sebagaimana firman Allah berikut :


 وَمِنْ أَلَيْلٍ فَتَهَجَّدْ بِهِ نَافِلَةً لَّكَ عَسَىٰ أَنْ يَبْعَثَكَ رَبُّكَ مَقَامًا مَّحْمُودًا

Artinya : *“Dan pada sebahagian malam hari bersembahyang tahajjudlah kamu sebagai suatu ibadah tambahan bagimu; Mudah-mudahan Tuhan-mu mengangkat kamu ke tempat yang Terpuji” (QS. Al-Israa’:79).*

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah telah memberikan perintah kepada manusia untuk menunaikan ibadah pada malam hari yaitu sholat tahajjud karena dalam ibadah tersebut terdapat keutamaan-keutamaan bagi yang menjalankannya. Konsep yang ada dalam Al-Qur'an ini, terjabarkan dalam penelitian-penelitian mutakhir sebagai contoh penelitian yang dilakukan oleh Alan Turing (1952). Penelitian ini mengemukakan bahwa sistem interaksi kimia dapat dibangun oleh difusi yang tidak stabil dan kemudian berkembang menjadi pola spasial. Reaksi difusi seperti ini juga terjadi di dalam sel tubuh manusia. Dalam hal ini sel-sel mengalami pergerakan dikarenakan adanya reaksi difusi di dalamnya, hasil dari penelitian ini dikenal dengan reaksi-difusi (*Turing*). Model ini dapat diaplikasikan

dalam biologi integratif terutama dalam bidang kedokteran salah satunya untuk model penyembuhan luka dan penyakit kanker.

Analisis secara matematik dapat dilakukan dengan cara melihat simulasi dari model reaksi-difusi (*Turing*) secara numerik. Prosedur ini dilakukan dengan cara diskretisasi terhadap model matematik reaksi-difusi (*Turing*). Menurut Liu dan Hussain (2012:2), diskretisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskretisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskret yang lebih mudah dipahami, digunakan dan dijelaskan. Oleh karena itu, hasil pembelajaran dengan bentuk diskret dipandang sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu. Diskretisasi dapat dilakukan dengan berbagai metode, salah satunya yaitu metode beda hingga.

Metode beda hingga (*finite difference*) merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari suatu persamaan diferensial parsial (Sulaiman, 2000). Pada prinsipnya metode ini adalah mendiskretkan persamaan dalam suatu sistem koordinat yang kontinu.

Penelitian terdahulu (Sulaiman, 2000), menggunakan metode beda hingga dalam mendiskretkan persamaan difusi dengan koefisien difusivitas konstan. Pada penelitian tersebut dapat ditunjukkan bahwa hasil diskretisasi model kontinu difusi dapat menjelaskan pola perkembangan variabel pada model kontinunya dengan sangat baik. Selain itu kesederhanaan algoritma dari metode beda hingga tersebut, juga memudahkan dalam penerapannya. Untuk

membuktikan bahwa metode tersebut dapat diaplikasikan dengan baik dan mudah, maka penulis menindaklanjuti saran penelitian sebelumnya untuk mengembangkan penelitian pada model lain, yaitu dipilih model reaksi-difusi (*Turing*). Penulis memilih model reaksi-difusi (*Turing*) karena model tersebut merupakan salah satu bentuk baru dalam penelitian di bidang pemodelan, dimana model tersebut terdiri dari gabungan antara persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial biasa.

Secara matematik, model reaksi-difusi (*Turing*) adalah struktur satu dimensi berbentuk sistem persamaan diferensial parsial kuasilinier (Barras dkk., 2006). Sistem ini terdiri atas tiga persamaan yaitu dua persamaan diferensial parsial dan satu persamaan diferensial biasa. Persamaan pertama menunjukkan bahwa laju perubahan energi kinetik non-dimensional pada spesies  $Y$  pada saat waktu yang ke- $t$  berbanding lurus dengan laju perubahan energi kinetik non-dimensional pada spesies  $Y$  pada saat jarak ke- $x$  yang dibagi dengan kuadrat dari amplitudo kecil dengan gangguan acak spasial yang berkorelasi, penambahan parameter dari energi kinetik, berkurangnya energi kinetik non-dimensional pada spesies  $Y$  dikali dengan kuadrat energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$  dan berbanding lurus dengan hasil kali dari energi kinetik non-dimensional pada spesies  $Y$  dengan berkurangnya tingkat pertumbuhan domain lokal. Persamaan kedua menunjukkan bahwa laju perubahan energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$  pada saat waktu yang ke- $t$  berbanding lurus dengan perkalian antara laju perubahan energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$  pada saat jarak ke- $x$  dengan rasio koefisien difusi yang dibagi dengan kuadrat dari amplitudo kecil

dengan gangguan acak spasial yang berkorelasi, penambahan parameter dari energi kinetik pada spesies  $X$ , penambahan energi kinetik non-dimensional pada spesies  $Y$  di kali dengan kuadrat energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$ , berkurangnya energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$  dan berbanding lurus dengan hasil kali dari energi kinetik non-dimensional pada spesies  $X$  dengan berkurangnya tingkat pertumbuhan domain lokal. Persamaan ketiga menunjukkan bahwa laju perubahan amplitudo kecil dengan gangguan acak spasial yang berkorelasi pada saat  $t$  berbanding langsung dengan hasil kali antara tingkat pertumbuhan domain dengan nilai dari amplitudo kecil dengan gangguan acak spasial yang berkorelasi.

Barras dkk. (2006) mengganti energi kinetik non-dimensional spesies  $X$  yang merupakan aktivator dengan  $v(x, t)$  dan spesies  $Y$  dengan  $u(x, t)$  pada pada dimensi satu dari panjang domain yang tumbuh secara eksponensial  $L(t)$ . Menurut Crampin dkk. (1999) parameter  $\rho$  adalah tingkat pertumbuhan domain dan  $-\rho u$  dan  $-\rho v$  menggambarkan efek dari adanya perluasan lokal dari domain yang digunakan. Dengan nilai parameter  $a = 0,9$  dan  $b = 0,1$ , serta nilai dari parameter  $d = 0,06$ , dimana  $d$  adalah nilai dari rasio koefisien difusi. Sehingga inhibitor berdifusi lebih cepat dari ekspresi aktivator dan pola dari teori *Turing* dapat digunakan untuk domain yang panjang dan statis. Pola yang ditimbulkan dari sistem ini adalah dalam bentuk lonjakan solusi. Dalam hal ini  $L$  adalah kondisi awal yang diberikan yang merupakan amplitudo kecil dengan gangguan acak spasial yang berkorelasi, panjang domain awal dari  $L(0) = 1$ . Sistem ini

dipelajari secara detail oleh Crampin (2000) untuk kasus eksponensial dengan domain pertumbuhan.

Dalam skripsi ini, akan diteliti perilaku dinamik model reaksi-difusi (*Turing*) dalam keadaan diskret. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan perilaku dinamik model *Turing* kontinu dengan model *Turing* diskret. Dengan demikian, peneliti merancang penelitian yang terdiri dari proses pendiskretisasian dan simulasi grafik model kontinu dan model diskret.

Penelitian ini penting dilakukan dalam rangka menyiapkan prosedur penelitian di lapangan yang lebih representatif jika dilakukan secara diskret daripada kontinu. Penelitian diskretisasi untuk mendapatkan model diskret yang merepresentasikan model kontinunya juga belum banyak dikembangkan dewasa ini. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tersebut dan menyajikannya dalam judul “Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode Beda Hingga Eksplisit”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana konstruksi bentuk diskret model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga?
2. Bagaimana analisis simulasi model Reaksi-Difusi (*Turing*)?
3. Bagaimana interpretasi bentuk diskret model Reaksi-Difusi (*Turing*)?

### 1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah :

1. Mengetahui bentuk diskret model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga.
2. Mengetahui simulasi bentuk diskret model Reaksi-Difusi (*Turing*).
3. Mengetahui bentuk diskret yang dapat mewakili bentuk kontinu model Reaksi-Difusi (*Turing*).

### 1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Parameter model Reaksi-Difusi (*Turing*) yang digunakan adalah  $a = 0,9$ ,  $b = 0,1$ ,  $d = 0,06$  dan kondisi awal yang diberikan adalah  $L(0) = 1$ , nilai  $\rho = 0,01$ ,  $\rho = 0,001$  dan  $\rho = 0,0001$ .
2. Kondisi batas yang diberikan adalah  $u(x_0 = L = 0, t) = 0,9$ ,  $u(x_n = R = 1, t) = 0,9$ ,  $v(x_0 = L = 0, t) = 1$ ,  $v(x_n = R = 1, t) = 1$  (Barras dkk., 2006).
3. Kondisi awal  $u(x, t_0 = L = 0) = 0,9 + \text{bilangan random}$  dan  $v(x, t_0 = L = 0) = 1 + \text{bilangan random}$  (Barras dkk., 2006).
4. Nilai  $\Delta x = 0,01$  dan  $\Delta t = 0,00002$ .
5. Metode yang digunakan adalah metode hingga dengan skema eksplisit.

## 1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan menelaah buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Analisis Model Reaksi-Difusi (*Turing*)
2. Mendiskretkan model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga skema eksplisit.
3. Menganalisis kestabilan model Reaksi-Difusi (*Turing*)
4. Mensimulasikan grafik diskret.
5. Membandingkan pola perkembangan variabel pada model diskret terhadap model kontinu dengan nilai parameter  $\rho$  yang berbeda.
6. Pembahasan model diskret yang dapat menjelaskan karakter model kontinu.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Tinjauan Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi persamaan diferensial parsial, sistem persamaan diferensial parsial, diferensial numerik model reaksi-difusi (*Turing*), metode beda hingga

skema eksplisit untuk model reaksi-difusi (*Turing*), Analisis model reaksi-difusi (*Turing*), dan kajian difusi dalam Al-Qur'an.

### **Bab III Pembahasan**

Bab ini menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

### **Bab IV Penutup**

Bab ini memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Sebagai contoh persamaan laju energi kinetik non-dimensional pada suatu variabel  $Y$  sebagai berikut,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u$$

Berdasarkan pernyataan Shepley (1984:4) variabel bebas pada contoh tersebut adalah  $x$  dan  $t$  sedangkan variabel tak bebasnya atau variabel terikatnya adalah  $u$ .

Pada model reaksi-difusi (*Turing*) dengan model yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho u \quad (2.2)$$

$$\frac{dL}{dt} = \rho L \quad (2.3)$$

Pada persamaan (2.1) variabel bebasnya adalah  $t$  dan  $x$ , sedangkan  $u$  merupakan variabel terikatnya. Sementara itu pada persamaan (2.3)  $x$  dan  $t$  merupakan variabel bebas dan variabel terikatnya adalah  $v$ .

Persamaan diferensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut merupakan

laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:199).

Selanjutnya untuk analisis sifat-sifat linier atau nonlinier, maka diberikan persamaan diferensial parsial orde dua sebagai berikut:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \quad (\text{Zauderer, 1998}) \quad (2.4)$$

Sasongko (2010) menyatakan kondisi-kondisi sebagai berikut:

1. Apabila koefisien  $A, B, C, D, F, G$  pada persamaan (2.4) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien  $A, B, C, D, F, G$  pada persamaan (2.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas ( $f(u)$ ) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya ( $\partial u / \partial x, \partial u / \partial t$ ), maka persamaan tersebut disebut kuasilinear.
3. Apabila koefisien  $A, B, C, D, F, G$  merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya ( $\partial^2 u / \partial x^2, \partial^2 u / \partial t^2, \partial^2 u / \partial x \partial t$ ), maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier.

