BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SISKA DWI OKTAVIA
NIM. 10610027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI PADA GRAF

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SISKA DWI OKTAVIA
NIM. 10610027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SISKA DWI OKTAVIA
NIM. 10610027

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 16 Januari 2014

Pembimbing I

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Pembimbing II

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

BILANGAN KONTRAKSI SISI DOMINASI PADA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
SISKA DWI OKTAVIA
NIM. 10610027

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd NIP. 19630502 198703 1 005	________________
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Siska Dwi Oktavia
NIM	: 10610027
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi pada Graf

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima saknsi atas perbuatan tersebut.

Malang, Januari 2014

Yang membuat pernyataan,

Siska Dwi Oktavia
NIM. 10610027

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S. AL-INSYIRAH: 5)

Hidup dengan musik menjadi indah

Hidup dengan ilmu menjadi mudah

Hidup dengan agama menjadi terarah

Berjuanglah menjadi yang terbaik untuk orang-orang yang menyayangimu dan kamu sayangi

(**Penulis**)

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلۡعَٰلَمِينَ

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat sangat, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Mama (Endang Sri Astutik) dan Ayah (Sunardi) tersayang yang senantiasa mendoakan, memberikan dukungan, motivasi dan telah memberi kesempatan penulis untuk menjelajahi ilmu hingga ke jenjang yang tinggi.

Untuk Mas yang selalu setia memberikan dorongan dan membesarkan hati dikala penulis terjatuh. Serta Adik yang selalu ada untuk tempat berkeluh kesah dan berbagi cerita.

Mbak Puji yang telah memberikan inspirasi untuk hidup lebih baik. Sahabat-sahabat, teman-teman rempong yang selalu ada dan menghibur penulis, kalian sangat berarti.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahirabbil'alamin, penulis haturkan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang yaitu agama Islam.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak. Penulis haturkan terima kasih seiring do'a dan harapan *Jazakumullah Ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah telah meringankan, menuntun, dan memapah langkah penulis untuk penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. H. Wahyu Henky Irawan selaku Dosen Wali dan Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan dan bantuan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dan pengharahan keagamaan kepada penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
6. Segenap dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Ayah dan Mama tercinta yang tidak pernah lelah mendo'akan, memberikan kasih sayang, semangat, serta motivasi di tengah penyakit yang diderita. Kakak dan adik penulis yang selalu memotivasi penulis untuk menjadi orang yang lebih baik lagi.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, Afidah Karimatul Laili, Ayu Dewi Purwandini dan Sri Susanti yang selalu memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2010 yang tidak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas kebersamaan, semangat, do'a, dan semua kenangan indah. Semoga sukses demi masa depan yang dicita-citakan.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Penulis berdoa semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amin ya Robbal'alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 16 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Oktavia, Siska Dwi. 2014. **Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi pada Graf.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, (II) Achmad Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Dominasi, Bilangan Kontraksi Dominasi, Graf Sikel, Graf Roda, Graf Bunga

Diberikan dua titik u dan v di G, dikatakan u mendominasi v jika $v \in N[u]$. Himpunan bagian $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi jika titiknya mendominasi semua titik di G. Bilangan dominasi pada G dinotasikan dengan $\gamma(G)$ merupakan kardinal minimum dari semua himpunan dominasi. Bilangan kontraksi sisi dominasi dari sebuah graf $ct_\gamma(G)$ didefinisikan sebagai jumlah sisi minimal yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi nya. Dalam penelitian ini, bilangan dominasi setelah kontraksi disimbolkan dengan $\gamma'(G)$.

Sejauh ini, penelitian mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi dibatasi oleh beberapa graf sederhana. Oleh karena itu penelitian ini bertujuan mengkaji lebih lanjut untuk memberikan kontribusi terhadap keilmuan di bidang matematika. Langkah-langkah penelitian adalah mencari himpunan dominasi dari beberapa graf, menentukan bilangan dominasi, kemudian mengkontraksinya, setelah itu membuat pola dan membuktikannya.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh pola sebagai berikut:

1. Pola bilangan dominasi pada graf sikel (C_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+2}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+1}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases} \qquad \gamma'(C_n) = \begin{cases} \frac{n-3}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-1}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-2}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

   Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel (C_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(C_n) = \begin{cases} 3, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ 1, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 2, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

2. Pola bilangan dominasi pada graf roda (W_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(W_n) = 1; \gamma'(W_n) = 0$$

   Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf roda (W_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(W_n) = n$$

3. Pola bilangan dominasi pada graf bunga (F_n) dengan $n \geq 5$ adalah

$$\gamma(F_n) = 1; \gamma'(F_n) = 0$$

   Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf bunga (F_n) dengan $n \geq 5$ adalah

$$ct_\gamma(F_n) = 2n$$

Pada skripsi ini penulis membahas beberapa graf sederhana. Oleh karena itu penulis menyarankan untuk mengembangkannya pada graf-graf lain.

ABSTRACT

Oktavia, Siska Dwi. 2014. **Domination Edge Contraction Number of Graph.** Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, (II) Achmad Nashichuddin, M.A

Keywords: Domination, Domination Contraction Number, Cycle Graph, Wheel Graph , Flower Graph

Given two vertices u and v in G, we say u dominates v if $v \in N[u]$. A subset $D \subseteq V(G)$ is called a dominating set if its vertices dominate all vertices of G. The domination of G denotated by $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of all dominating sets. The domination contraction number $ct_\gamma(G)$ as the minimum number of edges which must be contracted in order to decrease the domination number. In this research, domination number after contraction detotated by $\gamma'(G)$.

Until now, the research has been done is about some simple graph domination edge contraction number. However, this research will be more discussed to give the contribution for mathematic. To find the general form we must find dominating set, find the domination number, then contracted domination number and then make a general pattern and prove it.

Based on the research, we know that:

1. The general form for domination number of cycle graph (C_n) with $n \geq 4$ is

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+2}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+1}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases} \qquad \gamma'(C_n) = \begin{cases} \frac{n-3}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-1}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-2}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

   The general form for domination edge contraction number of cycle graph (C_n) with $n \geq 4$ is

$$ct_\gamma(C_n) = \begin{cases} 3, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ 1, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 2, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

2. The general form for domination number of wheel graph (W_n) with $n \geq 4$ is

$$\gamma(W_n) = 1; \gamma'(W_n) = 0$$

   The general form for domination edge contraction number of wheel graph (W_n) with $n \geq 4$ is

$$ct_\gamma(W_n) = n$$

3. The general form for domination number of flower graph (F_n) with $n \geq 5$ is

$$\gamma(F_n) = 1; \gamma'(F_n) = 0$$

   The general form for domination edge contraction number of flower graph (F_n) with $n \geq 5$ is

$$ct_\gamma(F_n) = 2n$$

In this research, the writer find about domination edge contraction and total domination contraction number from some simple graph. So, the writer suggest the future research can be develop it in other graph.

ملخص

اوكتافيو, سيسكا دفه. ٢٠١٤. **اعداد كونتركس سيسى الهيمنة فى كرف.** بحث العلم, في الشعبة علم الحسا ب في اكلية العلوم والتكنولو جيا في حبامعة الحكومية الاسلامية مولانا مالك ابرهيم مالانج المشرف. المشرف (١)الحاج وهيوهنكي اراون الماجستير (٢) احمد نصيح الدين, الماجستير

الكلمات الرنيسية: الهيمنة, اعداد كونتركس سيسى الهيمنة, كرف مستدير, كرفعخاله, كرف زهرة

وضيمu و v فى G , قيل u هيمنة v اذا $v \in N[u]$. جمع جزء $D \subseteq V(G)$ تسمى بجمع هيمنت فى كل G نقطتا ت الذي اتياطا يعنصرء. اعداد هيمنة في G التى يزمزبا $\gamma(G)$ اقل الكر دينال من جمع . اعدار كونتركسى سيسى هيمنة من كرف $ct\,\gamma\,(G)$ يعرف التى عقددت لا نقاصى اعداد هيمنة . فى هذا البحث اعداد هيمنة بعد كونتركسى ترمز ب $\gamma'(G)$ الهيمنة .

كما مر, البحث عن اكدار كسى سيسى هيمنة و هيمنة تونال بجدد بتعد دكراف البسيطه. لذالك هذا البحث يهدف لنحلبل نحليلا عميقا لنيل نصميم اعداركونتر كسى سسى فكراف مسهدير , وكراف عحلة , وكراف زهرة لاعطاء الضربية التعلمية فى علم الحساب . اما خطوان البحث لطلب ذلك التصميم طلب جمع هيمنة من تعرر كراف , نفرير اعدار هيمنة ثم ضم جمع اعدار هيمنة والاحبر جعل التصميم واتبا الدليل. اعتمادا عاى نتا البحث , ل كنقطة كثيرة من احدكراف يحصل بحصل بتصميم كما يلى :

(١) لتصميم اعداد هيمنه فى كراف مسنديرهو

$$\gamma(C_n)=\begin{cases}\frac{n}{3}, n\equiv 0\ (mod\ 3)\\ \frac{n+2}{3}, n\ \equiv 1\ (mod\ 3)\\ \frac{n+1}{3}, n\ \equiv 2\ (mod\ 3)\end{cases}\qquad \gamma'(C_n)=\begin{cases}\frac{n-3}{3}, n\equiv 0\ (mod\ 3)\\ \frac{n-1}{3}, n\ \equiv 1\ (mod\ 3)\\ \frac{n-2}{3}, n\ \equiv 2\ (mod\ 3)\end{cases}$$

لتصميم اعداد كونتركس سيسى هيمنة فى كراف مستديرهو

$$ct_\gamma(C_n)=\begin{cases}3, n\equiv 0\ (mod\ 3)\\ 1, n\ \equiv 1\ (mod\ 3)\\ 2, n\ \equiv 2\ (mod\ 3)\end{cases}$$

(٢) لتصميم اعداد هيمنه فى كراف عجله هو

$$\gamma(W_n)=1;\gamma'(W_n)=0$$

لتصميم اعداد كونتركس سيسى هيمنة فى كراف عجله هو

$$ct_\gamma(W_n)=n$$

(٣) لتصميم اعداد هيمنه فى كراف زهرة هو

$$\gamma(F_n)=1;\gamma'(F_n)=0$$

لتصميم اعداد كونتركس سيسى هيمنة فى كراف زهرة هو

$$ct_\gamma(F_n)=2n$$

فى هذالبحثو العلم يبحثو بظلو كرف البصطة. فلذالك يحثل كاتبو الان يتطورل بحث لكرف اخر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang keilmuan yang mempunyai peranan penting dalam kehidupan. Matematika bisa dikatakan sebagai “Queen of Sains” karena matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Hal ini dapat dilihat dari banyak ditemukannya aplikasi-aplikasi matematika dalam berbagai bidang kehidupan.

Dalam kehidupan, manusia tidak akan lepas dari berbagai macam permasalahan yang memerlukan penyelesaian melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satunya adalah ilmu matematika. Dengan ilmu matematika, suatu masalah dapat dipahami dengan cara menyederhanakannya kemudian dianalisis untuk memecahkannya dengan logika matematika ataupun dengan cabang ilmu matematika lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Misalnya para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain.

Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Mahamatematis (Abdussakir, 2007:79). Dalam Al Qur'an surat Al-Furqan ayat 2 disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya

Segala sesuatu yang telah disediakan Allah di alam ini ada ukuran, ada hitungan dan ada rumus atau polanya. Para ilmuwan berhasil menemukan beberapa rumus dan persamaan. Rumus-rumus tersebut sebenarnya bukanlah ciptaan manusia melainkan sudah disediakan. Hanya manusia sebagai makhluk yang mempunyai akal dan pikiran dapat menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika yang lebih mudah dipahami.

Salah satu cabang dari keilmuan matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam keilmuan lain ialah teori graf. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan L. Euler, seorang matematikawan Swiss, yang berisi pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa saat itu. Euler menggambarkan suatu masalah lintasan yang melalui jembatan dan pulau di tengah kota Konisberg. Masalah tersebut digambarkan dengan garis yang digunakan untuk menghubungkan antar titik dan akhirnya berkembang dan dikenal sebagai graf hingga saat ini.

Graf didefinisikan sebagai himpunan titik *(vertex)* yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi *(edge)* yang mungkin kosong. Himpunan titik dari suatu graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinyatakan dengan $E(G)$. Sejak masalah jembatan Konigsberg direpresentasikan dengan graf Euler, teori graf berkembang dengan pesat sebagai cabang ilmu matematika.

