

**PERSAMAAN POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS
ADJACENCY, MATRIKS LAPLACE, DAN MATRIKS
SIGNLESS-LAPLACE GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT**

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

SKRIPSI

Oleh:

DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI

NIM. 09610067



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PERSAMAAN POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS
ADJACENCY, MATRIKS LAPLACE, DAN MATRIKS
SIGNLESS-LAPLACE GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT**

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI
NIM. 09610067

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PERSAMAAN POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS
ADJACENCY, MATRIKS LAPLACE, DAN MATRIKS
SIGNLESS-LAPLACE GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT**

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI
NIM. 09610067

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PERSAMAAN POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS
ADJACENCY, MATRIKS LAPLACE, DAN MATRIKS
SIGNLESS-LAPLACE GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT**

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

SKRIPSI

Oleh:
DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI
NIM. 09610067

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 12 Januari 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERSAMAAN POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS
ADJACENCY, MATRIKS LAPLACE, DAN MATRIKS
SIGNLESS-LAPLACE GRAF MULTIPARTISI KOMPLIT**

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

SKRIPSI

Oleh:
DEASY SANDHYA ELYA IKAWATI
NIM. 09610067

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2013

Penguji Utama : Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Ketua Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Sekretaris Penguji : Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Anggota Penguji : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Deasy Sandhya Elya Ikawati
NIM : 09610067
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Januari 2013

Yang membuat pernyataan,

Deasy Sandhya Elya Ikawati

NIM. 09610067

MOTTO

Jika kamu yakin dengan kemauanmu...

SEMESTA pun akan mendukungmu..



PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan
untuk:

Mama dan Papa tercinta
(Halimatusy Sya'diyah, S.Ag dan Rafiudin Ismail, S.Pd)

Adik tercinta Hegar Pandu W.S
dan...

Si kembar
(Mutia Deva N. F dan Cut Devy N.F)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xvi
المخلص	xviii
BAB I: PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II: KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Analisis Graf	8
2.1.1 Graf	8
2.1.2 <i>Adjacent dan Incident</i>	9
2.1.3 Derajat Titik	9
2.1.4 Macam-Macam Graf	11
2.2 Analisis Matriks	13
2.2.1 Matriks	13
2.2.2 Jenis-jenis Matriks	14
2.2.3 Operasi pada Matriks	15
2.2.4 Determinan Matriks	17
2.2.5 Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen	19
2.2.6 Matriks Adjacency	20
2.2.7 Matriks Laplace	21
2.2.8 Matriks Signless-Laplace.....	21
2.3 Kajian Polinomial pada Al-Qur'an	22

BAB III : PEMBAHASAN

3.1 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi Komplit $K(n, n)$	25
3.2 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi Komplit $K(n, n, n)$	28
3.3 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Multipartisi Komplit $K(n, n, n, \dots, n)$	34
3.4 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi Komplit $K(m, m + 1)$	36
3.5 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit $K(n, n)$	41
3.6 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit $K(n, n, n)$	48
3.7 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(n, n, n, \dots, n)$	54
3.8 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit $K(m, m + 1)$	58
3.9 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(1, 1, 1, \dots, 2)$	65
3.10 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(2, 2, 2, \dots, 3)$	71
3.11 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(3, 3, 3, \dots, 4)$	79
3.12 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(m, m, m, \dots, m + 1)$	88
3.13 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(1, 2, 3, \dots, n)$	91
3.14 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi Komplit $K(n, n)$	97
3.15 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Tripartisi Komplit $K(n, n, n)$	103
3.16 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi Komplit $K(m, m + 1)$	111
3.17 Hikmah Mencari Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency, Matriks Laplace, dan Matriks Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit.....	121

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	122
4.2 Saran	123

DAFTAR PUSTAKA	124
-----------------------------	-----



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam di sekitar manusia tidak hanya berfungsi sebagai tempat hidup, akan tetapi juga dapat digunakan sebagai sarana ibadah seorang hamba kepada Tuhannya, salah satunya yaitu mencari ilmu. Akal adalah anugerah Tuhan yang hanya diberikan kepada manusia. Oleh karena itu, manusia harus menggunakan akal yang telah Allah berikan. Allah telah memberikan tanda-tanda kepada manusia yang dapat digunakan untuk menjadikan bidang pengetahuan lebih maju yaitu dengan cara berpikir. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Jaatsiyah ayat 13:

وَسَخَّرَ لَكُمْ مَّا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا مِنْهُ ۗ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ
يَتَفَكَّرُونَ ﴿١٣﴾

Artinya: Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir.

Segala fenomena yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari, sebenarnya sudah terpola dengan rapi dengan beberapa aturan-aturan yang saling berkaitan. Dengan pola-pola tersebut dapat disusun suatu formula atau rumus yang digunakan untuk manusia. Ahli matematika atau ilmuwan lain tidak membuat suatu rumus sedikitpun, mereka hanya menangkap fenomena yang terjadi, kemudian diteliti dan merumuskan dalam bentuk bahasa mereka sendiri. Sehingga

ditemukanlah rumus-rumus atau teori-teori. Hal ini sesuai dengan firman Pencipta Alam ini dalam surat Al-Furqan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمَلِكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.

Dalam ilmu matematika, terdapat ilmu graf yang jika dikerjakan dengan proses aljabar akan menemukan suatu pola-pola tertentu yang sesuai dengan ayat di atas. Namun, sebelum pola ditentukan, ada proses yang harus dilewati. Hal ini analog dengan proses terciptanya manusia, yang tertuang dalam surat Al-Mu'minun ayat 12-16:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ مِنْ سُلَالَةٍ مِّنْ طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَاهُ نُطْفَةً فِي قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾ ثُمَّ خَلَقْنَا النُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظْمًا فَكَسَوْنَا الْعِظْمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنشَأْنَاهُ خَلْقًا آخَرَ فَتَبَارَكَ اللَّهُ أَحْسَنُ الْخَالِقِينَ ﴿١٤﴾ ثُمَّ إِنَّكُمْ بَعْدَ ذَلِكَ لَمَيِّتُونَ ﴿١٥﴾ ثُمَّ إِنَّكُمْ يَوْمَ الْقِيَامَةِ تُبْعَثُونَ ﴿١٦﴾

Artinya: Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dari suatu sari pati (berasal) dari tanah. Kemudian Kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu Kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu Kami jadikan tulang-belulang, lalu tulang belulang itu Kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha Sucilah Allah, Pencipta Yang Paling Baik. Kemudian, sesudah itu, sesungguhnya kalian benar-benar mati. Kemudian, sesungguhnya kalian akan dibangkitkan (dari kubur kalian) dihari kiamat.

Penelitian ini sejalan dengan ayat tersebut, untuk memperoleh polinomial karakteristik mulanya berawal dari teori graf, kemudian diperoleh matriks dari graf tersebut sehingga setelah diolah secara aljabar akan menghasilkan polinomial karakteristik. Polinomial tersebut harus memenuhi $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Akar dari $p(\lambda) = 0$ disebut nilai eigen (Demmel, 1997:140).

Pada *paper* yang ditulis oleh Dragos Cvetkovic dan penelitian lain yang mencari spektrum matriks Adjacency, matriks Laplace, dan matriks Signless-laplace dari graf G diperlukan persamaan karakteristik dan nilai eigen. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas polinomial karakteristik matriks Adjacency, matriks Laplace, dan matriks Signless-Laplace dari graf G sehingga diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan nilai eigen secara umum. Kemudian penulis memilih judul “Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency, Matriks Laplace, dan Matriks Signless-Laplace dari Graf Multipartisi Komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ ” untuk penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, masalah yang ingin diselesaikan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bentuk umum persamaan polinomial karakteristik :

1. Matriks Adjacency Graf $K(n, n, n, \dots, n)$
2. Matriks Adjacency Graf $K(m, m+1)$
3. Matriks Laplace Graf $K(n, n, n, \dots, n)$

4. Matriks Laplace Graf $K(m, m+1)$
5. Matriks Laplace Graf $K(m, m, m, \dots, m+1)$
6. Matriks Laplace Graf $K(1, 2, 3, \dots, n)$
7. Matriks Signless-Laplace Graf $K(n, n)$
8. Matriks Signless-Laplace Graf $K(n, n, n)$
9. Matriks Signless-Laplace Graf $K(m, m+1)$

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian yang dibahas dalam penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum persamaan polinomial karakteristik :

1. Matriks Adjacency Graf $K(n, n, n, \dots, n)$
2. Matriks Adjacency Graf $K(m, m+1)$
3. Matriks Laplace Graf $K(n, n, n, \dots, n)$
4. Matriks Laplace Graf $K(m, m+1)$
5. Matriks Laplace Graf $K(m, m, m, \dots, m+1)$
6. Matriks Laplace Graf $K(1, 2, 3, \dots, n)$
7. Matriks Signless-Laplace Graf $K(n, n)$
8. Matriks Signless-Laplace Graf $K(n, n, n)$
9. Matriks Signless-Laplace Graf $K(m, m+1)$

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, masalah yang dibatasi adalah matriks Adjacency, Laplace, dan Signless-laplace dari graf multipartisi komplit $K(n, n, n, \dots, n)$, $K(m, m+1)$, $K(n, n, n, \dots, n)$, $K(m, m+1)$, $K(m, m, m, \dots, m+1)$, $K(1, 2, 3, \dots, n)$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang polinomial suatu keterhubungan graf.

2. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar linear dan teori graf.

3. Bagi Pengembangan Ilmu

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan, yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku atau jurnal. Prosedur perhitungan dan pencarian pola

dilakukan dengan menggunakan program komputer yaitu Maple 12 untuk perhitungan matriks dengan masukan simbol maupun masukan numerik.

Adapun tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Menggambarkan pola graf n -Partisi Komplit.
2. Menentukan Matriks Adjacency dari graf n -Partisi Komplit, matriks Laplace dari graf n -Partisi Komplit, matriks Signless -Laplace dari graf n -Partisi Komplit.
3. Mencari nilai eigen dari matriks Adjacency, matriks Laplace, dan matriks Signless -Laplace dari graf n -partisi Komplit.
4. Merumuskan pola persamaan polinomial karakteristik dan nilai eigen matriks Adjacency, matriks Laplace, dan matriks Signless-Laplace dari graf n -partisi Komplit.
5. Pola yang didapatkan dijadikan teorema.
6. Membuktikan teorema.
7. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari empat bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB 1 Pendahuluan

Bab ini mendeskripsikan skripsi secara keseluruhan, meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan

masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi graf, matriks, dan terema-teorema yang bersangkutan dengan graf dan matriks.

