ANALISIS SOLUSI UMUM PERSAMAAN RICCATI

SKRIPSI

Oleh:
M. ULUL ALBAB
NIM. 09610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ANALISIS SOLUSI UMUM PERSAMAAN RICCATI

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
M. ULUL ALBAB
NIM. 09610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ANALISIS SOLUSI UMUM PERSAMAAN RICCATI

SKRIPSI

Oleh:
M. ULUL ALBAB
NIM. 09610031

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 11 Juni 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS SOLUSI UMUM PERSAMAAN RICCATI

SKRIPSI

Oleh:
M. ULUL ALBAB
NIM. 09610031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Juni 2013

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	____________
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________
Anggota Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	____________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : M. Ulul Albab

NIM : 09610031

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2013

Mahasiswa,

M. Ulul Albab
NIM. 09610031

MOTTO

"Sesungguhnya, Allah menasehati (mengingatkan) kepadamu supaya kamu tidak termasuk orang-orang yang tidak berpengetahuan" (QS.Hud : 46)

"Memberikan semua dengan dedikasi yang tinggi untuk sebuah cita-cita luhur" (Penulis)

PERSEMBAHAN

Ayahanda H. Musyaffa' dan Ibunda Hj. Hamidah

Adik M. Nashrollah

Inspirasi drg. Rabbani Hafidata

Inspirasi Prof. Dr. B.J. Habibie

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga dapat menyelesaikan studi dan penulisan skripsi ini dengan lancar di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis juga haturkan sholawat dan salam kepada nabi Muhammad SAW yang telah memberikan teladan terbaik sehingga penulis dapat berkarya dengan dasar kaidah syar'i dan akal secara Islam.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan membimbing penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing skipsi yang telah mengajarkan banyak keilmuan.
5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas semua ilmu dan bimbingan.

6. Ayahanda terbaik (Musyaffa') dan ibunda tercinta (Hamidah) yang tak pernah berhenti memberikan do'a dan restu.
7. Adik terbaik (M. Nasrulloh) dan adik terkasih (Rabbani Hafidata), terima kasih atas do'a dan inspirasi.
8. M. Imam Mutamaqin, F. Kurnia Nirmala Sari S.Si, Dhita Krida Kumala S.Si, Azhar Effendi, Anis Fathonah Himda, dan Nihaya Izzah selaku rekan diskusi yang telah membantu kelancaran skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat terbaik, mahasiswa Matematika 2009, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan khususnya teman seperjuangan PKLI.
10. Keluarga besar Kos Kertoraharjo Dalam 15 Lowokwaru Malang.
11. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini, namun tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan para pembaca. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juli 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMBANG

$f(x)$	: Fungsi dengan peubah x
$y_0 = y_0(x)$	: Solusi partikular
R	: Persegi panjang
M	: Konstanta positif
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan riil
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\langle S_n \rangle$	: Barisan jumlah parsial (iterasi)
C	: Sebarang konstanta
y'	: Turunan biasa pertama $y(x)$ terhadap x
${y_n}'$	: Turunan biasa pertama $y_n(x)$ terhadap x
$y^{-1'}$	: Turunan biasa pertama $\frac{1}{y}(x)$ terhadap x
${y_n}^{-1'}$	: Turunan biasa pertama $\frac{1}{y_n}(x)$ terhadap x
y''	: Turunan biasa kedua fungsi $y(x)$ terhadap x
$\int_a^b f(x,y)dx$	: Integral $f(x,y)$ terhadap x
$\int_a^b f(x,s)ds$	: Integral $f(x,s)$ terhadap s

ABSTRAK

Albab, M. Ulul. 2013. **Analisis Solusi Umum Persamaan Riccati**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

Kata kunci: Persamaan Riccati, Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen Orde Dua, Solusi Umum, Solusi Partikular

Persamaan Riccati yaitu persamaan diferensial biasa nonlinier yang muncul dalam masalah-masalah klasik dari kalkulus variasi, kontrol optimum, dan pemrograman dinamik. Penelitian ini mempresentasikan suatu metodologi untuk mengkonstruksi solusi umum persamaan Riccati yang terdiri dari empat tahap. Pertama, menganalisis persamaan Riccati. Kedua, menganalisis eksistensi solusi umum persamaan Riccati dengan beberapa solusi partikular dan tanpa solusi partikular. Ketiga, menganalisis ketunggalan solusi umum persamaan Riccati. Keempat, menganalisis kekonvergenan solusi persamaan Riccati.

Hasil dari penelitian ini diberikan solusi umum persamaan Riccati dengan beberapa solusi partikular hingga tiga solusi partikular. Solusi umum yang diperoleh:

1. Diberikan solusi partikular $y_0 = y_0(x)$ terhadap persamaan Riccati. Solusi umum persamaan Riccati memiliki bentuk $y(x) = y_0(x) \pm w(x)$ yang dapat ditemukan melalui dua pengintegralan:
$$y(x) = y_0(x) \pm \Phi(x)\left[C \mp \int \Phi(x) f_2(x)dx\right]^{-1}$$
dengan
$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$
dan C konstanta sebarang.
2. Diberikan solusi partikular $y_0 = y_0(x)$ terhadap persamaan Riccati. Solusi umum persamaan Riccati memiliki bentuk $y(x) = y_0(x) \pm [w(x)]^{-1}$ yang dapat ditemukan melalui dua pengintegralan dan diperoleh persamaan diferensial biasa linier:
$$w^{'} \pm f_2(x) + U(x)w = 0$$
di mana $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x)y_0$, yaitu:
$$(y - y_0)\left[C \mp \int \Psi(x) f_2(x)dx\right] = \pm\Psi(x)\,;$$
$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right]$$
dan $y = y(x)$. C konstanta sebarang.
3. Diberikan $y_1 = y_1(x)$ dan $y_2 = y_2(x)$ dua solusi partikular yang berbeda untuk persamaan Riccati. Solusi umum persamaan Riccati dapat ditemukan dengan hanya satu pengintegralan:
$$y(x) = \frac{Cy_1 + U(x)y_2}{C + U(x)}$$

di mana

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(y_1 - y_2)\, dx\right]$$

dan C konstanta sebarang.

4. Diberikan $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ tiga solusi partikular yang berbeda untuk persamaan Riccati. Maka solusi umum persamaan Riccati dapat ditemukan tanpa pengintegralan:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1}\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

untuk C konstanta sebarang.

Sedangkan untuk bentuk solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular dapat ditemukan dengan mengubah peubah terikat persamaan Riccati dari $y = y(x)$ menjadi $u = u(x)$, yaitu:

$$y(x) = -\frac{u^{'}}{u(x)f_2(x)},$$

mereduksi persamaan Riccati menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua:

$$f_2(x)u^{''} - [f_2^{'} + f_1(x)f_2(x)]u^{'} + f_0(x)[f_2(x)]^2 u = 0,$$

yang sering kali lebih mudah diselesaikan daripada persamaan Riccati yang asli.