Kelebihan dari teori graf terletak pada kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998). Suatu permasalahan dalam graf dapat disajikan dengan titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*. Titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Misalkan graf untuk merepresentasikan bentuk molekul air yang terdiri dari atom hidrogen dan oksigen. Masalah dan solusi yang didapat dari contoh kasus tersebut merupakan teknik dari teori graf, yaitu penggambaran atom dengan titik pada graf dan ikatan antar atom yang dinyatakan oleh sisi-sisi pada graf.

Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, akhir-akhir ini banyak ditemukan aplikasi ilmu graf pada kehidupan manusia. Misalnya, graf digunakan untuk memodelkan jaringan transportasi, jaringan telekomunikasi, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, permasalahan dalam penjadwalan dan lain-lain. Masalah penjadwalan dari masalah mudah hingga yang paling rumit seperti penjadwalan pesawat terbang, terminal, stasiun, perjalanan dan sebagainya juga menggunakan aplikasi dari teori graf.

Salah satu topik yang menarik untuk dibahas dalam teori graf adalah bilangan kontraksi sisi dominasi dari suatu graf terhubung. Sejauh ini, belum banyak yang mengkaji tentang bilangan kontraksi sisi dominasi khususnya di Indonesia. Selama ini hanya ada beberapa jurnal internasional mengenai bilangan dominasi maupun kontraksi pada graf. Tidak banyak teori yang mengkaji masalah bilangan kontraksi sisi dominasi sehingga membuka peluang bagi pemerhati matematika untuk melakukan penelitian dalam membangun teori-teori baru di bidang ini. Hal tersebut merupakan salah satu bukti bahwa betapa luasnya ilmu Allah yang tertera dalam Q.S Al-Kahfi ayat 109:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

Artinya: Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)".

Penelitian tentang bilangan kontraksi dominasi dan dominasi total pernah dilakukan oleh Jia Huang dan Jun-Ming Xu yang menghasilkan beberapa teorema dan pembuktian yang menarik untuk diteliti dan dibahas lebih lanjut. Namun graf yang dibahas masih sangat minimal. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi pada beberapa graf yang diberi judul **"Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi pada Graf".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi, pada graf sikel (C_n) serta bagaimana bukti kebenarannya?
2. Bagaimana pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi, pada graf roda (W_n) serta bagaimana bukti kebenarannya?
3. Bagaimana pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi, pada graf bunga (F_n) serta bagaimana bukti kebenarannya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan skripsi ini adalah:

1. Membangun pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel (C_n) serta bukti kebenaran pola tersebut.
2. Membangun pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf roda (W_n) serta bukti kebenaran pola tersebut.
3. Membangun pola bilangan dominasi dan pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf bunga (F_n) serta bukti kebenaran pola tersebut.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah pada suatu penelitian sangat diperlukan agar objek yang diteliti tidak melebar atau meluas. Pada pembahasan skripsi ini penulis membatasi pembahasan yaitu mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi pada beberapa graf yaitu graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n) dengan $n \geq 4$ dan n elemen bilangan asli.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat terutama bagi cabang ilmu matematika yang diteliti. Penulis berharap penelitian ini bermanfaat bagi:

1. Bagi Penulis

   Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap keilmuan dalam bidang matematika tentang perkembangan teori graf khususnya mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n).

2. Bagi Pembaca

   Memberikan gambaran tentang bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf terhubung sederhana, khususnya pada graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n) sehingga pembaca dapat mengkaji lebih lanjut mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sederhana lainnya.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai bahan pustaka yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*Library Research*) yakni melakukan penelitian dengan cara mengumpulkan dan menelaah berbagai konsep dari sumber informasi yang berkaitan baik buku, jurnal ataupun makalah. Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat tanya.

   Sebelum melakukan penelitian, peneliti menyusun rumusan masalah tentang bilangan bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n).

2. Menentukan tujuan yang disesuaikan dengan rumusan masalah.
3. Mencari sejumlah data pendukung yang diperoleh dengan menggunakan dua langkah, yaitu data primer dan data sekunder.

   Data primer, diperoleh dengan mencari bilangan kontraksi sisi dominasi yang terdapat pada graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n).

   Data sekunder, diperoleh dengan mencari definisi dan sifat tentang graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n), himpunan dominasi, bilangan dominasi, serta teorema dan pembuktian tentang bilangan kontraksi dominasi yang terdapat pada sejumlah buku, artikel dan jurnal.

4. Menganalisis data

   Analisa data terdiri dari menentukan bilangan dominasi dan menentukan bilangan kontraksi sisi dominasi yaitu sebagai berikut:

   Langkah menentukan bilangan dominasi:

i. Menggambar beberapa graf G yang dimulai dari 4 titik sampai 8 titik.

ii. Menentukan titik-titik yang mendominasi pada graf tersebut.

iii. Menentukan himpunan dominasi berdasarkan titik-titik yang mendominasi pada graf G.

iv. Menentukan bilangan dominasi berdasarkan kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi.

Langkah untuk menentukan bilangan kontraksi sisi dominasi:

i. Mengkontrak sisi berdasarkan himpunan bilangan dominasi yang telah dipilih.

ii. Menentukan himpunan dominasi berdasarkan titik-titik yang mendominasi pada graf yang sudah dikontraksi.

iii. Membuat pola dan teorema bilangan kontraksi sisi dominasi dari graf yang diteliti.

iv. Membuktikan kebenaran teorema secara umum.

v. Melakukan langkah yang sama pada graf roda dan graf bunga.

Setelah menganalisis data mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi maka selanjutnya mencari integrasi antara matematika dan agama dengan cara mencari ayat yang sesuai kemudian menjabarkan dan menjelaskannya dengan sumber lain misalnya hadits.

5. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang dipakai dalam tugas akhir ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan secara umum mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dikemukakan konsep dan teori yang dapat mendukung referensi untuk pembahasan di bab selanjutnya. Teori yang dikaji adalah teori yang berhubungan dengan permasalahan dalam penelitian yaitu mengenai definisi graf, terhubung langsung *(adjacent)* dan terkait langsung *(incident)*, graf terhubung dan tak terhubung, operasi penjumlahan pada graf, jenis-jenis graf, dominasi, kontraksi sisi, kontraksi dominasi serta kajian dominasi dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dijelaskan mengenai hasil penelitian dari bilangan kontraksi dominasi pada graf sikel (C_n), graf roda (W_n) dan graf bunga (F_n) dengan $n \geq 4$ serta integrasi antara matematika dan agama.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi berisi kesimpulan dan saran dari pembahasan yang telah dilakukan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pengaruh Sumber Makanan Terhadap Perilaku Seorang Muslim

Islam merupakan agama Allah yang mengatur segala sesuatu yang ada di dunia secara rinci, mulai dari sesuatu yang dianggap remeh hingga sesuatu yang rumit. Seperti yang dijelaskan dalam Q.S. Thaha ayat 98 yaitu:

إِنَّمَآ إِلَٰهُكُمُ ٱللَّهُ ٱلَّذِى لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ ۚ وَسِعَ كُلَّ شَىْءٍ عِلْمًا ﴿٩٨﴾

Sesungguhnya Tuhanmu hanyalah Allah, yang tidak ada Tuhan selain Dia. Pengetahuan-Nya meliputi segala sesuatu".

Ayat tersebut menunjukkan bahwa Allah Maha Segalanya yang mempunyai pengetahuan meliputi segala sesuatu bahkan hal yang dianggap remeh dan tidak kita duga sebelumnya.

Salah satu kajian dalam Islam ialah mengenai makanan yang kita makan. Makanan merupakan sumber energi utama pada manusia. Zat gizi yang terdapat dalam makanan dapat membuat tubuh kita menjalankan fungsinya dengan baik.

Makan merupakan kebutuhan pokok seluruh manusia. Namun, makan dari perkara-perkara yang baik secara khusus merupakan faktor yang meninggikan kedudukan kemanusiaan itu dan menyucikannya serta menghubungkannya ke kedudukan malaikat yang tinggi (Quthb, 2004:178). Sebagian manusia tidak mempedulikan makanan yang masuk dalam perutnya. Namun ternyata, kehalalalan suatu makanan sangat sangat berpengaruh sekali dalam kehidupan seseorang.

Allah berfirman dalam Q.S Al-Mukminun ayat 51:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلرُّسُلُ كُلُوا۟ مِنَ ٱلطَّيِّبَٰتِ وَٱعْمَلُوا۟ صَٰلِحًا ۖ إِنِّى بِمَا تَعْمَلُونَ عَلِيمٌ ﴿٥١﴾

Artinya: Wahai rasul-rasul, makanlah dari makanan yang baik-baik, dan kerjakanlah amal yang saleh. Sesungguhnya aku Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.

Sekalipun perintah ini diarahkan kepada para Nabi, namun umat mengikuti mereka. Seakan, Allah berfirman kepada kita: Wahai kaum muslimin di seluruh belahan bumi, makanlah dari makanan yang halal, bersih, dan lurus. Makanan halal ialah yang tidak mengandung kedurhakaan terhadap Allah. Makanan yang bersih ialah yang tidak mengandung perkara yang melupakan Allah. Makanan yang lurus berarti yang menahan nafsu dan memelihara akal serta kerjakanlah amal shaleh (Al-Maraghi, 1989:53).

Ayat tersebut di atas ditujukan kepada para Rasul dan umatnya secara keseluruhan. Ayat ini juga menjadi dalil bahwasanya memakan makanan yang halal bisa membantunya dalam beramal shalih. Dan sesungguhnya akibat makan makanan yang haram sangat berbahaya diantaranya adalah tertolaknya doa (Basyir, 2011:576).

Selain itu permasalahan halal dan haram sangat penting sekali bagi seorang muslim, dan ini ditunjukkan langsung dengan pengaitan Allah *Subhanahu wa Ta'ala* antara makanan yang baik dengan amal shalih dan ibadah.

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ : قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ : إِنَّ اللهَ تَعَالَى طَيِّبٌ لاَ يَقْبَلُ إِلاَّ طَيِّباً، وَإِنَّ اللهَ أَمَرَ الْمُؤْمِنِيْنَ بِمَا أَمَرَ بِهِ الْمُرْسَلِيْنَ [رواه مسلم]

Artinya: Dari Abu Hurairoh rodhiallohu 'anhu, ia berkata: "Rosululloh sholallahu 'alaihi wa sallam pernah bersabda: "Sesungguhnya Alloh itu baik, tidak mau menerima sesuatu kecuali yang baik. Dan sesungguhnya Alloh telah memerintahkan kepada orang-orang mukmin (seperti) apa yang telah diperintahkan kepada para rosul (HR. Muslim)

Lalu beliau menceritakan seorang laki-laki yang sudah lama melakukan safar, rambutnya acak-acakan, dan tubuhnya kusut (berdebu), kemudian menengadahkan kedua tangannya ke langit seraya mengatakan, "Ya Tuhanku, Ya Tuhanku," sedang kan makanannya haram, minumannya haram, pakaiannya haram, dan dia dibesarkan dengan makanan yang haram, maka bagaimana mungkin doanya dikabulkan. Ini yang menjadi penguat dari hadits di atas (Al-Jazairi, 2008:63).

Didahulukannya perintah untuk memakan makanan yang baik-baik atas perintah mengerjakan amal shaleh menunjukkan bahwa amal yang shaleh tidak akan diterima jika tidak didahului dengan makanan yang halal. Disebutkan dalam sebagian akhbar: "Sesungguhnya Allah Ta'ala tidak menerima ibadah orang yang di dalam perutnya terdapat sepotong makanan yang haram" (Al-Maraghi, 1989:54).

2.2 Definisi Graf

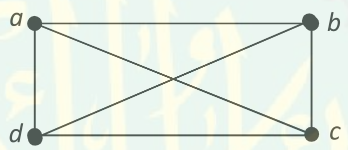
Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 2

Himpunan titik di G dinotasikan dengan *V(G)* dari himpunan sisi dinotasikan dengan *E(G)*. Sedangkan banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G berorder p dan memiliki size q, maka cukup ditulis dengan *G(p,q)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sebagai contoh *G(4,6)* disajikan dalam gambar berikut:

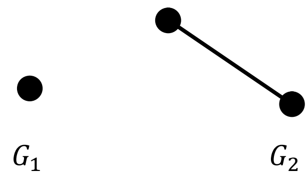


Gambar 2.1 Graf *G(4,6)*

Graf *G* pada gambar 2.1 mempunyai order 4 dan mempunyai 6 sisi, dapat dinyatakan sebagai $G((V(G),E(G))$ atau *G(4,6)* dengan $V(G)=\{a,b,c,d\}$, $E(G)=\{ab,ac,ad,bc,bd,cd\}$ atau ditulis dengan $V(G)=\{a,b,c,d\}$, $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ untuk $e_1=(a,b),e_2=(a,c),e_3=(a,d),e_4=(b,c),e_5=(b,d),e_6=(c,d)$.