Sebagai contoh persamaan difusi berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \quad (2.5)$$

Misalkan  $L^2 = 1$  yang merupakan konstanta, maka persamaan (2.5) berbentuk:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Sehingga berdasarkan pernyataan Griffiths (2010) persamaan (2.6) merupakan persamaan diferensial parsial linier. Jika  $L^2 = f(v) = \frac{1}{v(x,t)-1}$  yang merupakan fungsi dari variabel tak bebas, maka persamaan (2.5) berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (v(x, t) - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

sehingga persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear. Jika  $L = \frac{1}{\partial t^2 / \partial^2 v}$  yang merupakan turunan dengan pangkat sama dengan orde persamaan diferensialnya, maka persamaan (2.5) berbentuk:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

sehingga persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Dari ketiga simulasi di atas, maka merujuk pada model reaksi-difusi (*Turing*) yang dikemukakan oleh Barras dkk. (2006) dapat diketahui bahwa persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear. Hal ini karena bagian  $A = \frac{1}{L^2}$  didefinisikan sebagai konstanta dan bagian  $-uv^2 - \rho u$  dan  $uv^2 - v - \rho v$  adalah fungsi dalam variabel terikat  $u$  dan  $v$ , bagian ini yang menyebabkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) dikategorikan ke dalam persamaan diferensial parsial kuasilinear (Griffiths, 2010).

Ordo atau orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Waluya, 2006:3). Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu.

Turunan parsial berorde tertinggi yang dimuat dalam sistem persamaan reaksi-difusi (*Turing*) adalah  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  dan  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  yang berorde dua, sehingga persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua.

Berdasarkan bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas pada persamaan (2.4), persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan tergantung dari nilai diskriminannya yaitu  $B^2 - 4AC$  membentuk:

1. Jika  $B^2 - 4AC < 0$ , maka persamaan Eliptik
2. Jika  $B^2 - 4AC = 0$ , maka persamaan Parabolik
3. Jika  $B^2 - 4AC > 0$ , maka persamaan Hiperbolik

Berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh koefisien untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*) untuk persamaan  $u$  adalah  $A = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial parabolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \times \frac{1}{L^2} \times 0 = 0$$

Persamaan (2.1) dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial eliptik jika persamaan tersebut berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a - uv^2 - \rho u \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.9) maka diperoleh koefisien untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*) untuk persamaan  $u$  adalah  $A = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$  sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial eliptik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \times \frac{1}{L^2} \times 1 < 0$$

Persamaan (2.1) juga dapat diklasifikasikan ke dalam persamaan diferensial hiperbolik jika persamaan tersebut berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a - uv^2 - \rho u \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (2.10) maka diperoleh koefisien untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*) untuk persamaan  $u$  adalah  $A = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = 3$ ,  $C = 1$  dan jika nilai  $L = 1$  maka persamaan (2.10) dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial hiperbolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 3^2 - 4 \times \frac{1}{1^2} \times 1 > 0$$

Begitu juga untuk persamaan  $v$ , dimana koefisien dari persamaan (2.2) adalah  $A = \frac{d}{L^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial parabolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \times \frac{d}{L^2} \times 0 = 0$$

Persamaan (2.2) dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial hiperbolik jika persamaan tersebut berbentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b + uv^2 - v - \rho u \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.10) maka diperoleh koefisien untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*) untuk persamaan  $u$  adalah  $A = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ , maka persamaan (2.11) dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial eliptik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \times \frac{d}{L^2} \times 1 < 0$$

Persamaan (2.2) juga dapat diklasifikasikan kedalam persamaan diferensial hiperbolik jika persamaan tersebut berbentuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + b + uv^2 - v - \rho u \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan (2.12) maka diperoleh koefisien untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*) untuk persamaan  $u$  adalah  $A = \frac{1}{L^2}$ ,  $B = 3$ ,  $C = 1$  dan jika nilai  $L = 1$  dan  $d = 0,06$  maka persamaan (2.12) dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial hiperbolik karena diskriminannya memenuhi:

$$B^2 - 4AC = 3^2 - 4 \times \frac{0,006}{1^2} \times 1 > 0$$

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial Parsial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial, dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  $n \geq 2$  (Finizio dan Ladas, 1982:132). Sebagai contoh suatu sistem persamaan diferensial adalah model reaksi-difusi (*Turing*) yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho u \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{array} \right. \quad (2.13) \quad (\text{Barras dkk., 2006})$$

Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linier dan nonlinier. Begitu juga untuk persamaan

diferensial parsial dapat dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial parsial linier dan persamaan diferensial parsial nonlinier

Berdasarkan pernyataan Finizio dan Ladas (1988), sistem persamaan diferensial parsial linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari  $n$  persamaan diferensial parsial linier dengan  $n$  fungsi tak diketahui yang berbentuk:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{0,08^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{0,08^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{cases} \quad (2.14)$$

Sistem persamaan diferensial parsial nonlinier adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan diferensial parsial nonlinier dengan  $n$  fungsi tak diketahui. Sistem ini juga disebut dengan sistem tak linier. Salah satu bentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinier dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho u \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.3 Diferensial Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasar pada deret Taylor.

Apabila fungsi memuat lebih dari satu variabel bebas, seperti  $f(x, y)$ , maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$f(x_{i+1}, y_{j+1}) = f(x_i, y_j) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots \quad (2.16)$$

Dengan cara yang sama, turunan pertama terhadap variabel  $x$  dengan mengabaikan suku ke-3 dan seterusnya dapat ditulis dalam bentuk diferensial maju sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.17)$$

Untuk turunan pertama terhadap variabel  $y$  dengan mengabaikan suku ke-2, dan mulai dari suku ke-4 dan seterusnya dapat dituliskan dalam bentuk diferensial maju sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (2.18)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk  $f(x_i, y_j)$  ditulis menjadi  $f_{i,j}$ , dengan subskrip  $i$  dan  $j$  menunjukkan komponen dalam arah sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ . Apabila fungsi berada dalam sistem tiga dimensi (sistem koordinat  $(x, y, z)$ ) maka ditulis menjadi  $f_{i,j,k}$ . Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.25) dan (2.26) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \quad (2.20)$$

untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.22)$$

Dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap  $x$  dan  $y$  dapat ditulis menjadi:

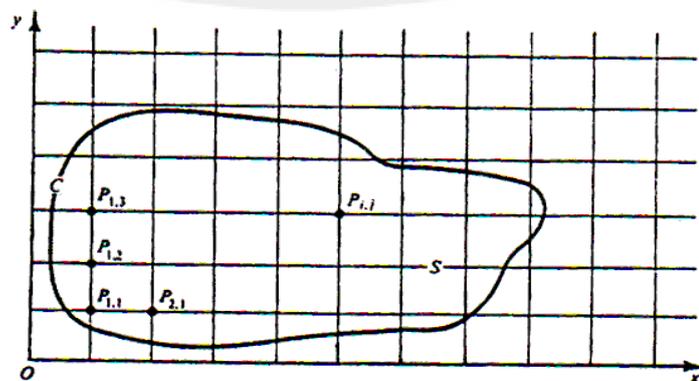
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (2.24)$$

(Triatmodjo, 2002:9-13)

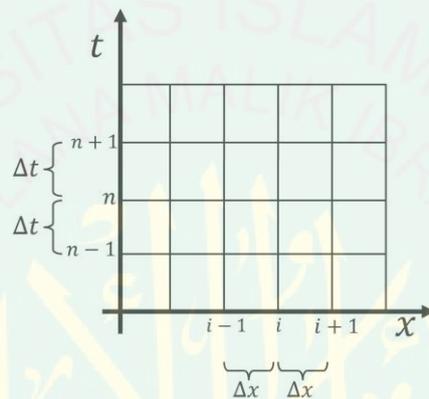
#### 2.4 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Reaksi-Difusi (Turing)

Metode beda hingga mendefinisikan suatu wilayah variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dengan suatu *grid* terbatas untuk mendekati variabel terikat (Causon, 2010). Sebagai contoh penyelesaian persamaan eliptik pada daerah  $S$  yang dibatasi oleh kurva  $C$  seperti tampak pada Gambar 2.1 daerah tinjauan  $S$  dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan  $P$ ) dengan jarak antara pias adalah  $\Delta x$  dan  $\Delta y$ . Kondisi di mana variabel terikat  $u$  harus memenuhi di sekeliling kurva  $C$  disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan nilai  $u$  pada titik-titik hitungan  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}$  (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.1 Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga

Meninjau persamaan Reaksi-Difusi (*Turing*) pada persamaan (2.1) dan (2.2) memuat variabel bebas  $x$  dan  $t$ , skema beda hingga dibentuk dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang  $x - t$  (Gambar 2.2) yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang ( $\Delta x$ ) dan waktu ( $\Delta t$ ).



Gambar 2.2. Jaringan titik hitungan (*grid*) pada bidang  $x - t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi  $v$  yang terdiri dari dua variabel bebas  $x$  dan  $t$ . Berikut merupakan deret Taylor (Causon dan Mingham, 2010):

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} v_{(n-1)}(x_0, t) + O(\Delta x^n) \quad (2.25)$$

dengan  $O(\Delta x^n)$  merupakan galat. Memotong persamaan (2.25) sampai turunan pertama diperoleh:

$$v(x_i + \Delta x, t_n) = v(x_i, t_n) + \Delta x v_x(x_i, t_n) + O(\Delta x^2) \quad (2.26)$$

Sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut:

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} \quad (2.27)$$

karena  $\Delta x$  konstan sehingga  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ , persamaan (2.25) menjadi

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_{i+1}, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad (2.28)$$

Apabila notasi  $v(x_i, t_n)$  dituliskan sebagai  $v_i^n$ , maka berikut merupakan skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi  $v$  pada  $x$ .

$$v_x(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} \quad (2.29)$$

Persamaan (2.17) disebut beda maju untuk  $x$ . Skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi  $v$  pada  $t$  dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.16) dengan  $v(x, t_0 + \Delta t)$ , Sehingga didapatkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} v(x, t_0 + \Delta t) &= v(x, t_0) + \Delta t v_t(x, t_0) + \frac{\Delta t^2}{2!} v_{tt}(x, t_0) + \dots \\ &+ \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} v_{(n-1)}(x, t_0) + O(\Delta t^n) \end{aligned} \quad (2.30)$$

dengan  $O(\Delta t^n)$  merupakan galat. Memotong persamaan (2.30) sampai turunan pertama diperoleh:

$$v(x_i, t_n + \Delta t) = v(x_i, t_n) + \Delta t v_t(x_i, t_n) + O(\Delta t^2) \quad (2.31)$$

Sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut:

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_n + \Delta t) - v(x_i, t_n)}{\Delta t} - \frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t} \quad (2.32)$$

karena  $\Delta t$  konstan sehingga  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , persamaan (2.33) menjadi,

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_{n+1}) - v(x_i, t_n)}{\Delta t} - O(\Delta t) \quad (2.33)$$

Apabila notasi  $v(x_i, t_n)$  dituliskan sebagai  $v_i^n$ , maka berikut merupakan skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi  $v$  pada  $t$ .

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \quad (2.34)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga untuk turunan kedua fungsi  $u$  terhadap  $x$  dengan menggunakan deret Taylor orde 4 berikut, persamaan untuk metode beda hingga skema eksplisit,

$$\begin{aligned} v(x_0 + \Delta x, t) = & v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \\ & + \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Selanjutnya persamaan untuk metode beda hingga untuk skema implisit:

$$\begin{aligned} v(x_0 - \Delta x, t) = & v(x_0, t) - \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \\ & - \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Menjumlahkan persamaan (2.35) dan (2.36) maka diperoleh:

$$v(x_0 + \Delta x, t) + v(x_0 - \Delta x, t) = 2v(x_0, t) + \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) + O(\Delta x^4) \quad (2.37)$$

Dengan  $O(\Delta x^4)$  merupakan galat maka diperoleh:

$$v(x_i + \Delta x, t_n) + v(x_i - \Delta x, t_n) = 2v(x_i, t_n) + \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.38)$$

Karena  $\Delta x$  konstan sehingga  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  dan  $x_{i-1} = x_i - \Delta x$  persamaan (2.38) menjadi:

$$v(x_{i+1}, t_n) + v(x_{i-1}, t_n) = 2v(x_i, t_n) + \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) \quad (2.39)$$

Apabila notasi  $v(x_i, t_n)$  dituliskan sebagai  $u_i^n$ , maka persamaan (2.39) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_{i+1}^n + v_{i-1}^n = 2v_i^n + \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4) \quad (2.40)$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (2.41)$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.42)$$

Persamaan (2.42) merupakan beda pusat untuk  $x$ . Skema beda hingga untuk turunan parsial kedua fungsi  $u$  pada  $t$ , dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.32) dan (2.33) dengan  $v(x, t_0 + \Delta t)$  dan  $v(x, t_0 - \Delta t)$ . Sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda simetrik untuk  $t$ .