ABSTRACT

Albab, M. Ulul. 2013. **Analysis of General Solutions of The Riccati Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(II) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

Keywords: Riccati Equation, A Second Order Linear Homogenous Ordinary Differential Equation, General Solution, Particular Solution

The Riccati equation is a nonlinear ordinary differential equation appear in the classical problems of the calculus of variations, optimal control, and dynamic programming. This research present a methodology for constructing general solutions of the Riccati equation was done by four steps. First, analyze of the Riccati equation. Second, analyze to the existence of general solutions of the Riccati equation with some particular solutions and without particular solution. Third, analyze to the uniqueness of general solutions of the Riccati equation. Fourth, analyze to the convergence solution of the Riccati equation.

The result of this research is given the general solution of the Riccati equation with some particular solutions until three particular solutions. The general solutions are obtained:

1. Let a particular solution $y_0 = y_0(x)$ of the Riccati equation. The general solution of the Riccati equation has the form $y(x) = y_0(x) \pm w(x)$ can be found by two integration:

$$y(x) = y_0(x) \pm \Phi(x)\left[C \mp \int \Phi(x) f_2(x) dx\right]^{-1}$$

with

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

and C is arbitrary constant.

2. Let a particular solution $y_0 = y_0(x)$ of the Riccati equation. The general solution of the Riccati equation has the form $y(x) = y_0(x) \pm [w(x)]^{-1}$ can be found by two integration and be obtained linear ordinary differential equation:

$$w' \pm f_2(x) + U(x)w = 0$$

where $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x)y_0$, is

$$(y - y_0)\left[C \mp \int \Psi(x) f_2(x) dx\right] = \pm\Psi(x)\,;$$

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right]$$

and $y = y(x)$. C is arbitrary constant.

3. Let $y_1 = y_1(x)$ dan $y_2 = y_2(x)$ be two different particular solutions to the Riccati equation. The general solution of the Riccati equation can be found with only one integration:

$$y(x) = \frac{Cy_1 + U(x)y_2}{C + U(x)}$$

where

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(y_1 - y_2)\,dx\right]$$

and C is arbitrary constant.

4. Let $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ be three distinct particular solutions to the Riccati equation. The general solution of the Riccati equation can be found without integration:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1}\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

for C is arbitrary constant.

Whereas to the form of general solution of the Riccari equation without particular solution can be found with change the dependent variable of the Riccati equation from $y = y(x)$ to $u = u(x)$, is:

$$y(x) = -\frac{u'}{u(x)f_2(x)},$$

reduces the Riccati equation to a second order linear homogenous ordinary differential equation:

$$f_2(x)u'' - [f_2' + f_1(x)f_2(x)]u' + f_0(x)[f_2(x)]^2u = 0,$$

which often may be easier to solve than the original Riccati equation.

ملخص

الباب, م. أولول. ٢٠١٣. **التحليل حل عا م للمعادلة ريجا تي**. بحث الجامعي. شعبة الرياضية. كلية العلوم والتكنو لوجي. جامعة مولانا مالك إبراهم الإسلامية الحكومية مالانج.

مشريف: (١) الحج وحيو هنكي إراوان، الماجستير
(٢) اري كوسوماستوتي، الماجستير

الكلمات الأساسية: معادلة ريجاتي، المعادلة متجانسة التفاضلية العادية الخطية منأجل اثنين، حل معين، حل عام

المعادلا تغير الخطية ريجاتي هي المعادلا تالتفاضلية العادية التي تنشأفي المشاكلا لكلاسيكية منحساب التفاضل والتكاملمن الاختلافات، والتحكم الأمثل، والبرمجة الديناميكية تقدم . هذه الدراسة منهجية لبناء المعادلة ريجاتي الحل العام تتكون من أربع مراحل. أولا، التحليل لمعادلة ريجاتي. ثانيا، التحليل وجود حل عام للمعادلة ريجاتي وحل معين دونأي حل معين. ثالثا التحليل حل المعادلةالتفرد ريجاتي العامة الداب. الرابعة، التحليل حلول التقاربالمعادلة ريجاتي .

نتائجهذه الدراسةبالنظر إلىالمعادلةالعامة ريجاتي حلمعبعض الحلولخاصة لثلاثة حلول معينة .يتم الحصول على الحل العام:

١. أعطيت حل معين $y_0 = y_0(x)$ ضد الحل العام معادلة ريجاتي لديهشكل $y(x) = y_0(x) \pm w(x)$ التييمكنالعثورعليهامنخلالاثنينمنالتكام

$$y(x) = y_0(x) \pm \Phi(x)\left[C \mp \int \Phi(x) f_2(x) dx\right]^{-1}$$

مع

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x) y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

و C ثابتالتعسفي.

٢. أعطيت حل معين $y_0 = y_0(x)$ ضد الحل العام معادلة ريجاتيلديهشكل $y(x) = y_0(x) \pm [w(x)]^{-1}$ التييمكنالعثورعليهامنخلالاثنينمنالتكام

$$w' \pm f_2(x) + U(x) w = 0$$

حيث $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x) y_0$ وهي

$$(y - y_0)\left[C \mp \int \Psi(x) f_2(x) dx\right] = \pm \Psi(x) ;$$

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right]$$

و $y = y(x)$ و C ثابتالتعسفي.

٣. أعطيت $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ حلانمنمختلفالمعادلةريجاتيخاصةريجاتيالمعادلةثمحل عاميمكن العثور عليها معتكاملو احدفقط:

$$y(x) = \frac{C y_1 + U(x) y_2}{C + U(x)}$$

حيث

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(y_1 - y_2)\, dx\right]$$

و C ثابتالتعسفي.

