K-HOMOMORFISME PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

Oleh:
ANI AFIFAH
NIM. 09610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

K-HOMOMORFISME PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ANI AFIFAH
NIM. 09610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2013

K-HOMOMORFISME PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

Oleh:
ANI AFIFAH
NIM. 09610028

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 29 Januari 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19720420 2002 12 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

K-HOMOMORFISME PADA Q-ALJABAR

SKRIPSI

Oleh:
ANI AFIFAH
NIM. 09610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 27 Maret 2013:

Penguji Utama	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, S.Pd, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Sekretaris Penguj	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Anggota Penguji	:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 2002 12 1 003	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ani Afifah
NIM	: 09610028
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	: K-Homomorfisme pada Q-Aljabar

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Januari 2013
Yang membuat pernyataan,

Ani Afifah
NIM. 09610028

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ لرَّحِيمِ

Man Jadda Wajada

"barang siapa yang bersunggguh-sungguh, maka akan berhasil"

PERSEMBAHAN

Untuk:

"Ibunda tersayang Hj. Masluchah dan Ayah tercinta H. Nur Yasin yang telah memberi kasih sayang tak terhingga dan do'a yang tiada henti untuk penulis.

Semoga menjadi orang tua yang selalu dirindu surga. Amin ..."

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"K-Homomorfisme pada Q-Aljabar**" dengan baik.

Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan pembimbing skripsi ini.
4. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku pembimbing agama dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan dan sarannya penulis sampaikan *jazakumullah ahsanul jaza'*.
5. Seluruh dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen matematika dan seluruh civitas jurusan matematika yang telah memberikan bimbingan, motivasi serta inspirasi kepada penulis.
6. Ayahanda H. Nur Yasin dan Ibunda Hj. Masluchah yang selalu memberikan kasih sayangnya.
7. Adik tersayang Shofiatul Inayah dan Adinda Ilfi Nur Diana yang selalu memberikan dukungan, do'a, dan motivasi bagi penulis.
8. Pengasuh dan keluarga besar PPTQ "Nurul Furqon" Wetan Pasar Besar Malang, Abah KH. Husaini Al Hafidz dan Umik Dewi Warda, terima kasih atas do'a, bimbingan dan kesabaran.
9. Sahabat-sahabat di PPTQ "Nurul Furqon" Wetan Pasar Besar Malang, khususnya "*kamar juwairiyah*" terima kasih atas motivasi, kenangan dan cerita-cerita indah.
10. Sahabat terbaik, Kholidah, Ernawati Efendi, Sefiana Noor Kholidah, Nita Sugiarti, F. Kurnia Nirmala Sari, Lismiyati Marfoah dan lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.

11. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sudah diberikan pada penulis.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Amin Ya Rabbal 'Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 29 Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\in$	Elemen (anggota)
$\notin$	Bukan Elemen (anggota)
$\subseteq$	Himpunan bagian (subset)
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\neq$	Tidak sama dengan
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
$*$	Operasi biner
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\cdot$	Operasi perkalian biasa
$(G,*)$	Grup
$(H,*)$	Subgrup dari $(G,*)$
e	Elemen identitas dari Grup

ABSTRAK

Afifah, Ani. 2013. **K-Homomorfisme pada Q-Aljabar.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Kata kunci: *Grup, K-Aljabar, dan K-Homomorfisme*

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-Aljabar. K-Aljabar dibangun atas suatu grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G. Maka $(G,*,\odot, e)$ memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut K-Aljabar. Sedangkan Q-Aljabar merupakan K-Aljabar yang dibangun dari grup komutatif. Penelitian ini menggunakan metode *library research* untuk mengkaji sifat-sifat K-Homomorfisme. Misalkan K_1 dan K_2 merupakan suatu Q-Aljabar. Dan suatu pemetaan φ dari K_1 ke K_2, dinotasikan $\varphi: K_1 \to K_2$ disebut K-Homomorfisme, jika untuk setiap $x, y \in K_1$ maka berlaku $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ dimana $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$.

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa, sifat-sifat dari K-Homomorfisme adalah K-Homomorfisme φ disebut K-Monomorfisme, jika φ suatu pemetaan satu-satu (injektif). Untuk semua x dan y di G dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$, maka $x = y$. K-Homomorfisme φ disebut K-Epimorfisme, jika φ suatu pemetaan kepada (surjektif). Untuk setiap $h \in H$, terdapat $g \in G$ sehingga $\varphi(g) = h$, dengan kata lain $\varphi(G) = H$. K-Homomorfisme φ disebut K-Isomorfisme, jika φ suatu pemetaan bijektif (injektif dan surjektif). Sedangkan sifat-sifat yang lain yaitu Misalkan $K_1 = (G_1,*,\odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2,*,\odot, e_2)$ merupakan dua K-Aljabar dan $\varphi \in Hom(K_1, K_2)$, maka untuk $x, y \in K_1$ dan $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$ berlaku:

1) $\varphi(e_1) = e_2$
2) $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$
3) $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$
4) $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$, jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Untuk penulisan skripsi, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan mengenai sifat-sifat K-Homomorfisme pada Q-Aljabar. Maka disarankan penulis menyarankan kepada peneliti lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai K-Homomorfisme pada Q-Aljabar, diantaranya tentang K-Isomorfisme.

ABSTRACT

Afifah, Ani. 2013. **On K-Homomorfism of Q-Algebra.** Thesis. Department of Mathematic, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd.
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag.

Keywords: *Group, K-Algebra, and K-Homomorfism.*

Algebraic structure is a non-empty set with at least one or more binary operation and satisfying the following axioms. One of the algebraic structure is K-Algebra. K-algebra built on a group by using a binary operation $\odot$ on $(G,*)$, so that for every x, y in G defined $x \odot y = x * y^{-1}$ and e is the identity element in G. Then $(G,*,\odot,e)$ satisfies certain axioms called K-Algebra. While the Q-Algebra is a K-Algebra constructed from commutative groups. This study uses library research to study the properties of K-Homomorfisme. Suppose $K_1$and K_2 is a Q-Algebra. And a mapping φ from K_1 to K_2, denoted $\varphi: K_1 \to K_2$ called K-Homomorfisme, if for any $x, y \in K_1$ shall apply $\varphi\,(x \odot y) = \varphi\,(x) \odot \varphi\,(y)$ where $\varphi\,(x), \varphi\,(y) \in K_2$.

From this results it can be concluded that, the properties of the K-Homomorfisme φ called K-Monomorfisme φ, if φ a injektif. For all x and y in G with $\varphi\,(x) = \varphi\,(y)$, then $x = y$. K-Homomorfisme called K-Epimorfisme φ, if φ a surjektif. For each $h \in H$, there is $g \in G$ so that $\varphi\,(g) = h$, in other words $\varphi\,(G) = H$. And K-Homomorfisme called K-Isomorphism φ, if φ a bijective. As for the other properties, is Suppose of $K_1 = (G_1,*,\odot,e_1)$, and $K_2 = (G_2,*,\odot,e_2)$ are two K-Algebra and $\varphi \in Hom\,(K_1, K_2)$, then for $x, y \in K_1$ and $\varphi\,(x), \varphi\,(y) \in K_2$ apply:

1. $\varphi\,(e_1) = e_2$
2. $\varphi\,(x)^{-1} = \varphi\,(x^{-1})$
3. $\varphi\,(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi\,(x)$
4. $\varphi\,(x_1 \odot x_2) = e_2$, if and only if $\varphi\,(x_1) = \varphi\,(x_2)$

For thesis writing, the author focuses only on the subject of the nature of K-Homomorfisme the Q-Algebra. Then advised the authors suggested to other researchers to conduct research in depth on K-Homomorfisme the Q-Algebra, of which about K-Isomorphism.

ملخص

عفيفة, أنى. 2013." ك- هومومورفيسمى إلى ق- الجبر ". قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، والدولة الإسلامية جامعة مالانج مولانا مالك إبراهيم

المشرف: (١). عبدالشاكر, الماجستر
(٢). الدوكتورالحاج منيرالعابدين , الماجستر

مفتاح الكلمات: مجموعة, ك- الجبر, ك- هومومورفيسمى

هيكل الجبرية هي مجموعة غير فارغة مع عملية ثنائية واحدة على الأقل أو أكثر والبديهيات التي تنطب .واحدة من بنية جبرية هو ك- الجبر.الذى بنيت على مجموعة باستخدام عملية ثنائية $\odot$ على $(G,*)$, حتى لكل x,y فى G في تعريف $x \odot y = x * y^{-1}$ و e هو العنصر الهوية في G . ثم $(G,*,\odot,e)$ يفي البديهيات معينة تسمى ك- الجبر. في حين أن ق- الجبر هو ك- الجبر شيدت من الجماعات تبادلي. تستخدم هذه الدراسة البحث في المكتبة لدراسة خصائص ك- هومومورفيسمى . لنفترض K_1 و K_2 هو ق- الجبر. ورسم الخرائط من K_1 إلى K_2 , تطبق $\varphi: K_1 \to K_2$ هو ك- هومومورفيسمى, إذا لكل $x,y \in K_1$ وإذا تطبق $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ حيث $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$.