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.43)$$

Penyelesaian persamaan tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik disekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu yang besar (Triatmodjo, 2002).

Adapun algoritma penyelesaian persamaan reaksi-difusi (*Turing*) dengan metode beda hingga skema eksplisit adalah sebagai berikut:

1. Ditentukan skema beda hingga eksplisit untuk persamaan reaksi-difusi (*Turing*).

2. Ditentukan parameter-parameter,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ , serta batas daerah yang akan diselesaikan.
3. Ditentukan bilangan Courant.
4. Substitusi parameter-parameter,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ , serta bilangan Courant pada skema beda hingga eksplisit persamaan reaksi-difusi (*Turing*).
5. Dilakukan iterasi untuk kondisi batas.
6. Dilakukan iterasi untuk kondisi awal
7. Dilakukan iterasi menggunakan skema beda hingga eksplisit untuk memperoleh nilai  $u_i^n$  dan  $v_i^n$  pada setiap nilai  $x$  dari waktu ke waktu.

### 2.5 Analisis Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Secara sederhana persamaan difusi dalam matematik dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(\partial^2 T / \partial t^2) \quad (2.44)$$

Selanjutnya akan dianalisis model reaksi-difusi (*Turing*), menurut Spiegel (2003) reaksi difusi dapat terjadi karena adanya reaksi dari 3 molekul, yaitu  $B, X$  dan  $Y$ . Mekanisme ini terlalu sederhana sehingga Barras dkk. (2006) mengganti energi kinetik non-dimensional spesies  $X$  yang merupakan aktivator dengan  $v(x, t)$  dan spesies  $Y$  dengan  $u(x, t)$  pada dimensi satu dari panjang domain yang tumbuh secara eksponensial  $L(t)$  akan tetapi domain ini akan kontinu pada interval  $x \in [0,1]$ , model tersebut dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho u \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai *random walks* dan *brownian motion* untuk model reaksi-difusi (*Turing*).

Untuk persamaan  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u$ ,

Maka dengan memindah ruas maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a + uv^2 + \rho u = 0 \quad (2.46)$$

Sehingga dapat digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut untuk menyelesaikan persamaan (2.46):

1. Ekspektasi dari variabel acak  $x$  atau disebut juga sebagai lokasi perpindahan atau peluruhan partikel yang didefinisikan sebagai berikut :

$$E(x) = \langle x \rangle = (p - q)\delta$$

Dengan  $C$  adalah kecepatan difusi, dan dalam masalah ini kecepatan difusi dianggap sama dengan nol (Zauderer, 1998:2).

2. Varian dari suatu variabel acak  $x$  atau disebut juga dengan besarnya perpindahan yang terjadi dari suatu proses difusi, didefinisikan sebagai berikut (Zauderer, 1998:3):

$$V(x) = 4p\delta^2$$

Dengan  $D$  adalah konstanta atau koefisien difusi yang dalam hal ini diasumsikan besarnya sama dengan  $\frac{2}{L^2}$ .

3. Asumsi dasar difusi yang digunakan adalah  $u(x, t)$  yang merupakan distribusi peluang. Dimana distribusi peluang dari suatu partikel pada saat  $x$  dan pada saat waktu yang ke  $t + \tau$  sama dengan peluang ketika berada pada titik  $x - \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan peluang perpindahan partikel ke arah kanan ( $p$ ) pada suatu langkah ditambah dengan peluang partikel pada saat berada di titik  $x + \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan probabilitas perpindahan ke arah kiri ( $q$ ) pada suatu langkah, dimana  $p + q = 1$ . Yang dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut (Zauderer, 1998:5):

$$u(x, t + \tau) = pu(x - \delta, t) + qu(x + \delta, t) \quad (2.47)$$

Dimana  $\tau$  adalah partisi untuk waktu.

4.  $p$  adalah peluang partikel pindah ke arah kanan dan  $q$  adalah peluang partikel pindah ke arah kiri, dimana  $p, q \in R$

Alat yang digunakan untuk menyelesaikan *brownian motion* persamaan (2.47) adalah deret Taylor sebagai berikut,

- a. Untuk  $u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t)$
- b. Untuk  $u(x - \delta, t) = u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t)$
- c. Untuk  $u(x + \delta, t) = u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t)$

Langkah selanjutnya substitusi deret Taylor pada point  $a, b$  dan  $c$  diatas ke persamaan (2.47) sehingga diperoleh:

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = p(u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t)) + q(u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t))$$

Persamaan diatas dapat dituliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = pu(x, t) - p\delta u_x(x, t) + p\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t) + qu(x, t) + q\delta u_x(x, t) + q\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t)$$

Disederhanakan menjadi:

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = (p + q)u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + (p + q)\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t)$$

Dengan menggunakan asumsi bahwa  $p + q = 1$ , maka persamaan sebelumnya dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = u(x, t) + (q - p)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\tau u_t(x, t) = u(x, t) + (q - p)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t) - u(x, t)$$

Kemudian persamaan di atas dibagi dengan  $\tau$ , sehingga menjadi:

$$u_t(x, t) = (q - p)\frac{\delta}{\tau}u_x(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau}u_{xx}(x, t) \quad (2.48)$$

Kemudian diasumsikan bahwa:

$$\lim (q - p)\frac{\delta}{\tau} \approx -C \quad \text{dan} \quad \lim \frac{\delta^2}{\tau} \approx D, \quad \forall \frac{1}{\tau} \approx 4pq$$

Sehingga persamaan (2.59) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$u_t(x, t) = -Cu_x(x, t) + \frac{1}{2}Du_{xx}(x, t)$$

Dengan mengganti penulisan notasi  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  dan  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , maka

persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -C \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \forall C, D \in R$$

Karena diasumsikan  $C = 0$  dan  $D = \frac{2}{L^2}$ .

Akibatnya,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

atau

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

Maka Barras dkk (2006) merumuskan model reaksi-difusi (*Turing*) dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a + uv^2 + \rho u = 0$$

Untuk persamaan  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho v$ ,

Maka dengan memindah ruas maka persamaan diatas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho v = 0 \quad (2.49)$$

Sehingga dapat digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut untuk menyelesaikan persamaan (2.49):

1. Ekspektasi dari variabel acak  $x$  atau disebut juga sebagai lokasi perpindahan atau peluruhan partikel yang didefinisikan sebagai berikut (Zauderer, 1998:2):

$$E(x) = \langle x \rangle = (p - q)\delta$$

Dengan  $C$  adalah kecepatan difusi, dan dalam masalah ini kecepatan difusi dianggap sama dengan nol.

- Zauderer (1998:3) mendefinisikan varian dari suatu variabel acak  $x$  atau disebut juga dengan besarnya perpindahan yang terjadi dari suatu proses difusi, didefinisikan sebagai berikut:

$$V(x) = 4p\delta^2$$

Dengan  $D$  adalah konstanta atau koefisien difusi yang dalam hal ini diasumsikan besarnya sama dengan  $\frac{2d}{L^2}$ .

- Asumsi dasar difusi yang digunakan adalah  $v(x, t)$  yang merupakan distribusi peluang. Dimana distribusi peluang dari suatu partikel pada saat  $x$  dan pada saat waktu yang ke  $t + \tau$  sama dengan peluang ketika berada pada titik  $x - \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan peluang perpindahan partikel ke arah kanan ( $p$ ) pada suatu langkah ditambah dengan peluang partikel pada saat berada di titik  $x + \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan probabilitas perpindahan ke arah kiri ( $q$ ) pada suatu langkah, dimana  $p + q = 1$ . Yang dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut (Zauderer, 1998:5):

$$v(x, t + \tau) = pv(x - \delta, t) + qv(x + \delta, t) \quad (2.50)$$

Dimana  $\tau$  adalah partisi untuk waktu

- $p$  adalah peluang partikel pindah ke arah kanan dan  $q$  adalah peluang partikel pindah ke arah kiri, dimana  $p, q \in R$

Alat yang digunakan untuk menyelesaikan *brownian motion* persamaan (2.50)

adalah deret Taylor sebagai berikut:

- Untuk  $v(x, t + \tau) = v(x, t) + \tau v_t(x, t)$
- Untuk  $v(x - \delta, t) = v(x, t) - \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$
- Untuk  $v(x + \delta, t) = v(x, t) + \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$

Langkah selanjutnya substitusi deret Taylor pada *point*  $a, b$  dan  $c$  di atas ke persamaan (2.50) sehingga diperoleh:

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = p(v(x, t) - \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)) + q(v(x, t) + \delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t))$$

Persamaan diatas dapat dituliskan kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = p v(x, t) - p \delta v_x(x, t) + p \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) + q v(x, t) + q \delta v_x(x, t) + q \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$$

Disederhanakan menjadi:

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = (p + q)v(x, t) + (-p + q)\delta v_x(x, t) + (p + q)\frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$$

Dengan menggunakan asumsi bahwa  $p + q = 1$ , maka persamaan sebelumnya dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$v(x, t) + \tau v_t(x, t) = v(x, t) + (q - p)\delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\tau v_t(x, t) = v(x, t) + (q - p)\delta v_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, t) - v(x, t)$$

Kemudian persamaan di atas dibagi dengan  $\tau$ , sehingga menjadi:

$$v_t(x, t) = (q - p)\frac{\delta}{\tau} v_x(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\tau} v_{xx}(x, t) \quad (2.51)$$

Kemudian diasumsikan bahwa:

$$\lim (q - p) \frac{\delta}{\tau} \approx -C \quad \text{dan} \quad \lim \frac{\delta^2}{\tau} \approx D \quad , \forall \frac{1}{\tau} \approx 4pq$$

Sehingga persamaan (2.63) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$v_t(x, t) = -C v_x(x, t) + \frac{1}{2} D v_{xx}(x, t)$$

Dengan mengganti penulisan notasi  $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$  dan  $v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , maka

persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = -C \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \quad \forall C, D \in R$$

Karena diasumsikan  $C = 0$  dan  $= \frac{2d}{L^2}$ .

Akibatnya,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = 0 \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)$$

atau

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)$$

Maka Barras dkk (2006) merumuskan model reaksi-difusi (*Turing*) dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b + uv^2 - v + \rho u = 0$$

## 2.6 Kajian Difusi dalam Al-Qur'an

Sholat tahajjud adalah sholat sunnat yang dikerjakan pada waktu malam, dimulai selepas waktu sholat isya' sampai menjelang subuh. Ketika seseorang menggelar sajadah untuk melakukan sholat tahajjud maka tubuhnya berada dalam kondisi layaknya melakukan meditasi dan relaksasi. Sholat tahajjud disebut sebagai salah satu pengobat hati. Sebab sholat sunnah yang ditunaikan di

keheningan malam itu, mengantarkan yang orang menunaikannya menjadi lebih dekat dengan Allah. Perintah untuk menjalan sholat tahajjud sudah tertuang dalam firman Allah pada Surat Al-Israa ayat 79 sebagai berikut:

وَمِنَ اللَّيْلِ فَتَهَجَّدْ بِهِ ۗ نَافِلَةً لَّكَ عَسَىٰ أَن يَبْعَثَكَ رَبُّكَ مَقَامًا مَّحْمُودًا ﴿٧٩﴾

Artinya : *“Dan pada sebahagian malam hari bersembahyang tahajjudlah kamu sebagai suatu ibadah tambahan bagimu; Mudah-mudahan Tuhan-mu mengangkat kamu ke tempat yang Terpuji”* (QS. Al-Israa:79).