٤. أعطيت $y_1 = y_1(x)$،$y_2 = y_2(x)$،$y_3 = y_3(x)$ ثلاثة مختلفة خاصة حلولا لمعادلة ريجاتيريجاتي المعادلة ثمحل عاميمكن العثور عليهادونالتكامل:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

إلى C ثابتا لتعسفي

أما بالنسبة للشكل العامالمعادلة ريجاتيجلدونحل معينيمكنالعثور عليها عن طريقتغيير المتغيراتلزمةريجاتيهعادلة $y = y(x)$ إلى $u = u(x)$، وهي:

$$y(x) = -\frac{u'}{u(x)f_2(x)},$$

يقلل المعادلة ريجاتي إلى المعادلة متجانسة التفاضلية العادية الخطية منأجل اثنين:

$$f_2(x)u'' - [f_2' + f_1(x)f_2(x)]u' + f_0(x)[f_2(x)]^2u = 0,$$

التي غالبا ما تكونأسهل فيحلمنالمعادلةريجاتيالأصلي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Firman Allah dalam surat Ali Imran ayat 186:

لَتُبْلَوُنَّ فِىٓ أَمْوَٰلِكُمْ وَأَنفُسِكُمْ وَلَتَسْمَعُنَّ مِنَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ مِن قَبْلِكُمْ وَمِنَ ٱلَّذِينَ
أَشْرَكُوٓا۟ أَذًى كَثِيرًا ۚ وَإِن تَصْبِرُوا۟ وَتَتَّقُوا۟ فَإِنَّ ذَٰلِكَ مِنْ عَزْمِ ٱلْأُمُورِ ﴿١٨٦﴾

"Kamu benar-benar akan diuji terhadap hartamu dan dirimu. Dan (juga) kamu benar-benar akan mendengar dari orang-orang yang diberi Kitab sebelum kamu dan dari orang-orang yang mempersekutukan Allah, gangguan yang banyak yang menyakitkan hati. Jika kamu bersabar dan bertakwa, maka sesungguhnya yang demikian itu termasuk urusan yang patut diutamakan".

Surat Ali Imran ayat 186 ini menyiratkan bahwa Allah telah menginformasikan kepada setiap orang mukmin bahwasanya mereka pasti akan menghadapi suatu masalah tertentu yang harus segera diselesaikan. Ayat ini menjelaskan tentang masalah yang menjadi suatu keharusan bagi seorang mukmin berupa ujian pada harta, dirinya, anak-anak, dan keluarganya. Orang mukmin akan memperoleh ujian dari Allah sesuai kadar ilmu agamanya. Jika orang mukmin memiliki ilmu agama yang kuat, maka orang mukmin akan diberikan ujian yang berat dari-Nya. Dalam ayat ini, Allah memerintahkan kepada seorang mukmin agar bersabar dan memberikan maaf dalam menghadapi ujian dan gangguan dari orang-orang yang mempersekutukan Allah. Ayat ini juga menjelaskan bahwa setiap orang yang menegakkan kebenaran, amar ma'ruf, dan nahi munkar pasti akan memperoleh gangguan. Tidak ada obat baginya kecuali bertakwa karena Allah, memohon pertolongan, dan kembali kepada-Nya (Katsir, 2007).

Surat Ali Imran ayat 186 secara garis besar telah mengajarkan tentang suatu metodologi yang baik dalam menyelesaikan masalah secara tepat dan berdasarkan kaidah syar'i. Permasalahan dalam surat Ali Imran ayat 186 memiliki analog dengan permasalahan tentang solusi umum persamaan Riccati dalam kajian matematika. Persamaan Riccati merupakan keluarga dari persamaan diferensial. Abell dan Braselton (1993), persamaan diferensial yaitu persamaan yang memuat turunan fungsi dari satu atau lebih peubah terikat terhadap satu atau lebih peubah bebas. Selanjutnya jika dalam suatu persamaan diferensial memuat turunan fungsi biasa dari satu atau lebih peubah terikat terhadap satu peubah bebas, maka persamaan itu disebut persamaan diferensial biasa. Contoh persamaan diferensial biasa yaitu persamaan Riccati yang sebagian besar dijumpai dalam matematika fisika dan masalah dinamika mekanik berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinier.

Persamaan Riccati yaitu persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu yang diajukan pada tahun 1724 oleh matematikawan Itali, Vicenzo Riccati. Persamaan Riccati memiliki hubungan dengan persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua. Hubungan itu disebut persamaan diferensial Legendre untuk masalah integral sederhana kalkulus variasi. Dalam aplikasinya, persamaan Riccati muncul dalam masalah-masalah klasik dari kalkulus variasi, kontrol optimum dan pemrograman dinamik (Reid, 1972).

Orde persamaan Riccati yaitu orde satu karena merupakan orde tertinggi dalam persamaan Riccati. Ketika koefisien dari perkalian peubah tak bebas pangkat tertinggi dalam persamaan Riccati sama dengan nol, maka persamaan Riccati tereduksi menjadi persamaan diferensial biasa linier. Akan tetapi, jika koefisien dari perkalian peubah tak bebas pangkat tertinggi dalam persamaan Riccati tidak sama dengan nol maka persamaan Riccati dapat ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua (Ince, 1978). Persamaan Riccati menjadi pesamaan Bernoulli jika koefisien dari perkalian peubah tak bebas pangkat terkecilnya sama dengan nol (Polyanin dan Zaitsev, 2003). Persamaan Riccati merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier dengan penyelesaian yang unik dan untuk memperoleh solusi umumnya dibutuhkan solusi partikular (Hille, 1997).

Solusi yaitu uraian berupa penyelesaian dari soal atau masalah yang harus terjawab dengan benar dan jelas. Solusi persamaan diferensial yaitu setiap fungsi yang memberikan kebenaran pernyataan ketika disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut (Boyce dan DiPrima, 2001). Salah satu contohnya yaitu solusi umum pesamaan Riccati di bidang real yang diselesaikan dengan metode-metode tertentu secara logis. Dalam Reid (1972), solusi persamaan Riccati memiliki struktur partikular atau disebut solusi umum yang merupakan fungsi linier fraksional terhadap konstanta integrasi. Solusi persamaan Riccati melibatkan reduksi persamaan diferensial biasa linier homogen orde n menurut bentuk kanonik Forsyth-Laguerre di mana koefisien-koefisen turunan dari orde $n - 1$ dan $n - 2$ adalah nol.

Dari penelitian sebelumnya, Behloul dan Cheng (2011) memberikan solusi umum ketika persamaan diferensial berbentuk fungsi rasional eliptik, hiperbolik, parabolik, Riccati, dan quasi-linier dengan algoritma yang sistematis. Solusi umum dari bentuk Riccati dapat diselesaikan dengan dua metode analitis yaitu dengan memberikan solusi partikular dan tanpa memberikan solusi partikular. Dalam metode pertama solusi partikular yang diberikan berbentuk fungsi rasional yang tidak diketahui. Sedangkan untuk metode kedua, persamaan Riccati harus tereduksi menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua sehingga dapat diperoleh solusi umumnya yang berbentuk fungsi rasional.

Sesuai makna yang tersirat dalam surat Ali Imran ayat 186, maka dapat disimpulkan tahapan-tahapan yang bersifat siklus dalam memperoleh solusi umum persamaan Riccati, yaitu: (1) masalah persamaan Riccati, (2) metode-metode atau kaidah-kaidah tertentu yang logis terhadap persamaan Riccati, (3) iterasi atau aksi terhadap persamaan Riccati, (4) solusi umum persamaan Riccati, dan (5) validasi solusi umum persamaan Riccati.