من هذه النتائج يمكن أن نخلص إلى أن, ويسمى خصائص ك- هومومورفيسمى φ هو φ ك- مونومورفيسمى , إذا واحد إلى واحد (إنجيكتيف). لجميع x و y فى G مع $\varphi(x) = \varphi(y)$, ثم $x = y$. ك- هومومورفيسمى هو ك- إيفيمورفيسمى , إذا φ تعيين إلى (سورجيكتيف), لكل $h \in H$, هنالك $g \in G$ حتى $\varphi(g) = h$, فى عبارة أخرى $\varphi(G) = H$. ك- هومومورفيسمى هو ك- ايسومورفيسمى , إذا φ تعيين بيجيكتيف. أمّا با لنسية الخصائص الأخرى , لنفترض هو $K_1 = (G_1, \odot, e_1)$ و $K_2 = (G_2, \odot, e_2)$ هما ك-الجبر $\varphi \in Hom(K_1, K_2)$, ثمّ هو $x,y \in K_1$ و $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$ تطبيق :

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$
3. $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$
4. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$ إذا و فقط إذا $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

للكتابة أطروحة، المؤلف يركز فقط على موضوع وطبيعة ك-هومومورفيسمى فى ق- الجبر. ينصح الكتاب ثم اقترح باحثون آخرون لإجراء البحوث في العمق على ك-هومومورفيسمى في الجبر، منها حوالي ك- ايسومورفيسمى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ada pepatah yang mengatakan, *"Jika ingin mengenal suatu bangsa, maka kuasailah bahasanya."* Maksudnya, ketika ingin memahami atau berdialog dengan suatu bangsa, maka kuasailah bahasa yang digunakan. Jika ingin berdialog dengan orang Inggris, gunakanlah bahasa Inggris. Jika ingin berdialog dengan orang Jepang, gunakanlah bahasa Jepang. Jika ingin menguasai Al-Qur'an, maka kuasailah bahasa Arab. Jika ingin memahami atau berdialog dengan alam semesta, jagat raya, dan seisinya, maka juga harus menguasai bahasanya yaitu Matematika.

Alam semesta memuat bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta isinya diciptakan Allah dengan ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Dalam Al-Qur'an disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ﴿٤٩﴾

Artinya: "*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Adapun ayat lain yang menjelaskan tentang adanya ilmu matematika adalah Al-Qur’an surat Al-Kahfi ayat 25 disebutkan,

وَلَبِثُواْ فِي كَهۡفِهِمۡ ثَلَٰثَ مِاْئَةٖ سِنِينَ وَٱزۡدَادُواْ تِسۡعٗا ٢٥

Artinya: “ *dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah Sembilan tahun (lagi)”* (QS. Al-Kahfi: 25)

Dari ayat tersebut terdapat operasi penjumlahan yaitu tiga ratus tahun dan ***ditambah*** sembilan tahun. Hanya saja, agar lebih mudah pernyataan tersebut dalam dunia matematika sering dinotasikan dengan menggunakan simbol-simbol (angka, huruf dan simbol matematika lainnya).

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Selama ini mungkin hanya diketahui grup dan ring saja yang merupakan salah satu contoh dari struktur aljabar, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar yang lain salah satunya yaitu K-Aljabar.

Di dalam K-Aljabar dibagi menjadi dua kelas besar berdasarkan grup pembangunnya, yaitu Q-Aljabar apabila grup yang membangun K-Aljabar adalah grup yang komutatif dan B-Aljabar apabila grup yang membangunnya K-Aljabar adalah grup yang tidak komutatif. Kemudian Q-Aljabar masih dibagi lagi menjadi beberapa kelas, yaitu BCK-Aljabar, BCI-Aljabar dan BCH-Aljabar (Dar &Akram, 2006).

BCK-Aljabar pertama kali diperkenalkan ke dalam matematika oleh Y. Imai dan K. Is$\acute{e}$ki pada tahun 1966. Dari tahun ketahun, ilmu pengetahuan berkembang semakin pesat, begitu juga dengan BCK-Aljabar. Sehingga Imai dan is$\acute{e}$ki memperluas kelas BCK-Aljabar yaitu subkelas dari BCI-Aljabar. Sedangkan Hu dan Li memperluas kelas dalam aljabar abstrak yaitu BCH-Aljabar. Adapun BCI-Aljabar merupakan subkelas dari BCH-Aljabar (Dar &Akram, 2006).

Gagasan mengenai K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$ pertama kali diperkenalkan oleh K. H. Dar dan M. Akram (2006). Mereka menjabarkan lebih luas dalam struktur aljabar pada grup $(G,*)$ yaitu K-Aljabar. Adapun K-Aljabar merupakan suatu struktur aljabar yang di bangun atas suatu grup G, dengan e adalah unsur identitas pada G untuk setiap $x,y \in G$. Adapun operasi biner yang digunakan adalah operasi $\odot$, yang didefinisikan sebagai $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ untuk semua $x,y \in G$ dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu (Dar & Akram, 2006).

Fenomena menarik yang dapat dikaji dari K-Aljabar adalah K-Aljabar juga mempunyai konsep yang hampir sama dengan konsep grup. Jika di dalam grup terdapat konsep subgrup dan homomorfisme, maka dalam K-Aljabar juga akan berlaku yaitu K-Subaljabar dan K-Homomorfisme. Adapun K-Homomorfisme sebenarnya telah dibahas dalam karya ilmiah yang ditulis oleh K. H. Dar dan M. Akram pada tahun 2007. Namun untuk pengembangan pembahasannya, maka dalam penelitian ini akan mengkaji dan membuktikan mengenai beberapa teorema-teorema yang terdapat pada K-Homomorfisme dalam K-Aljabar yang dibangun dari grup komutatif yaitu Q-Aljabar. Oleh karena itu, maka penulis tertarik untuk mengambil judul **“K-Homomorfisme pada Q-Aljabar”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan membahas tentang K-Homomorfisme dalam Q-Aljabar. Oleh karena itu, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan penelitian ini adalah untuk menjelaskan bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat di antaranya :

a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar.

b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian dan sifat-sifat mengenai K-Homomorfisme pada Q-Aljabar.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti, sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah karya ilmiah yang berupa jurnal yang di tulis oleh K. H. Dar dan M. Akram
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku-buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian
3. Memahami dan mempelajari konsep K-Homomorfisme pada Q-Aljabar
4. Merumuskan sifat-sifat yang berkaitan dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar
5. Membuktikan sifat-sifat yang terdapat dalam K-Homomorfisme pada Q-Aljabar
6. Memberi contoh-contoh yang sesuai dalam definisi yang berkaitan dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bagian pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II   Kajian Teori

Pada bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang himpunan, pemetaan, teori grup, sifat-sifat grup, subgrup, homomorfisme grup, K-Aljabar, dan kajian Q-Aljabar dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bagian pembahasan berisi tentang sifat-sifat yang terkait dengan K-Homomorfisme pada Q-Aljabar, serta kajian K-Homomorfisme dalam Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

Sebelum melangkah ke pembahasan, pada bab ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema yang sangat menunjang untuk pokok pembahasan pada bab III, diantaranya adalah himpunan, pemetaan, teori grup, sifat-sifat grup, subgrup, homomorfisme grup, K-Aljabar, dan kajian Q-Aljabar dalam Islam.

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 2.1

Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Maka "objek" dalam definisi tersebut sangat luas. Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Sebagai contoh kumpulan nama-nama hari dalam satu minggu. Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya didalam tanda kurung kurawal yaitu $\{\ \}$ (Abdussakir, 2009:4).

Untuk lebih mempertajam, ada tiga pengertian dasar yaitu himpunan, anggota dan relasi keanggotaan $\in$. Misalkan X himpunan dan a anggota. Penulisan $a \in X$ berarti a anggota X, atau X memuat a. Sebaliknya, penulisan

$a \notin X$ berarti a bukan anggota X atau X tidak memuat a. Anggota himpunan X dapat dikatakan juga sebagai unsur himpunan X. Maka ada anggota a yang memenuhi $a \in X$, sehingga X mempunyai anggota, atau himpunan tak hampa. Sebaliknya, dalam hal himpunan X tidak mempunyai anggota, himpunan X disebut *himpunan hampa* dan ditandai $\emptyset$ (Arifin, 2000:1).

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dikandung. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan hampa juga merupakan suatu himpunan hingga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh himpunan tak hingga (Arifin, 2000:1).

Contoh:

Didefinisikan himpunan *software under windows*, maka dapat ditulis:

$$A = \{MsWord, MsExcel, Ms\ Power\ Point, \dots\}$$

atau

$$A = \{x | x\ software\ under\ windows\}$$

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anngota atau elemen himpunan dan dapat ditulis,

$x \in A$ artinya x anggota himpunan A

Definisi 2.2

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dinyatakan himpunan bagian (*subset*) dari A, ditulis $B \subseteq A$, jika setiap anggota himpunan B juga merupakan anggota himpunan A, maka ditulis

$$B \subseteq A$$

dapat dibaca bahwa B himpunan bagian dari A, B subset A, B termuat di A, A memuat B. secara simbolik

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Berdasarkan definisi tersebut, jika A sebarang himpunan tak kosong, maka diperoleh bahwa,

$$A \subseteq A \qquad \text{dan} \qquad \emptyset \subseteq A$$

Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dikatakan bukan himpunan bagian dari A ditulis:

$$B \nsubseteq A$$

dan jika ada anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A (Abdussakir, 2009:10)

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{2,4,6\}$.

Maka B bukan himpunan bagian A, karena ada anggota B yang bukan merupakan anggota A, yaitu 6. Jadi dapat ditulis $B \nsubseteq A$.

2.2 Pemetaan

Pemetaan merupakan hal terpenting dalam matematika. Dalam kalkulus, dipelajari pemetaan dengan mengaitkan bilangan real pada bilangan real. Banyak pendekatan yang ditempuh untuk mendefinisikan suatu fungsi. Dalam aljabar fungsi akan didefinisikan langsung berdasarkan dua himpunan A dan himpunan B.

Definisi 2.3

Suatu fungsi dari himpunan S ke T adalah aturan yang mengaitkan setiap unsur S dengan tepat satu unsur T. Unsur S disebut domain dari fungsi, dan himpunan T disebut kodomain (Durbin, 1992:12).

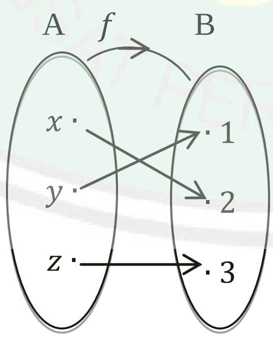
Suatu fungsi f dari himpunan S ke himpunan T didefinisikan sebagai aturan yang memasangkan masing-masing anggota S dengan tepat satu anggota T. Jika $a \in S$ oleh f dipasangkan dengan $b \in T$, maka ditulis $f(a) = b$. Secara umum dapat dinotasikan sebagai:

$$f: S \to T$$

notasi tersebut menunjukkan bahwa ada suatu fungsi f yang memetakan himpunan A ke himpunan B (Durbin, 1992:12).