Dari ayat tersebut diketahui bahwa tahajjud sebagai ibadah yang di tunaikan pada malam hari, saat setiap orang mengistirahatkan tubuhnya dari kelelahan aktivitas yang dilakukan pada siang harinya. Banyak kalangan menyatakan bahwa idealnya masa tidur di malam hari adalah enam hingga delapan jam. Tidur di malam hari akan memberikan energi baru bagi seseorang untuk melakukan aktivitasnya di pagi hingga siang hari (Setiabudi, 2007)

Akan tetapi kemudian muncul sebuah pendapat lain dari seorang ilmuwan bernama Ray Meddis yang menyatakan bahwa masa tidur yang sempurna hanyalah tiga hingga empat jam saja. Hal ini sesuai dengan firman Allah yang berbunyi :

قُمِ اللَّيْلَ إِلَّا قَلِيلًا ﴿٢﴾ نِصْفَهُ أَوْ أَنْقِصْ مِنْهُ قَلِيلًا ﴿٣﴾ أَوْ زِدْ عَلَيْهِ وَرَتِّلِ الْقُرْآنَ تَرْتِيلًا ﴿٤﴾

Artinya : *“Bangunlah (untuk sembahyang) di malam hari, kecuali sedikit (daripadanya), (yaitu) seperduanya atau kurangilah dari seperdua itu sedikit. Atau lebih dari seperdua itu. dan bacalah Al Quran itu dengan perlahan-lahan”* (QS Al-Muzammil:2-4).

Seorang ilmuwan muslim asal Mesir, Fadhlalla Haeri, menyatakan bahwa ayat tersebut memberikan panduan bagi seorang muslim untuk mencapai keseimbangan. Di sisa masa istirahatnya, tiga jam masa efektif tidur malam, maka seorang muslim mestinya bangun untuk menjalankan aktivitas yang bermanfaat. Haeri menambahkan bahwa pada saat bangun di tengah malam energi di dalam tubuh seseorang berada dalam keadaan rendah. Selain itu, medan refleksi juga begitu bersih. Dalam tradisi India, kondisi seperti ini disebut sebagai tahap pembentukan kesadaran yang terjadi pada titik energi ke tujuh atau cakra mahkota. Hal ini memberikan dampak yaitu meningkatkan intuisi seseorang dan kesadaran diri untuk mampu mengendalikan emosi negatif (Setiabudi, 2007).

Menurut Haeri, pada saat seseorang menggelar sajadah untuk menunaikan sholat tahajjud sejatinya seseorang tersebut berada dalam kondisi layaknya orang yang melakukan meditasi dan relaksasi atas kelenjar pineal. Ini akan menspiritualkan intelektual seseorang disertai dengan kemampuan personal untuk selalu mendekati diri kepada Allah serta menjalin hubungan yang harmonis dengan sesama manusia (Setiabudi, 2007).

Tidak hanya itu, pada saat matahari terbenam kelenjar pineal mulai bekerja dan memproduksi hormon melatonin dalam jumlah yang besar dan mencapai puncaknya pada pukul 02.00 hingga 03.00 dini hari. Hormon inilah yang kemudian menghasilkan turunan asam amino trythopan dalam jumlah yang besar pula (Setiabudi, 2007).

Hormon melatonin akan membentuk sistem kekebalan dalam tubuh dan membatasi gerak pemicu tumor seperti estrogen. Haeri mengungkapkan bahwa

pada masa kanak-kanak melatonin yang berada dalam tubuh berjumlah 120 pikogram. Namun jumlah tersebut akan semakin menurun pada usia antara 20 sampai 30 tahun. Selain secara alamiah, pengurangan jumlah melatonin di dalam tubuh juga diakibatkan adanya pengaruh eksternal seperti: tidur larut malam, medan elektromagnetik dan polutan kimia misalnya pestisida, yang pada akhirnya dapat menyebabkan penyakin tekanan darah tinggi dan sakit kepala. Pada titik tertentu bahkan dapat menyebabkan turunnya sistem kekebalan tubuh (Setiabudi, 2007).

Kafein yang terkandung di dalam kopi, teh hitam, dan soda tertentu juga akan menyebabkan kemampuan antioksidan melatonin berkurang. Keadaan ini akan membahayakan sel-sel tubuh ketika seseorang dalam keadaan terjaga. Dengan demikian Haeri mengatakan bahwa yang harus menjadi perhatian adalah bukan kuantitas tidur seseorang untuk memberikan kebugaran bagi tubuh, tetapi justru kualitas tidurnya (Setiabudi, 2007).

Tahajjud tidak hanya memberikan pengaruh pada posisi melatonin. Gerakan ibadah di sepertiga malam terakhir ini juga memberikan pengaruh tertentu pada tubuh. Setidaknya, pada saat berdiri tegak dan mengangkat takbir secara tidak langsung akan membuat rongga toraks dalam paru-paru membesar. Hal ini akan menyebabkan banyak oksigen yang masuk ke dalamnya. Ada kesegaran yang dirasakan ketika seseorang dapat menghirup udara segar ke dalam paru-paru dalam keheningan malam itu. Pada saat sujud, seluruh berat dan daya badan dipindahkan sepenuhnya pada otot tangan, kaki, dada, perut, leher, dan jari kaki (Setiabudi, 2007).

Setelah oksigen masuk ke dalam paru-paru, oksigen diedarkan ke seluruh tubuh dengan lancar karena adanya pergerakan otot pada saat ruku' dan sujud. Selain itu, dalam sholat seseorang juga melakukan gerakan duduk diantara dua sujud dan tahiyat yang menyebabkan adanya gerakan tumit, pangkal paha, jari tangan, jari kaki, dan lainnya. Semua itu akan menyebabkan peredaran oksigen menjadi lancar (Setiabudi, 2007).

Hal-hal yang telah dijelaskan dalam uraian sebelumnya menunjukkan beberapa peristiwa difusi yang terjadi di dalam tubuh manusia. Reaksi difusi ini terjadi pada substansi-substansi yang berbentuk cairan, reaksi difusi dapat terjadi jika diantara dua atau lebih substansi yang berbentuk cairan tersebut dibatasi oleh suatu membrane yang disebut dengan membran semipermeabel. Allah SWT telah menunjukkan salah satu reaksi difusi yang terjadi di dalam sel yang telah diamati oleh Alan Turing. Maka melalui sholat tahajjud proses difusi dalam tubuh manusia dapat dimaksimalkan, salah satunya yaitu peristiwa difusi yang telah dijelaskan oleh Alan Turing.

### BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan pada skripsi ini menyajikan upaya mendeskripsikan atau diskretisasi untuk mendapatkan model diskret yang dapat merepresentasikan model kontinu. Model diskret yang telah dikonstruksi digunakan untuk mendekati grafik kontinu. Akurasi model diskret tersebut, akan dibuktikan melalui perbandingan grafik diskret dan grafik kontinunya.

#### 3.1 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Model Reaksi Difusi (*Turing*) kontinu adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - uv^2 - \rho u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b + uv^2 - v - \rho v \\ \frac{dL}{dt} = \rho L \end{cases} \quad (3.1)$$

Dinotasikan

$$u(x_i, t_n) = u_i^n$$

$$v(x_i, t_n) = v_i^n$$

Metode beda hingga maju untuk turunan terhadap waktu adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}$$

dan beda pusat untuk turunan kedua terhadap ruang adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

dan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Bentuk beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.1) maka di peroleh bentuk diskret model sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{L^2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{d}{L^2} \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} + b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n \end{cases} \quad (3.2)$$

Penyederhanaan persamaan (3.2), sehingga untuk persamaan  $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{L^2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n$  dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{1}{L^2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_i^n}{\Delta t} + a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n$$

Dengan mengalikan  $\Delta t$  dengan ruas kanan maka diperoleh:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n + \Delta t (a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n)$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n + \left(1 - 2 \frac{1}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{1}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^n + \Delta t (a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \quad (3.3)$$

untuk persamaan  $\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{d}{L^2} \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} + b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n$  dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{v_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{d}{L^2} \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_i^n}{\Delta t} + b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n$$

Dengan mengalikan  $\Delta t$  dengan ruas kanan maka diperoleh:

$$v_i^{n+1} = \frac{d}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + v_i^n + \Delta t (b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n)$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$v_i^{n+1} = \frac{d}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i+1}^n + \left(1 - 2 \frac{d}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) v_i^n + \frac{d}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} v_{i-1}^n + \Delta t (b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \quad (3.4)$$

Didefinisikan

$$\lambda = \frac{1}{L^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Sehingga persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

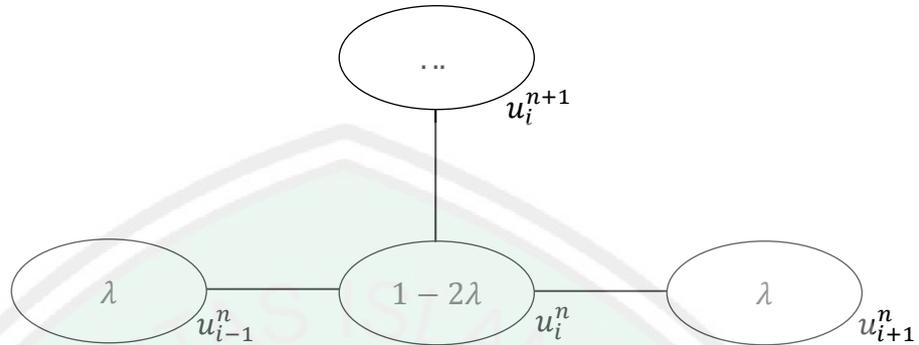
$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \Delta t (a - u_i^n (v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ v_i^{n+1} = d\lambda v_{i+1}^n + (1 - 2d\lambda)v_i^n + d\lambda v_{i-1}^n + \Delta t (b + u_i^n (v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \end{cases} \quad (3.5)$$

Jika iterasi  $n$  dimulai dari  $n - 1$  maka persamaan (3.5) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t (a - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1}) \\ v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t (b + u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1}) \end{cases} \quad (3.6)$$

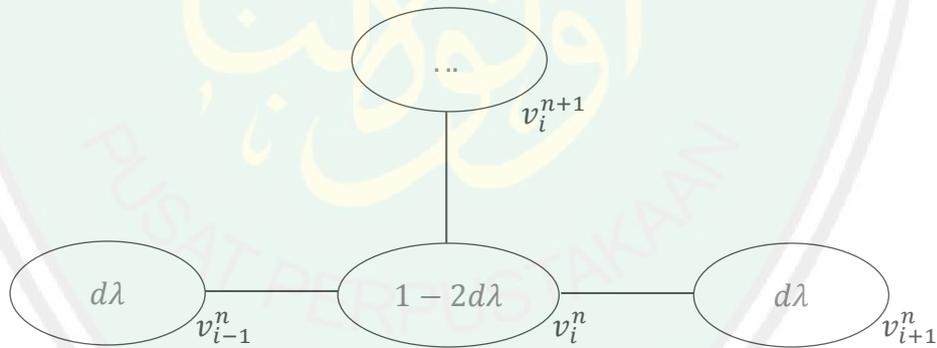
Stensil bentuk beda hingga model diskret Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk

persamaan  $u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t (a - u_i^{n-1} (v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$  adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1: Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan  $u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$

Stensil bentuk beda hingga model diskret Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk persamaan  $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$  adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 : Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan  $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$

Didefinisikan  $l = R/\Delta x$  sehingga banyak titik atau *grid* untuk  $x$  adalah  $l + 1$  dan  $k = T/\Delta t$  sehingga banyak titik atau *grid* untuk  $t$  adalah  $k + 1$ . Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas, dengan kondisi batas yang diberikan yaitu  $u(x_0, t) = 0,9$ ,  $u(R, t) = 0,9$ ,  $v(x_0, t) = 1$  dan  $v(R, t) = 1$  sehingga,

$$u_0^n = u_1^n = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

$$v_0^n = v_1^n = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

Langkah selanjutnya yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal, dan digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, 0) = 0,9 + \text{bilangan acak}$$

$$v(x, 0) = 1 + \text{bilangan acak}$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, maka iterasi dilakukan dengan persamaan (3.6) sesuai dengan jaring-jaring titik hitung.