Dalam penelitian ini, penulis akan menganalisis solusi umum persamaan Riccati dan memberikan generalisasi solusi umumnya. Penelitian ini mempresentasikan suatu metodologi untuk mengkonstruksi solusi umum yang belum diketahui dari persamaan Riccati secara tepat dengan memberikan solusi partikular dan tanpa memberikan solusi partikular. Oleh karena itu maka penulis tertarik melakukan penelitian ini dan mentransformasinya dengan judul “Analisis Solusi Umum Persamaan Riccati”.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini membahas rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis persamaan Riccati?
2. Bagaimana analisis eksistensi solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular dan tanpa solusi partikular?
3. Bagaimana analisis ketunggalan solusi umum persamaan Riccati?
4. Bagaimana analisis kekonvergenan solusi persamaan Riccati?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini memiliki tujuan sebagai berikut:

1. Memaparkan analisis persamaan Riccati.
2. Memberikan analisis eksistensi solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular dan tanpa solusi partikular.
3. Memberikan analisis ketunggalan solusi umum persamaan Riccati.
4. Memberikan analisis kekonvergenan solusi persamaan Riccati.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Bentuk persamaan Riccati yang dianalisis pada penelitian ini berbentuk $y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$
2. Koefisien persamaan Riccati yaitu polinomial berorde satu.
3. Domain analisis solusi umum persamaan Riccati di real.
4. Generalisasi bentuk solusi persamaan Riccati ketika diberikan solusi partikular hingga tiga solusi partikular.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan memberi manfaat sebagai berikut:

1. Penelitian ini memberikan suatu metodologi dalam mengkonstruksi solusi umum persamaan Riccati secara sistematis.
2. Penelitian dapat diterapkan dalam masalah dinamika mekanik, yaitu menemukan solusi analitik persamaan nonlinier kinematik Euler saat ditransformasi menjadi persamaan Riccati.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Analisis asal usul persamaan Riccati.
2. Mereduksi persamaan Riccati menjadi bentuk persamaan Bernoulli dan mentransformasinya ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa linier.
3. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier dengan kaidah faktor pengintegral dan persamaan diferensial peubah terpisah sehingga didapatkan solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular.
4. Mereduksi persamaan Riccati menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua sehingga didapatkan solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular.
5. Validasi ketunggalan solusi umum persamaan Riccati dengan kaidah kondisi Lipschitz.
6. Validasi kekonvergenan solusi persamaan Riccati dengan kaidah barisan dan deret.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini terdiri atas empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab pertama membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab kedua berisi tentang dasar teoritik persamaan diferensial biasa, kaidah solusi persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa orde satu, eksistensi dan ketunggalan (*uniqueness*) solusi persamaan diferensial biasa, dasar teoritik fungsi real, dan kajian solusi dalam Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Pada bab ketiga membahas tentang analisis persamaan Riccati, analisis eksistensi solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular dan tanpa solusi partikular, analisis ketunggalan solusi umum persamaan Riccati, analisis kekonvergenan solusi persamaan Riccati, dan integrasi solusi umum persamaan Riccati dalam Al-Qur'an.

Bab IV Penutup

Pada bab keempat berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Dasar Teoritik Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.1 Persamaan diferensial yaitu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih peubah terikat terhadap satu atau lebih peubah bebas (Ross, 1984).

Definisi 2.2 Persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*) yaitu persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih fungsi (peubah terikat) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas (Ross, 1984).

Definisi 2.3 Diberikan bentuk persamaan diferensial

$$N(x,y)\,\frac{dy}{dx} + M(x,y) = 0. \qquad (2.1)$$

Persamaan diferensial (2.1) dapat dinyatakan dalam bentuk lain dengan mengalikannya dengan dx pada kedua ruas persamaan, menghasilkan

$$M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.2)$$

maka peubah-peubah dari persamaan diferensial (2.2) dinyatakan terpisah dan disebut sebagai persamaan diferensial dengan peubah terpisah (Darmawijoyo, 2011).

Definisi 2.4 Persamaan diferensial orde satu $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ disebut persamaan diferensial biasa homogen jika ketika ditulis dalam bentuk turunan $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, ada fungsi g sedemikian sehingga $f(x,y)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $g\left(\frac{y}{x}\right)$ (Ross, 1984).

Definisi 2.5 Diberikan F yaitu fungsi terhadap dua peubah riil sedemikian sehingga F memiliki turunan parsial pertama yang kontinu di dalam suatu domain D. Diferensial total terhadap fungsi F didefinisikan dengan bentuk

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

untuk setiap $(x,y) \in D$ (Ross, 1984).

Definisi 2.6 Bentuk diferensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \qquad (2.3)$$

disebut diferensial eksak di dalam suatu domain D jika ada fungsi F terhadap dua peubah riil sedemikian sehingga bentuk diferensial (2.3) sama dengan diferensial total $dF(x,y)$ untuk setiap $(x,y) \in D$. Maka bentuk diferensial (2.3) merupakan diferensial eksak di D jika ada fungsi F sedemikian sehingga

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ dan } \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

untuk setiap $(x,y) \in D$. Jika $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ yaitu diferensial eksak, maka persamaan diferensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

disebut persamaan diferensial biasa eksak (Ross, 1984).

Definisi 2.7 Bentuk persamaan diferensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.4)$$

yaitu tidak eksak di suatu domain D. Tetapi, jika persamaan diferensial (2.4) menjadi

$$\phi(x,y)\,M(x,y)\,dx + \phi(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

yang eksak di suatu domain D, maka $\phi(x, y)$ disebut sebagai faktor pengintegral persamaan diferensial (2.4) (Ross, 1984).

Definisi 2.8 Orde (tingkat) persamaan diferensial yaitu orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial itu yang tingkatnya tertinggi (Ross, 1984).

Secara umum persamaan diferensial berorde n dapat dituliskan sebagai:

$$F\left(x, u, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{2.5}$$

menyatakan relasi antara peubah bebas x dan nilai dari fungsi $u, u', \dots, u^{(n)}$. Penulisan bentuk lain ditulis y untuk $u(x)$, y' untuk $u'(x) = \frac{du}{dx}$, dan seterusnya. Sehingga persamaan diferensial (2.5) dapat ditulis sebagai:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(Waluya, 2006).

Definisi 2.9 Persamaan diferensial biasa berbentuk polinomial dalam fungsi (peubah terikat) beserta turunan-turunannya, pangkat tertinggi dari perkalian peubah terikat beserta turunan-turunanya yang terdapat dalam persamaan diferensial biasa itu disebut pangkat atau derajat (Pamuntjak dan Santosa, 1990).