Definisi 3

Graf *trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisanya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:6).



Gambar 2.2 Graf *Trivial* dan *Non Trivial*

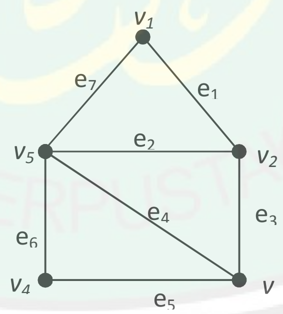
Berdasarkan gambar 2.2, G_1 merupakan graf *trivial* karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisanya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf *non trivial* karena berorder lebih dari satu.

2.3 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat titik *v* pada graf *G*, ditulis dengan $deg_G(v)$, adalah banyak sisi yang terkait langsung (*incident*) pada titik *v*. Titik *v* dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh :



Gambar 2.3 Derajat Titik Graf *G*

Dari contoh graf yang diberikan pada gambar 2.3, dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut : $deg_G(v_1) = 2$, $deg_G(v_2) = 3$, $deg_G(v_3) = 3$, $deg_G(v_4) = 2$, $deg_G(v_5) = 4$.

Perhatikan bahwa jumlah total derajat titik di G adalah 14 sedangkan banyak sisi G adalah 7. Ini menunjukkan bahwa jumlah derajat semua titik di G adalah 2 kali banyak sisi di G. Selanjutnya akan diberikan suatu teorema yang menunjukkan hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q sebagai berikut.

Teorema 2.1

Jumlah derajat semua titik pada suatu graf adalah genap, yaitu 2 kali banyak sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain,

jika $G = (V, E)$, maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q.$$

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

2.4 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Suatu graf paling sedikit memiliki sebuah titik. Suatu graf yang memiliki titik dan sisi maka dapat dinyatakan hubungan antara kedua titik dan sisi tersebut melalui definisi:

Definisi 5

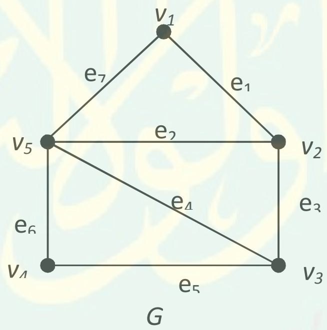
Misalkan v dan w adalah titik-titik dari suatu graf G. Jika v dan w dihubungkan oleh suatu sisi $e = vw$, maka kedua titik v dan w disebut berdekatan atau terhubung langsung (*adjacent*). Lebih lanjut, titik v dan w

dikatakan terkait langsung (*incident*) dengan sisi e, vw dikatakan terkait langsung dengan v dan w, dan titik v dan w disebut titik ujung dari sisi $e = vw$ (Wilson dan Watkins, 1990:31).

Gambar 2.4 Graf Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.4, titik v dan sisi e serta sisi e dan titik w adalah terkait langsung, sedangkan titik v dan w adalah terhubung langsung.

Selanjutnya jika kedua sisi e_1 dan e_2 terkait langsung pada satu titik yang sama pada suatu graf G, maka kedua sisi tersebut dikatakan sisi yang terhubung langsung di G.



Gambar 2.5 Graf Terhubung G (5,7)

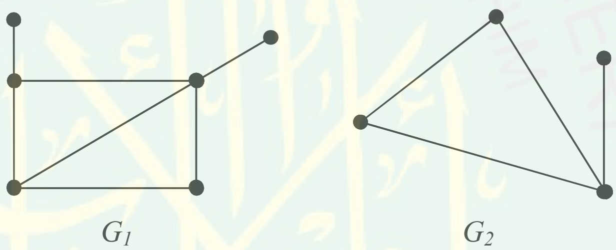
Dari Gambar 2.5 titik-titik terhubung langsung adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_5, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5, v_5 dan v_1. Sedangkan sisi e_1 terkait langsung dengan v_1 dan v_2, e_2 terkait langsung dengan v_2 dan v_5, e_3 terkait langsung dengan v_2 dan v_3, e_4 terkait langsung dengan v_3 dan v_5, e_5 terkait langsung dengan v_3 dan v_4, e_6 terkait langsung dengan v_4 dan v_5, dan e_7 *incident* dengan v_5 dan v_1. Sisi e_1 terhubung langsung dengan sisi e_7 karena kedua sisi terkait langsung dengan titik yang sama yaitu v_1.

2.5 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

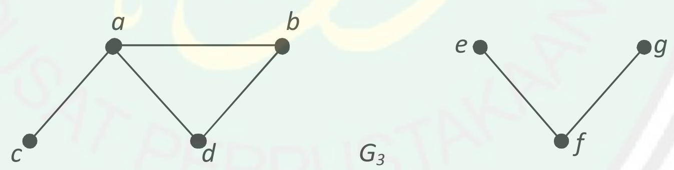
Definisi 6

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasangan titik u dan v di G ada sisi (u,v) di G. Graf dikatakan tidak terhubung (*disconnected*), jika ada titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan (u,v) di G. Komponen dari graf G adalah bagian maksimal dari graf G dan terhubung. Graf terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan graf genap/ganjil jika banyak titiknya genap/ganjil (Purwanto, 1998:8).

Contoh :



Gambar 2.6 Graf Terhubung G_1 dan G_2



Gambar 2.7 Graf Tak Terhubung

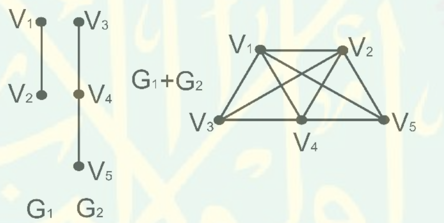
Graf G_3 ini terdiri dari himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan sisi $E = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (e,f), (f,g)\}$. Graf G_3 ini merupakan graf tak terhubung karena tidak terdapat jalan dari a ke e, yang dihubungkan oleh sisi, sehingga terpisah menjadi dua komponen. Bagian-bagian dari susunan graf yang menyebabkan grafnya tidak terhubung maka bagian tersebut dinamakan komponen graf (Grimaldi, 1985:533).

2.6 Operasi Penjumlahan pada Graf

Definisi 7

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:9).

Contoh:



Gambar 2.8 Penjumlahan Dua Graf

Dari gambar 2.9 dapat dilihat bahwa penjumlahan dari dua graf G_1dan G_2menghasilkan sebuah graf baru dengan

$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_1 + G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_4v_5\}$

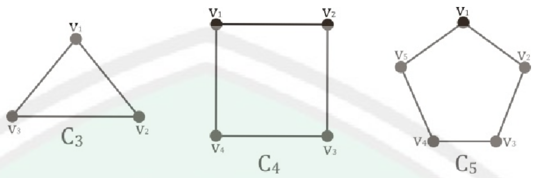
2.7 Jenis-Jenis Graf

2.7.1 Graf Sikel *(Cycle Graph)*

Definisi 8

Sikel dengan panjang n disebut $sikel - n$ (C_n). Sikel-n disebut genap atau ganjil bergantung pada n genap atau ganjil. Panjang sikel pada sebuah graf paling kecil adalah 3 (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh :



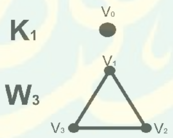
Gambar 2.9 Graf Sikel C_3, C_4, dan C_5

2.7.2 Graf Roda *(Wheel Graph)*

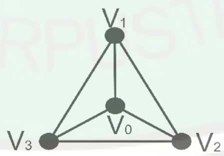
Definisi 9

Graf roda W_n adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf Roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf C_n dengan graf komplit K_1. Jadi $W_n = C_n + K_1, n > 2$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:8)

Contoh :



Maka graf Roda $W_3 = C_3 + K_1$ adalah



Gambar 2.10 Graf Roda W_3

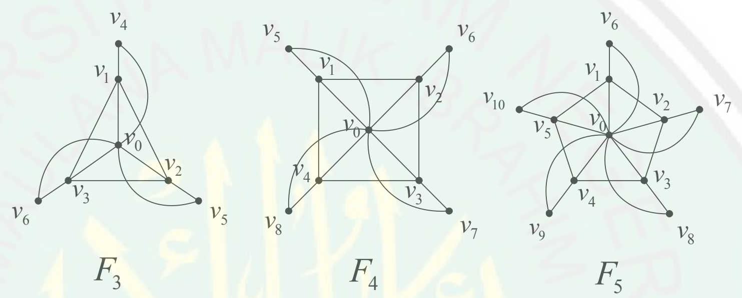
Karena operasi penjumlahan maka, semua titik di graf sikel C_3 dihubungkan dihubungkan dengan suatu titik dari v_0. Titik v_0 untuk selanjutnya disebut dengan titik pusat W_3.

2.7.3 Graf Bunga (*Flower Graph*)

Definisi 10

Graf bunga F_n adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf bunga:

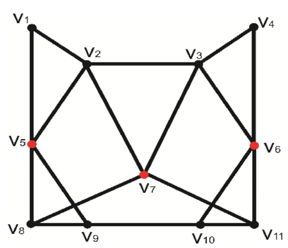


Gambar 2.11 Graf Bunga F_3, F_4, F_5

2.8 Dominasi

Definisi 11

Diberikan dua titik u dan v di G, dikatakan u mendominasi v jika $v \in N[u]$. Himpunan bagian $D \subseteq V(G)$ disebut himpunan dominasi jika titiknya mendominasi semua titik di G. Bilangan dominasi pada G dinotasikan dengan $\gamma(G)$ merupakan kardinal minimum dari semua himpunan dominasi (Huang dan Xu, 2010:3).



Gambar 2.12 Himpunan Titik Dominasi pada Graf G

v_5 mendominasi v_1, v_2, v_8, v_9 dalam G karena $v_1, v_2, v_8, v_9 \in N[v_5]$. Atau dapat dikatakan bahwa v_1, v_2, v_8, v_9 merupakan lingkungan dari v_5 karena v_1, v_2, v_8, v_9 terhubung langsung dengan v_5.

$D = \{v_5, v_6, v_7\}$ merupakan salah satu himpunan dominasi dari graf G karena $D \subseteq V(G)$. Selain itu dapat dilihat bahwa v_1, v_3, v_{11}, v_8 juga merupakan himpunan dominasi dari graf G. Sedangkan $\gamma(G) = 3$ karena merupakan kardinal minimum dari semua himpunan dominasi pada graf G.

Definisi 12

Suatu himpunan S dari titik pada G adalah himpunan dominasi G jika setiap titik G didominasi oleh setidaknya satu titik S. Ekuivalen dengan suatu himpunan S dari titik G adalah himpunan dominasi jika setiap titik di $V(G) - S$ berdekatan *(adjacent)* dengan setidaknya satu titik di S. Kardinalitas minimum antara himpunan dominasi G disebut bilangan dominasi G dan dilambangkan dengan $\gamma(G)$. Suatu himpunan kardinal dominasi $\gamma(G)$ kemudian disebut sebagai himpunan minimal dominasi (Chartrand dan Lesniak, 1996:302).

2.9 Kontraksi Sisi

Definisi 13

Misal $e = xy$ adalah sisi pada graf $G(V, E)$. $G/_e$ menunjukkan graf G yang diperoleh dari mengontraksi sisi e menjadi titik baru v_e yang beradjacent dengan semua sisi sebelumnya pada x dan y. (Diestel, 2005:18).

Gambar 2.13 Kontraksi sisi $e = xy$

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa graf G dengan kontraksi sisi e akan menghasilkan graf $G/_{e}$ dengan jumlah titik dan sisi yang lebih sedikit dari graf awalnya. Sehingga, pada hasil akhir setelah dilakukan proses kontraksi sisi pada graf G akan terbentuk graf baru yang lebih sederhana dari graf awalnya.

Definisi 14

Bilangan kontraksi dominasi dari sebuah graf $ct_{\gamma}(G)$ didefinisikan sebagai banyaknya sisi minimal yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya (Huang dan Xu, 2010:2).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel C_n, graf roda W_n dan graf bunga F_n. Pembahasan akan dimulai dari graf dengan $n = 4$ hingga 8, kemudian pola yang didapat akan digeneralisasikan untuk graf dengan n titik

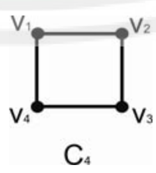
3.1 Dominasi dan Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi

Untuk mencari bilangan kontraksi dominasi dan dominasi total pada suatu graf maka terlebih dahulu harus ditentukan himpunan titik dominasinya. Setelah itu dapat ditentukan bilangan dominasi yang selanjutnya akan dikontraksi.