BAB III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

BAB IV Penutup

Pada bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Graf

2.1.1 Graf

Definisi 1

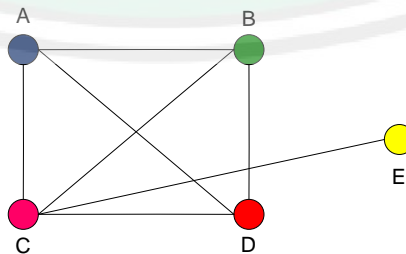
Graf G adalah suatu himpunan tak kosong berhingga dari obyek yang disebut titik-titik (vertex) bersama dengan suatu himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurutan titik-titik dari G yang disebut sisi (edges). Himpunan titik dari G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinyatakan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Contoh 1 :

$$V(G) = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E(G) = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (C, E)\}$$

Maka graf G dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1. Contoh graf

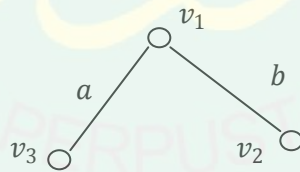
2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah titik dari G , maka u dan v adalah terhubung titik (*adjacent vertices*), jika u dan e adalah terkait, begitu juga dengan v dan e . Lebih lanjut jika e_1 dan e_2 adalah dua sisi yang berbeda dalam G yang terkait dengan sebuah titik sekutu, maka e_1 dan e_2 adalah (*adjacent edges*). Adalah memudahkan untuk menyatakan sebuah sisi dalam bentuk uv atau vu dalam bentuk $e = (u, v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Contoh 2 :

Pada graf berikut ini v_1 dan v_2 disebut *adjacent*. Sedangkan v_1 dan a disebut *incident*.



Gambar 2. Contoh *Adjacent* dan *Incident*

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 3

Derajat *dari titik* v di graf G , ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v . Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$. Sebuah titik dikatakan

ganjil atau genap bergantung apakah titik itu berderajat ganjil atau genap. Titik yang berderajat 0 disebut *titik terasing* atau *titik terisolasi*. Titik yang berderajat 1 disebut *titik ujung* atau *titik akhir*. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:2).

Teorema 1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q , dengan

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

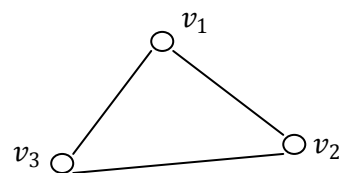
Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G , maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G . Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q. \quad (\text{Abdussakir, dkk, 2009:9}).$$

Contoh 3:

Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa derajat semua titiknya adalah 2.



Gambar 3. Derajat Titik

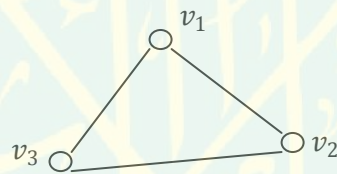
2.1.4 Macam-Macam Graf

1. Graf Komplit

Definisi 4

Graf G dikatakan *komplit* jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n . Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan- $(n - 1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Contoh 4:



Gambar 4. Contoh Graf Komplit

2. Graf Bipartisi

Definisi 5

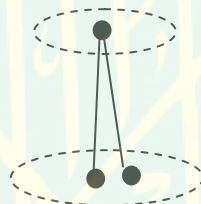
Graf G dikatakan *bipartisi* jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 . Jika G adalah graf bipartisi beraturan- r , dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan *partisi- n* jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong V_1, V_2, \dots, V_n , sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j , untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi- n disebut graf tripartisi (Abdussakir, dkk, 2009:21).

3. Graf Bipartisi Komplit

Definisi 6

Suatu graf G disebut *bipartisi komplit* jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf *bintang (star)* dan dinotasikan dengan S_n . Jadi, S_n mempunyai order $(n - 1)$ dan ukuran n (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Contoh 5:



Gambar 5. Contoh Graf Bipartisi Komplit

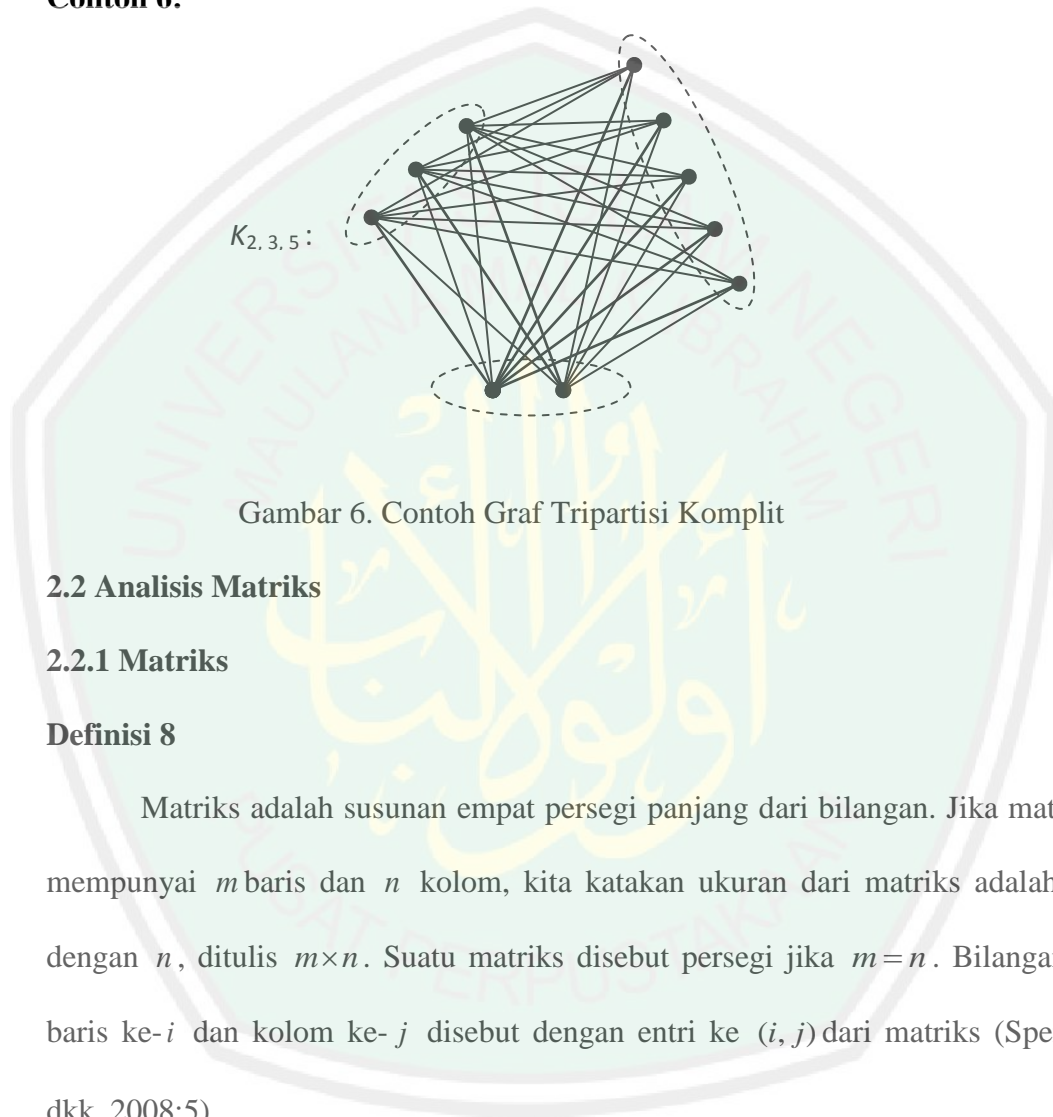
4. Graf n -partisi Komplit

Definisi 7

Graf G dikatakan *partisi- n komplit* jika G adalah graf partisi- n dengan himpunan partisi V_1, V_2, \dots, V_n , sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j, i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, maka graf ini dinotasikan dengan K_{p_1, p_2, \dots, p_n} . Urutan p_1, p_2, \dots, p_n tidak begitu diperhatikan. Graf partisi- n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i . Jika $p_i = t$ untuk semua $i, t \geq 1$, maka graf partisi- n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$ tidak lain adalah K_n . Berikut ini adalah contoh graf tripartisi komplit

$K_{2,3,5}$. Perhatikan bahwa titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:23).

Contoh 6:



Gambar 6. Contoh Graf Tripartisi Komplit

2.2 Analisis Matriks

2.2.1 Matriks

Definisi 8

Matriks adalah susunan empat persegi panjang dari bilangan. Jika matriks mempunyai m baris dan n kolom, kita katakan ukuran dari matriks adalah m dengan n , ditulis $m \times n$. Suatu matriks disebut persegi jika $m = n$. Bilangan di baris ke- i dan kolom ke- j disebut dengan entri ke (i, j) dari matriks (Spence, dkk, 2008:5).

Dari definisi diatas, yang terdiri dari baris dan kolom adalah susunannya saja, misalkan A adalah matriks dengan ukuran $m \times n$, dimana m dan n adalah bilangan asli, dapat ditulis :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ atau } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.2 Jenis-jenis Matriks

Definisi 9 (Matriks Persegi)

Matriks persegi adalah matriks dimana banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol. Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (Anton, 2004:76).

Definisi 10 (Transpose)

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A , dinyatakan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A , sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua adalah baris kedua dari A , dan seterusnya (Anton, 2004:67).

Contoh 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 11 (Matriks Persegi)

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri jika matriks tersebut sama dengan transposnya ($A = A^T$) (Anton, 2004:78).

Definisi 12 (Matriks Identitas)

Identitas matriks adalah matriks persegi yang memiliki 1 pada diagonal utama, dan 0 untuk yang lain. Ketika ordo suatu matriks tidak diketahui, kita tulis n , dan dinotasikan dengan I_n atau lebih simpelnya I (Rol dan David, 2009:65).

Jika ditulis :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Operasi pada Matriks

Definisi 13 (Perkalian Skalar)

Jika $A = (a_{ij})$ dan k adalah skalar, maka $kA = (ka_{ij})$ (Kuttler, 2009: 41-46).