Definisi 2.10 Persamaan diferensial biasa linier orde (tingkat) n dalam peubah terikat y dan peubah bebas x, yaitu persamaan diferensial yang dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{2.6}$$

di mana $a_0 \neq 0$. Sifat-sifat persamaan diferensial biasa linier (2.6), yaitu (1) peubah terikat y dan turunannya berderajat satu, (2) tidak ada perkalian terhadap

y dan atau turunan-turunannya, dan (3) bukan merupakan fungsi transenden terhadap y dan atau turunan-turunannya. Sedangkan jika persamaan diferensial biasa bukan persamaan diferensial linier maka disebut persamaan diferensial biasa nonlinier (Ross, 1984).

Definisi 2.11 Persamaan diferensial biasa orde satu disebut linier terhadap peubah terikat y dan peubah bebas x, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.7}$$

Jika $Q(x) = 0$ maka persamaan (2.7) disebut persamaan diferensial biasa linier homogen orde satu. Dalam hal $Q(x) \neq 0$ disebut persamaan diferensial biasa nonhomogen orde satu (Pamuntjak dan Santoso, 1990).

Definisi 2.12 Persamaan Bernoulli yaitu suatu persamaan diferensial biasa dari bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{2.8}$$

Jika $n = 0$ atau 1, maka Persamaan Bernoulli (2.8) menjadi persamaan diferensial biasa linier dan dapat langsung diselesaikan. Akan tetapi, dalam kasus yang umum di mana $n \neq 0$ atau 1, solusinya lain dan harus diselesaikan dengan cara berbeda (Ross, 1984).

Diberikan contoh persamaan diferensial biasa berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2 \neq 0 \tag{2.9}$$

dengan $y = y(x)$.

Persamaan diferensial (2.9) yaitu persamaan umum Riccati (Polyanin dan Zaitsev, 2003). Persamaan umum Riccati (2.9) berorde satu karena merupakan orde tertinggi. Persamaan umum Riccati (2.9) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier karena peubah terikat y memiliki derajat dua di $f_2(x)y^2$.

2.2 Kaidah Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.13 Solusi persamaan diferensial biasa adalah tiap fungsi $f(x)$ terdiferensiabel ke-n dan terdefinisi pada interval $a < x < b$ (bisa tak hingga) sedemikian sehingga $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ menjadi suatu kesamaan (*identity*) ketika y dan turunan-turunannya digantikan dengan $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ dan memenuhi $f^n(x) = F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{n-1}(x))$ (Goldstein dan Braun, 1973).

Definisi 2.14 Solusi persamaan diferensial biasa pada interval yang diberikan adalah fungsi kontinu pada interval dan di setiap persamaan diferensial biasa tersebut terdapat turunan-turunannya sedemikian sehingga ketika disubtitusi ke dalam lingkungan persamaan diferensial biasa tersebut menjadi suatu kesamaan (*identity*) untuk setiap nilai pada interval (Abell dan Braselton, 1993).

Ilustrasi untuk definisi 2.13 dan 2.14, misal diberikan contoh $y = y_0e^{kt}$ dengan y_0 yaitu sebarang konstanta, maka y disebut solusi persamaan diferensial biasa dari $dy = ky\ dt$ pada interval $-\infty < t < \infty$.

Definisi 2.15 Solusi umum (*general solution*) adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval (Ross, 1984). Pada umumnya solusi umum pesamaan diferensial biasa masih memuat konstanta (Ayres, 1952).

Definisi 2.16 Solusi khusus (partikular) adalah solusi yang tidak mememuat konstanta karena adanya syarat awal pada suatu persamaan diferensial biasa (Ayres, 1952).

Ilustrasi untuk definisi 2.15 dan 2.16, misal diberikan contoh $y' = 3$ memiliki solusi umum yaitu $y = 3x + C$. Jika diberikan syarat awal $y(0) = 1$, maka diperoleh solusi khusus yaitu $y = 3x + 1$.

2.3 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

2.3.1 Persamaan Diferensial Biasa Homogen

Teorema 2.1 Didefinisikan persamaan diferensial

$$M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.10}$$

yaitu persamaan diferensial biasa homogen. Dengan perubahan peubah $y = vx$, maka mentransformasi persamaan diferensial (2.10) menjadi persamaan diferensial dengan peubah terpisah dalam peubah v dan x (Ross, 1984).

Bukti:

Karena $M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0$ yaitu persamaan diferensial biasa homogen maka sesuai dengan definisi 2.4 dapat ditulis menjadi bentuk

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Didefinisikan bahwa $y = vx$ maka

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

dan persamaan diferensial (2.10) menjadi

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

atau

$$[v - g(v)]\,dx + x\,dv = 0. \tag{2.11}$$

Persamaan diferensial (2.11) disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Dengan mengalikan $\frac{1}{[v - g(v)]\, x}$ pada masing-masing sisi persamaan diferensial (2.11) diperoleh

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - g(v)} = 0.$$

2.3.2 Persamaan Diferensial Biasa Eksak

Teorema 2.2 Didefinisikan persamaan diferensial

$$M(x, y)dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.12}$$

di mana M dan N memiliki turunan parsial pertama yang kontinu di setiap titik (x, y) di dalam domain D:

1. Jika persamaan diferensial (2.12) ada di D maka

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{2.13}$$

   untuk setiap $(x, y) \in D$.

2. Akibatnya jika

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

   untuk setiap $(x, y) \in D$ maka persamaan diferensial (2.12) ada di D (Ross, 1984).

Bukti 1:

Jika persamaan diferensial (2.12) ada maka $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ yaitu diferensial eksak di D. Sesuai definisi 2.6 maka

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \text{ dan } \frac{\partial F(x, y)}{\partial \mathrm{y}} = N(x, y)$$

untuk setiap $(x, y) \in D$.

Andaikan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ memiliki turunan parsial pertama yang kontinu di dalam suatu daerah di bidang xy yang dibatasi lingkungan tertutup sederhana. Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \text{ dan } \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ dan $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ kontinu, maka

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

terbukti bahwa

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

untuk setiap $(x,y) \in D$.

Bukti 2:

Misalkan benar bahwa

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

untuk setiap $(x,y) \in D$. Akan ditunjukkan bahwa $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ untuk membuktikan bahwa ada fungsi $F(x,y)$ sedemikian sehingga

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.14}$$

dan

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.15}$$

untuk setiap $(x,y) \in D$. Misalkan jika fungsi F memenuhi persamaan (2.14) atau (2.15) maka

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + r(y) \tag{2.16}$$

di mana $r(y)$ yaitu suatu fungsi tidak diketahui yang bergantung hanya terhadap y.