Untuk persamaan  $\frac{dL}{dt} = \rho L$  dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dL}{dt} = \rho L$$

Dengan melakukan perkalian silang maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dL}{L} = \rho dt$$

Persamaan tersebut setara dengan persamaan berikut:

$$\ln|L| = \rho t + \ln C$$

Dengan melakukan perkalian silang maka persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\ln \frac{L}{C} = \rho t$$

$$\frac{L}{C} = e^{\rho t}$$

Dilakukan perkalian silang maka diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$L = C e^{\rho t}$$

Karena  $L$  adalah suatu fungsi yang bergantung waktu maka diperoleh:

$$L(t) = C e^{\rho t}$$

Jika diambil  $t = 0$  dan  $L(0) = 1$  maka  $C = 1$

Sehingga,

$$L(t) = e^{\rho t} \quad (3.7)$$

### 3.2 Penyelesaian Numerik Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Sebagai contoh, model Reaksi-Difusi (*Turing*) akan diselesaikan pada daerah batas  $0 < x < 1$  dan  $0 < t < 0,002$ . Energi kinetik yang digunakan pada model  $a = 0,9$  dan  $b = 0,1$ , rasio koefisien difusi  $d = 0,06$ , panjang domain yang tumbuh secara eksponensial terhadap waktu  $L$  dengan nilai awal  $L(0) = 1$  serta kecepatan tumbuh domain  $\rho = 0,01$ , sehingga persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,9 - uv^2 - 0,01u \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{0,06}{L(t)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0,1 + uv^2 - v - 0,01v \end{array} \right] \quad (3.9)$$

Dipilih nilai  $\Delta t = 0,00002$  dan  $\Delta x = 0,01$  sehingga bilangan Courant untuk model ini adalah:

$$\lambda = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Jika diambil nilai  $t = 0$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{L(0)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{1^2} \frac{0,00002}{(0,01)^2} \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

Substitusi nilai  $\lambda$  pada metode beda hingga skema eksplisit untuk persamaan (3.8)

dan (3.9) sesuai dengan persamaan (3.6) sehingga diperoleh:

Untuk persamaan  $u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$

$$u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$$

$$u_i^n = 0,2u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,2)u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,0002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - 0,01u_i^{n-1})$$

$$u_i^n = 0,2u_{i+1}^{n-1} + 0,6u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - 0,01u_i^{n-1}) \quad (3.10)$$

Untuk persamaan  $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$

$$v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,06 \times 0,2v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,06 \times 0,2)v_i^{n-1} + 0,06 \times 0,2v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,01v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,012v_{i+1}^{n-1} + 0,976v_i^{n-1} + 0,012v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,01v_i^{n-1}) \quad (3.11)$$

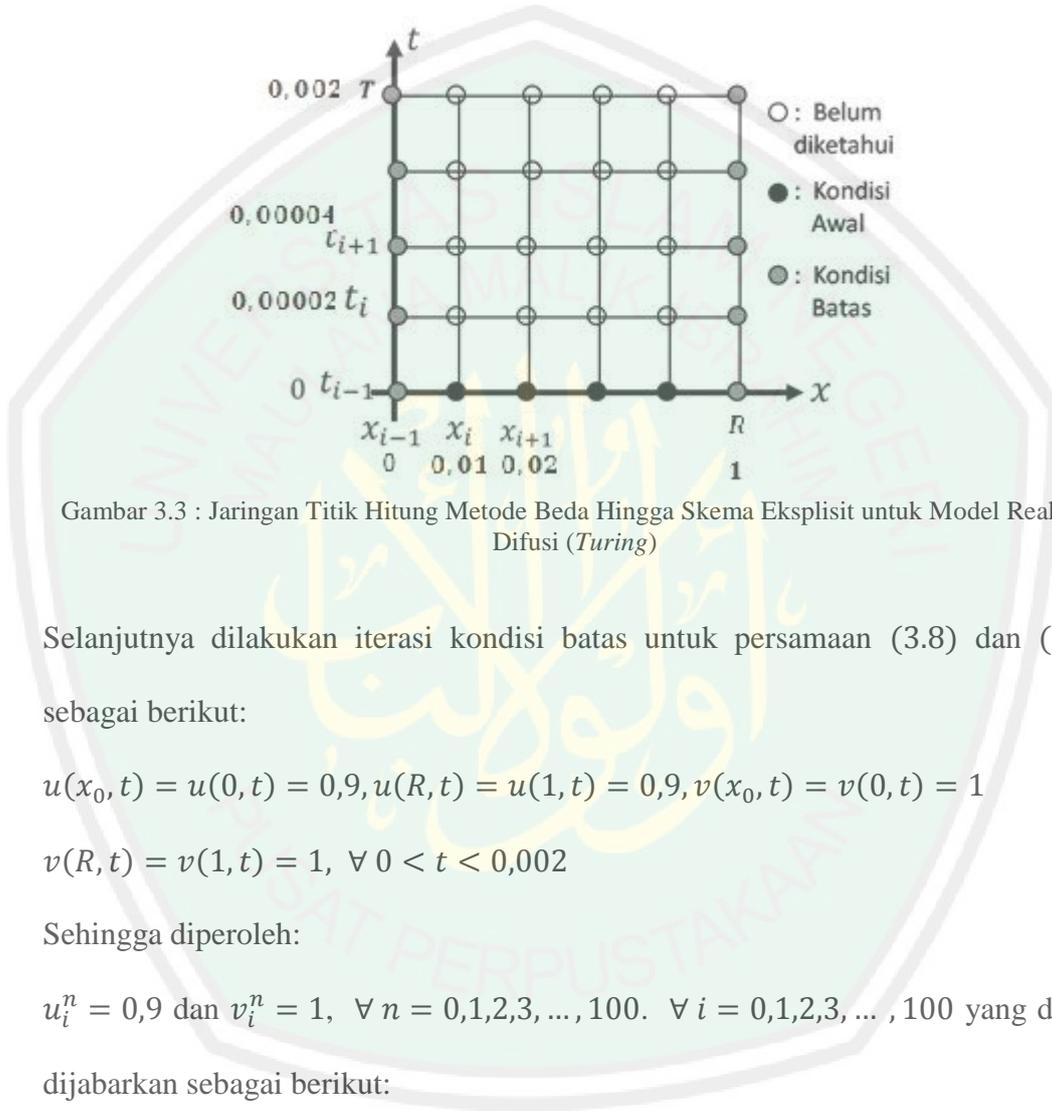
Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $x$  adalah  $l + 1$  dengan nilai  $l$  sebagai berikut:

$$l = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0,01} = 100$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $t$  adalah  $k + 1$  dengan nilai  $k$  sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0,002 - 0}{0,00002} = 100$$

Jaring-jaring titik hitung untuk kondisi tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 : Jaringan Titik Hitung Metode Benda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Reaksi-Difusi (Turing)

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.8) dan (3.9) sebagai berikut:

$$u(x_0, t) = u(0, t) = 0,9, u(R, t) = u(1, t) = 0,9, v(x_0, t) = v(0, t) = 1 \quad \text{dan} \\ v(R, t) = v(1, t) = 1, \quad \forall 0 < t < 0,002$$

Sehingga diperoleh:

$$u_i^n = 0,9 \text{ dan } v_i^n = 1, \quad \forall n = 0,1,2,3, \dots, 100. \quad \forall i = 0,1,2,3, \dots, 100 \text{ yang dapat}$$

dijabarkan sebagai berikut:

$u_0^0 = 0,9$	$v_0^0 = 1$
$u_0^1 = 0,9$	$v_0^1 = 1$
$u_0^2 = 0,9$	$v_0^2 = 1$
$u_{100}^2 = 0,9$	$v_{100}^2 = 1$
$\vdots$	$\vdots$

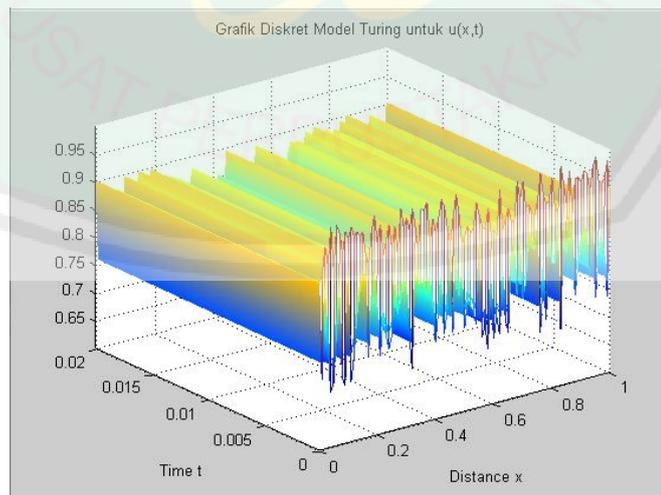
$$\begin{array}{ll}
 u_0^{100} = 0,9 & v_0^{100} = 1 \\
 u_{100}^0 = 0,9 & v_{100}^0 = 1 \\
 u_{100}^1 = 0,9 & v_{100}^1 = 1 \\
 u_{100}^2 = 0,9 & v_{100}^2 = 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_{100}^{100} = 0,9 & v_{100}^{100} = 1
 \end{array}$$

Langkah selanjutnya yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal sebagai berikut:

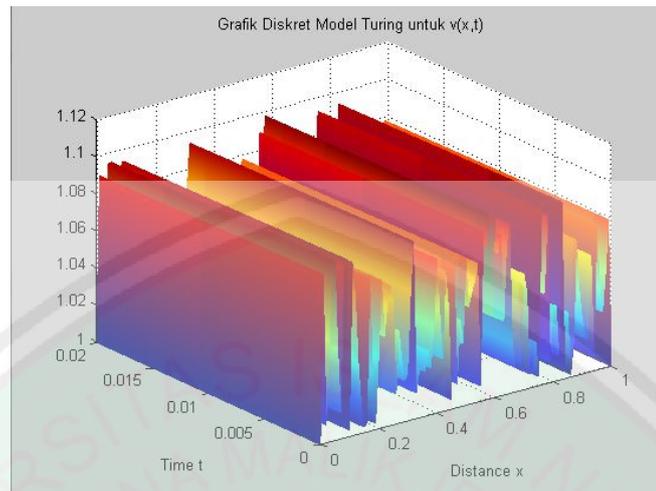
$$u_i^n = f(t_i) = 0,9 + \text{bilangan acak}, \quad \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan acak}, \quad \forall n = 0, \forall i = 1, 2, \dots, 99$$

Misal diambil  $\rho = 0,01$  maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.10) dan (3.11) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.3. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalan program pada lampiran 1.