Contoh 8:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, k = 7, \text{ maka } kA = 7 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 35 \\ 49 & 21 \end{pmatrix}$$

Definisi 14 (Penjumlahan)

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah dua matriks yang ukurannya $m \times n$.

Maka $A + B = C$ dimana $C = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})$ (Kuttler, 2009:41-46).

Contoh 9 :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 7 \\ 12 & 1 & 7 \end{pmatrix} = C$$

Definisi 15 (Perkalian pada Matriks)

Matriks dengan $n \times 1$ atau $1 \times n$ disebut vektor. Matriks $n \times 1$ ditulis

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ disebut } \mathbf{\text{vektor kolom.}} \text{ Matriks } 1 \times n \text{ ditulis } A = (a_1 \dots a_n) \text{ disebut}$$

vektor baris.

Definisi diatas penting digunakan untuk menyelesaikan perkalian matriks dengan vektor. Misalkan pada matriks 2×3 dan 3×1 yang secara umum ditulis :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \end{pmatrix}$$

Untuk perkalian matriks selanjutnya, dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks $m \times n$ dengan matriks $n \times p$ akan menghasilkan matriks $m \times p$. Jika kolom matriks pertama tidak sama dengan baris matriks kedua, maka kedua matriks tersebut tidak dapat dikalikan (Kuttler, 2009:41-46).

2.2.4 Determinan Matriks

Definisi 16

Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh \det , dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari A . Jumlah $\det(A)$ dinamakan determinan A (Anton, 1997:63).

Contoh 10:

Misalkan A matriks berordo 2×2

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ maka } \det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$$

Definisi 17

Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j})$

$$\text{dan } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (\text{Cullen, 1993:106}).$$

Untuk matriks yang berukuran 3×3 , maka akan diperoleh persamaan berikut ini,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}(-1)^{1+1} \det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3} \det(M_{13}) \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh rumus

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

yang terdiri dari enam suku (Cullen, 1993:106-107).

Contoh 11:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\det(A) &= 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 5(2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 3(2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) \\
&= 4 - 10 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Teorema 3

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ (Anton & Rorres, 2004:98).

Untuk sederhananya, perhatikan suatu matriks segitiga bawah 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Bukti:

Satu-satunya hasil kali dasar dari A yang bisa tak nol adalah $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$. Untuk melihat bahwa hal ini juga tinjauan hasil kali dasar umum $a_{1j} a_{2j} a_{3j} a_{4j}$. Karena $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, maka harus mempunyai $j_1 = 1$ agar mempunyai hasil kali dasar tak nol. Jika $j_1 = 1$, maka harus mempunyai $j_2 \neq 1$, karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena $a_{23} = a_{24} = 0$, maka harus mempunyai $j_2 = 2$ agar diperoleh hasil kali tak nol. Dengan meneruskan cara ini, diperoleh $j_3 = 3$ dan $j_4 = 4$. Karena $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ dikalikan $+1$ dalam membentuk hasil kali dasar, diperoleh

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

Contoh 12:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(3)(4)(5) = 120$$

2.2.5 Polinomial Karakteristik dan Nilai Eigen**Definisi 18 (Polinomial Karakteristik)**

Polinomial $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ disebut *polinomial karakteristik*. Akar dari $p(\lambda) = 0$ adalah *nilai eigen* dari A (Demmel, 1997:140).

Contoh 13:

$$\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\
 &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2
 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

Akar dari $p(\lambda) = 0$ adalah -1 dan 2 , sehingga nilai eigennya adalah -1 dan 2 .

2.2.6 Matriks Adjacency

Definisi 19 (Matriks Adjacency)

Matriks adjacency dari τ adalah matriks $n \times n$ dengan $A = A(\tau)$ dimana entri a_{ij} :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ terhubung langsung} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (\text{Biggs, 1974:9}).$$

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. **Matriks keterhubungan titik** (atau **matriks keterhubungan**) dari graf G , dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Abdussakir, dkk, 2009:73).

2.2.7 Matriks Laplace

Definisi 20 (Matriks Laplace)

Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E , dikonversi menjadi $|V|=n$ dan $|E|=m$. Jadi, G adalah graf dengan n titik dan m sisi.

Laplace dari G adalah matriks $L(G) = D(G) - A(G)$. Dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks Adjacency dari G (B. Turker, dkk, 2007:15).

2.2.8 Matriks Signless-Laplace

Definisi 21

Matriks Signless-Laplace dari G adalah matriks $S(G) = D(G) + A(G)$. Dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks Adjacency dari G (Menurut Dragos,)

2.3 Kajian Polinomial pada Al-Qur'an

Ilmu pengetahuan yang kita dapat saat ini, sebenarnya sudah lama tertuang dalam Al-Qur'an. Salah satunya yaitu tentang penciptaan manusia. Para dokter ahli seringkali menceritakan bahwa seorang bayi berkembang dari setitik darah yang kemudian berkembang dari waktu ke waktu. Hal ini sudah tertuang dalam Al-Qur'an surat Al-Mu'minun ayat 12-16:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ مِنْ سُلَالَةٍ مِّنْ طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَاهُ نُطْفَةً فِي قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾ ثُمَّ خَلَقْنَا
 الْنُطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظْمًا فَكَسَوْنَا الْعِظْمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنْشَأْنَاهُ
 خَلْقًا آخَرَ فَتَبَارَكَ اللَّهُ أَحْسَنُ الْخَالِقِينَ ﴿١٤﴾ ثُمَّ إِنَّكُمْ بَعْدَ ذَلِكَ لَمَيِّتُونَ ﴿١٥﴾ ثُمَّ إِنَّكُمْ يَوْمَ
 الْقِيَامَةِ تُبْعَثُونَ ﴿١٦﴾

Artinya: *Dan sesungguhnya kami telah menciptakan manusia dari suatu sari pati (berasal) dari tanah. Kemudian kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu kami jadikan tulang-belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha Sucilah Allah, Pencipta Yang Paling Baik. Kemudian, sesudah itu, sesungguhnya kalian benar-benar mati. Kemudian, sesungguhnya kalian akan dibangkitkan (dari kubur kalian) dihari kiamat.*

Ayat tersebut menunjukkan bahwa adanya tahapan-tahapan dalam penciptaan manusia mulai dari sperma sampai menjadi seorang bayi. “Kehidupan dalam rahim memiliki tiga tahapan: pre-embriionik; dua setengah minggu pertama, embriionik; sampai akhir minggu ke delapan, dan janin; dari minggu ke delapan sampai kelahiran.” (Williams, 1984: 64.)

Fase-fase ini mengacu pada tahap-tahap yang berbeda dari perkembangan seorang bayi. Ringkasnya, ciri-ciri tahap perkembangan bayi dalam rahim adalah sebagaimana berikut:

1. Tahap Pre-embriolik

Terjadi pada 2,5 minggu pertama. Pada tahap pertama, zigot tumbuh membesar melalui pembelahan sel, dan terbentuklah segumpalan sel yang kemudian membenamkan diri pada dinding rahim. Seiring pertumbuhan zigot yang semakin membesar, sel-sel penyusunnya pun mengatur diri mereka sendiri guna membentuk tiga lapisan (bahasa biologinya disebut *lapisan lembaga* *ektoderm, mesoderm, endoderm*). Hal ini juga dibahas oleh Ahliana (2007).

2. Tahap Embriolik

Dimulai dari minggu ke-5 sampai minggu ke-8. Tahap kedua ini berlangsung selama lima setengah minggu. Pada masa ini bayi disebut sebagai *embrio*. Pada tahap ini, organ dan sistem tubuh bayi mulai terbentuk dari lapisan-lapisan sel tersebut. pada tahap ini juga terjadi pembentukan organ2 tubuh. dan pengaturan posisi, sumbu tubuh, dan pembentukan tubuh.

3. Tahap Fetus

Dimulai dari tahap ini dan seterusnya, bayi disebut sebagai “fetus”. Tahap ini dimulai sejak kehamilan bulan kedelapan dan berakhir hingga masa kelahiran. Ciri khusus tahapan ini adalah terlihatnya fetus menyerupai manusia, dengan wajah, kedua tangan dan kakinya. Meskipun pada awalnya memiliki panjang 3 cm, kesemua organnya telah nampak. Tahap ini berlangsung selama kurang lebih

30 minggu, dan perkembangan berlanjut hingga minggu kelahiran (Kiptiyah, 2007:2).

Proses tersebut analog dengan proses terciptanya manusia. Untuk mencari persamaan polinomial karakteristik dan nilai eigen diperlukan proses-proses secara aljabar. Pada mulanya harus ada sebuah graf, kemudian dari graf tersebut dibentuk suatu matriks, kemudian dicari determinannya. Setelah itu diperoleh persamaan polinomial dan nilai eigen.