Contoh:

Misalkan $S = \{x, y, z\}$ dan $T = \{1,2,3\}$. Misal $f: S \to T$ seperti pada diagram berikut:



Maka, himpunan f diperoleh $f\{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$, maka f suatu pemetaan dari S ke T.

Definisi 2.4 (Injektif):

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 di S yang dipetakan sama oleh f, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$ (Arifin, 2000: 8).

Contoh:

Misalkan pemetaan $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 3x + 2$. akan ditunjukkan bahwa f fungsi injektif atau satu-satu.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in R$, dengan $f(x) = 3x + 2$.

Misalkan $f: R \rightarrow R$. Karena $f(x) = f(y)$, maka

$$3x + 2 = 3y + 2$$

$$3x + 2 - 2 = 3y + 2 - 2 \quad \text{(kedua ruas dioperasikan -2)}$$

$$3x = 3y \quad \text{(dikalikan } \tfrac{1}{3}\text{)}$$

$$x = y \quad \text{(terbukti)}$$

maka pemetaan $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 3x + 2$

jadi terbukti bahwa f merupakan fungsi injektif.

Definisi 2.5 (Surjektif):

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan pada atau surjektif, jika untuk setiap unsur $y \in T$ terdapat unsur $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan A himpunan bilangan riil dan B himpunan bilangan riil non negatif. Dibentuk pemetaan f dari A ke B yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$, maka fungsi f merupakan fungsi surjektif.

Bukti:

Misalkan $f: A \to B$ dan didefinisikan $f(x) = x^2$.

Ambil $y \in B$, maka $y \in R$ dan $y \geq 0$.

Akan dibuktikan $x \in R$, sehingga $x^2 = y \geq 0$.

Jadi ada $x \in A$ sehingga $f(x) = x^2 = y \in B$.

Maka f merupakan fungsi surjektif.

Definisi 2.6 (Bijektif):

Pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif atau korespondensi 1-1 (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan R adalah himpunan semua bilangan real. Pemetaan $f: R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$. Maka f merupakan fungsi bijektif.

Bukti:

Jika $a, b \in R$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$, yaitu $4a + 3 = 4b + 3$ maka $a = b$. Maka f termasuk fungsi injektif atau 1-1.

Selanjutnya jika $d \in R$, ada $c \in R$ dengan diberikan $c = \frac{d-3}{4}$ sedemikian sehingga $(c) = f(\frac{d-3}{4}) = 4\left(\frac{d-3}{4}\right) + 3 = d$. maka f termasuk fungsi surjektif. Karena f termasuk fungsi injektif dan surjektif, maka f termasuk fungsi bijektif.

2.3 Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Definisi 2.7 (Operasi Biner)

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut sebagai operasi biner. Apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a * b) \in S$ atau dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S. Operasi $*$ pada S merupakan operasi biner, dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Contoh :

Misalkan B merupakan semua himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ pada B merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ merupakan suatu pemetaan dari $B \times B \rightarrow B$, yaitu $\forall(a, b) \leq (B \times B)$, maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Operasi $":"$ atau pembagian pada B bukan merupakan operasi biner pada B, sebab ada $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a : b) \notin B$, misal $(3,4) \in B \times B$ dan $(3 : 4) \notin B$.

Misalkan operasi $*$ pada S adalah suatu operasi biner, yaitu

a. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $a * \mathrm{b} = \mathrm{b} * a$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat komutatif.

b. Apabila $\forall a, b \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (\mathrm{b} * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat assosiatif.

c. Jika ada $e \in S$ sedemikian sehingga $\forall a \in S$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap operasi $*$.

d. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$, maka b disebut invers dari a terhadap operasi $*$ dan invers dari a ditulis a^{-1}.

2.3.1 Teori Grup

Definisi 2.8 (Grup)

Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana G adalah suatu himpunan dengan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (assosiatif)

(ii) Ada elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (e adalah identitas dari G)

(iii) $\forall\, a \in G$ ada elemen a^{-1} pada G, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a).

(Dummit & Foote, 1991:17-18).

Contoh:

Misal didefinisikan $G = M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$. Buktikan bahwa $(G, +)$ adalah grup.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $+$ operasi biner

   Ambil sebarang $, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

   Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ maka $2a, 2b, 2c, 2d \in \mathbb{Z}$.

   Maka, jelas (G,+) tertutup.

2. Bersifat assosiatif

Ambil sebarang $,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l \in \mathbb{Z}$, maka

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$

Terbukti bahwa untuk sebarang $a, b, c \epsilon \mathbb{Z}$ berlaku

$(a+b)+c = a+(b+c)$

Jadi (G,+) assosiatif.

3. Mempunyai elemen identitas

Elemen identitas untuk penjumlahan adalah $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka

$$e + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sedangkan di pihak lain :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

G mempunyai elemen identitas $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Mempunyai invers

Setiap elemen di G mempunyai invers, misal:

$$(a^{-1}) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Maka

$$(a^{-1}) + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

dan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

G mempunyai invers terhadap penjumlahan yaitu:

$$(a^{-1}) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Karena G memenuhi (1), (2), (3), dan (4) maka (G,+) adalah grup.

Definisi 2.9

Grup $(G,*)$ disebut grup Komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Fraleigh, 1994:39)

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) merupakan grup *abelian*.

Bukti:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dengan + merupakan operasi biner,

Akan dibuktikan bahwa $(Z, +)$ adalah grup *abelian* jika memenuhi:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu operasi + bersifat assosiatif).
2. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ disebut invers dari a).

4. Untuk semua $a, b, \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif).

   Jadi $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

Teorema 2.1:

Misal G adalah grup dengan operasi biner $*$. Jika a dan b elemen dari G, maka persamaan linear $a * x = b$ dan $y * a = b$ memiliki solusi unik x dan y dalam G.

Bukti:

Pertama ditunjukkan bahwa solusi $a^{-1} * b$ adalah solusi $a * x = b$

Dicatat bahwa $a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b$ (assosiatif)

$$= e * b \quad \text{(definisi } a^{-1}\text{)}$$

$$= b$$

Akan ditunjukkan bahwa solusi $b * a^{-1}$ adalah solusi $y * a = b$

$$y * a = b$$

$$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a)$$

$$= b * e$$

$$= b$$

Sehingga $x = a^{-1} * b$ adalah solusi dari $a * x = b$. Dengan cara yang sama $y = b * a^{-1}$ adalah solusi dari $y * a = b$.

(Fraleigh, 2003:41-42)

2.3.2 Subgrup

Definisi 2.10

Misalkan G adalah grup. Maka subset H dari G adalah subgrup dari G jika H adalah himpunan tidak kosong dan H adalah tertutup terhadap hasil operasi dan inversnya ($x, y \in H$, berarti $x^{-1} \in H$ dan $xy \in H$). Jika H adalah subgrup dari G, maka dapat juga ditulis dengan $H \subseteq G$ (Dummit dan Foote, 1991:45).

Contoh:

Misalkan $2Z = \{2n|n \in Z\} = \{0,2,-2,4,-4,...\}$ dengan Z bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan $(+)$ merupakan subgrup.

Bukti:

a. Untuk membuktikan bahwa operasinya biner.

   Ambil $x, y \in 2Z$, maka$x = 2m$ dan $y = 2n$, untuk suatu $m, n \in 2Z$.

   Maka $x + y = 2m + 2n = 2(m + n) \in 2Z$,

   Jadi $m + n \in 2Z$ bersifat tertutup pada operasi biner +.

b. Untuk membuktikan assosiatif.

   Karena $(Z, +)$, Maka $x + (y + z) = (x + y) + z$.

   Jadi operasi $+$ bersifat assosiatif.

c. Untuk membuktikan elemen identitas.

   Untuk setiap $x \in 2Z$ maka $0 + 2n = 2n + 0 = 2n$

   dengan 0 adalah elemen identitas.

d. Untuk membuktikan invers.

   Ambil $x \in 2Z$ maka $x = 2m$. Untuk setiap $m \in Z$, Maka $(-m) \in Z$.

   $y = 2(-m) = -2m \in 2Z$

   $x + y = 2m + (-2m) = 0$

   $y + x = (-2m) + 2m = 0$

   Jadi $y = x^{-1} = -x$.

Maka dapat disimpulkan bahwa bilangan bulat genap $2Z$ merupakan subgrup karena terhadap operasi yang sama dengan Z juga merupakan grup.

Teorema 2.2

Jika H suatu subset dari grup G, maka H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika $\forall\, a, b \in H$ berlaku

(i) $ab \in H$

(ii) $a^{-1} \in H$

Bukti:

Jika H subgrup dari G, maka H suatu grup, sehingga (i) dan (ii) dipenuhi. Sebaliknya, jika $a \in H$ maka menurut (ii) $a^{-1} \in H$, selanjutnya menurut (i), maka $aa^{-1} = a^{-1}a = e \in H$. Jika terdapat $a, b, c \in H$ dan H subset dari G, maka $a, b, c \in G$, sehingga $(ab)c = a(bc)$ yaitu memenuhi sifat assosiatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa H suatu grup dan karena H subset dari G, maka H subgrup dari G (Sukirman, 2005:55).

2.3.3 Homomorfisme Grup

Pada bagian ini, akan diuraikan tentang suatu fungsi yang dapat dibangun dari suatu grup kepada grup lainnya (mungkin ke dirinya sendiri) dan memenuhi sifat-sifat tertentu.

Definisi 2.11 (Homomorfisme Grup)

Diketahui $(G, \circ)$ dan $(G', *)$ merupakan suatu grup. Maka suatu fungsi $\varphi: G \to G'$ disebut Homomorfisme jika dan hanya jika di definisikan untuk setiap $a, b \in G$, maka berlaku $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:252).