Gambar 3.4 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $u(x, t)$  dengan  $\rho = 0,01$



Gambar 3.5 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $v(x, t)$  dengan  $\rho = 0,01$

Contoh simulasi yang kedua diambil nilai dari efek dilusi  $\rho = 0,001$ , sehingga persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,9 - uv^2 - 0,001u & (3.12) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{0,06}{L(t)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0,1 + uv^2 - v - 0,001v & (3.13) \end{cases}$$

Dipilih nilai  $\Delta t = 0,00002$  dan  $\Delta x = 0,01$  sehingga nilai  $\lambda$  untuk model ini adalah:

$$\lambda = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Jika diambil nilai  $t = 0$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{L(0)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1 \cdot 0,00002}{1^2 (0,01)^2} \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

Substitusi nilai  $\lambda$  pada metode beda hingga skema eksplisit untuk persamaan (3.12) dan (3.13) sesuai dengan persamaan (3.6) sehingga diperoleh:

Untuk persamaan  $u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$

$$u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$$

$$u_i^n = 0,2u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,2)u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,0002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - 0,001u_i^{n-1})$$

$$u_i^n = 0,2u_{i+1}^{n-1} + 0,6u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - 0,001u_i^{n-1}) \quad (3.14)$$

Untuk persamaan  $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$

$$v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,06 \times 0,2v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,06 \times 0,2)v_i^{n-1} + 0,06 \times 0,2v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,001v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,012v_{i+1}^{n-1} + 0,976v_i^{n-1} + 0,012v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,001v_i^{n-1}) \quad (3.15)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $x$  adalah  $l + 1$  dengan nilai  $l$  sebagai berikut:

$$l = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0,01} = 100$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $t$  adalah  $k + 1$  dengan nilai  $k$  sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0,002 - 0}{0,00002} = 100$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.14) dan (3.15) sebagai berikut:

$$u(x_0, t) = u(0, t) = 0,9, u(R, t) = u(1, t) = 0,9, v(x_0, t) = v(0, t) = 1 \quad \text{dan} \\ v(R, t) = v(1, t) = 1, \quad \forall 0 < t < 0,002$$

Sehingga diperoleh:

$$u_i^n = 0,9 \text{ dan } v_i^n = 1, \quad \forall n = 0,1,2,3, \dots, 100. \quad \forall i = 0,1,2,3, \dots, 100 \text{ yang dapat}$$

dijabarkan sebagai berikut:

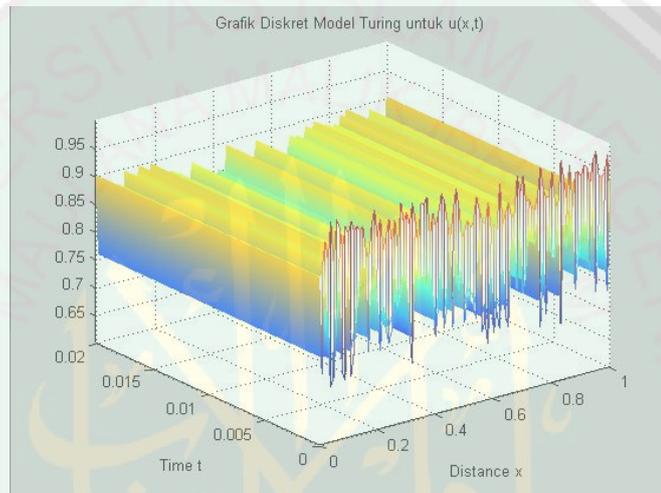
$$\begin{array}{ll} u_0^0 = 0,9 & v_0^0 = 1 \\ u_0^1 = 0,9 & v_0^1 = 1 \\ u_0^2 = 0,9 & v_0^2 = 1 \\ u_{100}^2 = 0,9 & v_{100}^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_0^{100} = 0,9 & v_0^{100} = 1 \\ u_{100}^0 = 0,9 & v_{100}^0 = 1 \\ u_{100}^1 = 0,9 & v_{100}^1 = 1 \\ u_{100}^2 = 0,9 & v_{100}^2 = 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_{100}^{100} = 0,9 & v_{100}^{100} = 1 \end{array}$$

Langkah selanjutnya yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal sebagai berikut:

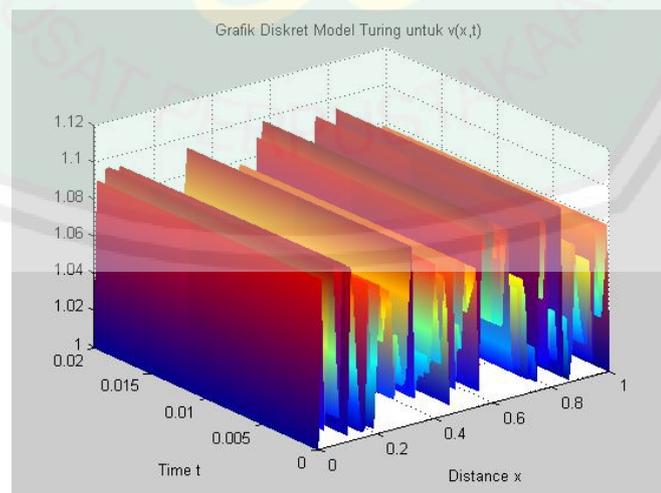
$$u_i^n = f(t_i) = 0,9 + \text{bilangan acak}, \quad \forall n = 0, \forall i = 1,2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan acak}, \quad \forall n = 0, \forall i = 1,2, \dots, 99$$

Dengan nilai  $\rho = 0,001$  maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.14) dan (3.15) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.3. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 2. Di mana program tersebut akan menghasilkan grafik sebagai berikut:



Gambar 3.6 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $u(x, t)$  dengan  $\rho = 0,001$



Gambar 3.7 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $v(x, t)$  dengan  $\rho = 0,001$

Contoh yang ketiga semua kondisi sama dengan contoh satu dan dua hanya berbeda untuk nilai  $\rho = 0,0001$ . sehingga persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0,9 - uv^2 - 0,0001u \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{0,06}{L(t)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0,1 + uv^2 - v - 0,0001v \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Dipilih nilai  $\Delta t = 0,00002$  dan  $\Delta x = 0,01$  sehingga diperoleh nilai  $\lambda$  untuk model ini adalah:

$$\lambda = \frac{1}{L(t)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Jika diambil nilai  $t = 0$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{L(0)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{1^2} \frac{0,00002}{(0,01)^2} \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

Substitusi nilai  $\lambda$  pada metode beda hingga skema eksplisit untuk persamaan (3.16) dan (3.17) sesuai dengan persamaan (3.6) sehingga diperoleh:

$$\text{Untuk persamaan } u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$$

$$u_i^n = \lambda u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2\lambda)u_i^{n-1} + \lambda u_{i-1}^{n-1} + \Delta t(a - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \rho u_i^{n-1})$$

$$\begin{aligned} u_i^n &= 0,2u_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,2)u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,0002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - \\ &0,0001u_i^{n-1}) \end{aligned}$$

$$u_i^n = 0,2u_{i+1}^{n-1} + 0,6u_i^{n-1} + 0,2u_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,9 - u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - 0,0001u_i^{n-1}) \quad (3.18)$$

Untuk persamaan  $v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$

$$v_i^n = d\lambda v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2d\lambda)v_i^{n-1} + d\lambda v_{i-1}^{n-1} + \Delta t(b + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - \rho v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,06 \times 0,2v_{i+1}^{n-1} + (1 - 2 \times 0,06 \times 0,2)v_i^{n-1} + 0,06 \times 0,2v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,0001v_i^{n-1})$$

$$v_i^n = 0,012v_{i+1}^{n-1} + 0,976v_i^{n-1} + 0,012v_{i-1}^{n-1} + 0,00002(0,1 + u_i^{n-1}(v_i^{n-1})^2 - v_i^{n-1} - 0,0001v_i^{n-1}) \quad (3.19)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $x$  adalah  $l + 1$  dengan nilai  $l$  sebagai berikut:

$$l = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{0,01} = 100$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu  $t$  adalah  $k + 1$  dengan nilai  $k$  sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{0,002 - 0}{0,00002} = 100$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.18) dan (3.19) sebagai berikut:

$$u(x_0, t) = u(0, t) = 0,9, u(R, t) = u(1, t) = 0,9, v(x_0, t) = v(0, t) = 1 \quad \text{dan} \\ v(R, t) = v(1, t) = 1, \forall 0 < t < 0,002$$

Sehingga diperoleh:

$u_i^n = 0,9$  dan  $v_i^n = 1$ ,  $\forall n = 0,1,2,3, \dots, 100$ .  $\forall i = 0,1,2,3, \dots, 100$  yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

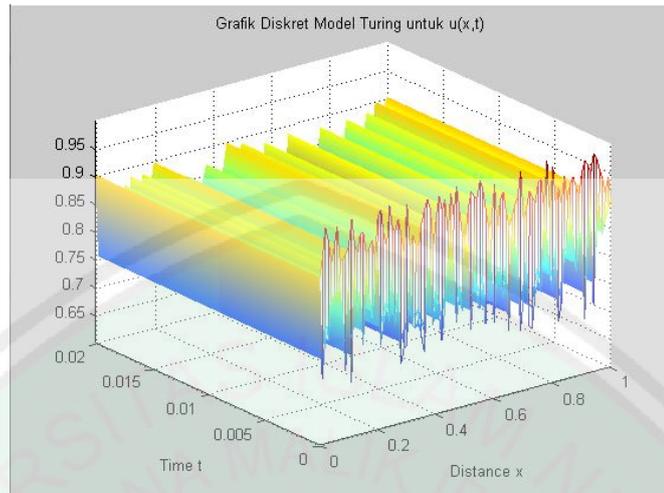
$$\begin{array}{ll}
 u_0^0 = 0,9 & v_0^0 = 1 \\
 u_0^1 = 0,9 & v_0^1 = 1 \\
 u_0^2 = 0,9 & v_0^2 = 1 \\
 u_{100}^2 = 0,9 & v_{100}^2 = 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_0^{100} = 0,9 & v_0^{100} = 1 \\
 u_{100}^0 = 0,9 & v_{100}^0 = 1 \\
 u_{100}^1 = 0,9 & v_{100}^1 = 1 \\
 u_{100}^2 = 0,9 & v_{100}^2 = 1 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_{100}^{100} = 0,9 & v_{100}^{100} = 1
 \end{array}$$

Langkah selanjutnya yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal sebagai berikut:

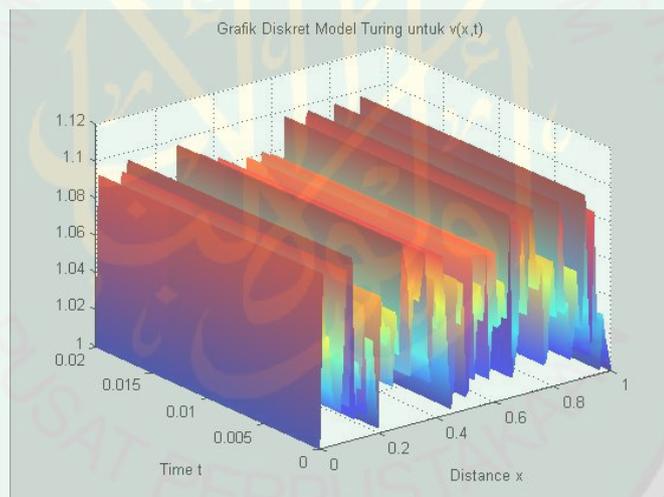
$$u_i^n = f(t_i) = 0,9 + \text{bilangan acak}, \forall n = 0, \forall i = 1,2, \dots, 99$$

$$v_i^n = g(t_i) = 1 + \text{bilangan acak}, \forall n = 0, \forall i = 1,2, \dots, 99$$

Dengan nilai  $\rho = 0,001$  maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.18) dan (3.19) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.3. Hasil selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 3. Dimana pada program tersebut akan dihasilkan grafik sebagai berikut:



Gambar 3.8 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $u(x, t)$  dengan  $\rho = 0,0001$



Gambar 3.9 : Grafik Diskret Model Reaksi-Difusi (*Turing*) untuk Persamaan  $v(x, t)$  dengan  $\rho = 0,0001$

### 3.3 Interpretasi Hasil Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*)

Kondisi batas yang digunakan pada bahasan ini adalah  $u(x_0 = L, t) = 0,9$ ,  $u(x_n = R, t) = 1$ ,  $v(x_0 = L, t) = 0,9$  dan  $v(x_n = R, t) = 1$ . Hal tersebut diinterpretasi bahwa  $x_0 = L$  dan  $x_n = R$  merupakan batas daerah energi kinetik non-dimensional yang diselesaikan sehingga perubahan nilai sebelum  $x_0 = L$  dan

setelah  $x_n = R$  diabaikan. Nilai batas 0,9 dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik  $x_0 = L$  sebesar 0,9 dan nilai batas 1 dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik  $x_n = R$  sebesar 1 pada masing-masing spesies untuk semua waktu  $t$ . Dengan adanya kondisi batas yang diberikan maka dapat memberikan batasan daerah yang akan diselesaikan.