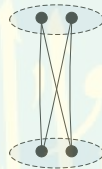
BAB III PEMBAHASAN

3.1 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi Komplit

$K(n,n)$

3.1.1 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi Komplit $K(2,2)$

Gambar Graf Komplit $K(2,2)$



Matriks Adjacency dari $K(2,2)$:

$$A(K(2,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(2,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(2,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 4×4 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

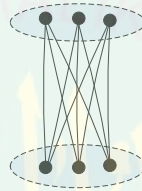
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = \pm 2$$

3.1.2 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(3,3)$

Gambar Graf Komplit $K(3,3)$



Matriks Adjacency dari $K(3,3)$:

$$A(K(3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\left. \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} 4 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^4(\lambda+3)(\lambda-3)$$

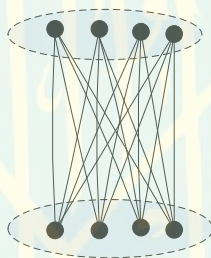
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = \pm 3$$

3.1.3 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(4,4)$

Gambar Graf Komplit $K(4,4)$



Matriks Adjacency dari $K(4,4)$:

$$A(K(4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(4,4))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 8×8 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+4 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \} 1 \\ \} 1 \end{array} \right\} 6$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^6(\lambda+4)(\lambda-4)$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = \pm 4$$

3.1.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf bipartisi komplit $K(n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.1 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency Graf $K(n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $A(K(n,n))$
1	$K(2,2)$	$\lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)$
2	$K(3,3)$	$\lambda^4(\lambda+3)(\lambda-3)$
3	$K(4,4)$	$\lambda^6(\lambda+4)(\lambda-4)$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf bipartisi $K(n,n)$ adalah:

$$p(\lambda) = \lambda^{2n-2}(\lambda+n)(\lambda-n) \text{ dengan } n \in \mathbb{N}. \text{ Sehingga dapat diberikan:}$$

Teorema 3.1 :

Jika $K(n,n)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf bipartisi komplit adalah:

$$p(\lambda) = \lambda^{2n-2}(\lambda+n)(\lambda-n), \text{ sehingga nilai eigennya yaitu:}$$

$$\lambda = 0, \lambda = \pm n$$

Bukti:

Matriks Adjacency dari $K(n,n)$:

$$A(K(n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^n & \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix}}^n \end{pmatrix} \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \right\} n \\ \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix}} \right\} n \end{matrix} \right\} n$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(n,n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(n,n))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $2n \times 2n$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{matrix}}^{2n-2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}^1 & \overbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}^1 \\ \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{2n-2} & \overbrace{\begin{matrix} \lambda - n \\ 0 \end{matrix}}^1 & \overbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}^1 \\ \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{2n-2} & \overbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}^1 & \overbrace{\begin{matrix} \lambda + n \\ 0 \end{matrix}}^1 \end{pmatrix} \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{matrix}} \right\} 2n-2 \\ \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} \lambda - n \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \begin{matrix} \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \end{matrix} \right\} 2n$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^{2n-2}(\lambda+n)(\lambda-n)$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0 \text{ dan } \lambda = \pm n$$

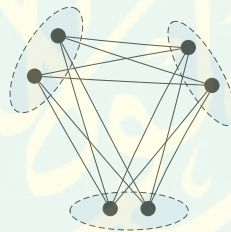
3.2 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi

Komplit $K(n, n, n)$

3.2.1 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi

Komplit $K(2, 2, 2)$

Gambar Graf Komplit $K(2, 2, 2)$



Matriks Adjacency dari $K(2, 2, 2)$:

$$A(K(2, 2, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(2, 2, 2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(2, 2, 2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^3(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

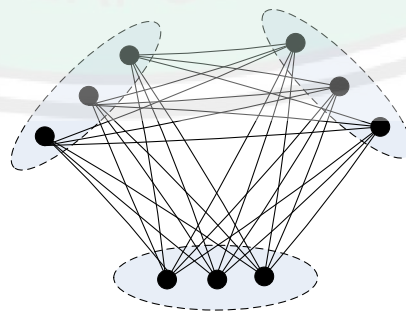
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = -2 \text{ dan } \lambda = 4$$

3.2.2 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi

Komplit $K(3,3,3)$

Gambar Graf Komplit $K(3,3,3)$



Matriks Adjacency dari $K(3,3,3)$:

$$A(K(3,3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(3,3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(3,3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 9×9 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 6 \\ \} 2 \\ \} 1 \end{array} \right\}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^6(\lambda+3)^2(\lambda-6)$$

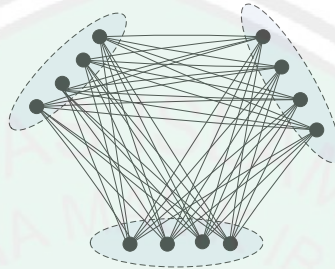
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = -3 \text{ dan } \lambda = 6$$

3.2.3 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi

Komplit $K(4,4,4)$

Gambar Graf Komplit $K(4,4,4)$



Matriks Adjacency dari $K(4,4,4)$:

$$A(K(4,4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(4,4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(4,4,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 12×12 , yaitu:

$$\begin{pmatrix}
 \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 9 \\
 \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda+4 \\ \lambda+4 \end{matrix}} \right\} 2 \\
 \left. \vphantom{\lambda-8} \right\} 1
 \end{array}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^9(\lambda+4)^2(\lambda-8)$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = -4 \text{ dan } \lambda = 8$$

3.2.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Tripartisi

Komplit $K(n,n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf tripartisi komplit $K(n,n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.2 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency Graf $K(n,n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $A(K(n,n,n))$
1	$K(2,2,2)$	$\lambda^3(\lambda+2)^2(\lambda-4)$
2	$K(3,3,3)$	$\lambda^6(\lambda+3)^2(\lambda-6)$
3	$K(4,4,4)$	$\lambda^9(\lambda+4)^2(\lambda-8)$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf tripartisi $K(n,n,n)$ adalah:

$$p(\lambda) = \lambda^{3n-3}(\lambda+n)^2(\lambda-2n). \text{ Sehingga dapat diberikan:}$$

Teorema 3.2 :

Jika $K(n,n,n)$ adalah graf tripartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf tripartisi komplit adalah:

$$p(\lambda) = \lambda^{3n-3}(\lambda+n)^2(\lambda-2n), \text{ sehingga nilai eigennya yaitu:}$$

$$\lambda = 0, \lambda = -n \text{ dan } \lambda = 2n$$

Bukti:

Matriks Adjacency dari $K(n,n,n)$:

$$A(K(n,n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(n,n,n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(n,n,n))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $3n \times 3n$, yaitu:

$$\begin{matrix}
 & \underbrace{\hspace{2cm}}_{3n-3} & & \underbrace{\hspace{1cm}}_2 & & \underbrace{\hspace{1cm}}_1 & & & \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda+n & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda+n & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2n
 \end{array} \right) & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \begin{array}{l} 3n-3 \\ \\ \\ \\ 2 \\ \\ 1 \end{array}
 \end{matrix}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^{3n-3} (\lambda+n)^2 (\lambda-2n)$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = -n \text{ dan } \lambda = 2n$$

3.3 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Multipartisi

Komplit $K(n, n, n, \dots, n)$

Dari teorema 3.1 dan teorema 3.2 yang menyatakan bahwa untuk $K(n, n)$ memiliki polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda^{2n-2} (\lambda+n)(\lambda-n)$ dan bentuk $K(n, n, n)$ memiliki polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda^{3n-3} (\lambda+n)^2 (\lambda-2n)$ dapat disimpulkan bahwa $K(n, n, n, \dots, n)$ memiliki polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda^{an-a} (\lambda+n)^{a-1} (\lambda-(a-1)n), \forall n \in \mathbb{N}$ dan a adalah banyak partisi. Sehingga dapat diberikan :

Teorema 3.3

Jika $K(n, n, n, \dots, n)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $\forall n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf multipartisi komplit adalah:

Matriks Adjacency dari $K(1,2)$:

$$A(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(1,2))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 3×3 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 1 \end{matrix}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$$

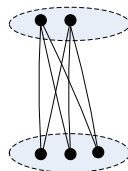
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{2} \text{ dan } \lambda = -\sqrt{2}$$

3.4.2 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(2,3)$

Gambar Graf Komplit $K(2,3)$



Matriks Adjacency dari $K(2,3)$:

$$A(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(2,3))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 5×5 , yaitu:

$$\left. \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^3 (\lambda - \sqrt{6})(\lambda + \sqrt{6})$$

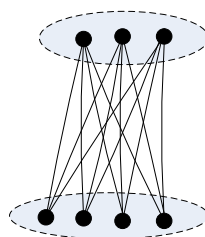
Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{6} \text{ dan } \lambda = -\sqrt{6}$$

3.4.3 Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(3,4)$

Gambar Graf Komplit $K(3,4)$



Matriks Adjacency dari $K(3,4)$:

$$A(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(3,4))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 7×7 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{cccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - \sqrt{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - \sqrt{12} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \} 1 \\ \} 1 \end{array} \right\} 5$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$\lambda^5 (\lambda - \sqrt{12})(\lambda + \sqrt{12})$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{12} \text{ dan } \lambda = -\sqrt{12}$$

3.4.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency dari Graf Bipartisi

Komplit $K(m, m+1)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf tripartisi komplit $K(m, m+1)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.3 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency Graf $K(m, m+1)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $A(K(m, m+1))$
1	$K(1, 2)$	$\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$
2	$K(2, 3)$	$\lambda^3(\lambda - \sqrt{6})(\lambda + \sqrt{6})$
3	$K(3, 4)$	$\lambda^5(\lambda - \sqrt{12})(\lambda + \sqrt{12})$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf bipartisi $K(m, m+1)$ adalah :

$$p(\lambda) = \lambda^{2m-1}(\lambda - \sqrt{m(m+1)})(\lambda + \sqrt{m(m+1)}), \forall m \in \mathbb{N}. \text{ Sehingga dapat diberikan:}$$

Teorema 3.4 :

Jika $K(m, m+1)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf tripartisi komplit adalah :

$$p(\lambda) = \lambda^{2m-1}(\lambda - \sqrt{m(m+1)})(\lambda + \sqrt{m(m+1)}), \forall m \in \mathbb{N}, \text{ sehingga nilai eigennya}$$

yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{m(m+1)} \text{ dan } \lambda = -\sqrt{m(m+1)}$$

Bukti:

Matriks Adjacency dari $K(m, m+1)$:

$$A(K(m, m+1)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \dots \ 0}^m & \overbrace{1 \ \dots \ \dots \ 1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ \dots \ 1 \\ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m+1 \end{matrix}$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - A(K(m, m+1)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - A(K(m, m+1))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(2m+1) \times (2m+1)$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda \ 0 \ \dots \ 0 \ 0}^{2m-1} & \overbrace{0}^1 & \overbrace{0}^1 \\ 0 \ \lambda \ \dots \ 0 \ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ \lambda \ 0 & 0 & 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \lambda & 0 & 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 & \lambda - \sqrt{m(m+1)} & 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 & 0 & \lambda + \sqrt{m(m+1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 2m-1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \end{matrix}} \right\} 1 \end{matrix}$$

Jadi determinannya, yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^{2m-1} (\lambda - \sqrt{m(m+1)}) (\lambda + \sqrt{m(m+1)})$$

Nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \sqrt{m(m+1)} \text{ dan } \lambda = -\sqrt{m(m+1)}$$

3.5 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(n, n)$

3.5.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

Komplit $K(2, 2)$

Matriks Adjacency $K(2, 2)$:

$$A(K_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(2,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu :

$$L(K(2,2)) = D(K(2,2)) - A(K(2,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 4×4 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2 \text{ dan } \lambda = 4$$