Ada beberapa definisi khusus mengenai homomorfisme grup pada fungsi f yaitu Apabila fungsi f surjektif atau onto, maka homomorfisme f dari G ke G' disebut Epimorfisme, untuk G' merupakan pemetaan homomorfik dari grup G. Maka dapat dikatakan $(G,\circ)$ adalah homomorfik $(G',*)$, dan dapat ditulis:

$$(G,\circ) \approx (G',*)$$

Apabila fungsi f injektif atau satu-satu, maka homomorfisme f disebut Monomorfisme, sedangkan apabila fungsi f surjektif dan injektif, maka homomorfisme f disebut Isomorfisme (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:252).

Contoh:

Diberikan $(N,+)$ dan $(M,+)$ keduanya adalah grup, dengan

$N = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in Z\}$ dan $N = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in Z\right\}$. Misal $\varphi: N \to M$ dan didefinisikan dengan $\varphi(x + y\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ untuk setiap $x + y\sqrt{2} \in N$, maka selidiki apakah $\varphi: N \to M$ adalah Homomorfisme.

Bukti:

Ambil sebarang $x + y\sqrt{2}$ dan $p + q\sqrt{2} \in N$, maka

$$\begin{aligned}
\varphi\left[\left(x + y\sqrt{2}\right) + \left(p + q\sqrt{2}\right)\right] &= \varphi[(x + p) + (y + q)\varphi\sqrt{2}] \\
&= \begin{pmatrix} x + p & y + q \\ -(y + q) & x + p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x + p & y + q \\ -y - q & x + p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \\
&= \varphi\left(x + y\sqrt{2}\right) + \varphi\left(p + q\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

Jadi φ adalah homomorfisme.

Contoh (Epimorfisme):

Misalkan $(R,\times)$ grup semua bilangan riil tak nol dengan operasi perkalian, dan $S = \{-1,1\}$ dengan operasi perkalian, dimana $\varphi: R \to S$, maka pemetaan φ adalah Epimorfisme.

Bukti:

Ambil grup $(R,\times)$ yaitu himpunan semua bilangan riil tak nol dengan operasi perkalian. Juga ambil grup $S = \{-1,1\}$ dengan operasi perkalian. Didefinisikan pemetaan $\varphi: R \to S$ yaitu $\varphi(x) = 1$ jika $x > 0$ dan $\varphi(x) = -1$ jika $x < 0$. Maka untuk setiap $x, y \in R$ maka berlaku $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Maka φ adalah fungsi surjektif, sehingga φ adalah epimorfisme.

Contoh (Monomorfisme):

Misal $(B,+)$ merupakan grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Maka suatu fungsi $\varphi: B \to B$ didefinisikan oleh $\varphi(x) = mx,\ \forall x \in B$ dan m merupakan suatu bilangan bulat, maka φ adalah suatu homomorfisme.

Jika $a, b \in B$, maka $\varphi(a+b) = m(a+b)$

$$= ma + mb$$

$$= \varphi(a) + \varphi(b).$$

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

Karenaφ adalah fungsi satu-satu, maka φ adalah Monomorfisme.

Contoh (Isomorfisme):

Suatu homomorfisme h dari $Z\ ke\ 2Z$ didefinisikan

$$h(a) = 2a$$

untuk setiap $a \in Z$. Maka h , merupakan isomorfisme, sebab:

i. h adalah injektif

$\forall a, b \in Z$, jika $h(a) = h(b)$ maka $2a = 2b$ atau $a = b$.

ii. h adalah surjektif

$\forall x \in 2Z$ maka $x = 2n = h(n)$, untuk suatu $n \in Z$.

Karena h fungsi injektif dan surjektif, maka h adalah Isomorfisme.

Teorema 2.3

Misalkan $\varphi: G \to G'$ suatu homomorfisme grup, maka:

a. $\varphi(e) = e'$, dengan e dan e' berturut-turut menyatakan unsur identitas dari grup G dan G'.

b. $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$ untuk semua unsur $a \in G$.

Bukti:

a. Diketahui $ee = e$. Jadi $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$.

Maka hubungan ini mengakibatkan $\varphi(e) = e'$

b. Untuk setiap $a \in G$ berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Diketahui $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(e) = e'$

Karena unsur invers dari $\varphi(a)$ di G' tunggal.

Maka $\varphi(a^{-1}) = \left(\varphi(a)\right)^{-1}$

(Arifin, 2000:55-56)

2.4 K-Aljabar

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K-Aljabar. K-Aljabar dibangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G.

Definisi 2.12

K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$ adalah aljabar yang didefinisikan pada grup $(G,*)$, dimana setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$
4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$, $\forall\, x, y, z \in G$ (Dar & Akram, 2006)

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
2. $x \odot (x \odot y) = y$

(Dar & Akram, 2006)

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$. Akan dibuktikan bahwa $(Z,+,\odot,0)$ adalah K-Aljabar.

1. $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (a + (-b)) \odot (a + (-c))$

$$= (a - b) + (a - c)^{-1}$$

$$= (\mathrm{a} - \mathrm{b}) - (\mathrm{a} - \mathrm{c})$$

$$= (a - a) + (c - b)$$

$$= c - b$$

$$= c + (-b)$$

$$= c + (b)^{-1}$$

$$= c \odot b$$

Jadi $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (c \odot b)$.

2. $a \odot (a \odot b) = a \odot (a + (-b))$

$$= a + (a - b)^{-1}$$

$$= a - (a - b)$$

$$= (a - a) + b$$

$$= b$$

Jadi $a \odot$ (a $\odot$ b) = b.

3. $a \odot a = a + (-a)$

$$= a - a$$

$$= 0$$

Jadi $a \odot a = 0$.

4. $a \odot 0 = a + 0$

$$= a$$

Jadi $a \odot 0 = a$.

5. $0 \odot a = 0 + a^{-1}$

$$= (a)^{-1}$$

Jadi $0 \odot a = x^{-1}$.

Maka $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-Aljabar.

Teorema 2.4

Misal $(G,*)$ merupakan grup komutatif, dan $(G,*,\odot,e)$ adalah K-Aljabar, maka $\forall\ x,y,z \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$.

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(x \odot y) \odot z &= (x * y^{-1}) * z^{-1} && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= x * (y^{-1} * z^{-1}) && \text{(assosiatif)}\\
&= x * (y * z)^{-1} && \\
&= x * (z * y)^{-1} && \text{(komutatif)}\\
&= x \odot (z * y) && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= x \odot (z * (y^{-1})^{-1}) && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= x \odot (z \odot y^{-1}) && \text{(definisi K-Aljabar)}
\end{aligned}
$$

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\ a,b,c \in Z$, maka $a \odot b = a + (-b)$.

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \odot c &= (a + (-b)) + (-c) && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= (a - b) - c && \\
&= a - (b - c) && \text{(assosiatif)}\\
&= a - (c - b) && \text{(komutatif)}\\
&= a + \big(-(c + b)\big) && \\
&= a \odot (c + b) && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= a \odot (c + (-b)^{-1}) && \text{(definisi K-Aljabar)}\\
&= a \odot (c \odot b^{-1}) && \text{(definisi K-Aljabar)}
\end{aligned}
$$

Jadi $(a \odot b) \odot c = a \odot (c \odot b^{-1})$.

2.5 Kajian Q-Aljabar dalam Islam

Aljabar merupakan cabang dari matematika. Aljabar terbagi menjadi dua, yaitu aljabar abstrak dan aljabar linier. Ilmu aljabar (abstrak) merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu aljabar abstrak yang merupakan bagian dari ilmu matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena berhubungan dengan himpunan, operasi dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Himpunan adalah kumpulan benda atau objek-objek atau lambang-lambang yang mempunyai arti yang dapat didefinisikan dengan jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana bukan anggota himpunan. Di dalam Al-Qur'an kajian tentang himpunan juga sudah tertera. Misalnya kehidupan manusia yang terbagi menjadi beberapa kelompok, yang mana kelompok-kelompok tersebut merupakan himpunan yang terdiri dari beberapa manusia yang di sebut dengan objek-objek yang terdefinisi. Salah satu ayat yang membahas himpunan terdapat di dalam surat surat Al-Fatihah ayat 7 berikut:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ ٱلْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *"(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat".*

Dalam ayat 7 surat Al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007:110).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam Al-Quran himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 1 berikut:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ
يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya: *"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".*

Dalam ayat 1 dalam surat Al-Fathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006:48).

Selain grup, ring, dan himpunan, aljabar abstrak juga membahas struktur aljabar yang lain seperti K-Aljabar, yang mana menjadi topik penting untuk pembahasan dalam penelitian ini. K-Aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku. Sedangkan Q-Aljabar merupakan K-Aljabar yang dibangun dari grup yang komutatif.

Di dalam Al-Qur'an konsep K-Aljabar juga tertera, seperti dalam surat Ath-Thalaq ayat 12 berikut:

ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ وَمِنَ ٱلۡأَرۡضِ مِثۡلَهُنَّ يَتَنَزَّلُ ٱلۡأَمۡرُ بَيۡنَهُنَّ لِتَعۡلَمُوٓاْ أَنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ

شَيۡءٖ قَدِيرٞ وَأَنَّ ٱللَّهَ قَدۡ أَحَاطَ بِكُلِّ شَيۡءٍ عِلۡمَۢا ١٢

Artinya*: "Allah-lah yang menciptakan tujuh langit dan seperti itu pula bumi. perintah Allah Berlaku padanya, agar kamu mengetahui bahwasanya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu, dan Sesungguhnya Allah ilmu-Nya benar-benar meliputi segala sesuatu".*

Dalam ayat tersebut Allah menciptakan langit dengan tujuh lapisan. Dan setiap lapisan memiliki ciri khas atau tanda untuk membedakan antara lapisan satu dengan yang lainnya. Alam semesta terdiri atas semua materi, termasuk tenaga dan radiasi serta hal yang telah diketahui dan baru dalam tahap percaya bahwa pasti ada di antariksa. Bumi, bulan, planet-planet, dan matahari yang termasuk dalam tata surya hanyalah merupakan titik kecil di antara lebih dari 200 miliar bintang penyusun galaksi bima sakti (Soewandi dan Sinduningrum, 2011:63).