Parameter-parameter yang digunakan di dalam model reaksi-difusi (*Turing*) yaitu  $\rho$  adalah tingkat pertumbuhan domain dan  $-\rho u$  dan  $-\rho v$  menggambarkan efek dari adanya perluasan lokal dari domain yang digunakan. Dengan nilai parameter  $a = 0,9$  dan  $b = 0,1$ , serta nilai dari parameter  $d = 0,06$ , dimana  $d$  adalah nilai dari rasio koefisien difusi.

Kondisi awal yang digunakan dalam pembahasan model reaksi-difusi (*Turing*) adalah sebagai berikut:

$$u(x_0, t_i) = 0,9 + \text{bilangan acak}$$

$$v(x_0, t_i) = 1 + \text{bilangan acak}$$

Kondisi tersebut dapat dimaknai bahwa energi kinetik non-dimensional pada titik  $x_0$  pada waktu  $t_i$  untuk masing-masing spesies dipengaruhi oleh adanya penambahan bilangan acak di belakang suatu konstanta.

### 3.4 Manfaat Gerakan Sholat yang Benar untuk Kesehatan Tubuh

Melaksanakan sholat sebagai salah satu rukun Islam bukan saja menjaga tegaknya agama akan tetapi secara medis sholat adalah gerakan paling proporsional bagi anatomi tubuh manusia. Perintah untuk melaksanakan sholat ini sesuai dengan firman Allah yang berbunyi:

الَّذِينَ يُؤْمِنُونَ بِالْغَيْبِ وَيُقِيمُونَ الصَّلَاةَ وَمِمَّا رَزَقْنَاهُمْ يُنْفِقُونَ ﴿٣﴾

Artinya: "(yaitu) mereka yang beriman kepada yang ghaib, yang mendirikan shalat, dan menafkahkan sebahagian rezki yang Kami anugerahkan kepada mereka" (QS. Al-Baqarah:3).

Ayat tersebut menerangkan bahwa Allah akan memberikan anugerah-Nya kepada orang-orang yang mendirikan shalat. Gerakan shalat memberikan dampak yang sangat positif bagi kesehatan dan obat terhadap berbagai macam penyakit. Ibadah shalat merupakan bagian dari olahraga otot-otot dan persendian tubuh. Sholat dapat membantu menjaga vitalitas dan kebugaran tubuh dengan syarat semua gerakan shalat dilakukan dengan benar, perlahan dan tidak terburu-buru serta dilakukan secara istiqomah atau konsisten (Muadz, 2012).

Begitu banyak manfaat dari gerakan shalat bagi kesehatan tubuh manusia. Semakin sering melakukan shalat dengan benar, maka semakin banyak pula manfaat yang diperoleh dari gerakan shalat yang dilakukan. Beberapa manfaat dari gerakan shalat diantaranya, berdiri tegak dalam shalat memuat hikmah yang luar biasa yaitu dapat melatih keseimbangan tubuh dan konsentrasi pikiran. Berdiri tegak pada waktu shalat membuat seluruh syaraf menjadi satu titik pusat pada otak, jantung, paru-paru, pinggang, dan tulang punggung lurus yang bekerja secara normal, kedua kaki yang tegak lurus pada posisi akupuntur, sangat bermanfaat bagi kesehatan tubuh (Muadz, 2012).

Takbiratul ihram, takbir dilakukan dengan mengangkat kedua tangan sejajar bahu dan dilakukan ketika hendak rukuk dan bangkit dari rukuk. Pada saat mengangkat kedua tangan sejajar bahu maka secara otomatis dada akan terbuka

dan otot bahu meregang sehingga membuat aliran darah lancar dan kaya akan oksigen. Darah yang kaya akan oksigen ini dialirkan ke bagian otak pengatur keseimbangan tubuh, membuka mata dan telinga sehingga keseimbangan tubuh dapat terjaga. Kedua tangan yang didekapkan di depan perut atau dada bagian bawah adalah sikap atau posisi untuk menghindarkan diri dari gangguan persendian, khususnya pada perut bagian atas (Muadz, 2012).

Rukuk yang sempurna ditandai dengan posisi tulang belakang yang berada dalam posisi lurus sehingga apabila diletakkan segelas air di atas punggung air tersebut tidak akan tumpah, dan posisi kepala lurus dengan tulang belakang. Rukuk yang dilakukan dengan tenang dan optimal bermanfaat untuk menjaga kesempurnaan posisi serta fungsi tulang belakang (*corpus vertebrae*) sebagai penyangga tubuh dan pusat syaraf. Posisi jantung sejajar dengan otak pada saat membungkuk menjadikan aliran darah maksimal pada tubuh bagian tengah. Rukuk juga dapat memelihara kelenturan tuas sistem keringat yang terdapat di punggung, pinggang, paha dan betis belakang. Demikian pula dengan tulang leher, tengkuk dan saluran syaraf, memori dapat terjaga kelenturannya dengan rukuk. Tangan yang bertumpu pada lutut berfungsi untuk merelaksasi otot-otot bahu hingga ke bawah. Selain itu, rukuk merupakan sarana latihan bagi kandung kemih sehingga gangguan prostat dapat dicegah (Muadz, 2012).

Pada saat berdiri dari rukuk dengan mengangkat tangan, dari kepala akan turun ke bawah sehingga bagian pangkal otak yang mengatur keseimbangan akan berkurang tekanan darahnya. Hal ini dapat menjaga sistem syaraf keseimbangan tubuh dan berguna mencegah terjadinya pingsan secara tiba-tiba. Gerakan ini juga

bermanfaat sebagai latihan yang baik bagi organ-organ pencernaan. Pada saat tidak dilakukan, organ-organ pencernaan di dalam perut mengalami pemijatan dan pelonggaran secara bergantian (Muadz, 2012).

Posisi sujud yang menungging dengan meletakkan kedua tangan di lantai di sebelah kanan dan kiri telinga, dengan lutut, ujung kaki, dan dahi juga di atas lantai berguna untuk memompa getah bening ke bagian leher dan ketiak. Nabi Muhammad SAW menjelaskan posisi sujud yang benar dalam sebuah hadist yang artinya:

*“Aku diperintahkan untuk bersujud dan bertumpuh pada tujuh anggota badan : dahi dan beliau berisyarat dengan menyentuhkan tangan ke hidung beliau, dua telapak tangan, dua lutut, dan ujung-ujung dua kaki”* (HR. Al Bukhari dan Muslim).

Posisi jantung di atas otak menyebabkan darah yang kaya akan oksigen mengalir maksimal ke otak. Aliran ini berpengaruh pada daya pikir orang yang melakukan sholat. Oleh karena itu, sujud dilakukan dengan tuma'ninah, tidak tergesa-gesa agar kapasitas darah di dalam otak tercukupi. Posisi seperti ini menghindarkan seseorang dari gangguan wasir. Khusus bagi wanita, baik ruku' maupun sujud memiliki manfaat luar biasa bagi kesuburan dan kesehatan organ kewanitaan. Gerakan sujud tergolong unik. Sujud memiliki falsafah bahwa manusia menundukkan diri serendah-rendahnya, bahkan lebih rendah dari pantatnya sendiri. Dari sudut pandang ilmu *psikoneuroimunologi* (ilmu mengenai kekebalan tubuh dari sudut pandang psikologis) yang di dalami Prof. Dr. Muhammad Soleh, gerakan ini mengantarkan manusia pada derajat setinggi-tingginya (Muadz, 2012).

Dengan melakukan gerakan sujud secara rutin, pembuluh darah di otak terlatih untuk menerima banyak pasokan oksigen. Pada saat sujud, posisi jantung berada di atas kepala yang memungkinkan darah mengalir maksimal ke otak. Artinya, otak mendapatkan pasokan darah kaya oksigen yang memacu kerja sel-selnya. Dengan kata lain, sujud yang tuma'ninah dan kontinu dapat memicu peningkatan kecerdasan seseorang. Setiap inci otak manusia memerlukan darah yang cukup untuk berfungsi secara normal. Darah tidak akan memasuki urat saraf di dalam otak melainkan ketika seseorang sujud dalam sholat. Urat saraf tersebut memerlukan darah untuk beberapa saat tertentu saja. Ini berarti, darah akan memasuki bagian urat tersebut mengikuti waktu shalat, sebagaimana yang telah diwajibkan dalam Islam (Muadz, 2012).

Di samping itu, gerakan-gerakan dalam shalat sekilas mirip gerakan yoga ataupun peregangan (*stretching*). Intinya, berguna untuk melenturkan tubuh dan melancarkan peredaran darah. Keunggulan sholat dibandingkan gerakan lainnya adalah di dalam shalat lebih banyak menggerakkan anggota tubuh, termasuk jari-jari kaki dan tangan (Muadz, 2012).

Sujud juga merupakan latihan kekuatan otot tertentu, termasuk otot dada. Saat sujud, beban tubuh bagian atas ditumpukan pada lengan hingga telapak tangan. Pada saat inilah kontraksi terjadi pada otot dada, bagian tubuh yang menjadi kebanggaan wanita. Payudara tak hanya menjadi lebih indah bentuknya tetapi juga memperbaiki fungsi kelenjar air susu di dalamnya (Muadz, 2012).

Masih dalam posisi sujud, manfaat lain yang dapat dinikmati kaum hawa adalah otot-otot perut (*rectus abdominis* dan *obliquus abdominis externus*)

berkontraksi penuh saat pinggul serta pinggang terangkat melampaui kepala dan dada. Kondisi ini melatih organ di sekitar perut untuk berkontraksi lebih dalam dan lebih lama yang membantu dalam proses persalinan. Karena di dalam persalinan dibutuhkan pernapasan yang baik dan kemampuan untuk berkontraksi yang mencukupi. Bila otot perut telah berkembang menjadi lebih besar dan kuat maka secara alami otot ini justru menjadi elastis. Kebiasaan sujud menyebabkan tubuh dapat mengembalikan dan mempertahankan organ-organ perut pada tempatnya kembali (*fiksasi*) (Muadz, 2012).

Setelah melakukan sujud, kemudian melakukan duduk. Dalam shalat terdapat dua jenis duduk yaitu duduk *iftirosy* (tahiyyat awal) dan duduk *tawaru'* (tahiyyat akhir). Hal terpenting adalah turut berkontraksinya otot-otot daerah perineum. Bagi wanita, di daerah ini terdapat tiga liang yaitu liang persenggamaan, dubur, dan saluran kemih. Pada saat duduk *iftirosy*, tubuh bertumpu pada pangkal paha yang terhubung dengan syaraf *nervus Ischiadius*. Posisi ini mampu menghindarkan nyeri pada pangkal paha yang sering menyebabkan penderitanya tak mampu berjalan. Selain itu, gerakan ini dapat menjaga kelenturan syaraf di bagian paha dalam, cekungan lutut, cekungan betis, sampai jari-jari kaki. Kelenturan syaraf ini dapat mencegah penyakit prostat, diabetes, sulit buang air kecil dan hernia (Muadz, 2012).

Duduk tasyahud akhir atau *tawaru'* adalah salah satu anugerah Allah yang patut disyukuri, karena sikap itu merupakan penyembuhan penyakit tanpa obat dan tanpa operasi. Posisi duduk dengan mengangkat kaki kanan dan menghadap jari-jari ke arah kiblat ini, secara otomatis memijat pusat-pusat daerah

otak, ruas tulang punggung teratas, mata, otot-otot bahu, dan otot-otot yang terdapat pada ujung kaki. Untuk laki-laki sikap duduk ini luar biasa manfaatnya, terutama untuk kesehatan dan kekuatan organ seks. Bagi wanita posisi ini bermanfaat untuk memperbaiki organ reproduksi di daerah perineum. Variasi posisi telapak kaki pada *iftirosy* dan *tawarru'* menyebabkan seluruh otot tungkai turut meregang dan kemudian relaks kembali. Gerak dan tekanan harmonis inilah yang menjaga kelenturan dan kekuatan organ-organ gerak tubuh (Muadz, 2012).