3.1.1 Graf Sikel *n Titik* (C_n)

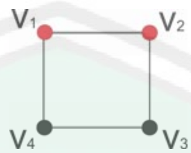
Berdasarkan definisi yang menyebutkan bahwa bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi. Karena masalah dalam penelitian ini dibatasi mulai graf sikel empat titik maka pembahasan akan dimulai dari graf sikel empat titik, graf sikel lima titik, graf sikel enam titik, graf sikel tujuh titik, graf sikel delapan titik yang kemudian digeneralisasikan untuk graf sikel n titik.

1. Graf sikel empat titik (C_4)



Gambar 3.1 Graf C_4

Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa v_1 mendominasi v_2 dan v_4, v_2 mendominasi v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_1 dan v_3. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_2\}$ sehingga



Gambar 3.2 Titik Dominasi pada Graf C_4

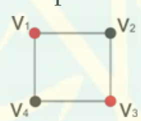
$V(C_4) - D_1 = \{v_3, v_4\}$

$v_3 \in V(C_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_2 \in D_1$

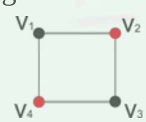
$v_4 \in V(C_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_1, v_2\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

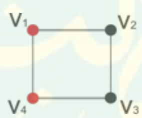
$D_2 = \{v_1, v_3\}$



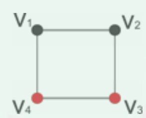
$D_5 = \{v_2, v_4\}$



$D_3 = \{v_1, v_4\}$



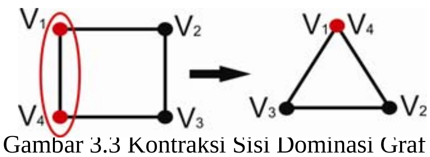
$D_6 = \{v_3, v_4\}$



$D_4 = \{v_2, v_3\}$

Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(C_4) = 2$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka C_4 dengan himpunan dominasi $D_3 = \{v_1, v_4\}$ dan sisi (v_1, v_4) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

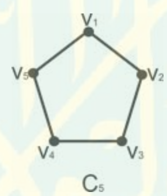


Gambar 3.3 Kontraksi Sisi Dominasi Graf C_4

Dapat dilihat bahwa C_4 dikontraksi dimanapun akan menjadi C_3 dengan bilangan dominasi 1. Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi maka benar bahwa sudah berkurang bilangan dominasinya.

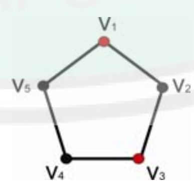
Jadi $ct_\gamma(C_4) = 1$ karena C_4 dengan $\gamma(C_4) = 2$ hanya membutuhkan satu kali kontraksi untuk menghasilkan C_3 dengan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni $\gamma(C_3) = 1$.

2. Graf sikel lima titik (C_5)



Gambar 3.4 Graf C_5

Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa v_1 mendominasi v_2 dan v_5, v_2 mendominasi v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_1 dan v_4. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_3\}$ sehingga



Gambar 3.5 Titik Dominasi pada Graf C_5

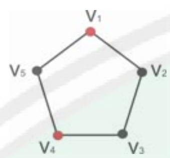
$V(C_5) - D_1 = \{v_2, v_4, v_5\}$

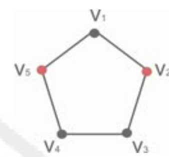
$v_2 \in V(C_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1, v_3 \in D_1$

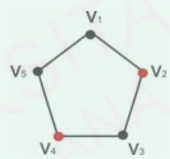
$v_4 \in V(C_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_3 \in D_1$

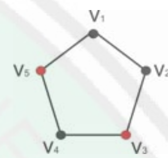
$v_5 \in V(C_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_1, v_3\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_1, v_4\}$ 

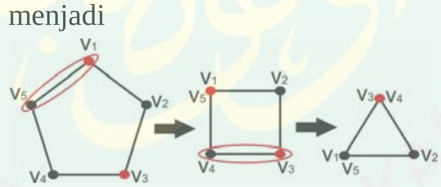
$D_4 = \{v_2, v_5\}$ 

$D_3 = \{v_2, v_4\}$ 

$D_5 = \{v_3, v_5\}$ 

Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(C_5) = 2$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka C_5 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_3\}$ dan sisi (v_1, v_5) , (v_3, v_4) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

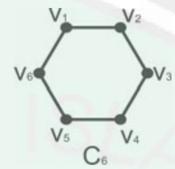


Gambar 3.6 Kontraksi Sisi Dominasi Graf C_5

Dapat dilihat bahwa C_5 dikontraksi dimanapun akan menjadi C_3 dengan bilangan dominasi 1. Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi maka benar bahwa sudah berkurang bilangan dominasinya.

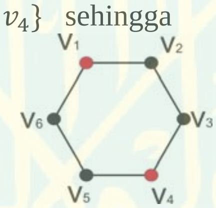
Jadi, $ct_\gamma(C_5) = 2$ karena C_5 dengan $\gamma(C_5) = 2$ membutuhkan dua kali kontraksi untuk menghasilkan C_3 dengan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni $\gamma(C_3) = 1$.

3. Graf sikel enam titik (C_6)



Gambar 3.7 Graf C_6

Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa v_1 mendominasi v_2 dan v_6, v_2 mendominasi v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_1 dan v_5. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4\}$ sehingga



Gambar 3.8 Titik Dominasi pada Graf C_6

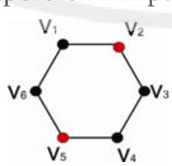
$V(C_6) - D_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$

$v_2, v_6 \in V(C_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1 \in D_1$

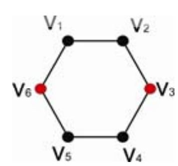
$v_3, v_5 \in V(C_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_4 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_1, v_4\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_2, v_5\}$

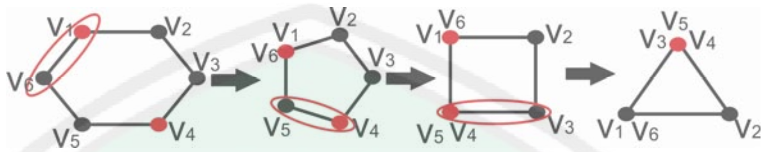


$D_3 = \{v_3, v_6\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(C_6) = 2$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka pilih himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4\}$ dan sisi (v_1, v_6) , (v_4, v_5) , (v_3, v_5) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

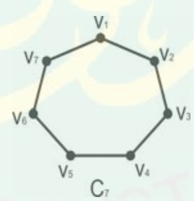


Gambar 3.9 Kontraksi Sisi Dominasi Graf C_6

Dapat dilihat bahwa C_6 dikontraksi dimanapun akan menjadi C_3 dengan bilangan dominasi 1. Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi maka benar bahwa sudah berkurang bilangan dominasinya.

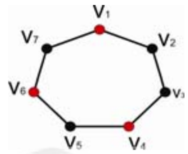
Jadi, $ct_\gamma(C_6) = 3$ karena C_6 dengan $\gamma(C_6) = 2$ membutuhkan tiga kali kontraksi untuk menghasilkan C_3 dengan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni $\gamma(C_3) = 1$.

4. Graf sikel tujuh titik (C_7)



Gambar 3.10 Graf C_7

Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa v_1 mendominasi v_2 dan v_7, v_2 mendominasi v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_5 dan v_7, v_7 mendominasi v_1 dan v_6. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4, v_6\}$ sehingga



Gambar 3.11 Titik Dominasi pada Graf C_7

$V(C_7) - D_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_7\}$

$v_2 \in V(C_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1 \in D_1$

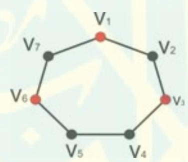
$v_3 \in V(C_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_4 \in D_1$

$v_5 \in V(C_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_4, v_6 \in D_1$

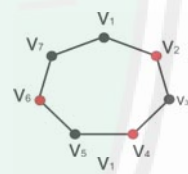
$v_7 \in V(C_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1, v_6 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_1, v_4, v_6\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

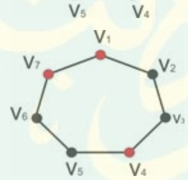
$D_2 = \{v_1, v_3, v_6\}$



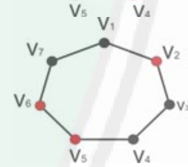
$D_5 = \{v_2, v_4, v_6\}$



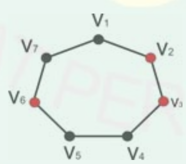
$D_3 = \{v_1, v_4, v_7\}$



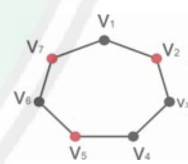
$D_6 = \{v_2, v_5, v_6\}$



$D_4 = \{v_2, v_3, v_6\}$

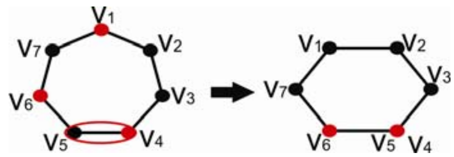


$D_7 = \{v_2, v_5, v_7\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(C_7) = 3$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka C_7 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4, v_6\}$ dan sisi (v_4, v_5) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

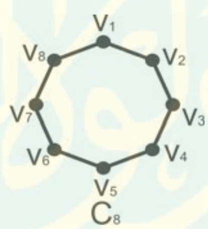


Gambar 3.12 Kontraksi Sisi Dominasi Graf C_7

Dapat dilihat bahwa C_7 dikontraksi dimanapun akan menjadi C_6 dengan bilangan dominasi 2. Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi maka benar bahwa sudah berkurang bilangan dominasinya.

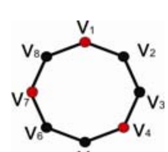
Jadi, $ct_\gamma(C_7) = 1$ karena C_7 dengan $\gamma(C_7) = 3$ hanya membutuhkan satu kali kontraksi untuk menghasilkan C_6 dengan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni $\gamma(C_6) = 2$.

5. Graf sikel delapan titik (C_8)



Gambar 3.13 Graf C_8

Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa v_1 mendominasi v_2 dan v_8, v_2 mendominasi v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_5 dan v_7, v_7 mendominasi v_6 dan v_8, v_8 mendominasi v_1 dan v_7. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$ sehingga



Gambar 3.14 Titik Dominasi pada Graf C_8

$V(C_8) - D_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8\}$

$v_2 \in V(C_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1 \in D_1$

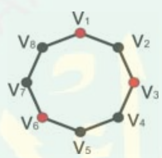
$v_3, v_5 \in V(C_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_4 \in D_1$

$v_6 \in V(C_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_7 \in D_1$

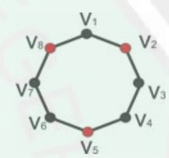
$v_8 \in V(C_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_1, v_7 \in D_1$

berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

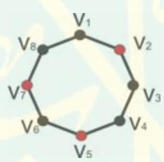
$D_2 = \{v_1, v_3, v_6\}$



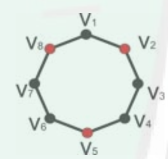
$D_4 = \{v_2, v_5, v_8\}$



$D_3 = \{v_2, v_5, v_7\}$

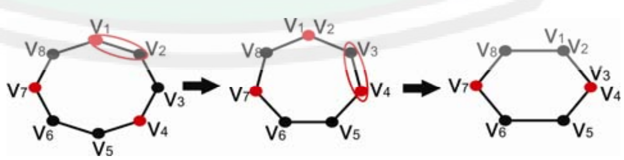


$D_5 = \{v_2, v_4, v_7\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(C_8) = 3$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka C_8 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$ dan sisi (v_1, v_2), (v_3, v_4) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi



Gambar 3.15 Kontraksi Sisi Dominasi Graf C_8

Dapat dilihat bahwa C_8 dikontraksi dimanapun akan menjadi C_6 dengan bilangan dominasi 2. Berdasarkan definisi bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi bilangan dominasi maka benar bahwa sudah berkurang bilangan dominasinya.

Jadi, $ct_{\gamma}(C_8) = 2$ karena C_8 dengan $\gamma(C_8) = 3$ membutuhkan dua kali kontraksi untuk menghasilkan C_6 dengan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni $\gamma(C_6) = 2$.