Seperti halnya dengan Al-Qur'an yang terdiri dari beberapa struktur yaitu terdiri dari 30 Juz, 114 Surat, dan 6236 Ayat. Begitu pula dengan aljabar abstrak yang memiliki struktur aljabar seperti grup, ring, K-Aljabar dan lain sebagainya. Setiap struktur memiliki syarat ataupun aksioma-aksioma yang membedakan antar struktur tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 K-Homomorfisme pada Q-Aljabar

Definisi 3.1

Misalkan K_1 dan K_2 merupakan Q-Aljabar. Suatu pemetaan φ dari K_1 ke K_2, dinotasikan dengan $\varphi: K_1 \to K_2$ disebut K-Homomorfisme, jika untuk setiap $x, y \in K_1$ maka berlaku $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ dimana $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$.

(Dar & Akram, 2007)

Contoh 3.2

Misal $(G, *, \odot, e)$ suatu Q-Aljabar dan $g \in G$ tertentu. Maka $\varphi: G \to G$ dengan $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$, untuk setiap $x \in G$ merupakan K-Homomorfisme.

Bukti:

Diketahui terdapat suatu relasi $\varphi: G \to G$ dengan $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$. Akan dibuktikan $\varphi(x)$ adalah *well defined*. Misalkan $x, y \in G$ dan $g \in G$ dengan $x = y$, maka $x^{-1} = y^{-1}$, untuk $x^{-1}, y^{-1} \in G$, maka:

$x = y$	
$x * g^{-1} = y * g^{-1}$	(kedua ruas dioperasikan g^{-1})
$(x * g^{-1})^{-1} = (y * g^{-1})^{-1}$	(kedua ruas diinverskan)
$(g * x^{-1}) = (g * y^{-1})$	(sifat De Morgan)
$(g * x^{-1}) * g^{-1} = (g * y^{-1}) * g^{-1}$	(kedua ruas dioperasikan g^{-1})
$(g \odot x) * g^{-1} = (g \odot y) * g^{-1}$	(definisi K-Aljabar)

$(g \odot x) \odot g = (g \odot y) \odot g$ (definisi K-Aljabar)

$\varphi(x) = \varphi(y)$ (definisi φ)

Karena $x = y$, maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Jadi terbukti $\varphi(x)$ *well defined*. Jadi φ fungsi.

Maka langkah selanjutnya menentukan φ suatu K-Homomorfisme.

Akan dibuktikan $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ pada K-Aljabar yang dibangun dari grup komutatif. Diketahui $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$ dan $\varphi(y) = (g \odot y) \odot g$. Maka:

(i) $\varphi(x \odot y) = \big(g \odot (x \odot y)\big) \odot g$

$= \big(g \odot (x * y^{-1})\big) \odot g$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * (x * y^{-1})^{-1}) \odot g$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * y * x^{-1}) \odot g$ (sifat De Morgan)

$= (g * y * x^{-1}) * g^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= g * g^{-1} * y * x^{-1}$ ($*$ komutatif di G)

$= e * y * x^{-1}$ (e identitas di G)

$= y * x^{-1}$

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

(ii) $\varphi(x) \odot \varphi(y) = \big((g \odot x) \odot g\big) \odot \big((g \odot y) \odot g\big)$

$= \big((g * x^{-1}) \odot g\big) \odot \big((g * y^{-1}) \odot g\big)$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * x^{-1} * g^{-1}) \odot (g * y^{-1} * g^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * x^{-1} * g^{-1}) * (g * y^{-1} * g^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= g * x^{-1} * g^{-1} * g * y * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= g * g^{-1} * x^{-1} * y * g * g^{-1}$ ($*$ komutatif di G)

$= e * x^{-1} * y * e$ (e identitas di G)

$$= x^{-1} * y$$

$$= y * x^{-1} \qquad (* \text{ komutatif di } G)$$

$$= y \odot x \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

Dari pembuktian (i) dan (ii), maka mempunyai selesaian yang sama yaitu $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ pada K-Aljabar yang dibangun dari grup komutatif, maka untuk $(G,*,\odot,e)$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$ adalah K-Homomorfisme.

Pada contoh 3.2 jika G tidak komutatif, maka φ bukan K-Homomorfisme. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

(iii) $\varphi(x \odot y) = \big(g \odot (x \odot y)\big) \odot g$

$$= \big(g \odot (x * y^{-1})\big) \odot g \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g * (x * y^{-1})^{-1}) \odot g \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g * y * x^{-1}) \odot g \qquad \text{(sifat De Morgan)}$$

$$= g * y * x^{-1} * g^{-1} \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g \odot y^{-1}) * (x^{-1} * g^{-1}) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g \odot y^{-1}) \odot (x^{-1} * g^{-1})^{-1} \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g \odot y^{-1}) \odot (g * x) \qquad \text{(sifat De Morgan)}$$

$$= (g \odot y^{-1}) \odot (g \odot x^{-1}) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

(iv) $\varphi(x) \odot \varphi(y) = \big((g \odot x) \odot g\big) \odot \big((g \odot y) \odot g\big)$

$$= \big((g * x^{-1}) \odot g\big) \odot \big((g * y^{-1}) \odot g\big) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g * x^{-1} * g^{-1}) \odot (g * y^{-1} * g^{-1}) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g * x^{-1} * g^{-1}) * (g * y^{-1} * g^{-1})^{-1} \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= g * x^{-1} * g^{-1} * g * y * g^{-1} \qquad \text{(sifat De Morgan)}$$

$$= (g * x^{-1}) * (g^{-1} * g) * (y * g^{-1})$$

$$= (g * x^{-1}) * e * (y * g^{-1}) \qquad (e \text{ identitas di } G)$$

$$= (g \odot x) * (y * g^{-1}) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g \odot x) \odot (y * g^{-1})^{-1} \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$= (g \odot x) \odot (g * y^{-1}) \qquad \text{(sifat De Morgan)}$$

$$= (g \odot x) \odot (g \odot y) \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

Dari pembuktian (iii) dan (iv) di atas, maka didapatkan selesaian yaitu $\varphi(x \odot y) \neq \varphi(x) \odot \varphi(y)$ pada K-Aljabar yang dibangun dari grup yang tidak komutatif. Dengan demikian φ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$ merupakan bukan K-Homomorfisme.

Jadi secara umum dapat disimpulkan, untuk φ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot x) \odot g$, maka φ adalah K-Homomorfisme apabila $(G,*)$ adalah grup *abelian* atau komutatif, dan φ adalah bukan K-Homomorfisme apabila $(G,*)$ adalah grup tidak *abelian* atau tidak komutatif.

Sebagaimana dalam homomorfisme grup yang mempunyai konsep monomorfisme, epimorfisme dan isomorfisme, pada K-Aljabar juga terdapat konsep K-Monomorfisme, K-Epimorfisme dan K-Isomorfisme seperti diberikan sebagai berikut:

Definisi 3.3

Misalkan $(G,*,\odot,e)$ dan $(H,*,\odot,e)$ merupakan Q-Aljabar, dan pemetaan $\varphi: G \to H$ adalah K-Homomorfisme,

a. φ K-Homomorfisme disebut K-Monomorfisme, jika φ suatu pemetaan satu-satu (injektif). Untuk semua x dan y di G dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$, maka $x = y$.

b. φ K-Homomorfisme disebut K-Epimorfisme, jika φ suatu pemetaan kepada (surjektif). Untuk setiap $h \in H$, maka terdapat $g \in G$ sehingga $\varphi(g) = h$. Dengan kata lain $\varphi(G) = H$

c. φ K-Homomorfisme disebut K-Isomorfisme, jika φ suatu pemetaan bijektif (injektif dan surjektif).

Contoh 3.4 (K-Monomorfisme)

Misalkan $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ merupakan Q-Aljabar dan $g \in G$, maka suatu relasi $\varphi: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x^{-1}\odot(g\odot g)$ untuk setiap $x \in G$ merupakan K-Monomorfisme.

Bukti:

Diketahui $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ terdapat suatu relasi $\varphi: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x^{-1}\odot(g\odot g)$ untuk setiap $x \in G$. Dengan menggunakan definisi K-Aljabar $x\odot g = x * g^{-1}$, maka akan dibuktikan $\varphi(x)$ adalah *well defined* sebagai berikut:

$$x = y$$

$$x^{-1} = y^{-1} \quad \text{(kedua ruas diinverskan)}$$

$$x^{-1} * e^{-1} = y^{-1} * e^{-1} \quad \text{(kedua ruas dioperasikan } e^{-1}\text{)}$$

$$x^{-1} * (g\odot g)^{-1} = y^{-1}(g\odot g)^{-1} \quad (g\odot g = e\text{, sifat-sifat K-Aljabar)}$$

$$x^{-1}\odot(g\odot g) = y^{-1}\odot(g\odot g) \quad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \quad \text{(definisi } \varphi\text{)}$$

Karena $x = y$, maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Jadi terbukti $\varphi(x)$ *well defined*. Jadi φ fungsi.

Maka langkah selanjutnya menentukan φ suatu K-Homomorfisme.