Bahkan gerakan salam berpaling ke kanan dan ke kiri juga bermanfaat membantu menguatkan otot-otot leher dan kepala serta menyempurnakan aliran darah di kepala sehingga mencegah sakit kepala serta menjaga kekencangan kulit wajah. Apabila menjalankan sholat dengan benar maka tubuh akan terasa lebih segar, sendi-sendi dan otot akan terasa lebih kendur, dan otak juga mampu kembali berfikir dengan jernih (Muadz, 2012).

Gerakan-gerakan ketika sholat tidak hanya memaksimalkan jalannya proses difusi di dalam tubuh akan tetapi gerakan-gerakan sholat dapat membantu menjaga kesehatan dan kebugaran tubuh atau bahkan sebagai obat dari berbagai macam penyakit.

## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan deskripsi metode beda hingga skema eksplisit untuk mendiskretkan persamaan reaksi-difusi (*Turing*) dapat disimpulkan bahwa:

1. Persamaan reaksi-difusi (*Turing*) ditransformasi ke bentuk skema beda hingga eksplisit menggunakan beda maju untuk waktu dan beda pusat untuk ruang. Sehingga diperoleh bentuk diskret model reaksi-difusi (*Turing*) sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n + \Delta t(a - u_i^n(v_i^n)^2 - \rho u_i^n) \\ v_i^{n+1} = d\lambda v_{i+1}^n + (1 - 2d\lambda)v_i^n + d\lambda v_{i-1}^n + \Delta t(b + u_i^n(v_i^n)^2 - v_i^n - \rho v_i^n) \end{cases}$$

2. Hasil simulasi bentuk diskret model reaksi-difusi (*Turing*) menggunakan metode beda hingga skema eksplisit dengan nilai pertumbuhan domain ( $\rho$ ) yang berbeda yaitu  $\rho = 0,01$ ,  $\rho = 0,001$  dan  $\rho = 0,0001$  tidak menunjukkan adanya perubahan terhadap grafik yang dihasilkan dari masing-masing variabel.
3. Bentuk diskret model dapat merepresentasikan bentuk model kontinu dan besar nilai dari kecepatan pertumbuhan domain ( $\rho$ ) tidak memberikan pengaruh terhadap perilaku dinamik dari bentuk diskret model reaksi-difusi (*Turing*).

### 4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskretisasi model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan menggunakan nilai parameter,

nilai awal, nilai batas dan interval yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat kekurangan model diskret yang telah dibangun untuk parameter yang lain. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode diskretisasi yang akan digunakan.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. 2013. Deret Fourier. <http://id.wikipedia.org/wiki/DeretFourier> diakses pada tanggal 18 Pebruari 2013 pukul 08.00 WIB.
- Arhami, M dan Anita, D.. 2005. *Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.
- Azizah, S.. 2012. Diskretisasi Model *Lorenz* dengan Analogi Persamaan Beda. *Skripsi.Tidak dipublikasikan*. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Barras , I., Crampin E. J., dan Maini, P.K.. 2006. Mode Transition in a Model Reaction-Diffusion System Driven by Domain Growth and Noise. *Buletin of Mathematical Biology*. 68, 981-995.
- Causon, D.M., dan Mingham, C.G.. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. United Kingdom: Ventus Publishing ApS.
- Crampin, E. J.. 2000. Reaction–diffusion patterns on growing domains. *DPhil thesis*, University of Oxford, UK.
- Crampin, E. J., Gaffney, E.A., dan Maini, P.K.. 1999. Reaction and diffusion on growing domains: Scenarios for robust pattern formation. *Bull. Math. Biol.* 61(6), 1093–1120.
- Debnath, L.. 2012. *Nonlinear Partial Differential Equations For Scientist and Engineers Third Edition*. New York: Springer Science+Business Media.
- Finizio, dan Ladas. 1988. *Diferensial Biasa*. Jakarta: Erlangga.
- Flaherty, J.E. dkk., 1989. *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. New York: Defense Technical Information Center.
- Griffiths, Graham W., dan William, S.E.. 2010. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations*. London: Academic Press is an imprint of Elsevier.
- Howard, P. 2005. *Partial Differensial Equations in MATLAB 7.0*. Spring.
- Kartono. 2005. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Liu, dan Hussain, TT. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Engineering-Arizona State University.

- Etter, D.M., dkk., 2003. *Pengantar MATLAB 6*. Jakarta: PT INDEKS Kelompok GRAMEDI.
- Meyer, W.J.. 1985. *Concept of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Muadz, A.. 2012. Manfaat Gerakan Sholat bagi Kesehatan Tubuh. [www.Amalimuadz.blogspot.com](http://www.Amalimuadz.blogspot.com) diakses pada tanggal 6 Maret 2013 pukul 12.30 WIB.
- Murtiyasa, B.. 2008. *Menyelesaikan Persoalan Matematika dengan MATLAB*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- Pagalay, U.. 2009. *Mathematical Modelling: Aplikasi pada kedokteran, Immunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Malang Press.
- Pujiyanta, A.. 2007. *Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V ANDI OFFSET.
- Setiabudi. 2007. Pola Tidur Sehat dan Fenomena di Balik Kedahsyatan Sholat Malam. [www.setiabudi.name/archives/69](http://www.setiabudi.name/archives/69) diakses pada tanggal 25 Pebruari 2013 pukul 14.30 WIB.
- Scheid, F.. 1988. *Analisis Numerik*. Jakarta: Erlangga.
- Shepley, L. R.. 1984. *Differential Equation*. New York: John Wiley & Sons.
- Spiegel, M.R.. 1984. *Kalkulus Lanjutan Versi SI atau Metrik*. Jakarta: Erlangga.
- Spiegel, M.R.. 1984. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.
- Sulaiman. 2000. *Turbulensi Laut Banda*. Jakarta: Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT).
- Tim Penyusun. 2008. *Kamus Bahasa Indonesia*. Jakarta: Pusat Bahasa.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Zauderer, E.. 1998. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Second Edition*. New York: Wiley Interscience publication.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Ernawati Efendi  
Nim : 09610072  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Diskretisasi Model Reaksi-Difusi (*Turing*) dengan Metode  
Beda Hingga Eksplisit  
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 September 2012	Konsultasi Bab I	1.
2.	24 September 2012	ACC Bab I	2.
3.	19 November 2012	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	3 Januari 2013	Konsultasi Bab I, Bab II	4.
5.	7 Januari 2013	Konsultasi Bab I, Bab II	5.
6.	8 Januari 2013	Konsultasi Kajian Agama	6.
7.	29 Januari 2013	Konsultasi Bab III	7.
8.	22 Pebruari 2013	Konsultasi Bab III	8.
9.	26 Pebruari 2013	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	26 Pebruari 2013	Konsultasi Bab III, Bab IV	10.
11.	8 Maret 2013	ACC Kajian Agama	11.
12.	9 Maret 2013	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 18 Maret 2013  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## LAMPIRAN

### Lampiran 1

Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,01$

```
% Kondisi awal
% u(x,0)=0,9+bilangan random
% v(x,0)=1+bilangan random
% Kondisi batas
% u(0,t) = 0,9
% u(1,t) = 0,9
% v(0,t) = 1
% v(1,t) = 1
format short
clc
clear all
% parameter
a=0.9;
b=0.1;
d=0.06;
rho=0.01;
L0=1;
% Interval
delx=0.01;
delt=0.00002;
x=[0:delx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:delt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for i=1:N+1
    u(i,1)=0.9+rand*0.1;
    v(i,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for i=1:M+1
    u(1,i)=0.9;
    v(1,i)=1;
    u(N+1,i)=0.9;
    v(N+1,i)=1;
end
for i=1:M+1
    L(i)=exp(rho*delt*i)*L0;
end
for i=1:M
    for j=2:N
        u(j,i+1)=u(j,i)+(1/L(i)^2*delx^2)*(u(j+1,i)-2*u(j,i)+u(j-1,i))+a-u(j,i)*(v(j,i))^2-rho*u(j,i)*delt;
        v(j,i+1)=v(j,i)+((d/L(i)^2*delx^2)*(v(j+1,i)-2*v(j,i)+v(j-1,i))+b+u(j,i)*(v(j,i))^2-v(j,i)-rho*u(j,i))*delt;
        drawnow;
    end
end
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,u')
```

```
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk u(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,v')
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk v(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
```



## Lampiran 2

Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,001$

```
% Kondisi awal
% u(x,0)=0,9+bilangan random
% v(x,0)=1+bilangan random
% Kondisi batas
% u(0,t) = 0,9
% u(1,t) = 0,9
% v(0,t) = 1
% v(1,t) = 1
format short
clc
clear all
% parameter
a=0.9;
b=0.1;
d=0.06;
rho=0.001;
L0=1;
% Interval
delx=0.01;
delt=0.00002;
x=[0:delx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:delt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for i=1:N+1
    u(i,1)=0.9+rand*0.1;
    v(i,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for i=1:M+1
    u(1,i)=0.9;
    v(1,i)=1;
    u(N+1,i)=0.9;
    v(N+1,i)=1;
end
for i=1:M+1
    L(i)=exp(rho*delt*i)*L0;
end
for i=1:M
    for j=2:N
        u(j,i+1)=u(j,i)+(1/L(i)^2*delx^2)*(u(j+1,i)-2*u(j,i)+u(j-1,i))+a-u(j,i)*(v(j,i))^2-rho*u(j,i)*delt;
        v(j,i+1)=v(j,i)+((d/L(i)^2*delx^2)*(v(j+1,i)-2*v(j,i)+v(j-1,i))+b+u(j,i)*(v(j,i))^2-v(j,i)-rho*u(j,i))*delt;
        drawnow;
    end
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,u')
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk u(x,t)')
```

```
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,v')
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk v(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
```



### Lampiran 3

Program MATLAB untuk Grafik Diskret dengan Nilai Parameter  $\rho = 0,0001$

```
% Kondisi awal
% u(x,0)=0,9+bilangan random
% v(x,0)=1+bilangan random
% Kondisi batas
% u(0,t) = 0,9
% u(1,t) = 0,9
% v(0,t) = 1
% v(1,t) = 1
format short
clc
clear all
% parameter
a=0.9;
b=0.1;
d=0.06;
rho=0.0001;
L0=1;
% Interval
delx=0.01;
delt=0.00002;
x=[0:delx:1];
N=length(x)-1;
t=[0:delt:0.002];
M=length(t)-1;
% Kondisi awal
for i=1:N+1
    u(i,1)=0.9+rand*0.1;
    v(i,1)=1+rand*0.1;
end
%kondisi batas
for i=1:M+1
    u(1,i)=0.9;
    v(1,i)=1;
    u(N+1,i)=0.9;
    v(N+1,i)=1;
end
for i=1:M+1
    L(i)=exp(rho*delt*i)*L0;
end
for i=1:M
    for j=2:N
        u(j,i+1)=u(j,i)+(1/L(i)^2*delx^2)*(u(j+1,i)-2*u(j,i)+u(j-1,i))+a-u(j,i)*(v(j,i))^2-rho*u(j,i)*delt;
        v(j,i+1)=v(j,i)+((d/L(i)^2*delx^2)*(v(j+1,i)-2*v(j,i)+v(j-1,i))+b+u(j,i)*(v(j,i))^2-v(j,i)-rho*u(j,i))*delt;
        drawnow;
    end
end
%plot hasil
figure (1)
mesh(x,t,u')
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk u(x,t)')
```

```
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
figure (2)
mesh(x,t,v')
shading interp
title('Grafik Diskret Model Turing untuk v(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
```