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf sikel n titik (C_n), maka diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3.1 Pola Bilangan Dominasi dan Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi dari Graf C_n

Nama Graf	**Bilangan Dominasi Sebelum Dikontraksi** $(\gamma(C_n))$	**Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi** $(ct_{\gamma}(C_n))$	**Bilangan Dominasi Setelah Dikontraksi** $(\gamma'(C_n))$
C_4	2	1	1
C_5	2	2	1
C_6	2	3	1
C_7	3	1	2
C_8	3	2	2
C_9	3	3	2
C_{10}	4	1	3
C_{11}	4	2	3
C_{12}	4	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_n	$\forall n \geq 4$ $\frac{n}{3}, n \equiv 0 (mod\ 3)$ $\frac{n+2}{3}, n \equiv 1 (mod\ 3)$ $\frac{n+1}{3}, n \equiv 2 (mod\ 3)$	$\forall n \geq 4$ $3, n \equiv 0 (mod\ 3)$ $1, n \equiv 1 (mod\ 3)$ $2, n \equiv 2 (mod\ 3)$	$\forall n \geq 4$ $\frac{n}{3} - 1, n \equiv 0 (mod\ 3)$ $\frac{n-1}{3}, n \equiv 1 (mod\ 3)$ $\frac{n-2}{3}, n \equiv 2 (mod\ 3)$

Teorema 1

Bilangan dominasi sebelum dikontraksi dari sikel (C_n) untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+2}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+1}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

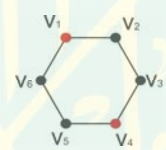
Bukti Teorema 1

1. $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n}{3}, \ n \equiv 0 \ (mod\ 3)}$

   Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 6$ sehingga

   Untuk $n = 6$ maka $\gamma(C_6) = \frac{6}{3} = 2$ benar

   Seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah



   Untuk $n = 3k$ maka $\gamma(C_{3k}) = \frac{3k}{3} = k$ diasumsikan benar

   Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k+1) = 3k + 3$ yaitu

   $\gamma(C_{3k+3}) = \frac{3(k+1)}{3} = \frac{3k+3}{3} = k + 1$

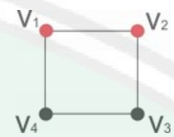
   Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+3}. Himpunan titik pada sikel C_{3k} memiliki banyak titik dominasi k, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, salah satu titik menjadi dominasi titik yang lain (titik tengah). Dengan demikian banyak titik dominasi pada sikel C_{3k+3} adalah $k + 1$.

   ∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n}{3}, \ n \equiv 0 \ (mod\ 3)}$

2. $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n+2}{3}}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 1 \ (mod\ 3)}$

Untuk $n = 4$ maka $\gamma(C_4) = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ benar

Seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah



Untuk $n = 3k + 1$ maka $\gamma(C_{3k+1}) = \frac{((3k+1)+2)}{3} = \frac{(3k+3)}{3} = k + 1$ diasumsikan benar

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k + 1) + 1 = 3k + 4$ yaitu

$$\gamma(C_{3k+4}) = \frac{((3k + 4) + 2)}{3} = \frac{(3k + 6)}{3} = k + 2$$

Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k+1} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+4}. Himpunan titik pada sikel C_{3k+1} memiliki banyak titik dominasi $k + 1$, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, satu titik menjadi dominasi titik yang lain. Dengan demikian banyak titik dominasi pada sikel $C_{3k+4} = C_{(3k+1)} + 1 = k + 1 + 1 = k + 2$.

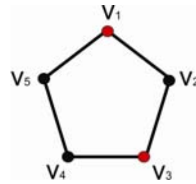
∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n+2}{3}}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 1 \ (mod\ 3)}$

3. $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n+1}{3}}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 2 \ (mod\ 3)}$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 5$ sehingga

Untuk $n = 5$ maka $\gamma(C_5) = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ benar

Seperti yang diperlihatkan pada gambar di bawah



Untuk $n = 3k + 2$ maka $\gamma(C_{3k+2}) = \frac{((3k+2)+1)}{3} = \frac{(3k+3)}{3} = k + 1$ diasumsikan benar

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k + 1) + 2 = 3k + 5$ yaitu

$$\gamma(C_{3k+5}) = \frac{((3k + 5) + 1)}{3} = \frac{(3k + 6)}{3} = k + 2$$

Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k+2} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+5}. Himpunan titik pada sikel C_{3k+2} memiliki banyak titik dominasi $k + 1$, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, satu titik menjadi dominasi titik yang lain. Dengan demikian banyak titik dominasi pada sikel $C_{3k+5} = C_{(3k+2)} + 1 = k + 1 + 1 = k + 2$.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma(C_n) = \frac{n+1}{3}\ , n \equiv 2\ (mod\ 3)}$

Teorema 2

Bilangan kontraksi sisi dominasi dari graf sikel (C_n) untuk $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(C_n) = \begin{cases} 3\ , n \equiv 0\ (mod\ 3) \\ 1\ , n\ \equiv 1\ (mod\ 3) \\ 2\ , n\ \equiv 2\ (mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti Teorema 2

1. $ct_{\gamma}(C_n) = 3$, $n \equiv 0\ (mod\ 3)$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 6$. C_6 dikontraksi dimanapun sebanyak tiga kali akan menjadi C_3 dengan bilangan kontraksi yang lebih kecil. Maka benar bahwa bilangan dominasi dari graf tersebut sudah berkurang dengan kontraksi sisi sebanyak tiga kali $(ct_{\gamma}(C_6) = 3)$. Asumsikan benar untuk $n = 3k$ maka juga diperoleh hasil bahwa $ct_{\gamma}(C_{3k}) = 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar bahwa $n = 3(k+1) = 3k + 3$ maka $ct_{\gamma}(C_{3k+3}) = 3$. Dapat dilihat bahwa untuk setiap penambahan tiga titik pada graf C_n dengan $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ akan menghasilkan $ct_{\gamma}(C_{3k+3}) = 3$. Artinya setiap penambahan tiga titik pada graf C_n akan memiliki bilangan kontraksi sisi yang sama yaitu $ct_{\gamma}(C_{3k+3}) = 3$.

∴ **Jadi terbukti bahwa $ct_{\gamma}(C_n) = 3$, $n \equiv 0\ (mod\ 3)$**

2. $ct_{\gamma}(C_n) = 1$, $n \equiv 1\ (mod\ 3)$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 4$. C_4 dikontraksi dimanapun sebanyak satu kali akan menjadi C_3 dengan bilangan kontraksi yang lebih kecil. Maka benar bahwa bilangan dominasi dari graf tersebut sudah berkurang dengan kontraksi sebanyak satu kali $(ct_{\gamma}(C_4) = 1)$. Asumsikan benar untuk $n = 3k + 1$ maka juga diperoleh hasil bahwa $ct_{\gamma}(C_{3k+1}) = 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar bahwa $n = 3(k+1) + 1 = 3k + 4$ maka $ct_{\gamma}(C_{3k+4}) = 1$. Dapat dilihat bahwa untuk setiap penambahan titik dengan pada graf C_n dengan $n \equiv 1\ (mod\ 3)$ akan menghasilkan $ct_{\gamma}(C_{3k+4}) = 1$. Artinya setiap penambahan tiga titik pada graf C_n akan memiliki bilangan kontraksi sisi yang sama yaitu $ct_\gamma(C_{3k+4}) = 1$.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{ct_\gamma(C_n) = 1}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 1\ (mod\ 3)}$

3. $\boldsymbol{ct_\gamma(C_n) = 2}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 2\ (mod\ 3)}$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 5$. C_5 dikontraksi dimanapun sebanyak dua kali akan menjadi C_3 dengan bilangan kontraksi yang lebih kecil. Maka benar bahwa bilangan dominasi dari graf tersebut sudah berkurang dengan kontraksi sebanyak dua kali ($ct_\gamma(C_5) = 2$). Asumsikan benar untuk $n = 3k + 2$ maka juga diperoleh hasil bahwa $ct_\gamma(C_{3k+2}) = 2$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar bahwa $n = 3(k+1) + 2 = 3k + 5$ maka $ct_\gamma(C_{3k+5}) = 2$. Dapat dilihat bahwa untuk setiap penambahan tiga titik pada graf C_n dengan $n \equiv 2\ (mod\ 3)$ akan menghasilkan $ct_\gamma(C_{3k+5}) = 3$. Artinya setiap penambahan tiga titik pada graf C_n akan memiliki bilangan kontraksi sisi yang sama yaitu $ct_\gamma(C_{3k+3}) = 3$.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{ct_\gamma(C_n) = 3}$ **,** $\boldsymbol{n \equiv 0\ (mod\ 3)}$

Teorema 3

Bilangan dominasi setelah dikontraksi dari graf sikel (C_n) untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma'(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n-3}{3}, n \equiv 0\ (mod\ 3) \\ \dfrac{n-1}{3}, n \equiv 1\ (mod\ 3) \\ \dfrac{n-2}{3}, n \equiv 2\ (mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti Teorema 3

1. $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{n-3}{3}\ ,\ n \equiv 0\ (mod\ 3)}$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 6$ sehingga

Untuk $n = 6$ maka $\gamma'(C_6) = \frac{6-3}{3} = \frac{3}{3} = 1$ benar

Untuk $n = 3k$ maka $\gamma'(C_{3k}) = \frac{3k-3}{3} = k - 1$ diasumsikan benar

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k+1) = 3k + 3$ yaitu

$$\gamma'(C_{3k+3}) = \frac{((3k+3)-3)}{3} = \frac{3k}{3} = k$$

Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+3}. Himpunan titik pada sikel C_{3k} memiliki banyak titik dominasi setelah kontraksi $k - 1$, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, salah satu titik menjadi dominasi titik yang lain (titik tengah). Dengan demikian banyak titik dominasi setelah kontraksi pada sikel C_{3k+3} adalah k.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{n-3}{3}\ ,\ n \equiv 0\ (mod\ 3)}$

2. $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{n-1}{3}\ , n\ \equiv 1\ (mod\ 3)}$

Untuk $n = 4$ maka $\gamma'(C_4) = \frac{(4-1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$ benar

Untuk $n = 3k + 1$ maka $\gamma'(C_{3k+1}) = \frac{((3k+1)-1)}{3} = \frac{3k}{3} = k$ diasumsikan benar

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k+1) + 1 = 3k + 4$ yaitu

$$\gamma'(C_{3k+4}) = \frac{((3k+4)-1)}{3} = \frac{(3k+3)}{3} = k + 1$$

Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k+1} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+4}. Himpunan titik pada sikel C_{3k+1} memiliki banyak titik dominasi setelah kontraksi k, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, salah satu titik menjadi dominasi titik yang lain. Dengan demikian banyak titik dominasi setelah kontraksi pada sikel $C_{3k+4} = C_{3k+1} + 1 = k + 1$.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{n-1}{3}\ ,\ n \equiv 1\ (mod\ 3)}$

3. $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{n-2}{3}\ ,\ n \equiv 2\ (mod\ 3)}$

Karena $n \geq 4$ maka n yang memenuhi dimulai dari $n = 5$ sehingga

Untuk $n = 5$ maka $\gamma'(C_5) = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ benar

Untuk $n = 3k + 2$ maka $\gamma'(C_{3k+2}) = \frac{((3k+2)-2)}{3} = \frac{3k}{3} = k$ diasumsikan benar

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 3(k + 1) + 2 = 3k + 5$ yaitu

$\gamma'(C_{3k+5}) = \frac{((3k+5)-2)}{3} = \frac{(3k+3)}{3} = k + 1$

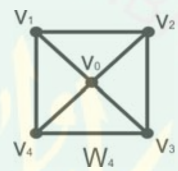
Himpunan semua titik-titik pada sikel C_{3k+2} digabungkan dengan 3 titik baru sehingga menjadi himpunan titik-titik sikel baru C_{3k+5}. Himpunan titik pada sikel C_{3k+2} memiliki banyak titik dominasi setelah kontraksi k, sedangkan dari tiga titik baru yang digabungkan, salah satu titik menjadi dominasi titik yang lain (titik tengah). Dengan demikian banyak titik dominasi setelah kontraksi pada sikel $C_{3k+5} = C_{3k+2} + 1 = k + 1$.

∴ **Jadi terbukti bahwa** $\boldsymbol{\gamma'(C_n) = \frac{(n-2)}{3}\ , n \equiv 2\ (mod\ 3)}$

3.1.2 Graf Roda n Titik (W_n)

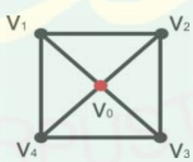
Berdasarkan definisi yang menyebutkan bahwa bilangan kontraksi sisi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi. Karena masalah dalam penelitian ini dibatasai mulai graf roda empat titik maka pembahasan akan dimulai dari graf roda empat titik, graf roda lima titik, graf roda enam titik, graf roda tujuh titik, graf roda delapan titik yang kemudian digeneralisasikan untuk graf roda n titik.