Akan dibuktikan $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$. Diketahui $\varphi(x) = x^{-1} \odot (g \odot g)$ dan $(y) = y^{-1} \odot (g \odot g)$. Maka:

$\varphi(x \odot y) = (x \odot y)^{-1} \odot (g \odot g)$

$= (x * y^{-1})^{-1} \odot (g \odot g)$ (definisi K-Aljabar)

$= (y * x^{-1}) \odot (g \odot g)$ (sifat De Morgan)

$= (y * x^{-1}) \odot (g * g^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (y * x^{-1}) * (g * g^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= y * x^{-1} * g * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= y * x^{-1} * e$ (e identitas di G)

$= y * x^{-1}$

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

$\varphi(x) \odot \varphi(y) = (x^{-1} \odot (g \odot g)) \odot (y^{-1} \odot (g \odot g))$

$= (x^{-1} \odot (g * g^{-1})) \odot \left(y^{-1} \odot (g * g^{-1})\right)$ (definisi K-Aljabar)

$= (x^{-1} * (g * g^{-1})^{-1}) \odot (y^{-1} * (g * g^{-1})^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (x^{-1} * g * g^{-1}) \odot (y^{-1} * g * g^{-1})$ (sifat De Morgan)

$= (x^{-1} * g * g^{-1}) * (y^{-1} * g * g^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= x^{-1} * g * g^{-1} * g * g^{-1} * y$ (sifat De Morgan)

$= x^{-1} * e * e * y$ (e identitas G)

$= x^{-1} * y$

$= y * x^{-1}$ (∗ komutatif di G)

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

Jadi dari pembuktian di atas, maka φ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x^{-1} \odot (g \odot g)$ adalah K-Homomorfisme.

Kemudian akan dibuktikan φ merupakan suatu fungsi injektif atau satu-satu. Ambil sebarang $x, y \in G$, diketahui $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ dan $\varphi(y) = (g \odot g) \odot y$, maka:

$\varphi(x) = \varphi(y)$

$x^{-1} \odot (g \odot g) = y^{-1} \odot (g \odot g)$ (diketahui)

$(x^{-1} \odot (g * g^{-1}) = y^{-1} \odot (g * g^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$x^{-1} * (g * g^{-1})^{-1} = y^{-1} * (g * g^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$x^{-1} * g * g^{-1} = y^{-1} * g * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$x^{-1} * e = y^{-1} * e$ (e identitas di G)

$x^{-1} = y^{-1}$ (sifat identitas)

$(x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}$ (kedua ruas diinverskan)

$x = y$

Karena $\varphi(x) = \varphi(y)$ maka $x = y$, maka φ merupakan fungsi injektif.

Jadi karena φ merupakan K-Homomorfisme dan φ fungsi injektif, maka φ K-Monomorfisme.

Contoh 3.5 (K-Epimorfisme)

Misalkan $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ merupakan Q-Aljabar dan $g \in G$, maka suatu relasi $\varphi: G \to G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = g\odot(g\odot x^{-1})$ untuk setiap $x \in G$ maka φ merupakan K-Epimorfisme.

Bukti:

Diketahui $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ terdapat suatu fungsi φ, dengan $\varphi: G \to G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = g\odot(g\odot x^{-1})$ untuk setiap $x \in G$. Dengan menggunakan definisi K-Aljabar $x\odot g = x * g^{-1}$, maka akan dibuktikan $\varphi(x)$ adalah *well defined* sebagai berikut:

$x = y$

$x * g = y * g$ (kedua ruas dioperasikan g)

$(x * g)^{-1} = (y * g)^{-1}$ (kedua ruas diinverskan)

$g^{-1} * x^{-1} = g^{-1} * y^{-1}$ (sifat De Morgan)

$g * g^{-1} * x^{-1} = g * g^{-1} * y^{-1}$ (kedua ruas dioperasikan g)

$g * (x * g)^{-1} = g * (y * g)^{-1}$ (sifat De Morgan)

$g * (g * x)^{-1} = g * (g * y)^{-1}$ (karena G *abelian*)

$g * (g\odot x^{-1})^{-1} = g * (g\odot y^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$g\odot(g\odot x^{-1}) = g\odot(g\odot y^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$\varphi(x) = \varphi(y)$ (definisi φ)

Karena $x = y$, maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Jadi terbukti $\varphi(x)$ *well defined*. Jadi φ fungsi.

Maka langkah selanjutnya menentukan φ suatu K-Homomorfisme.

Akan dibuktikan $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$. Diketahui $\varphi(x) = g \odot (g \odot x^{-1})$ dan $\varphi(y) = g \odot (g \odot y^{-1})$. Maka:

$\varphi(x \odot y) = g \odot (g \odot (x \odot y)^{-1})$

$= g \odot (g \odot (x * y^{-1})^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= g \odot \big(g \odot (y * x^{-1})\big)$ (sifat De Morgan)

$= g \odot (g * (y * x^{-1})^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= g \odot (g * x * y^{-1})$ (sifat De Morgan)

$= g * (g * x * y^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= g * y * x^{-1} * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= g * g^{-1}\, y * x^{-1}$ ($*$ komutatif di G)

$= e * y * x^{-1}$ (e identitas di G)

$= y * x^{-1}$

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

$\varphi(x) \odot \varphi(y) = (g \odot (g \odot x^{-1})) \odot (g \odot (g \odot y^{-1}))$

$= (g \odot (g * (x^{-1})^{-1})) \odot (g \odot (g * (y^{-1})^{-1}))$ (definisi K-Aljabar)

$= (g \odot (g * x)\,) \odot (g \odot (g * y)\,)$

$= (g * (g * x)^{-1}) \odot (g * (g * y)^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * x^{-1} * g^{-1}) \odot (g * y^{-1} * g^{-1})$ (sifat De Morgan)

$= (g * x^{-1} * g^{-1}) * (g * y^{-1} * g^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= g * x^{-1} * g^{-1} * g * y * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= g * g^{-1} * x^{-1} * y * g * g^{-1}$ ($*$komutatif di G)

$= e * x^{-1} * y * e$ (e identitas di G)

$$= x^{-1} * y$$

$$= y * x^{-1} \qquad (* \text{ komutatif di } G)$$

$$= y \odot x \qquad (\text{definisi K-Aljabar})$$

Jadi dari pembuktian di atas, maka φ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = g \odot (g \odot x^{-1})$ adalah K-Homomorfisme.

Kemudian akan dibuktikan φ merupakan suatu fungsi surjektif atau onto.

Untuk setiap $y \in G$, ada $x \in G$, sehingga $\varphi(x) = y$. Maka

$$\varphi(x) = y$$

$$g \odot (g \odot x^{-1}) = y \qquad (\text{diketahui})$$

$$g \odot (g * (x^{-1})^{-1}) = y \qquad (\text{definisi K-Aljabar})$$

$$g \odot (g * x) = y$$

$$g * (g * x)^{-1} = y \qquad (\text{definisi K-Aljabar})$$

$$g * x^{-1} * g^{-1} = y \qquad (\text{sifat De Morgan})$$

$$g * g^{-1} * x^{-1} = y \qquad (* \text{ komutatif di } G)$$

$$e * x^{-1} = y \qquad (e \text{ identitas di } G)$$

$$(x^{-1})^{-1} = (y)^{-1} \qquad (\text{kedua ruas diinverskan})$$

$$x = y^{-1}$$

Maka untuk setiap $y \in G$, ada $x = y^{-1} \in G$ sehingga $\varphi(x) = x^{-1} = (y^{-1})^{-1} = y$.

Maka φ merupakan fungsi surjektif.

Jadi karena φ merupakan K-Homomorfisme dan φ fungsi surjektif, maka φ K-Epimorfisme.

Contoh 3.6 (K-Isomorfisme)

Misalkan $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ merupakan Q-Aljabar dan terdapat $g \in G$, maka suatu pemetaan $\varphi: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ untuk setiap $x \in G$ maka φ merupakan K-Isomorfisme.

Bukti:

Diketahui $(G,*,\odot,\mathrm{e})$ dan $g \in G$ serta terdapat suatu relasi $\varphi: G \rightarrow G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ untuk setiap $x \in G$. Dengan menggunakan definisi K-Aljabar $x \odot g = x * g^{-1}$, maka akan dibuktikan $\varphi(x)$ adalah *well defined* sebagai berikut:

$$x = y$$

$$x * g^{-1} = y * g^{-1} \quad \text{(kedua ruas dioperasikan } g^{-1}\text{)}$$

$$(x * g^{-1})^{-1} = (y * g^{-1})^{-1} \quad \text{(kedua ruas diinverskan)}$$

$$g * x^{-1} = g * y^{-1} \quad \text{(sifat De Morgan)}$$

$$g * x^{-1} * g^{-1} = g * y^{-1} * g^{-1} \quad \text{(kedua ruas dioperasikan } g^{-1}\text{)}$$

$$g * g^{-1} * x^{-1} = g * g^{-1} * y^{-1} \quad \text{(} * \text{ komutatif di } G\text{)}$$

$$(g \odot g) * x^{-1} = (g \odot g) * y^{-1} \quad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$(g \odot g) \odot x = (g \odot g) \odot y \quad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \quad \text{(definisi } \varphi\text{)}$$

Karena $x = y$, maka $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Jadi terbukti $\varphi(x)$ *well defined*. Jadi φ fungsi.

Maka langkah selanjutnya menentukan φ suatu K-Homomorfisme.

Akan dibuktikan $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$. Diketahui $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ dan $\varphi(y) = (g \odot g) \odot y$. Maka:

$\varphi(x \odot y) = (g \odot g) \odot (x \odot y)$

$= (g * g^{-1}) \odot (x * y^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * g^{-1}) * (x * y^{-1})^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

$= g * g^{-1} * y * x^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= e * y * x^{-1}$ (e identitas di G)

$= y * x^{-1}$

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

$\varphi(x) \odot \varphi(y) = \big((g \odot g) \odot x\big) \odot \big((g \odot g) \odot y\big)$

$= \big((g * g^{-1}) \odot x\big) \odot \big((g * g^{-1}) \odot y\big)$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * g^{-1} * x^{-1}) \odot (g * g^{-1} * y^{-1})$ (definisi K-Aljabar)

$= (g * g^{-1} * x^{-1}) * (g * g^{-1} * y^{-1})^{-1}$(definisi K-Aljabar)

$= g * g^{-1} * x^{-1} * y * g * g^{-1}$ (sifat De Morgan)

$= e * x^{-1} * y * e$ (e identitas di G)

$= x^{-1} * y$

$= y * x^{-1}$ ($*$ komutatif di G)

$= y \odot x$ (definisi K-Aljabar)

Jadi dari pembuktian di atas, maka φ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ adalah K-Homomorfisme.