3.5.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

Komplit $K(3,3)$

Matriks Adjacency $K(3,3)$:

$$A(K(3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(3,3)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu :

$$L(K(3,3)) = D(K(3,3)) - A(K(3,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 4 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-3)^4(\lambda-6)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda=0, \lambda=3 \text{ dan } \lambda=6$$

3.5.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

Komplit $K(4,4)$

Matriks Adjacency $K(4,4)$:

$$A(K(4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(4,4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(4,4)) = D(K(4,4)) - A(K(4,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(4,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 8×8 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \rceil 1 \\ \rceil 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 6 \end{array} \right\}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 4)^6(\lambda - 8)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 8$$

3.5.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks adjacency dari graf bipartisi komplit $K(n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf $K(n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(n,n))$
1	$K(2,2)$	$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-4)$
2	$K(3,3)$	$\lambda(\lambda-3)^4(\lambda-6)$
3	$K(4,4)$	$\lambda(\lambda-4)^6(\lambda-8)$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks laplace dari graf bipartisi $K(n,n)$ adalah:

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.5

Jika $K(n,n)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf bipartisi komplit adalah:

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$, sehingga nilai eigennya yaitu:

$\lambda = 0$, $\lambda = n$ dan $\lambda = 2n$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(n,n)$:

$$A(K(n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^n & \overbrace{1 \cdots 1}^n \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \\ \underbrace{1 \cdots 1 \ 0 \cdots 0}_n \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 \cdots 1 \ 0 \cdots 0}_n \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{n \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{2n} \\ 0 \ n \ 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 \ 0 \ n \ \cdots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ n \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(n,n)) = D(K(n,n)) - A(K(n,n))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(n,n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(n,n))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $2n \times 2n$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0}^1 & \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{2n-2} \\ 0 & \lambda - 2n & \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{2n-2} \\ 0 & 0 & \lambda - n \ \cdots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ \cdots \ \lambda - n \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = n \text{ dan } \lambda = 2n$$

3.6 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit

$$K(n, n, n)$$

3.6.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit

Komplit $K(2, 2, 2)$

Matriks Adjacency $K(2, 2, 2)$:

$$A(K(2, 2, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2, 2, 2)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(2, 2, 2)) = D(K(2, 2, 2)) - A(K(2, 2, 2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 4)^3(\lambda - 6)^2$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 6$$

3.6.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit

Komplit $K(3,3,3)$

Matriks Adjacency $K(3,3,3)$:

$$A(K(3,3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(3,3,3)) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenya yaitu:

$$L(K(3,3,3)) = D(K(3,3,3)) - A(K(3,3,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 9×9 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 6 \end{array} \right\}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 6)^6(\lambda - 9)^2$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 9 \text{ dan } \lambda = 6$$

3.6.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit

$K(4,4,4)$

Matriks Adjacency $K(4,4,4)$:

$$A(K(4,4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(4,4,4)) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(4,4,4)) = D(K(4,4,4)) - A(K(4,4,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(4,4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(4,4,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 12×12 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 9 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-8)^9(\lambda-12)^2$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 8 \text{ dan } \lambda = 12$$

3.6.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit $K(n,n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks laplace dari graf tripartisi komplit $K(n,n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.5 Pola Polinomial Karakteristik Matrks Laplace $K(n,n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(n,n,n))$
1	$K(2,2,2)$	$\lambda(\lambda-4)^3(\lambda-6)^2$
2	$K(3,3,3)$	$\lambda(\lambda-6)^6(\lambda-9)^2$
3	$K(4,4,4)$	$\lambda(\lambda-8)^9(\lambda-12)^2$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks laplace dari graf tripartisi $K(n,n,n)$ adalah:

$$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda-2n)^{3(n-1)}(\lambda-3n)^2 \text{ dengan } n \in \mathbb{N}. \text{ Sehingga dapat diberikan:}$$

Teorema 3.6

Jika $K(n,n,n)$ adalah graf tripartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf tripartisi komplit adalah:

$$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda-2n)^{3(n-1)}(\lambda-3n)^2, \text{ sehingga nilai eigennya yaitu:}$$

$$\lambda = 0, \lambda = 2n \text{ dan } \lambda = 3n$$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(n, n, n)$:

$$A(K(n, n, n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(n, n, n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{2n \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0}^{3n} \\ 0 \ 2n \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 2n \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 2n \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 2n \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 2n \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(n, n, n)) = D(K(n, n, n)) - A(K(n, n, n))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(n, n, n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(n, n, n))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $3n \times 3n$, yaitu:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \underbrace{1} & \underbrace{2} & & \underbrace{3n-3} & & & \\
 & \underbrace{\lambda} & \underbrace{0} & \underbrace{0} & \underbrace{0} & \underbrace{0} & \underbrace{\dots} & \underbrace{\dots} & \underbrace{0} & \underbrace{0} \\
 & 0 & \lambda-3n & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & \lambda-3n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2n & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda-2n & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda-2n
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccccccc} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3n-3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{3(n-1)}(\lambda - 3n)^2$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2n \text{ dan } \lambda = 3n$$

3.7 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(n, n, n, \dots, n)$

Dari teorema 3.5 dan teorema 3.6 yang menyatakan bahwa untuk matriks Laplace dari $K(n, n)$ memiliki polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$ dan bentuk $K(n, n, n)$ memiliki polinomial karakteristik $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{3(n-1)}(\lambda - 3n)^2$ dapat disimpulkan bahwa $K(n, n, n, \dots, n)$ memiliki polinomial karakteristik

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - (a-1)n)^{a(n-1)}(\lambda - an)^{(a-1)}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan a adalah banyak partisi.

Sehingga dapat diberikan :

Teorema 3.7

Jika $K(n, n, n, \dots, n)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - (a-1)n)^{a(n-1)}(\lambda - an)^{(a-1)}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ dan } a \text{ adalah banyak}$$

partisi, sehingga nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = (a-1)n \text{ dan } \lambda = an$$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(n, n, n, \dots, n)$:

$$A(K(n, n, n, \dots, n)) = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\quad \quad \quad}^n & \underbrace{\quad \quad \quad}^n & \underbrace{\quad \quad \quad}^n & \dots & \underbrace{\quad \quad \quad}^n \end{matrix}}^a \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{matrix} \left. \begin{matrix} \underbrace{\quad \quad \quad}^n \\ \underbrace{\quad \quad \quad}^n \\ \underbrace{\quad \quad \quad}^n \\ \underbrace{\quad \quad \quad}^n \end{matrix} \right\} a$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(n, n, n, \dots, n)) = \begin{matrix} & \underbrace{\hspace{10em}}_{an} & \\ \left(\begin{array}{cccccccc} 2n & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2n \end{array} \right) & \left. \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} an \end{matrix}$$

Sehingga matriks Laplacenya yaitu:

$$L(K(n, n, n, \dots, n)) = D(K(n, n, n, \dots, n)) - A(K(n, n, n, \dots, n))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(n, n, n, \dots, n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(n, n, n, \dots, n))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $an \times an$, yaitu:

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenya yaitu:

$$L(K(1,2)) = D(K(1,2)) - A(K(1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 3×3 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 1$$

3.8.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(2,3)$

Matriks Adjacency $K(2,3)$:

$$A(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(2,3)) = D(K(2,3)) - A(K(2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 5×5 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 1 \\ \} \\ \} 2 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 5$$

3.8.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(3,4)$

Matriks Adjacency $K(3,4)$:

$$A(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacena yaitu:

$$L(K(3,4)) = D(K(3,4)) - A(K(3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,4))) = 0$.

$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda - m)^m (\lambda - (m+1))^{m-1} (\lambda - (2m+1))$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.8

Jika $K(m, m+1)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf bipartisi komplit adalah:

$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda - m)^m (\lambda - (m+1))^{m-1} (\lambda - (2m+1))$, sehingga nilai eigennya yaitu:

$\lambda = 0$, $\lambda = m$, $\lambda = m+1$ dan $\lambda = 2m+1$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(m, m+1)$:

$$A(K(m, m+1)) = \begin{matrix} & \underbrace{\quad m \quad}_{\left. \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} \right\} m} & \underbrace{\quad m+1 \quad}_{\left. \begin{matrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\} m+1} \\ A(K(m, m+1)) = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \end{matrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(m, m+1)) = \begin{pmatrix} \overbrace{m+1 \ \dots \ 0}^m & \overbrace{0 \ \dots \ \dots \ 0}^{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots \ m+1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \\ 0 & \dots \ 0 \ m \ \dots \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ m \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} m+1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \dots \\ m+1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ m \end{matrix}} \right\} m+1 \end{matrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(m, m+1)) = D(K(m, m+1)) - A(K(m, m+1))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(m, m+1)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(m, m+1))) = 0$.
 Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(2m+1) \times (2m+1)$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^m & \overbrace{0 \ \dots \ 0}^{m-1} & \overbrace{0}^1 \\ 0 & \lambda - m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - (m+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - (m+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - (2m+1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \lambda - m \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \dots \\ \lambda - (m+1) \\ 0 \\ \dots \\ \lambda - (m+1) \\ 0 \end{matrix}} \right\} m-1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda - (2m+1) \end{matrix}} \right\} 1 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda - m)^m (\lambda - (m+1))^{m-1} (\lambda - (2m+1))$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = m, \lambda = m+1 \text{ dan } \lambda = 2m+1$$

3.9 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(1,1,1,\dots,1,2)$

3.9.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(1,2)$

Gambar Graf Komplit $K(1,2)$



Matriks Adjacency $K(1,2)$:

$$A(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(1,2)) = D(K(1,2)) - A(K(1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 3×3 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

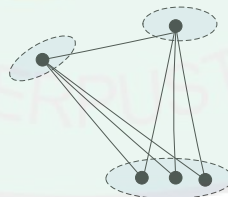
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 1$$

3.9.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi Komplit

$K(1,1,2)$

Gambar Graf Komplit $K(1,1,2)$



Matriks Adjacency $K(1,1,2)$:

$$A(K(1,1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(1,1,2)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenya yaitu:

$$L(K(1,1,2)) = D(K(1,1,2)) - A(K(1,1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,2))) = 0$

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 4×4 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

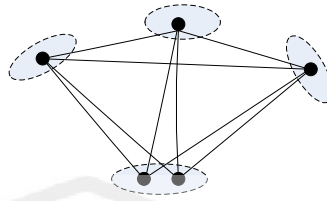
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2 \text{ dan } \lambda = 4$$

3.9.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multiipartisi

Komplit $K(1,1,1,2)$

Gambar Graf Komplit $K(1,1,1,2)$



Matriks Adjacency $K(1,1,1,2)$:

$$A(K(1,1,1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(1,1,1,2)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks laplacenyanya yaitu :

$$L(K(1,1,1,2)) = D(K(1,1,1,2)) - A(K(1,1,1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,1,2))) = 0$

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 5×5 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rceil 1 \\ \rceil 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-3)(\lambda-5)^3$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 5$$

3.9.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(1,1,1,\dots,1,2)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit $K(1,1,1,\dots,1,2)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.7 Pola Polinomial Matriks Laplace Graf $K(1,1,1,\dots,1,2)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(1,1,1,\dots,1,2))$
1	$K(1,2)$	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$
2	$K(1,1,2)$	$\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)^2$
3	$K(1,1,1,2)$	$\lambda(\lambda-3)(\lambda-5)^3$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf multipartisi komplit $K(1,1,1,\dots,1,2)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

$p(\lambda) = \lambda(\lambda-a)(\lambda-a-2)^a$ dengan $a =$ banyaknya angka 1 . Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.9

Jika $K(1,1,1,\dots,1,2)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - a - 2)^a$, dengan $a =$ banyaknya angka 1.