1. Graf roda empat titik (W_4)



Gambar 3.16 Graf W_4

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik di W_4, v_1 mendominasi v_0, v_2 dan v_4, v_2 mendominasi v_0, v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_0, v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_0, v_1 dan v_3. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



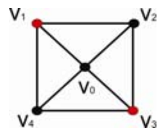
Gambar 3.17 Titik Dominasi pada Graf W_4

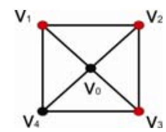
$V(W_4) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$v_1 \in V(W_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

$v_2, v_3, v_4 \in V(W_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

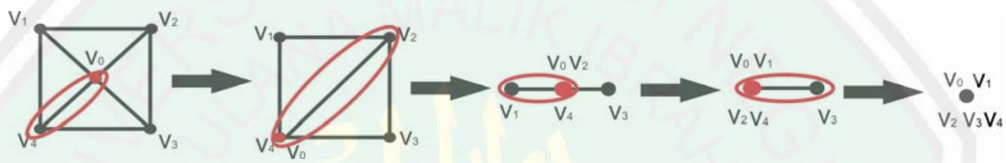
Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_1, v_3\}$ 

$D_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ 

Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(W_4) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka W_4 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_4), (v_0, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

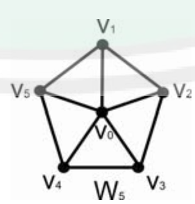


Gambar 3.18 Kontraksi Sisi Dominasi Graf W_4

W_4 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak empat kali dimanapun akan menjadi graf trivial dengan bilangan dominasinya yaitu 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(W_4) = 4$ karena W_4 dengan $\gamma(W_4) = 1$ membutuhkan empat kali kontraksi untuk menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni 0.

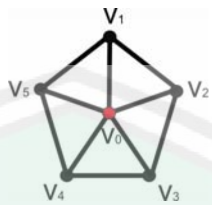
2. Graf roda lima titik (W_5)



Gambar 3.19 Graf W_5

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik di W_5, v_1 mendominasi v_0, v_2 dan v_5, v_2 mendominasi v_0, v_1 dan v_3, v_3 mendominasi

v_0, v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_0, v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_0, v_4 dan v_1. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.20 Titik Dominasi pada Graf W_5

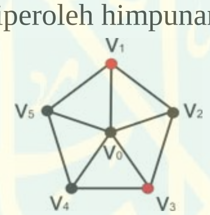
$V(W_5) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$v_1 \in V(W_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

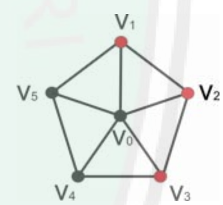
$v_2, v_3, v_4, v_5 \in V(W_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_1, v_3\}$

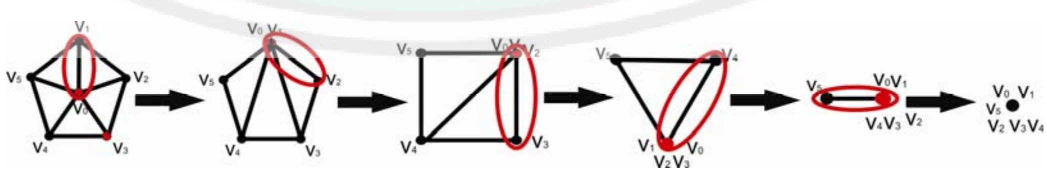


$D_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(W_5) = 1$.

Selanjutnya, untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka pilih himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5)$ sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

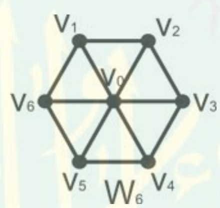


Gambar 3.21 Kontraksi Sisi Dominasi Graf W_5

W_5 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak lima kali dimanapun akan menjadi graf trivial dengan bilangan dominasinya yaitu 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

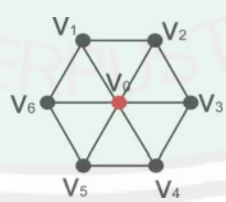
Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(W_5) = 5$ karena W_5 dengan $\gamma(W_5) = 1$ membutuhkan 5 kali kontraksi untuk menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni 0.

3. Graf roda enam titik (W_6)



Gambar 3.22 Graf W_6

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik W_6, v_1 mendominasi v_0, v_2 dan v_6, v_2 mendominasi v_0, v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_0, v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_0, v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_0, v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_0, v_1 dan v_5. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.23 Titik Dominasi pada Graf W_6

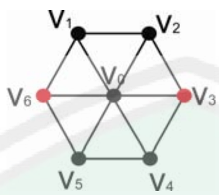
$V(W_6) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$v_1 \in V(W_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

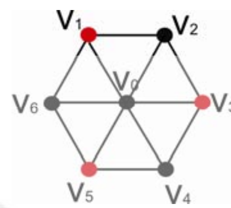
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \in V(W_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_3, v_6\}$

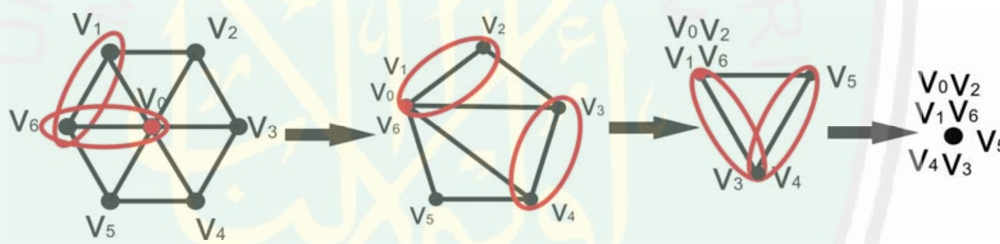


$D_3 = \{v_1, v_3, v_5\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(W_6) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka W_6 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_6), (v_1, v_6), (v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_0, v_3), (v_4, v_5) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

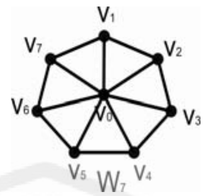


Gambar 3.24 Kontraksi Sisi Dominasi Graf W_6

W_6 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak enam kali dimanapun akan menjadi graf trivial dengan bilangan dominasinya yaitu 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

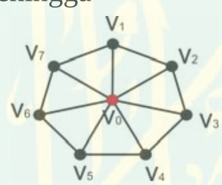
Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(W_6) = 6$ karena W_6 dengan $\gamma(W_6) = 1$ membutuhkankan enam kali kontraksi untuk menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni 0.

4. Graf roda tujuh titik (W_7)



Gambar 3.25 Graf W_7

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik W_7, v_1 mendominasi v_0, v_2 dan v_7, v_2 mendominasi v_0, v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_0, v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_0, v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_0, v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_0, v_5 dan v_7, v_7 mendominasi v_0, v_1 dan v_6. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.26 Titik Dominasi pada Graf W_7

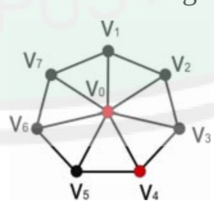
$V(W_7) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$v_1 \in V(W_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

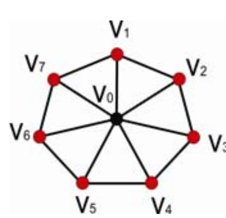
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \in V(W_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_0, v_4\}$

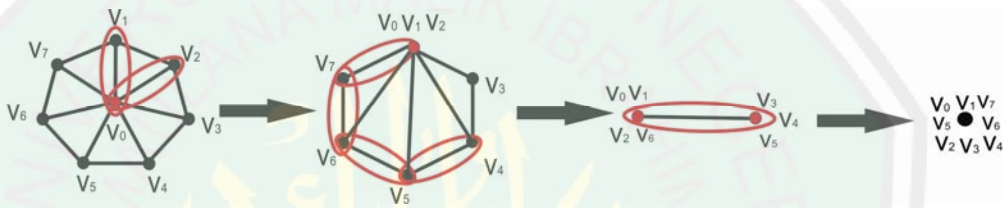


$D_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(W_7) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi W_7 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_2), (v_1, v_0), (v_0, v_7), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_6, v_7), (v_1, v_3) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

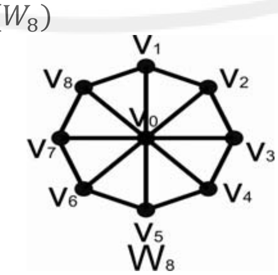


Gambar 3.27 Kontraksi Sisi Dominasi Graf W_7

W_7 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak tujuh kali dimanapun akan menjadi graf trivial dengan bilangan dominasinya yaitu 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

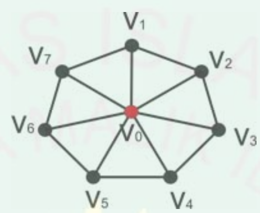
Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(W_7) = 7$ karena W_7 dengan $\gamma(W_7) = 1$ membutuhkan tujuh kali kontraksi untuk menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni 0.

5. Graf roda delapan titik (W_8)



Gambar 3.28 Graf W_8

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik W_8, v_1 mendominasi v_0, v_2 dan v_8, v_2 mendominasi v_0, v_1 dan v_3, v_3 mendominasi v_0, v_2 dan v_4, v_4 mendominasi v_0, v_3 dan v_5, v_5 mendominasi v_0, v_4 dan v_6, v_6 mendominasi v_0, v_5 dan v_7, v_7 mendominasi v_0, v_6 dan v_8, v_8 mendominasi v_0, v_1 dan v_7. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.29 Titik Dominasi pada Graf W_8

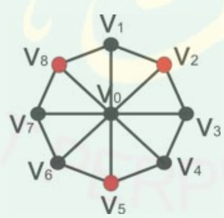
$V(W_8) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$v_1 \in V(W_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

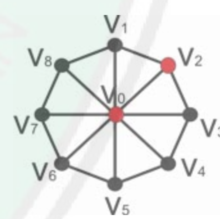
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 \in V(W_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_2, v_5, v_8\}$

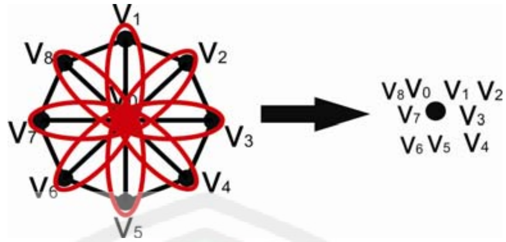


$D_3 = \{v_0, v_2\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(W_8) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi W_8 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1), (v_2, v_0), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_6, v_0), (v_0, v_7), (v_0, v_8) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi



Gambar 3.30 Kontraksi Sisi Dominasi Graf W_8

W_8 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak delapan kali dimanapun akan menjadi graf trivial dengan bilangan dominasinya yaitu 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(W_8) = 8$ karena W_8 dengan $\gamma(W_8) = 1$ membutuhkan delapan kali kontraksi untuk menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yakni 0.

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf roda n titik (W_n), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola Bilangan Dominasi dan Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi dari Graf W_n

Nama Graf	**Bilangan Dominasi Sebelum Dikontraksi $(\gamma(W_n))$**	**Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi $(ct_\gamma(W_n))$**	**Bilangan Dominasi Setelah Dikontraksi $(\gamma'(W_n))$**
W_4	1	4	0
W_5	1	5	0
W_6	1	6	0
W_7	1	7	0
W_8	1	8	0
W_9	1	9	0
W_{10}	1	10	0
W_{11}	1	11	0
W_{12}	1	12	0
⋮	⋮	⋮	⋮
W_n	$n \geq 4$, 1	$n \geq 4$, n	$n \geq 4$, 0

Teorema 4

Bilangan dominasi sebelum dikontraksi dari graf roda W_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(W_n) = 1$$

Bukti teorema 4

Graf roda adalah graf yang memuat sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Misalkan v_0 adalah titik pusat dari graf roda maka setiap titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ terhubung langsung dengan v_0 sehingga $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah titik yang didominasi oleh v_0. Sehingga dalam graf roda hanya terdapat satu titik yang mendominasi semua titik dalam graf roda W_n. Oleh karena itu himpunan dominasi dari graf roda adalah 1. Karena cukup satu titik yaitu v_0 dapat mendominasi semua titik lain pada graf W_n.

∴ **Jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma(W_n) = 1}$**

Teorema 5

Bilangan kontraksi sisi dominasi dari graf roda W_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(W_n) = n$$

Bukti teorema 5

Graf roda adalah graf yang memuat sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Sikel dengan n titik mempunyai n sisi. Karena semua titik pada graf roda terhubung langsung dengan titik pusat maka terdapat sisi e sebanyak n yang terkait langsung dengan v_0 sehingga graf roda mempunyai jumlah sisi sebanyak $2n$. Misalkan setiap titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ terhubung langsung ke

v_0 dengan bilangan dominasi 1. Maka untuk mengurangi bilangan dominasinya dapat dikontaksi sisi yang terkait langsung dengan titik pusat v_0. Karena terdapat n sisi yang terkait langsung pada v_0 maka bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf roda adalah $ct_\gamma(W_n) = n$.