Turunan persamaan (2.16) terhadap y dan memisalkan

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x + \frac{dr(y)}{dy} \tag{2.17}$$

dan

$$\frac{dr(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x. \tag{2.18}$$

Karena

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x \tag{2.19}$$

bergantung pada x dan fungsi r bergantung pada y maka agar orde masing-masing fungsi pada kedua sisi persamaan (2.17) sama, turunan $\frac{dr}{dy}$ harus bergantung terhadap x sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] &= \frac{\partial r(x,y)}{\partial x} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dari sisi sebelah kiri persamaan (2.20) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int M(x,y)\,\partial x.$$

Jika persamaan (2.14) dan (2.15) terpenuhi maka dengan teorema 2.2 bagian pertama diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int M(x,y)\,\partial x = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\int M(x,y)\,\partial x. \tag{2.21}$$

Dari persamaan (2.21) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\int M(x,y)\,\partial x$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Karena pada teorema 2.2 bagian pertama

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

untuk setiap $(x,y) \in D$ maka

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right] = 0$$

untuk setiap $(x,y) \in D$ dan persamaan (2.19) benar bergantung pada x. Integral dari persamaan (2.18)

$$r(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right]dy. \qquad (2.22)$$

Subtitusi persamaan (2.22) ke persamaan (2.16)

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\partial x\right]dy. \qquad (2.23)$$

Persamaan (2.23) menunjukkan bahwa $F(x,y)$ memenuhi persamaan (2.14) dan (2.15) untuk setiap $(x,y) \in D$ dan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. Jika persamaan (2.13) terpenuhi maka persamaan (2.12) yaitu persamaan diferensial biasa eksak. Tetapi, jika persamaan (2.13) tidak terpenuhi atau tidak sama maka persamaan (2.12) tidak persamaan diferensial biasa eksak.

Misal diberikan contoh persamaan diferensial:

1. $y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$

dengan $M(x,y) = y^2$ dan $N(x,y) = 2xy$.

Karena

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

untuk setiap $(x,y) \in D$ maka contoh persamaan diferensial (1) disebut persamaan diferensial biasa eksak di dalam suatu domain D.

2. $[U(x)w - f_2(x)]dx - dw = 0$

dengan $M(x,y) = [U(x)w - f_2(x)]$ dan $N(x,y) = -1$. Sedemikian sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} = U(x), \quad \frac{\partial N(x,w)}{\partial x} = 0.$$

Karena

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} \neq \frac{\partial N(x,w)}{\partial x}$$

untuk setiap $(x,w) \in D$ maka persamaan diferensial (2) disebut persamaan diferensial biasa tidak eksak di dalam suatu domain D.

2.3.3 Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde Satu

Teorema 2.3 Didefinisikan persamaan diferensial biasa linier orde satu (2.7)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

maka solusi umum persamaan diferensial biasa linier orde satu (2.7) yaitu

$$y(x) = C\, Y_1(x) + Y_2(x)$$

di mana

$$Y_1(x) = \exp\left[-\int P(x)\, dx\right]$$

dan

$$Y_2(x) = \exp\left[-\int P(x)\,dx\right]\left\{\int Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right]\right\}.$$

C sebarang konstanta (Murphy, 1960).

Bukti:

Persamaan diferensial biasa linier orde satu (2.7) dapat ditulis menjadi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y - Q(x) = 0. \tag{2.24}$$

Dengan mengalikan dx pada persamaan diferensial (2.24)

$$dy + [P(x)y - Q(x)]\,dx = 0. \tag{2.25}$$

Misalkan $M(x,y) = [P(x)y - Q(x)]\,dx$ dan $N(x,y) = 1$ maka diperoleh

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Jadi persamaan diferensial (2.25) tidak persamaan diferensial eksak kecuali jika $P(x) = 0$. Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan diferensial (2.25) dengan $\phi(x)$ sebagai fungsi yang tidak diketahui terhadap x, maka diperoleh:

$$\phi(x)dy + \phi(x)[P(x)y - Q(x)]dx = 0. \tag{2.26}$$

Dengan mendefinisikan $\phi(x)$ sebagai faktor integrasi yang bergantung x terhadap persamaan diferensial (2.26) jika dan hanya jika persamaan diferensial (2.26) adalah eksak, sehingga jika dan hanya jika

$$\frac{\partial}{\partial y}[\phi(x)P(x)y - \phi(x)Q(x)(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x)]$$

maka dapat dinyatakan

$$\phi(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\phi(x)]. \tag{2.27}$$

Persamaan (2.27) dapat ditulis menjadi

$$\phi P(x) = \frac{d\phi}{dx}$$

untuk $\phi = \phi(x)$. Jika peubah-peubah dari persamaan (2.27) dinyatakan terpisah diperoleh

$$\frac{d\phi}{\phi} = P(x)dx \tag{2.28}$$

yang disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Jika masing-masing sisi dari persamaan diferensial dengan peubah terpisah (2.28) diintegralkan diperoleh

$$\ln|\phi| = \int P(x)dx$$

maka

$$\phi(x) = \exp\left[\int P(x)\, dx\right] \tag{2.29}$$

di mana $\phi > 0$. Persamaan (2.29) merupakan solusi persamaan (2.27).

Kembali ke persamaan diferensial (2.26) di mana

$$\phi(x)dy + \phi(x)[P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

yaitu

$$\phi(x)\frac{dy}{dx} + \phi(x)[P(x)y - Q(x)] = 0$$

maka

$$\phi(x)\frac{dy}{dx} + \phi(x)P(x)y = \phi(x)Q(x)$$

karena $\phi(x) = \exp\left[\int P(x)\, dx\right]$ diperoleh

$$\exp\left[\int P(x)\, dx\right]\frac{dy}{dx} + \exp\left[\int P(x)\, dx\right]P(x)y = Q(x)\exp\left[\int P(x)\, dx\right]$$

atau sama dengan

$$\frac{d}{dx}\left[\exp\left[\int P(x)\,dx\right]y\right] = Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right]$$

jika kedua ruas dikalikan dengan dx maka diperoleh

$$d\left[\exp\left[\int P(x)\,dx\right]y\right] = Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right]dx$$

jika kedua ruas diintegralkan diperoleh

$$\exp\left[\int P(x)\,dx\right]y = \int Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right] + C. \tag{2.30}$$

Dengan mengalikan $\exp\left[-\int P(x)dx\right]$ pada persamaan (2.30) diperoleh

$$y = \exp\left[-\int P(x)dx\right]\int Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right] + C\exp\left[-\int P(x)dx\right]. \tag{2.31}$$

Dengan memisalkan

$$Y_1(x) = \exp\left[-\int P(x)\,dx\right]$$

dan

$$Y_2(x) = \exp\left[-\int P(x)\,dx\right]\left\{\int Q(x)\exp\left[\int P(x)\,dx\right]\right\}.$$

maka persamaan (2.31) menjadi

$$y(x) = Y_2(x) + C\,Y_1(x)$$

untuk C sebarang konstanta.