Sehingga nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = a \text{ dan } \lambda = a + 2$$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(1,1,1,\dots,1,2)$:

$$A(K(1,1,1,\dots,1,2)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ 1 \ \dots \ 1}^a & \overbrace{1 \ 1}^2 \\ 1 \ 0 \ \dots \ 1 & 1 \ 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 \ 1 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \right\} a \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 2 \end{matrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(1,1,1,\dots,1,2)) = \begin{pmatrix} \overbrace{a+1 \ \dots \ 0}^a & \overbrace{0 \ 0 \ 0}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ a+1 & 0 \ 0 \\ 0 \ \dots \ 0 & a \ 0 \\ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a+1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} a \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{matrix}} \right\} 2 \end{matrix}$$

Sehingga matrik laplacenyanya yaitu :

$$L(K(1,1,1,\dots,1,2)) = D(K(1,1,1,\dots,1,2)) - A(K(1,1,1,\dots,1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,1,\dots,1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,1,1,\dots,1,2))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-

12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(a+2) \times (a+2)$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0}^1 & \overbrace{0 \dots 0}^a & & \\ 0 & \lambda - a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a - 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - a - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \lambda - a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \lambda - a - 2 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} a \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - a - 2)^a$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = n \text{ dan } \lambda = 2n$$

3.10 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(2,2,2,\dots,2,3)$

3.10.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(2,3)$

Gambar Graf Komplit $K(2,3)$



Matriks Adjacency $K(2,3)$:

$$A(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(2,3)) = D(K(2,3)) - A(K(2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 5×5 , yaitu:

$$\left(\begin{array}{ccccc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 1 \\ \} \\ \} 2 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

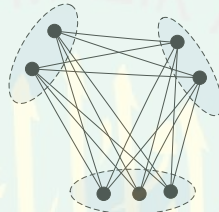
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2 \text{ dan } \lambda = 5$$

3.10.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit Komplit $K(2,2,3)$

Gambar Graf Komplit $K(2,2,3)$



Matriks Adjacency $K(2,2,3)$:

$$A(K(2,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,2,3)) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks laplacenya yaitu :

$$L(K(2,2,3)) = D(K(2,2,3)) - A(K(2,2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 7×7 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 2 \\ \} 2 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 4)^2(\lambda - 5)^2(\lambda - 7)^2$$

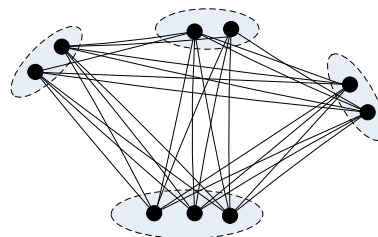
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 4, \lambda = 5 \text{ dan } \lambda = 7$$

3.10.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(2,2,2,3)$

Gambar Graf Komplit $K(2,2,2,3)$



Matriks Adjacency $K(2,2,2,3)$:

$$A(K(2,2,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(2,2,2,3)) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(2,2,2,3)) = D(K(2,2,2,3)) - A(K(2,2,2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2,3))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12

diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 9×9 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \\ \} 3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-6)^2(\lambda-7)^3(\lambda-9)^3$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 6, \lambda = 7 \text{ dan } \lambda = 9$$

3.10.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(2,2,2,\dots,2,3)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit $K(2,2,2,\dots,2,3)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.8 pola polinomial karakteristik matriks laplace Graf $K(2,2,2,\dots,2,3)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(2,2,2,\dots,2,3))$
1	$K(2,3)$	$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda-5)$
2	$K(2,2,3)$	$\lambda(\lambda-4)^2(\lambda-5)^2(\lambda-7)^2$
3	$K(2,2,2,3)$	$\lambda(\lambda-6)^2(\lambda-7)^3(\lambda-9)^3$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,2,2,\dots,2,3)) = \begin{pmatrix} \overbrace{2a+1 & 0 & \dots & 0}^{2a} & \overbrace{0 & 0 & 0}^3 \\ 0 & 2a+1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} 2a \\ \\ \} 3 \end{matrix}$$

Sehingga matrik laplacenya yaitu :

$$L(K(2,2,2,\dots,2,3)) = D(K(2,2,2,\dots,2,3)) - A(K(2,2,2,\dots,2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2,\dots,2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(2,2,2,\dots,2,3))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(2a+3) \times (2a+3)$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1} & \overbrace{2} & \overbrace{a} & \overbrace{a} \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - 2a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2a - 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - 2a - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - (2a+3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda - (2a+3) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \} 1 \\ \\ \} 2 \\ \\ \} a \\ \\ \} a \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2a)^2(\lambda - 2a - 1)^a (\lambda - (2a + 3))^a, \forall a = \text{banyaknya angka } 2.$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2a, \lambda = 2a + 3 \text{ dan } \lambda = 2a + 1$$

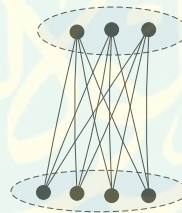
3.11 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(3,3,3,\dots,3,4)$

3.11.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

$K(3,4)$

Gambar Graf Komplit $K(3,4)$



Matriks Adjacency $K(3,4)$:

$$A(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(3,4)) = D(K(3,4)) - A(K(3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 7×7 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 7)(\lambda - 4)^2(\lambda - 3)^3$$

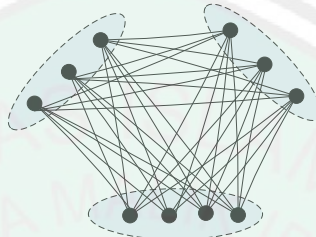
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 7, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 3$$

3.11.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit $K(3,3,4)$

Gambar Graf Komplit $K(3,3,4)$



Matriks Adjacency $K(3,3,4)$:

$$A(K(3,3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(3,3,4)) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks laplacenya yaitu :

$$L(K(3,3,4)) = D(K(3,3,4)) - A(K(3,3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,4))) = 0$

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 10×10 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 & \lambda - 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \right\} 2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 & 0 & \lambda - 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \right\} 3 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \right\} 4 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 10)^2(\lambda - 6)^3(\lambda - 7)^4$$

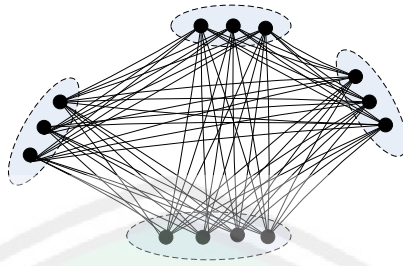
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 10, \lambda = 6 \text{ dan } \lambda = 7$$

3.11.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(3,3,3,4)$

Gambar Graf Komplit $K(3,3,3,4)$



Matriks Adjacency $K(3,3,3,4)$:

$$A(K(3,3,3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(3,3,3,4)) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks laplace yaitu :

$$L(K(3,3,3,4)) = D(K(3,3,3,4)) - A(K(3,3,3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 13×13 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-9)^3(\lambda-10)^6(\lambda-13)^3$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 9, \lambda = 10 \text{ dan } \lambda = 13$$

3.11.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(3,3,3,\dots,3,4)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit $K(3,3,3,\dots,3,4)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.9 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf $K(3,3,3,\dots,3,4)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(3,3,3,\dots,3,4))$
1	$K(3,4)$	$\lambda(\lambda-7)(\lambda-4)^2(\lambda-3)^3$
2	$K(3,3,4)$	$\lambda(\lambda-10)^2(\lambda-7)^4(\lambda-6)^3$
3	$K(3,3,3,4)$	$\lambda(\lambda-9)^3(\lambda-10)^6(\lambda-13)^3$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi $K(3,3,3,\dots,3,4)$ adalah:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-3a)^3(\lambda-3a-1)^{2a}(\lambda-(3a+4))^a, \quad \forall a = \text{banyaknya angka } 3$$

Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.11

Jika $K(3,3,3,\dots,3,4)$ adalah graf multipartisi komplit, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-3a)^3(\lambda-3a-1)^{2a}(\lambda-(3a+4))^a, \quad \forall a = \text{banyaknya angka } 3$$

Sehingga nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = 3a, \lambda = 3a+1 \text{ dan } \lambda = 3a+4$$

$$D(K(3,3,3,\dots,3,4)) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 3a+1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 3a+1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3a+1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a \end{matrix}}^{3a} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a \end{matrix}}^{89} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 3a \end{matrix}}^{4} \end{pmatrix}$$

Sehingga matrik laplacena yaitu :

$$L(K(3,3,3,\dots,3,4)) = D(K(3,3,3,\dots,3,4)) - A(K(3,3,3,\dots,3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3,\dots,3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(3,3,3,\dots,3,4))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program

Maple-12 diperoleh matriks Jordan, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}^3 & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{2a} & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^a & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda-3a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3a & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-3a-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-(3a+4) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda-(3a+4) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(3a+4) \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3a)^3(\lambda - 3a - 1)^{2a}(\lambda - (3a + 4))^a, \forall a = \text{banyaknya angka } 3.$$