$\therefore$ **Jadi terbukti bahwa $ct_\gamma(W_n) = n$**

Teorema 6

Bilangan dominasi setelah dikontraksi dari graf roda W_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma'(W_n) = 0$$

Bukti teorema 6

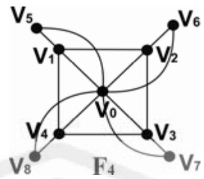
Graf roda W_n mempunyai bilangan dominasi 1. Karena setiap titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ terhubung langsung ke v_0 maka semua sisi yang terkait langsung pada v_0 dapat dikontraksi dan menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yaitu 0.

$\therefore$ **Jadi terbukti bahwa $\gamma'(W_n) = 0$**

3.1.3 Graf Bunga n Titik (F_n)

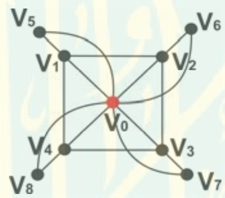
Berdasarkan definisi yang menyebutkan bahwa bilangan kontraksi sisi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi. Karena masalah dalam penelitian ini dibatasai mulai graf bunga empat titik maka pembahasan akan dimulai dari graf bunga empat titik, graf bunga lima titik, graf bunga enam titik, graf bunga tujuh titik, graf bunga delapan titik yang kemudian digeneralisasikan untuk graf bunga n titik.

1. Graf bunga empat titik (F_4)



Gambar 3.31 Graf F_4

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik pada F_4, v_1 mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_5, v_2 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_6, v_3 mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_7, v_4 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_8. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.32 Titik Dominasi pada Graf F_4

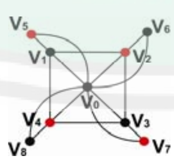
$V(F_4) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$v_1 \in V(F_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

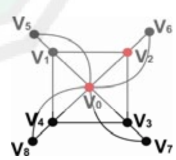
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8 \in V(F_4) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$

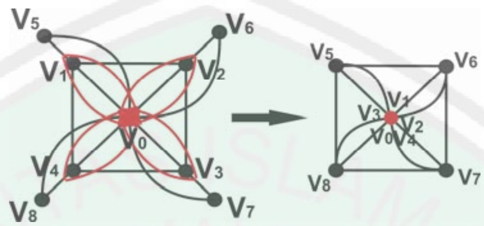


$D_3 = \{v_0, v_2\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(F_4) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka F_4 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1) ,(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

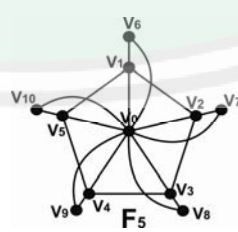


Gambar 3.33 Kontraksi Sisi Dominasi Graf F_4

F_4 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak empat kali dimanapun akan menyerupai graf W_4 dengan tetap mempertahankan bilangan dominasinya yaitu 1. Menurut teorema sebelumnya dapat diketahui bahwa W_4 dengan 4 kali kontraksi menghasilkan bilangan kontraksi dominasi 0 . Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(F_4) = 8$ karena F_4 dengan $\gamma(F_4) = 1$ membutuhkan 8 kali kontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya.

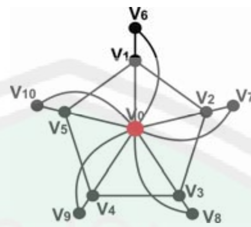
2. Graf Bunga lima titik (F_5)



Gambar 3.34 Graf F_5

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik pada F_5, v_1 mendominasi v_0, v_2, v_5 dan v_6, v_2 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_7, v_3

mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_8, v_4 mendominasi v_0, v_3, v_5 dan v_9, v_5 mendominasi v_0, v_1, v_9 dan v_9. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.35 Titik Dominasi pada Graf F_5

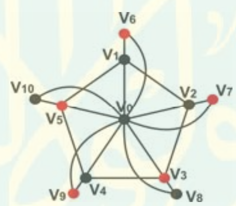
$V(F_5) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$

$v_1 \in V(F_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

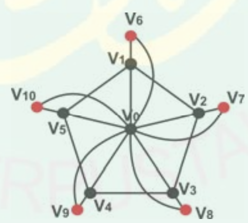
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} \in V(F_5) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$.

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_9\}$

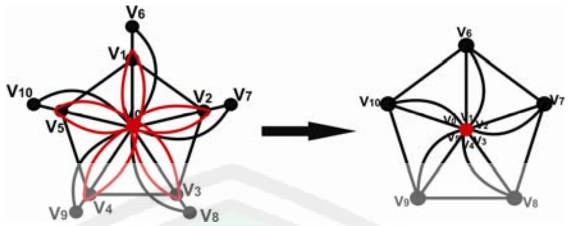


$D_3 = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(F_5) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka F_5 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1) ,(v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

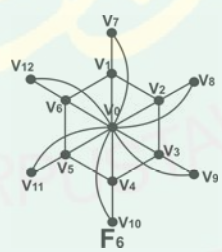


Gambar 3.36 Kontraksi Sisi Dominasi Graf F_5

F_5 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak lima kali dimanapun akan menyerupai graf W_5 dengan tetap mempertahankan bilangan dominasinya yaitu 1. Menurut teorema sebelumnya dapat diketahui bahwa W_5 dengan 5 kali kontraksi menghasilkan bilangan kontraksi dominasi 0 . Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(F_5) = 10$ karena F_5 dengan $\gamma(F_5) = 1$ membutuhkan 10 kali kontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya.

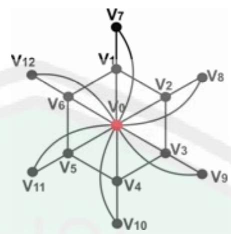
3. Graf Bunga enam titik (F_6)



Gambar 3.37 Graf F_6

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik pada F_6, v_1 mendominasi v_0, v_2, v_6 dan v_7, v_2 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_8, v_3 mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_9, v_4 mendominasi v_0, v_3, v_5 dan v_{10}, v_5

mendominasi v_0, v_4, v_6 dan v_{11}, v_6 mendominasi v_0, v_5, v_1 dan v_{12}. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



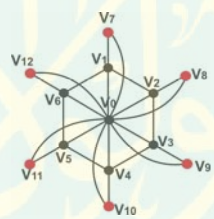
Gambar 3.38 Titik Dominasi pada Graf F_6

$V(F_6) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$

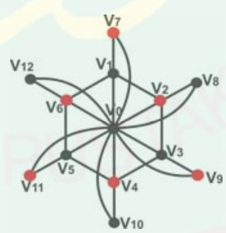
$v_1 \in V(F_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12} \in V(F_6) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$. Sehingga berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$

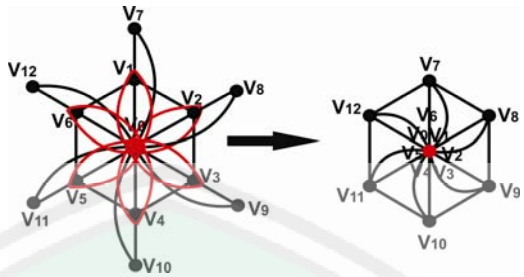


$D_3 = \{v_2, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{11}\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(F_6) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka F_6 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

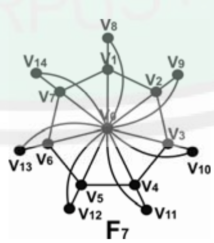


Gambar 3.39 Kontraksi Sisi Dominasi Graf F_6

F_6 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak enam kali dimanapun akan menyerupai graf W_6 dengan tetap mempertahankan bilangan dominasinya yaitu 1. Menurut teorema sebelumnya dapat diketahui bahwa bilangan kontraksi dominasi dari W_6 adalah 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(F_6) = 12$ karena F_6 dengan $\gamma(F_6) = 1$ membutuhkan 12 kali kontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya.

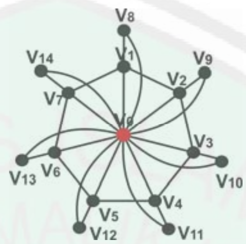
4. Graf bunga tujuh titik (F_7)



Gambar 3.40 Graf F_7

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik pada F_7, v_1 mendominasi v_0, v_2, v_7 dan v_8, v_2 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_9, v_3

mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_{10}, v_4 mendominasi v_0, v_3, v_5 dan v_{11}, v_5 mendominasi v_0, v_4, v_6 dan v_{12}, v_6 mendominasi v_0, v_5, v_7 dan v_{13}, v_7 mendominasi v_0, v_6, v_1 dan v_{14}. Maka dapat dipilih himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.41 Titik Dominasi pada Graf F_7

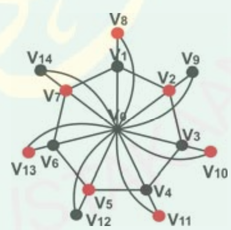
$V(F_7) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$

$v_1 \in V(F_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

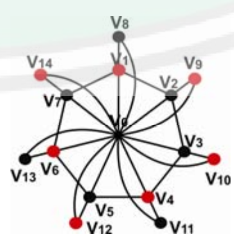
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14} \in V(F_7) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$.

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut:

$D_2 = \{v_2, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{13}\}$

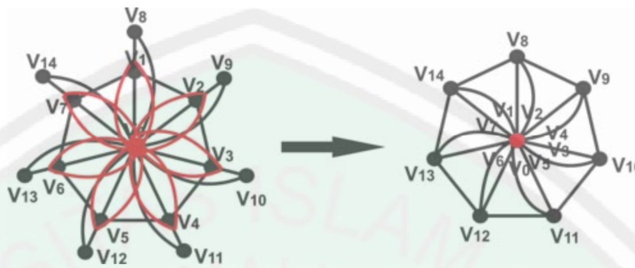


$D_3 = \{v_1, v_4, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{14}\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(F_7) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka F_7 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6), (v_0, v_7) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi

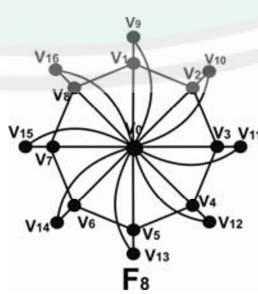


Gambar 3.42 Kontraksi Sisi Dominasi Graf F_7

F_7 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak tujuh kali dimanapun akan menyerupai graf W_7 dengan tetap mempertahankan bilangan dominasinya yaitu 1. Menurut teorema sebelumnya dapat diketahui bahwa bilangan kontraksi dominasi dari W_7 adalah 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

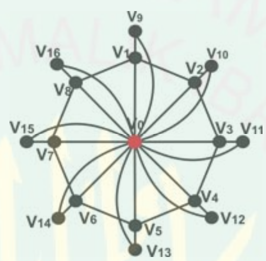
Bilangan kontraksi sisi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(F_7) = 14$ karena F_7 dengan $\gamma(F_7) = 1$ membutuhkan 14 kali kontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya.

5. Graf bunga delapan titik (F_8)



Gambar 3.43 Graf F_8

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa v_0 mendominasi semua titik pada F_8, v_1 mendominasi v_0, v_2, v_8 dan v_9, v_2 mendominasi v_0, v_1, v_3 dan v_{10}, v_3 mendominasi v_0, v_2, v_4 dan v_{11}, v_4 mendominasi v_0, v_3, v_5 dan v_{12}, v_5 mendominasi v_0, v_4, v_6 dan v_{13}, v_6 mendominasi v_0, v_5, v_7 dan v_{14}, v_7 mendominasi v_0, v_6, v_8 dan v_{15}, v_8 mendominasi v_0, v_1, v_7 dan v_{16}. Maka dapat dilihat himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ sehingga



Gambar 3.44 Titik Dominasi pada Graf F_8

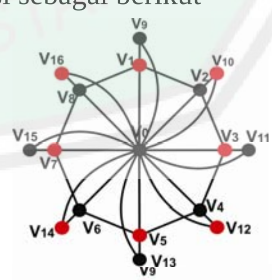
$V(F_8) - D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$

$v_1 \in V(F_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$

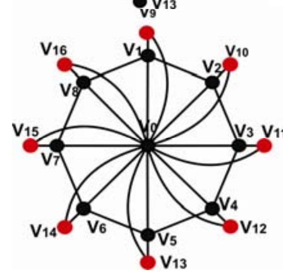
$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16} \in V(F_8) - D_1$ terhubung langsung dengan $v_0 \in D_1$.