Kemudian akan dibuktikan φ merupakan suatu fungsi injektif atau satu-satu. Ambil sebarang $x, y \in G$, diketahui $\varphi(x) = (g \odot g) \odot x$ dan $\varphi(y) = (g \odot g) \odot y$, maka:

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$

$$(g \odot g) \odot x = (g \odot g) \odot y \qquad \text{(diketahui)}$$

$$(g * g^{-1}) \odot x = (g * g^{-1}) \odot y \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$g * g^{-1} * x^{-1} = g * g^{-1} * y^{-1} \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$e * x^{-1} = e * y^{-1} \qquad (e \text{ identitas di } G)$$

$$(x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1} \qquad \text{(kedua ruas diinverskan)}$$

$$x = y$$

Karena $\varphi(x) = \varphi(y)$ maka $x = y$, maka φ merupakan fungsi injektif.

Kemudian akan dibuktikan φ merupakan suatu fungsi surjektif atau onto.

Untuk setiap $y \in G$, ada $x \in G$, sehingga $\varphi(x) = y$.

Dimana $\varphi(x) = y$

$$(g \odot g) \odot x = y \qquad \text{(diketahui)}$$

$$(g * g^{-1}) \odot x = y \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$g * g^{-1} * x^{-1} = y \qquad \text{(definisi K-Aljabar)}$$

$$e * x^{-1} = y \qquad (e \text{ identitas di } G)$$

$$x^{-1} = y$$

$$(x^{-1})^{-1} = (y)^{-1} \qquad \text{(kedua ruas diinverskan)}$$

$$x = y^{-1}$$

Maka untuk setiap $y \in G$, ada $x = y^{-1} \in G$ sehingga $\varphi(x) = x^{-1} = (y^{-1})^{-1} = y$. Maka φ merupakan fungsi surjektif.

Jadi karena φ merupakan K-Homomorfisme dan φ fungsi bijektif, maka φ merupakan K-Isomorfisme.

Definisi 3.7

Diberikan $K_1 = (G_{1,} *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan K-Aljabar. Maka himpunan semua K-Homomorfisme dari K_1 ke K_2 ditulis,

$$Hom\ ((G_1, * \odot, e_1), (G_2, *, \odot, e_2))$$

Proposisi 3.8

Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan dua K-Aljabar dan $\varphi \in Hom\ (K_1, K_2)$, maka untuk $x, y \in K_1$ dan $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$, maka berlaku:

1) $\varphi(e_1) = e_2$
2) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$
3) $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$
4) $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$, jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Bukti:

Sebelum membuktikan proposisi 3.8 di atas, maka akan dibuktikan bahwa hukum kanselasi berlaku pada K-Aljabar. Berdasarkan definisi K-Aljabar $(G, *, \odot, e)$ yang dibangun atas grup yang menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G, *)$, sehingga untuk setiap $x, y \in G$ didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G. Maka sifat-sifat yang berlaku pada grup, juga akan berlaku pada K-Aljabar.

Adapun sifat-sifat yang berlaku pada grup adalah sebagai berikut:

1. $x * y \in G$, untuk setiap $x, y \in G$ ($*$ tertutup di G)
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$, untuk setiap $x, y, z \in G$ ($*$ asosiatif di G)
3. $x * e = e * x = x$, untuk setiap $x \in G$ (ada identitas e di G)
4. Untuk setiap $x \in G$, ada $x^{-1} \in G$ sehingga

   $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (ada invers di G)
5. $x * y = y * x$, untuk setiap $x, y \in G$ ($*$ komutatif di G)
6. Jika $x * y = x * z$ maka $y = z$, $\forall\, x, y, z \in G$ (kanselasi kiri)
7. Jika $y * x = z * x$ maka $y = z$, $\forall\, x, y, z \in G$ (kanselasi kanan)

Sedangkan $(G, *, \odot, e)$ merupakan K-Aljabar, dimana e adalah identitas di G. sebagai berikut:

1. Operasi $\odot$ tertutup di K-Aljabar.

   $x, y \in$ K-Aljabar dan $x * y^{-1} \in G$, maka

   $x \odot y \in$ K-Aljabar, maka $x * y^{-1} \in$ K-Aljabar
2. Apakah operasi $\odot$ assosiatif ?

   Ambil sebarang $x, y, z \in$ K-Aljabar,

   maka apakah$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$?

   akan dijelaskan sebagai berikut:

   $$(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) \odot z$$
   $$= x * y^{-1} * z^{-1}$$
   $$x \odot (y \odot z) = x \odot (y * z^{-1})$$
   $$= x * (y * z^{-1})^{-1}$$
   $$= x * z * y^{-1}$$

Maka $(x \odot y) \odot z \neq x \odot (y \odot z)$

Jadi operasi $\odot$ tidak assosiatif di K-Aljabar.

3. Apakah ada elemen identitas di K-Aljabar?

   Untuk setiap $x \in$ K-Aljabar, maka

   $x \odot e = x * e = x$

   $e \odot x = e * x^{-1} = x^{-1}$

   dimana e merupakan elemen identitas di G, dimana G ada di K-Aljabar.

   Maka $x \odot e \neq e \odot x$ sehingga tidak ada elemen identitas di K-Aljabar.

4. Apakah ada invers di K-Aljabar?

   Karena tidak ada identitas di K-Aljabar, maka tidak ada elemen invers di K-Aljabar.

5. Untuk setiap $x, y, z \in$ K-Aljabar, dan untuk $x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} \in G$. Maka:

   $x \odot y = x \odot z$

   $x * y^{-1} = x * z^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

   $x^{-1} * x * y^{-1} = x^{-1} * x * z^{-1}$ (kedua ruas dioperasikan x^{-1})

   $e * y^{-1} = e * z^{-1}$

   $y^{-1} = z^{-1}$

   $(y^{-1})^{-1} = (z^{-1})^{-1}$ (kedua ruas diinverskan)

   $y = z$ (kanselasi kiri)

6. Untuk setiap $x, y, z \in$ K-Aljabar, dan untuk $x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} \in G$. Maka:

   $y \odot x = z \odot x$

   $y * x^{-1} = z * x^{-1}$ (definisi K-Aljabar)

   $y * x^{-1} * x = z * x^{-1} * x$ (kedua ruas dioperasikan x)

$$y * e = z * e$$

$$y = z \qquad \text{(kanselasi kanan)}$$

Dari penjelasan di atas, maka hukum kanselasi berlaku pada K-Aljabar. Jika $x \odot y = x \odot z$, maka $y = z$. Sedangkan jika $y \odot x = z \odot x$, maka $y = z$.

Selanjutnya membuktikan proposisi 3.8 di atas.

Diketahui bahwa terdapat $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan dua K-Aljabar, dan $\varphi \in Hom\,(K_1, K_2)$. Untuk $x, y \in K_1$ dan $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$, maka akan berlaku sifat-sifat yang akan dibuktikan sebagai berikut:

1. $\varphi(e_1) = e_2$

   Bukti:

   Diketahui $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$ merupakan dua Q-Aljabar. Untuk e_1 adalah elemen identitas di G_1, dimana G_1 ada di K_1 dan untuk e_2 adalah elemen identitas di G_2, dimana G_2 ada di K_2. Akan ditunjukkan $\varphi(e_1) = e_2$. Ambil sebarang unsur $x \in K_1$, dengan dikenai operasi $\odot$ pada K-Aljabar, maka

   $x \odot e_1 = x$, dimana e_1 adalah elemen identitas di G_1, dimana G_1 ada di K_1.

   Maka diperoleh

   $\varphi(x \odot e_1) = \varphi(x)$

   karena φ merupakan K-Homomorfisme, maka:

   $\varphi(x) \odot \varphi(e_1) = \varphi(x)$

   $\varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)$ (definisi K-Aljabar)

   Kemudian kedua ruas dioperasikan dengan $\varphi(x)^{-1}$ dari sebelah kiri, menjadi:

   $\varphi(x)^{-1} * [\varphi(x) * \varphi(e_1)^{-1}] = \varphi(x)^{-1} * [\varphi(x)]$

Karena operasi $*$ assosiatif di G_2, maka:

$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = \varphi(x)^{-1} * \varphi(x)$

Karena $\varphi(x)^{-1}$ dan $\varphi(x)$ ada di G_2, dimana G_2 ada di K_2, maka

$[\varphi(x)^{-1} * \varphi(x)] * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$

$e_2 * \varphi(e_1)^{-1} = e_2$

$\varphi(e_1)^{-1} = e_2$

$(\varphi(e_1)^{-1})^{-1} = (e_2)^{-1}$ (kedua ruas diinverskan)

$\varphi(e_1) = e_2^{-1}$

$\varphi(e_1) = e_2$ (invers dari e_2 adalah e_2^{-1})

untuk e_2 adalah identitas di G_2, dimana G_2 ada di K_2.

Jadi terbukti $\varphi(e_1) = e_2$.

2. $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$

Bukti :

Diketahui e_1 adalah elemen identitas di G_1, dimana G_1 ada di K_1,

maka akan ditunjukkan $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$

Ambil sebarang $x \in K_1$, maka $e_1 \odot x \in K_1$,maka

$e_1 \odot x = x^{-1}$

dimana e_1 adalah elemen identitas di G_1, dimana G_1 ada di K_1.

Maka diperoleh

$\varphi(e_1 \odot x) = \varphi(x^{-1})$

karena φ merupakan K-Homomorfisme, maka:

$\varphi(e_1) \odot \varphi(x) = \varphi(x^{-1})$

Karena $\varphi(e_1) = e_2$, maka:

$$e_2 \odot \varphi(x) = \varphi(x^{-1})$$

$$e_2 * \varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$$

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$$

Jadi terbukti $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.

3. $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$

Bukti:

Ambil sebarang $x \in G_1$ dengan e_1 identitas dari G_1 dan e_2 identitas dari G_2.