Sehingga nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = 3a, \lambda = 3a + 1 \text{ dan } \lambda = 3a + 4$$

3.12 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(m, m, m, \dots, m, m+1)$

Dari teorema 3.9, teorema 3.10 dan teorema 3.11 yang menyatakan bahwa untuk $K(1, 1, 1, \dots, 1, 2)$ memiliki polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - a - 2)^a, \text{ untuk } K(2, 2, 2, \dots, 2, 3) \text{ memiliki polinomial}$$

karakteristik $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2a)^2(\lambda - 2a - 1)^a(\lambda - (2a + 3))^a$, dan untuk

$K(3, 3, 3, \dots, 3, 4)$ memiliki polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 3a)^3(\lambda - 3a - 1)^{2a}(\lambda - (3a + 4))^a \text{ dapat disimpulkan bahwa}$$

$K(m, m, m, \dots, m, m+1)$ memiliki polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - am)^m(\lambda - am - 1)^{a(m-1)}(\lambda - ((a+1)m+1))^a, \forall n \in \mathbb{N} \text{ dan } a \text{ adalah}$$

banyaknya m . Sehingga dapat diberikan teorema berikut:

Teorema 3.12

Jika $K(m, m, m, \dots, m, m+1)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $\forall n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$$D(K(m, m, m, \dots, m, m+1)) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} am+1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & am+1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & am+1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{matrix}}^m & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ am & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & am \end{matrix}}^{am+1} \end{pmatrix}$$

Sehingga matrik Laplacenya yaitu :

$$L(K(m, m, m, \dots, m, m+1)) = D(K(m, m, m, \dots, m, m+1)) - A(K(m, m, m, \dots, m, m+1))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(m, m, m, \dots, m, m+1)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(m, m, m, \dots, m, m+1))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(am+m+1) \times (am+m+1)$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0 \dots 0}^m & \overbrace{0 \dots 0}^{a(m-1)} & \overbrace{0}^a & 0 \\ 0 & \lambda - am & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - am & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - am - 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda - am - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - ((a+1)m+1) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda - ((a+1)m+1) \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - am)^m (\lambda - am - 1)^{a(m-1)} (\lambda - ((a+1)m+1))^a, \forall m \in \mathbb{N} \text{ dan } a \text{ adalah}$$

banyaknya m . Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = am, \lambda = am + 1 \text{ dan } \lambda = ((a+1)m+1)$$

3.13 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(1,2,3,\dots,n)$

3.13.1 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Bipartisi Komplit

Komplit $K(1,2)$

Gambar Graf Komplit $K(1,2)$



Matriks Adjacency $K(1,2)$:

$$A(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks laplacenyanya yaitu :

$$L(K(1,2)) = D(K(1,2)) - A(K(1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 3×3 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

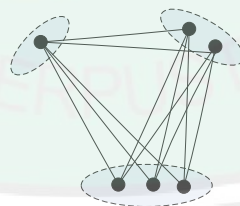
Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 1 \text{ dan } \lambda = 3$$

3.13.2 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit $K(1,2,3)$

Gambar Graf Komplit $K(1,2,3)$



Matriks Adjacency $K(1,2,3)$:

$$A(K(1,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu :

$$D(K(1,2,3)) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacenyanya yaitu:

$$L(K(1,2,3)) = D(K(1,2,3)) - A(K(1,2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2 \\ \} 2 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)(\lambda - 6)^2$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 4 \quad \lambda = 6$$

3.13.3 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit $K(1,2,3,4)$

Matriks Adjacency $K(1,2,3,4)$:

$$A(K(1,2,3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(1,2,3,4)) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Laplacanya yaitu:

$$L(K(1,2,3,4)) = D(K(1,2,3,4)) - A(K(1,2,3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2,3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - L(K(1,2,3,4))) = 0$. Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 10×10 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 3 \\ \} 2 \\ \} 1 \\ \} 3 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-6)^3(\lambda-7)^2(\lambda-8)(\lambda-10)^3$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 6, \lambda = 7, \lambda = 8, \lambda = 10$$

3.13.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Graf Multipartisi

Komplit $K(1,2,3,\dots,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf tripartisi komplit $K(1,2,3,\dots,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.10 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Laplace $K(1,2,3,\dots,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(1,2,3,\dots,n))$
1	$K(1,2)$	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$
2	$K(1,2,3)$	$\lambda(\lambda-3)^2(\lambda-4)(\lambda-6)^2$
3	$K(1,2,3,4)$	$\lambda(\lambda-6)^3(\lambda-7)^2(\lambda-8)(\lambda-10)^3$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf multipartisi $K(1,2,3,\dots,n)$ adalah:

$$p(\lambda) = \lambda \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \right)^{n-1} \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) \right) \right)^{n-2} \dots \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2 \right) \right) \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2} \right)^{n-1}, \forall n > 1 \in \mathbb{N}$$

Sehingga dapat diberikan konjektur berikut:

Konjektur 3.13

Jika $K(1,2,3,\dots,n)$ adalah graf multipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks laplace dari graf multipartisi komplit adalah:

$$p(\lambda) = \lambda \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \right)^{n-1} \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) \right) \right)^{n-2} \dots \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2 \right) \right) \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2} \right)^{n-1}, \forall n > 1 \in \mathbb{N}$$

sehingga nilai eigennya yaitu:

$$\lambda = 0, \lambda = \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right), \lambda = \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) \right), \dots, \lambda = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2 \right),$$

$$\lambda = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.14 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(n,n)$

3.14.1 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit Komplit $K(2,2)$

Matriks Adjacency $K(2,2)$:

$$A(K(2,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacena yaitu:

$$S(K(2,2)) = D(K(2,2)) + A(K(2,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(2,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(2,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 4×4 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 2 \text{ dan } \lambda = 4$$

3.14.2 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit Komplit $K(3,3)$

Matriks Adjacency $K(3,3)$:

$$A(K(3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(3,3)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacanya yaitu:

$$S(K(3,3)) = D(K(3,3)) + A(K(3,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} 4 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-3)^4(\lambda-6)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 6$$

3.14.3 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit Komplit $K(4,4)$

Matriks Adjacency $K(4,4)$:

$$A(K(4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(4,4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacenyanya yaitu:

$$S(K(4,4)) = D(K(4,4)) + A(K(4,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(4,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 8×8 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 6 \end{array} \right\}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 4)^6(\lambda - 8)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 8$$

3.14.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi Komplit $K(n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf bipartisi komplit $K(n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.11 Pola Polinomial Matriks Signless-Laplace $K(n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $S(K(n,n))$
1	$K(2,2)$	$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-4)$
2	$K(3,3)$	$\lambda(\lambda-3)^4(\lambda-6)$
3	$K(4,4)$	$\lambda(\lambda-4)^6(\lambda-8)$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks Signless-Laplace dari graf bipartisi $K(n,n)$ adalah:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-n)^{2(n-1)}(\lambda-2n) \text{ dengan } n \in \mathbb{N} . \text{ Sehingga dapat diberikan teorema}$$

sebagai berikut:

Teorema 3.14

Jika $K(n,n)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks Signless-Laplace dari graf bipartisi komplit adalah:

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$, sehingga nilai eigennya yaitu: $\lambda = 0$, $\lambda = n$ dan $\lambda = 2n$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(n, n)$:

$$A(K(n, n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ \underbrace{1 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_n \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_n \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(n, n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{n \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0}^{2n} \\ 0 \ n \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ n \ \dots \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ n \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacena yaitu:

$$S(K(n, n)) = D(K(n, n)) + A(K(n, n))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(n, n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(n, n))) = 0$

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $2n \times 2n$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda}^1 & \overbrace{0}^1 & \underbrace{0 \ \dots \ \dots \ 0}_{2n-2} \\ 0 & \lambda-2n & 0 \ \dots \ \dots \ 0 \\ 0 & 0 & \lambda-n \ \dots \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ \dots \ \dots \ \lambda-n \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 2n-2 \end{array} \right\}$$

Jadi determinannya yaitu :

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = n \text{ dan } \lambda = 2n$$

3.15 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Tripartisi

Komplit $K(n, n, n)$

3.14.1 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf

Tripartisi Komplit Komplit $K(2, 2, 2)$

Matriks Adjacency $K(2, 2, 2)$:

$$A(K(2, 2, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,2,2)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacenyanya yaitu:

$$S(K(2,2,2)) = D(K(2,2,2)) + A(K(2,2,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(2,2,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(2,2,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 6×6 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$(\lambda - 8)(\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)^3$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 8, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 2$$

3.15.2 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf

Tripartisi Komplit Komplit $K(3,3,3)$

Matriks Adjacency $K(3,3,3)$:

$$A(K(3,3,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(3,3,3)) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacanya yaitu:

$$S(K(3,3,3)) = D(K(3,3,3)) + A(K(3,3,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(3,3,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(3,3,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 9×9 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda-12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 6 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$(\lambda-12)(\lambda-3)^2(\lambda-6)^6$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 12, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 6$$

3.15.3 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf

Tripartisi Komplit $K(4,4,4)$

Matriks Adjacency $K(4,4,4)$:

$$A(K(4,4,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(4,4,4)) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacanya yaitu:

$$S(K(4,4,4)) = D(K(4,4,4)) + A(K(4,4,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(4,4,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(4,4,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 12×12 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda-16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda-16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} 9 \end{matrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$(\lambda-16)(\lambda-4)^2(\lambda-8)^9$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 16, \lambda = 8 \text{ dan } \lambda = 4$$

3.15.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf

Tripartisi Komplit $K(n,n,n)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf tripartisi komplit $K(n,n,n)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut :

Tabel 3.12 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace $K(n,n,n)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $S(K(n,n,n))$
1	$K(2,2,2)$	$(\lambda-8)(\lambda-2)^2(\lambda-4)^3$
2	$K(3,3,3)$	$(\lambda-12)(\lambda-3)^2(\lambda-6)^6$
3	$K(4,4,4)$	$(\lambda-16)(\lambda-4)^2(\lambda-8)^9$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf tripartisi $K(n,n,n)$ adalah:

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 4n)(\lambda - n)^2(\lambda - 2n)^{3(n-1)} \text{ dengan } n \in \mathbb{N}. \text{ Sehingga dapat diberikan:}$$

Teorema 3.15

Jika $K(n,n,n)$ adalah graf tripartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf tripartisi komplit adalah:

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 4n)(\lambda - n)^2(\lambda - 2n)^{3(n-1)}, \text{ sehingga nilai eigennya yaitu:}$$

$$\lambda = 4n, \lambda = n \text{ dan } \lambda = 2n$$

Bukti:

Matriks Adjacency $K(n,n,n)$:

$$A(K(n,n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \dots \ 0}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n & \overbrace{1 \ \dots \ 1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 \\ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ \dots \ 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 \ \dots \ 1 & 1 \ \dots \ 1 & 0 \ \dots \ 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(n,n,n)) = \begin{pmatrix} \overbrace{2n \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0}^{3n} \\ 0 \ 2n \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 2n \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 2n \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 2n \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ 0 \ 2n \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacanya yaitu:

$$S(K(n,n,n)) = D(K(n,n,n)) + A(K(n,n,n))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(n,n,n)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(n,n,n))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $3n \times 3n$, yaitu:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \underbrace{1} & \underbrace{2} & & \underbrace{3n-3} & & & & \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \lambda-3n & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda-3n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda-2n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2n & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda-2n & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda-2n
 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 2 \\ \} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 4n)(\lambda - n)^2 (\lambda - 2n)^{3(n-1)}$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 4n, \lambda = n \text{ dan } \lambda = 2n$$

3.16 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(m, m+1)$

3.16.1 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(1, 2)$

Matriks Adjacency $K(1, 2)$:

$$A(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(1,2)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacenyanya yaitu:

$$S(K(1,2)) = D(K(1,2)) + A(K(1,2))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(1,2)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(1,2))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 3×3 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3 \text{ dan } \lambda = 1$$

3.16.2 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(2,3)$

Matriks Adjacency $K(2,3)$:

$$A(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(2,3)) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacenyanya yaitu:

$$S(K(2,3)) = D(K(2,3)) + A(K(2,3))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(2,3)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(2,3))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran 5×5 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} 1 \\ \} 1 \\ \} 1 \\ \} \\ \} 2 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda-5)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda=0, \lambda=2, \lambda=3 \text{ dan } \lambda=5$$

3.16.3 Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf Bipartisi

Komplit $K(3,4)$

Matriks Adjacency $K(3,4)$:

$$A(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajatnya yaitu:

$$D(K(3,4)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks Signless-Laplacenyanya yaitu:

$$S(K(3,4)) = D(K(3,4)) + A(K(3,4))$$

Definisi 16 menyatakan bahwa polinomial karakteristik adalah $\det(\lambda I - S(K(3,4)))$ dan nilai eigennya adalah $\det(\lambda I - S(K(3,4))) = 0$.

Sehingga dengan menggunakan program Maple-12 diperoleh matriks Jordan berukuran 7×7 , yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 1 \\ \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 1 \\ \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 2 \\ \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 3 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\lambda(\lambda-3)^3(\lambda-4)^2(\lambda-7)$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 4 \text{ dan } \lambda = 7$$

3.16.4 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace dari Graf

Bipartisi Komplit $K(m, m+1)$

Berdasarkan penelitian polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf tripartisi komplit $K(m, m+1)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.13 Pola Polinomial Karakteristik Matriks Signless-Laplace Graf

$K(m, m+1)$

No	Graf Multipartisi Komplit	Polinomial Karakteristik $L(K(m, m+1))$
1	$K(1, 2)$	$\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$
2	$K(2, 3)$	$\lambda(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda-5)$
3	$K(3, 4)$	$\lambda(\lambda-3)^3(\lambda-4)^2(\lambda-7)$

Dari tabel tersebut dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf bipartisi $K(m, m+1)$ adalah:

$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda-m)^m (\lambda-(m+1))^{m-1} (\lambda-(2m+1))$ dengan $m \in \mathbb{N}$. Sehingga dapat diberikan:

Teorema 3.16

Jika $K(m, m+1)$ adalah graf bipartisi komplit dengan $n \in \mathbb{N}$, maka polinomial karakteristik matriks signless-laplace dari graf bipartisi komplit adalah:

$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda-m)^m (\lambda-(m+1))^{m-1} (\lambda-(2m+1))$, sehingga nilai eigennya yaitu:

$\lambda = 0$, $\lambda = m$, $\lambda = m+1$ dan $\lambda = 2m+1$

diperoleh matriks Jordan yang ukurannya sama dengan matriks adjacency yang berukuran $(2m+1) \times (2m+1)$, yaitu:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \underbrace{1} & & & & & & & \underbrace{1} \\
 \underbrace{\lambda} & \underbrace{0 \ \dots \ 0}_m & & & \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m-1} & & & \underbrace{0}_1 \\
 0 & \lambda - m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & \lambda - m & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - (m+1) & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - (m+1) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - (2m+1)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \} 1 \\
 \} m \\
 \} m-1 \\
 \} 1
 \end{array}$$

Jadi determinannya yaitu:

$$\rho(\lambda) = \lambda(\lambda - m)^m (\lambda - (m+1))^{m-1} (\lambda - (2m+1))$$

Nilai eigennya :

$$\lambda = 0, \lambda = m, \lambda = m+1 \text{ dan } \lambda = 2m+1$$

3.17 Hikmah Mencari Polinomial Karakteristik Matriks Adjacency, Matriks Laplace, dan Matriks Signless-Laplace Graf Multipartisi Komplit

Untuk mencari polinomial karakteristik, mulanya harus ada graf komplit. Setelah itu dibentuk matriks dari graf tersebut. Kemudian dicari determinan dan dari determinan tersebut diperoleh polinomial karakteristik. Setelah polinomial karakteristik diperoleh, maka nilai eigen pun dapat diperoleh. Singkatnya, diperlukan proses-proses untuk memperoleh polinomial karakteristik. Hal ini analog terhadap proses penciptaan manusia seperti yang telah dijelaskan pada BAB II.

Hikmah yang dapat diambil adalah semua yang ada atau yang terjadi di dunia ini tidak ada yang instan. Ada proses-proses yang harus dilalui.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diperoleh pola umum persamaan polinomial karakteristik :

1. Matriks Adjacency $K(n, n, n, \dots, n)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^{an-a} (\lambda + n)^{a-1} (\lambda - (a-1)n) , \forall n \in \mathbb{N} \text{ dan } a = \text{banyak partisi}$$

2. Matriks Adjacency $K(m, m+1)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^{2m-1} (\lambda - \sqrt{m(m+1)}) (\lambda + \sqrt{m(m+1)}) , \forall m \in \mathbb{N}$$

3. Matriks Laplace $K(n, n, n, \dots, n)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda (\lambda - (a-1)n)^{a(n-1)} (\lambda - an)^{(a-1)} , \forall n \in \mathbb{N} \text{ dan } a = \text{banyak partisi}$$

4. Matriks Laplace $K(m, m+1)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda (\lambda - m)^m (\lambda - (m+1))^{m-1} (\lambda - (2m+1)) , \forall m \in \mathbb{N}$$

5. Matriks Laplace $K(m, m, m, \dots, m+1)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda (\lambda - am)^m (\lambda - am - 1)^{a(m-1)} (\lambda - ((a+1)m+1))^a , \forall m \in \mathbb{N} \text{ dan } a = \text{banyak } m$$

6. Matriks Laplace $K(1, 2, 3, \dots, n)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \right)^{n-1} \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) \right) \right)^{n-2} \dots \left(\lambda - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 2 \right) \right) \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2} \right)^{n-1} , \forall n > 1 \in \mathbb{N}$$

7. Matriks Signless-Laplace $K(n, n)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - n)^{2(n-1)}(\lambda - 2n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

8. Matriks Signless-Laplace $K(n, n, n)$ yaitu:

$$p(\lambda) = (\lambda - 4n)(\lambda - n)^2(\lambda - 2n)^{3(n-1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Matriks Signless-Laplace $K(m, m+1)$ yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - m)^m(\lambda - (m+1))^{m-1}(\lambda - (2m+1)), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi selanjutnya dapat dibahas mengenai polinomial karakteristik dari matriks graf lain selain yang telah ditemukan penulis. Penelitian juga dapat dilakukan untuk membuktikan konjektur dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2009. *Teori Graf*, Malang: UIN Press
- Ahliana, Afifati. 2007. *Proses Penciptaan Manusia 2.htm* di akses tanggal 12 Oktober 2011
- Anton, Howard. & Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga
- Anton, Howard. 1994. *Elementary Linier Algebra, 7th Edition*. New York: JohnWiley & Sons, Inc
- Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press
- Biyikoglu, Turker, dkk. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*, New York: Spinger
- Chartrand, Gary & Leniak, Linda. 1986. *Graphs & Digraphs*. California: Wadsword, inc
- Cvetkovic, Dragos. 1997. *Eigenspace of Graphs*. Cambridge: Cambridge University
- Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama
- Demmel, W. James. 1997. *Applied Numerical Linear Algebra*, California: Siam
- Kiptiyah. 2007. *Embriologi dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Press
- Kuttler. 2009. *Elementary Linear Algebra*, Berlin: Spinger
- Leydold, Josef dan Stadler, Peter. 2007. *Laplacian Eigenvectors Of Graphs*. Berlin: Spinger
- Ron dan David. 2009. *Elementary Linear Algebra*. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company
- Spence, E. Lawrence, dkk. 2008. *Elementary Linear Algebra*. Canada: Pearsen
- William. 1984. *Basic Human Embryology Edisi 3*.
(<http://muhammadeliasnaim.blogspot.com/2010/09/islam-terbukti-benar.html>. diakses tanggal 8 Desember 2012)



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Deasy Sandhya E. I
NIM : 09610067
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Persamaan Polinomial Karakteristik Matriks
Adjacency, Matriks Laplace, dan Matriks Signless-
Laplace Graf Multipartisi Komplit
 $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	12 Oktober 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2	19 Oktober 2012	Revisi Bab III	2.
3	23 Oktober 2012	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	3.
4	19 November 2012	Revisi Bab I dan II	4.
5	21 November 2012	Revisi Keagamaan Bab II	5.
6	8 Januari 2013	Revisi Bab III	6.
7	9 Januari 2013	ACC Bab III	7.
8	9 Januari 2013	Konsul Bab III Keagamaan	8.
9	10 Januari 2013	ACC Bab III Keagamaan	9.

Malang, 11 Januari 2013
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001