Berdasarkan definisi, maka $D_1 = \{v_0\}$ merupakan himpunan dominasi. Dengan cara yang sama diperoleh himpunan dominasi sebagai berikut

$D_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_{10}, v_{12}, v_{14}, v_{16}\}$

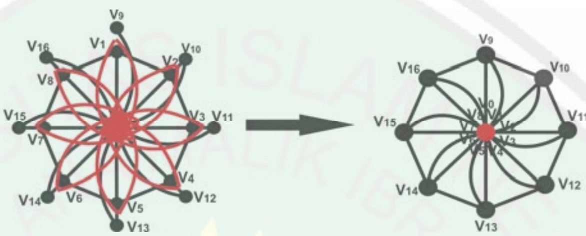


$D_3 = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$



Sesuai definisi yang menyatakan bahwa bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi maka $\gamma(F_8) = 1$.

Selanjutnya untuk mencari bilangan kontraksi dominasi maka F_8 dengan himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dan sisi (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6), (v_0, v_7), (v_0, v_8) sebagai sisi yang dikontraksi, sehingga menjadi



Gambar 3.45 Kontraksi Sisi Dominasi Graf F_8

F_8 dengan himpunan dominasi himpunan dominasi $D_1 = \{v_0\}$ dikontraksi sebanyak delapan kali dimanapun akan menyerupai graf W_8 dengan tetap mempertahankan bilangan dominasinya yaitu 1. Menurut teorema sebelumnya dapat diketahui bahwa bilangan kontraksi dominasi dari W_8 adalah 0. Maka benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

Bilangan kontraksi sisi dominasi adalah minimum sisi yang harus dikontraksi untuk mengurangi jumlah dominasi, sehingga $ct_\gamma(F_8) = 16$ karena F_8 dengan $\gamma(F_8) = 1$ membutuhkan 18 kali kontraksi untuk mengurangi bilangan dominasinya.

Jika dilanjutkan dengan cara yang sama untuk graf bunga n titik (F_n), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.3 Pola Bilangan Dominasi dan Bilangan Kontraksi Sisi Dominasi dari Graf F_n

Nama Graf	**Bilangan Dominasi Sebelum Dikontraksi $(\gamma(F_n))$**	**Kontraksi Sisi Bilangan Dominasi $(ct_\gamma(F_n))$**	**Bilangan Dominasi Setelah Dikontraksi $(\gamma'(F_n))$**
F_4	1	8	0
F_5	1	10	0
F_6	1	12	0
F_7	1	14	0
F_8	1	16	0
F_9	1	18	0
F_{10}	1	20	0
F_{11}	1	22	0
F_{12}	1	24	0
⋮	⋮	⋮	⋮
F_n	$n \geq 4$ 1	$n \geq 4$ $2n$	$n \geq 4$ 0

Teorema 7

Bilangan dominasi sebelum dikontraksi dari graf bunga F_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(F_n) = 1$$

Bukti teorema 7

Graf bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm. Misalkan v_0 adalah titik pusat dari graf bunga. Maka terdapat n titik yang terhubung langsung dengan v_0 yakni $v_1, v_2, \dots, v_n$. Kemudian setiap titik anting-anting juga terhubung ke titik pusat v_0 sehingga pada graf bunga terdapat titik $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ yang terhubung langsung ke v_0 sebagai titik pusat. Maka $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ adalah titik yang didominasi oleh v_0. Sehingga dalam graf bunga hanya terdapat satu titik yang mendominasi semua titik dalam graf bunga F_n.

∴ **Jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma(F_n)} = 1$**

Teorema 8

Bilangan kontraksi sisi dominasi dari graf bunga F_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$ct_{\gamma}(F_n) = 2n$$

Bukti teorema 8

Graf bunga adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm. Setiap titik $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ terhubung langsung ke v_0 dengan bilangan dominasi 1. Graf bunga mempunyai sisi sebanyak $4n$. Namun hanya sisi $e_1, e_1, \dots e_{2n}$ yang terkait langsung dengan v_0. Maka untuk mengurangi bilangan dominasinya, graf bunga dikontraksi sebanyak sisi yang terkait langsung dengan titik v_0. Karena jumlah sisi yang terkait langsung dengan titik v_0 pada graf F_n adalah $2n$ maka bilangan kontraksi dominasi dari graf bunga F_n adalah $2n$.

∴ **Jadi terbukti bahwa $\boldsymbol{ct_{\gamma}(F_n) = 2n}$**

Teorema 9

Bilangan dominasi setelah dikontraksi dari graf bunga F_n untuk $n \geq 4$ adalah

$$\gamma'(F_n) = 0$$

Bukti teorema 9

Graf bunga F_n mempunyai bilangan dominasi 1. Karena setiap titik $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ terhubung langsung ke v_0 maka semua sisi yang terkait langsung ke v_0 dapat dikontraksi dan menghasilkan bilangan dominasi yang lebih kecil yaitu 0. Sehingga benar sudah berkurang bilangan dominasinya.

∴ **Jadi terbukti bahwa $\gamma'(F_n) = 0$**

3.3 Keterkaitan Konsumsi Makanan dengan Konsep Dominasi

Firman Allah dalam Al-Qur'an surat Thaha ayat 98 yaitu:

Sesungguhnya Tuhanmu hanyalah Allah, yang tidak ada Tuhan selain Dia. Pengetahuan-Nya meliputi segala sesuatu".

Allah Maha Mengetahui mengenai segala sesuatu. Oleh karena itu Allah telah mengatur segala sesuatu sesuatu yang ada di dunia secara rinci, mulai dari sesuatu yang dianggap remeh hingga sesuatu yang rumit. Terkadang sebagai manusia, kita sering melupakan perintah Allah yang berhubungan dengan hal-hal yang kita anggap remeh. Padahal, Allah tidak akan memerintahkan kita sesuatu yang buruk bagi kita. Segala perintah Allah adalah sesuatu hal yang baik dan bermanfaat bagi seorang muslim. Sebaliknya, segala hal yang dilarang oleh Allah adalah segala hal yang menimbulkan keburukan dan kejelekan bagi seorang muslim baik di dunia maupun di akhirat.

Salah satu perintah Allah yakni yang terdapat dalam surat Al-Mukminun ayat 51:

Artinya: Hai rasul-rasul, makanlah dari makanan yang baik-baik, dan kerjakanlah amal yang saleh. Sesungguhnya aku Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah memerintahkan Rasul untuk memakan makanan yang baik dan mengerjakan amal shaleh. Maksud makan yang baik di sini adalah yang halal. Yang demikian itu diperintahkan terlebih dahulu sebelum mengerjakan amal shaleh, karena dengan memakan yang halal akan membantu untuk melaksanakan amal shaleh.

Telah kita ketahui bahwa makanan merupakan sumber energi utama bagi seorang manusia. Tanpa makanan, manusia tidak bisa melakukan aktivitas sehari-hari dengan lancar. Zat gizi yang terdapat dalam makanan dapat membuat tubuh kita menjalankan fungsinya dengan baik sehingga dapat beraktivitas dengan baik pula. Terkadang manusia tidak mempedulikan makanan yang masuk dalam perutnya. Manusia cenderung mengkonsumsi makanan yang terlihat enak dan ekonomis. Padahal makanan yang kita konsumsi tersebut akan masuk ke tubuh kita dan bercampur dengan darah kita. Oleh karena itu, halal atau haramnya suatu makanan akan mendominasi akhlak seorang muslim.

Allah Ta'ala memerintahkan hamba-hamba-Nya yang diutus sebagai hamba Allah untuk memakan makanan yang halal dan mengerjakan amal shalih. Hal itu menunjukkan bahwa makanan yang halal dapat membantu seorang manusia untuk mengerjakan amal shalih. Para Nabi diperintahkan untuk melaksanakan perintah tersebut. Sehingga kita sebagai umat Nabi sebaiknya juga mengikuti perintah Allah tersebut yaitu melakukan amal shalih baik berupa ucapan atau perbuatan.

Dari keterangan hadits di atas dapat menguatkan bahwa Allah memerintahkan kita untuk memakan makanan yang halal sebab makanan yang halal merupakan jalan terkabulnya doa. Sebaliknya, apabila kita mengkonsumsi makanan yang haram maka salah satu dampaknya adalah tidak diterimanya amalan kita.

Dalam ilmu matematika, konsep keterkaitan makanan ini dapat diterapkan pada konsep dominasi. menurut Chartrand dan Lesniak, suatu himpunan S dari titik pada G adalah himpunan dominasi G jika setiap titik G didominasi oleh setidaknya satu titik S.

Misalkan S adalah suatu himpunan makanan yang dikonsumsi atau dapat dituliskan $S = \{S_1, S_2, \dots\}$. Sedangkan $V(G)$ adalah himpunan semua tingkah laku manusia atau dapat dituliskan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots\}$. Maka himpunan S dari titik G adalah himpunan dominasi G karena setiap tingkah laku seseorang didominasi oleh makanan yang ada pada S. Hal tersebut menunjukkan bahwa segala sesuatu yang kita makan mempunyai peran dalam pembentukan tingkah laku seorang muslim.

Berdasarkan firman Allah surat Al-Mukminun ayat 51, manusia yang memakan makanan yang halal akan mendominasi amalan sholeh yang dilakukannya. Dalam hal ini amalan sholeh diartikan sebagai segala perbuatan baik kepada Allah SWT maupun kepada sesama manusia yang dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3.63 Graf C_3 yang Menggambarkan Dominasi Makanan Terhadap Amalan Manusia

Gambar di atas menjelaskan bahwa amalan yang dilakukan oleh seorang muslim dapat dipengaruhi atau didominasi oleh makanan yang dikonsumsinya. Seseorang yang mengkonsumsi makanan yang halal dan sesuai perintah Allah maka ia akan cenderung mengerjakan amalan-amalan shaleh. Amalan shaleh mencerminkan ketaatannya pada Allah SWT sehingga memudahkan jalan bagi terkabulnya do'a. Sebaliknya apabila seseorang sering mengkonsumsi makanan haram maka tentu makanan itu akan menjadi penghalang terkabulnya doa.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, maka dapat diambil kesimpulan mengenai pola bilangan kontraksi sisi dominasi dari beberapa graf yang dikaji yaitu sebagai berikut:

1. Pola bilangan dominasi pada graf sikel (C_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+2}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n+1}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases} \qquad \gamma'(C_n) = \begin{cases} \frac{n-3}{3}, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-1}{3}, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \frac{n-2}{3}, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

   Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf sikel (C_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(C_n) = \begin{cases} 3, n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ 1, n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 2, n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

2. Pola bilangan dominasi pada graf roda (W_n) dengan $n \geq 4$ adalah

   $\gamma(W_n) = 1; \gamma'(W_n) = 0$

   Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf roda (W_n) dengan $n \geq 4$ adalah

$$ct_\gamma(W_n) = n$$

3. Pola bilangan dominasi pada graf bunga (F_n) dengan $n \geq 5$ adalah

   $\gamma(F_n) = 1; \gamma'(F_n) = 0$

Pola bilangan kontraksi sisi dominasi pada graf bunga (F_n) dengan $n \geq 5$ adalah

$$ct_\gamma(F_n) = 2n$$

4.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya membatasi pembahasan dari beberapa graf sederhana. Oleh karena itu, penulis memberi saran kepada pembaca yang tertarik mengembangkannya lebih luas dan menyeluruh untuk graf-graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jazairi, S.A.B. 2008. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 5.* Jakarta Timur: Darus Sunnah Press.

Al-Maraghi, A.M. 1989. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi.* Semarang: CV. Toha Putra.

Basyir, H. 2011. *Tafsir Al-Muyassar.* Jakarta: Qisthi Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph* 2^{nd} *Edition.* California: Wadsworth. Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition.* California: Chapman & Hall/CRC.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory Electronic Edition 2005.* New York : Springer-Verlag Heidelberg

Gallian, J.A. 2009. A Dynamic Survey og Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics.* (Online), Jilid 16, No.1, (http://www1.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf , diakses 18 April 2013)

Grimaldi, R. 1985. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. RHI.

Huang, J. dan Xu,J.M. 2010. Domination and Total Domination Contraction Numbers of Graphs. *Ars Combinatoria 94 (2010). (http://staff.ustc.edu.cn/~xujm/201004.pdf,* diakses 1 September 2013*).*

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Quthb, S. 2004. *Tafsir fi Zhilalil-Qur'an.* Jakarta: Gema Insani Press.

Wilson. R J dan Walkins, J.J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first Course in Discrete Mathematic.* New York : John Wiley & Sons, Inc.