Maka $e_1 \odot x \in K_1$, dengan $\varphi(e_1), \varphi(x) \in K_2$, maka

$\varphi(e_1 \odot x) = \varphi(e_1) \odot \varphi(x)$

Karena φ K-Homomorfisme dan karena $\varphi(e_1) = e_2$ maka

$\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$

Maka terbukti $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$.

4. $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$, jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Diketahui $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$

Akan ditunjukkan $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Ambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$

Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$, dan berlaku,

$\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$ (diketahui)

$\varphi(x_1) \odot \varphi(x_2) = e_2$ (pemetaan φ)

$\varphi\ (x_1) * \varphi(x_2)^{-1} = e_2$ (definisi K-Aljabar)

Kemudian kedua ruas dioperasikan dengan $\varphi(x_2)$, maka,

$$\varphi(x_1) * \left(\varphi(x_2)^{-1} * \varphi(x_2)\right) = e_2 * \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1) * e_2 = e_2 * \varphi(x_2) \qquad \text{(identitas)}$$

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \qquad \text{(terbukti)}$$

($\Leftarrow$)

Diketahui $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

Akan ditunjukkan $\varphi(x \odot x_2) = e_2$

Ambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$

Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$

dan berlaku,

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

Kemudian kedua ruas dioperasikan dengan $\varphi(x_2)$, maka:

$$\varphi(x_1) \odot \varphi(x_2) = \varphi(x_2) \odot \varphi(x_2)$$

Karena $\varphi(x_2) \odot \varphi(x_2) = \varphi(x_2) * \varphi(x_2)^{-1} = e_2$, maka:

$$\varphi(x_1) \odot \varphi(x_2) = e_2$$

$$\varphi(x_1 \odot x_1) = e_2$$

Dari pembuktian di atas, maka terbukti $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$, jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

3.2 Kajian K-Homomorfisme dalam Islam

Aljabar merupakan cabang dari matematika. Aljabar terbagi menjadi dua, yaitu aljabar abstrak dan aljabar linier. Dalam penelitian ini secara umum membahas tentang aljabar abstrak, yang merupakan ilmu yang membahas struktur aljabar. Salah satu dari struktur aljabar adalah K-Aljabar. Dimana K-Aljabar itu sendiri mempunyai aturan-aturan yang tentuya berbeda dengan aturan struktur aljabar yang lain. Sedangkan Q-Aljabar merupakan K-Aljabar yang komutatif.

Secara sederhana, apabila diberikan dua grup dalam Q-Aljabar yaitu K_1 dan K_2, suatu pemetaan $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ disebut K-Homomorfisme. Jika untuk setiap $x_1, y_1 \in K_1$ maka berlaku $\varphi(x_1 \odot y_1) = \varphi(x_1) \odot \varphi(y_1)$ dimana $\varphi(x_1), \varphi(y_1) \in K_2$.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan dalam surat Ath-Thalaq ayat 12, bahwa Alloh menciptakan menciptakan tujuh langit dan bumi untuk makhluk-makhluk-makhluknya khususnya manusia yang bertempat di bumi, agar mereka mengetahui tentang kekuasaan Alloh. Di dunia manusia tidak hidup sendiri, karena manusia adalah makhluk sosial yang membutuhkan kerjasama dengan manusia yang lainnya.

Seperti halnya dalam Q-Aljabar K_1 dan K_2, mempunyai elemen atau anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan Alloh SWT. Sedangkan operasi biner $\odot$ merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah SWT. Dalam K-Homomorfisme terdapat suatu pemetaan φ yang merupakan pengaitan artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Himpunan manusia yang satu dengan himpunan manusia yang lainnya pasti akan akan saling membutuhkan. Interaksi manusia satu dengan manusia yang lainnya akan terjadi sikap saling tolong menolong. Sebagaimana telah disebutkan dalam Al-Qur’an sebagai berikut:

وَتَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْبِرِّ وَٱلتَّقْوَىٰ ۖ وَلَا تَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْإِثْمِ وَٱلْعُدْوَٰنِ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلْعِقَابِ ﴿٢﴾

Artinya: *"dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. dan bertakwalah kamu kepada Allah, Sesungguhnya Allah Amat berat siksa-Nya" (Al-Maidah: 2).*

Dengan adanya pemetaan atau pengaitan yaitu sikap saling tolong menolong antara sesama kelompok manusia, maka akan memunculkan sikap sosial kemasyarakatan yang kuat. Sebagaimana telah disebutkan dalam Al-Qur'an berikut:

وَإِن طَآئِفَتَانِ مِنَ ٱلْمُؤْمِنِينَ ٱقْتَتَلُوا۟ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَهُمَا ۖ فَإِنۢ بَغَتْ إِحْدَىٰهُمَا عَلَى ٱلْأُخْرَىٰ فَقَٰتِلُوا۟ ٱلَّتِى تَبْغِى حَتَّىٰ تَفِىٓءَ إِلَىٰٓ أَمْرِ ٱللَّهِ ۚ فَإِن فَآءَتْ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَهُمَا بِٱلْعَدْلِ وَأَقْسِطُوٓا۟ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلْمُقْسِطِينَ ﴿٩﴾

Artinya: *"dan kalau ada dua golongan dari mereka yang beriman itu berperang hendaklah kamu damaikan antara keduanya! tapi kalau yang satu melanggar Perjanjian terhadap yang lain, hendaklah yang melanggar Perjanjian itu kamu perangi sampai surut kembali pada perintah Allah. kalau Dia telah surut, damaikanlah antara keduanya menurut keadilan, dan hendaklah kamu Berlaku adil; Sesungguhnya Allah mencintai orang-orang yang Berlaku adil"(Al-Hujuraat: 9).*

Ayat di atas telah jelas bahwa dengan adanya sikap sosial kemasyarakatan yang kuat, maka akan timbullah kehidupan yang damai diantara kelompok manusia.

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai hal-hal yang berkaitan dengan penjelasan diatas, misalkan dalam kehidupan manusia antara orang miskin dengan orang kaya. Dimana orang kaya harus membantu (tolong menolong) kepada orang miskin agar kehidupan diantara mereka juga akan merasa bahagia. Dengan begitu akan muncullah kehidupan yang sejahtera.

Adapun penerapan penjelasan diatas dalam kehidupan sehari-hari diantara mahasiswa UIN Maulana Malik Ibrahim Malang juga terdapat pada ayat ulul albab dalam surat Al-Imron ayat 190 yang menjelaskan bahwa seorang ulul albab yaitu orang-orang yang berakal, dimana mereka harus mengingat Alloh sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi. Jadi mereka akan dituntut untuk berbudi luhur yaitu saling tolong menolong diantara sesama manusia khususnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dijelaskan pada bab III, maka dapat disimpulkan bahwa K-Aljabar $(G,*,\odot,e)$ dibangun atas suatu grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x,y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$, dan e adalah unsur identitas di G. Sedangkan Q-Aljabar merupakan K-Aljabar yang dibangun dari grup yang komutatif. Adapun definisi K-Homomorfisme, misalkan K_1 dan K_2 merupakan Q-Aljabar. Pemetaan φ dari K_1 ke K_2, dinotasikan $\varphi: K_1 \to K_2$, jika untuk setiap $x,y \in K_1$, maka berlaku $\varphi(x \odot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$ dimana $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$. Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat dari K-Homomorfisme adalah K-Homomorfisme φ disebut K-Monomorfisme, jika φ suatu pemetaan injektif. Untuk semua x dan y di G dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$, maka $x = y$. K-Homomorfisme φ disebut K-Epimorfisme, jika φ suatu pemetaan surjektif. Untuk setiap $h \in H$, terdapat $g \in G$ sehingga $\varphi(g) = h$, dengan kata lain $\varphi(G) = H$. Selanjutnya K-Homomorfisme φ disebut K-Isomorfisme, jika φ suatu pemetaan bijektif. Sedangkan sifat-sifat yang lain yaitu misalkan $K_1 = (G_1, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, \odot, e_2)$ merupakan dua Q-Aljabar dan $\varphi \in Hom(K_1, K_2)$, maka untuk $x, y \in K_1$ dan $\varphi(x), \varphi(y) \in K_2$ berlaku:

1) $\varphi(e_1) = e_2$
2) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

3) $\varphi(e_1 \odot x) = e_2 \odot \varphi(x)$

4) $\varphi(x_1 \odot x_2) = e_2$, jika dan hanya jika $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

4.2 Saran

Dalam skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan tentang sifat-sifat K-Homomorfisme pada Q-Aljabar. Maka disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai K-Homomorfisme pada Q-Aljabar, di antaranya tentang K-Isomorfisme.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2009. *Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Arifin, A.. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Dar, K. H. dan Akram, M.. 2006. *Journal: On Subclasses of K (G)-Algebras*, Annuals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.

Dar, K. H. dan Akram, M.. 2007. *Journal: On K-Homomorphisms of K-algebras*, International Mathematical Forum.

Dummit, D. S. dan Richard M. F.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Durbin, J. R.. 1992. *Modern Algebra: An Introduction Third Edition*. Canada: John Wiley and Sons, Inc

Fraleigh, J. B.. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. United States. Addison-Wesley Publishing Company inc.

Raishinghania, M. D. dan Aggarwal, R. S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand and Company Ltd.

Soewandi, H., dan Sinduningrum. 2011. *Ilmu Kealaman Dasar (IKD)*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Sukirman. 2005. *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Negeri Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Ani Afifah**
NIM : **09610028**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **K-Homomorfisme pada Q-Aljabar**
Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag**

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	15 September 2012	Konsultasi Bab I	1.	
2	20 September 2012	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	24 September 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II	3.	
4	14 Oktober 2012	Konsultasi Bab II		4.
5	7 November 2012	Konsultasi Kajian Agama	5.	
6	14 November 2012	Konsultasi Bab III		6.
7	18 November 2012	Konsultasi Bab I, II dan III	7.	
8	20 Desember 2012	Konsultasi Kajian Agama		8.
9	4 Januari 2013	Konsultasi Bab IV	9.	
10	9 Januari 2013	ACC Kajian Agama		10.
11	10 Januari 2013	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 29 Januari 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001