Teorema 2.4 Jika diketahui $y_1 = y_1(x)$ solusi partikular terhadap persamaan diferensial biasa linier orde satu maka solusi umumnya dapat ditemukan dengan sekali pengintegralan, yaitu

$$y(x) = y_1 + U(x)$$

di mana

$$U(x) = C \exp\left[-\int P(x)\, dx\right]$$

(Murphy, 1960).

Bukti:

Diketahui $y_1 = y_1(x)$ solusi partikular terhadap persamaan diferensial biasa linier orde satu maka diperoleh

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = Q(x). \tag{2.32}$$

Karena $y = y(x)$ yaitu solusi umum persamaan diferensial biasa linier orde satu maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.33}$$

Eliminasi persamaan diferensial biasa linier orde satu (2.33) dengan persamaan diferensial biasa linier orde satu (2.32)

$$\frac{d}{dx}[y - y_1] + P(x)[y - y_1] = 0. \tag{2.34}$$

Persamaan diferensial (2.34) disebut persamaan diferensial biasa linier homogen orde satu terhadap peubah terikat $[y - y_1]$ dan peubah bebas x.

Persamaan diferensial biasa linier homogen orde satu (2.34) dapat dinyatakan

$$\frac{d}{dx}[y - y_1] = -P(x)[y - y_1]. \tag{2.35}$$

Memisahkan peubah dari persamaan (2.35) dan mengintegralkannya diperoleh

$$\int \frac{d[y - y_1]}{[y - y_1].} = -\int P(x)\, dx. \tag{2.36}$$

Hasil integral dari persamaan (2.36)

$$\ln[y - y_1] = -\int P(x)\,dx + K. \tag{2.37}$$

Karena $K = \ln\left[y_0 - y_{1_0}\right]$ maka persamaan (2.37) menjadi

$$\ln[y - y_1] = -\int P(x)\,dx + \ln\left[y_0 - y_{1_0}\right]$$

maka

$$\ln[y - y_1] - \ln\left[y_0 - y_{1_0}\right] = -\int P(x)\,dx$$

karena $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$ maka

$$\ln\frac{y - y_1}{y_0 - y_{1_0}} = -\int P(x)\,dx$$

atau sama dengan

$$\frac{y - y_1}{y_0 - y_{1_0}} = \exp\left[-\int P(x)\,dx\right]$$

maka

$$y - y_1 = \left[y_0 - y_{1_0}\right]\exp\left[-\int P(x)\,dx\right]. \tag{2.38}$$

Misalkan $C = \left[y_0 - y_{1_0}\right]$ maka persamaan (2.38) menjadi

$$y - y_1 = C\exp\left[-\int P(x)\,dx\right]$$

yaitu

$$y - y_1 = U(x)$$

maka

$$y = y_1 + U(x)$$

di mana

$$U(x) = C\exp\left[-\int P(x)\,dx\right].$$

Teorema 2.5 Jika diketahui dua solusi partikular berbeda $y_1 = y_1(x)$ dan $y_2 = y_2(x)$ terhadap persamaan diferensial biasa linier orde satu maka solusi umumnya dapat ditemukan dengan tanpa pengintegralan, yaitu

$$y(x) = y_1(x) + C[y_2(x) - y_1(x)]$$

(Murphy, 1960).

Bukti:

Sesuai teorema 2.3 bentuk solusi umum persamaan diferensial biasa linier orde satu yaitu

$$y(x) = CY_1(x) + Y_2(x). \tag{2.39}$$

Karena $y_1 = y_1(x)$ dan $y_2 = y_2(x)$ dua solusi partikular yang berbeda terhadap persamaan diferensial biasa linier orde satu maka diperoleh

$$y_1(x) = C_1Y_1(x) + Y_2(x) \tag{2.40}$$

dan

$$y_2(x) = C_2Y_1(x) + Y_2(x) \tag{2.41}$$

di mana C_1, C_2 sebarang kontanta. Eliminasi persamaan (2.39) dengan persamaan (2.40)

$$y(x) - y_1(x) = [C - C_1]Y_1(x). \tag{2.42}$$

Eliminasi persamaan (2.41) dengan persamaan (2.39)

$$y_2(x) - y_1(x) = [C_2 - C_1]Y_1(x). \tag{2.43}$$

Bagi persamaan (2.42) dengan persamaan (2.43)

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}. \tag{2.44}$$

Karena $\dfrac{C - C_1}{C_2 - C_1} = C$ untuk C sebarang konstanta maka persamaan (2.44) menjadi

$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=C$$

$$y(x)-y_1(x)=C[y_2(x)-y_1(x)]$$

$$y(x)=y_1(x)+C[y_2(x)-y_1(x)].$$

2.3.4 Persamaan Bernoulli

Teorema 2.6 Andaikan $n \neq 0$ atau 1. Maka transfosmasi $v=y^{1-n}$ untuk mereduksi persamaan Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{2.8}$$

menjadi persamaan linier pada v (Ross, 1984).

Bukti:

Pertama mengalikan persamaan Bernoulli (2.8) dengan y^{-n}, sedemikian sehingga diperoleh bentuk

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \tag{2.45}$$

Jika diberikan $v=y^{1-n}$, maka

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

dan persamaan diferensial (2.45) berubah menjadi

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x)$$

atau ekuivalen dengan bentuk

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)P(x)v=(1-n)Q(x). \tag{2.46}$$

Memberikan

$$P_1(x)=(1-n)P(x) \tag{2.47}$$

dan

$$Q_1(x)=(1-n)Q(x). \tag{2.48}$$

Sehingga dari persamaan (2.46), (2.47), dan (2.48) diperoleh

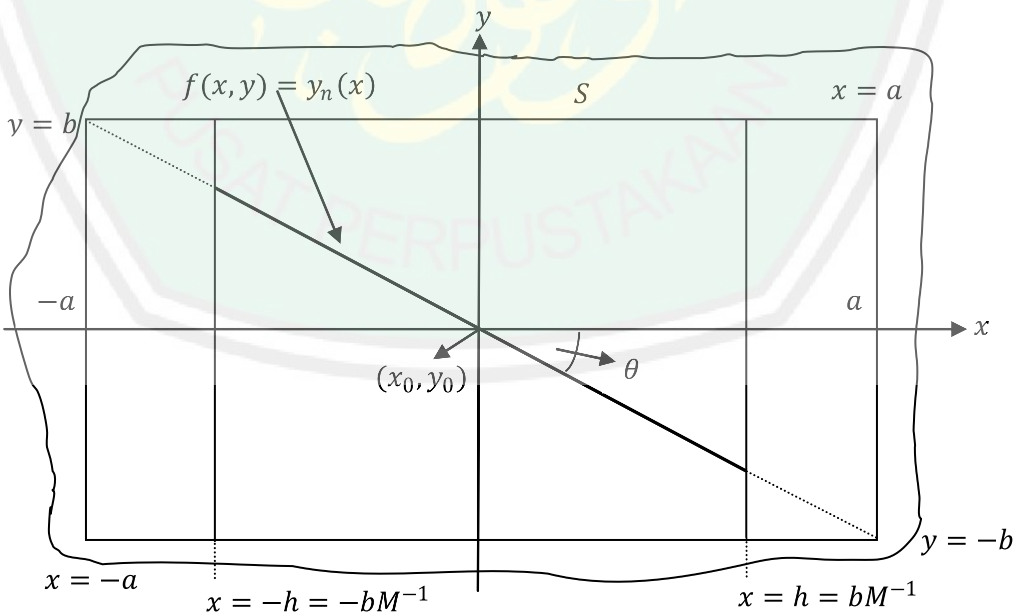
$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

yang merupakan bentuk persamaan linier pada v.

2.4 Eksistensi dan Ketunggalan (*Uniqueness*) Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Ketika membicarakan tentang suatu persamaan yang sebenarnya memiliki suatu solusi, maka kita harus menunjukkan bahwa persamaan tersebut ada solusi (*existence of solution*). Jika persamaan diferensial telah ada solusinya, maka selanjutnya harus ditunjukkan bahwa solusi persamaan diferensial tersebut memiliki solusi tunggal atau tidak dengan memberikan masalah kondisi awal (King, dkk., 2003).

2.4.1 Eksistensi Solusi



Gambar 2.1: Persegi Panjang dalam Bidang xy dengan $h < a$ dan $h = min\{a, bM^{-1}\} = bM^{-1}$ (Boyce dan DiPrima, 2001).

Didefinisikan $\boldsymbol{S}$ yaitu himpunan semesta. (x_0, y_0) yaitu titik-titik interior atau partikular dalam persegi panjang atau R. Di mana $R = \{(x, y) \in S: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, terbatas di S, maka ada konstanta positif M sehingga $|\tan\theta| \leq M$ atau $|f(x, y)| \leq M$ untuk setiap $(x, y) \in \boldsymbol{S}$. Didefinisikan juga h lebih kecil dari a dan $h = \min(a, bM^{-1}) = bM^{-1}$. Jika $h < a$ maka diperoleh $|x - x_0| \leq h$ ditunjukkan oleh gambar 3.1

Misalkan $y = y(x)$ didefinisikan solusi persamaan diferensial dan y_0 yaitu kondisi awal ketika $x = x_0$, maka

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f\,[s, y(s)]ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]ds$$

Lemma 2.1 Jika $h = \min(a, bM^{-1})$, maka dengan cara approksimasi secara berturut-turut,

$$y_0(x) = y_0, \qquad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_n(s)]ds$$

yang terdefinisi pada interval $I = \{x||x - x_0| < h\}$, dan pada interval ini $|y_n(x) - y_0| < M|x - x_0| \leq b, |f| < M$ (King, dkk., 2003).

Bukti:

Misalkan ada $A \in R$ di mana $A = \{(x, y_n): |x - x_0| \leq a, |y_n(x) - y_0| \leq b\}$. Jadi $A \subset R$ dan $A \neq \emptyset$. Karena y_n ada maka y_n memiliki turunan kontinu yang terdefinisi pada interval $[x_0, x_0 + h]$ dan terbatas. Sehingga $f[x, y_n(x)]$ terdefinisi dan kontinu serta memenuhi $|f[x, y_n(x)]\,| \leq M$ pada interval $[x_0, x_0 + h]$. Diketahui di mana

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_n(s)]ds$$

Sedemikian sehingga y_{n+1} ada dan memiliki turunan kontinu yang terdefinisi pada interval $[x_0, x_0 + h]$. Akibatnya

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[s, y_n(s)]ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f[s, y_n(s)]|ds\right|$$

$$\leq M\left|\int_{x_0}^{x} ds\right|$$

$$\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq MbM^{-1} \leq b.$$

2.4.2 Ketunggalan Solusi

Solusi masalah kondisi awal yang berhubungan dengan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

dan titik (x_0, y_0)

$$y(x_0) = y_0,$$

yaitu tunggal atau unik.

Lemma 2.2 Jika $f(x)$ dan $g(x)$ yaitu fungsi-fungsi nonnegatif pada interval $h \leq x \leq i$, L yaitu konstanta nonnegatif dan

$$f(x) \leq L + \int_{h}^{x} f(s)g(s)\, ds, \quad x \in [h, i]$$

maka

$$f(x) \leq L \exp\left\{\int_{h}^{x} g(s)\, ds\right\}, \qquad x \in [h, i]$$

(King, dkk., 2003).

Bukti:

Didefinisikan

$$j(x) = L + \int_h^x f(s)g(s)\, ds,$$

dan $j(h) = L$. Diberikan, $f(x) \leq j(x)$, dan sesuai teorema dasar kalkulus, karena $g(x) \geq 0$, maka

$$j'(x) = f(x)g(x) \leq j(x)g(x) \text{ untuk } x \in [h, i].$$

Sesuai dengan faktor pengintegral, maka

$$\frac{d}{dx}\left[j(x) \exp\left\{-\int_h^x g(s)\, ds\right\}\right] \leq 0. \qquad (2.49)$$

Hasil Integral (2.49) dari h ke x yaitu

$$j(x) \exp\left\{-\int_h^x g(s)\, ds\right\} - L \leq 0,$$

dan, karena $f(x) \leq j(x)$,

$$f(x) \leq L \exp\left\{\int_h^x g(s)\, ds\right\}.$$

Ketaksamaan ini disebut ketaksamaan Gronwall.

Teorema 2.7 Jika $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in R$ di mana R yaitu domain persegi panjang, maka solusi masalah nilai awal $y' = f(x, y)$ dengan $y(x_0) = y_0$ yaitu tunggal atau unik pada $|x - x_0| < h$ (King, dkk., 2003).

Bukti:

Andaikan ada dua solusi yang berbeda, yaitu $y = y_1(x)$ dan $y = y_2(x)$ dengan $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ serta memenuhi persamaan diferensial

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_1(s)]\ ds, \qquad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_2(s)]\ ds, \tag{2.50}$$

dan karena titik-titik $[s, y_n(s)]$ terdefinisi dalam R. Diperoleh modulus beda dari persamaan (2.50)

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \{f[s, y_1(s)] - f[s, y_2(s)]\}\ ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \{f[s, y_1(s)] - f[s, y_2(s)]\}\ ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} K|y_1(s) - y_2(s)|\ ds \ \text{ untuk } |x - x_0| \leq h. \end{aligned}$$

di mana $K > 0$ yaitu konstanta Lipschitz untuk domain R. Sesusaii lemma (2.2) atau ketaksamaan Gronwall terhadap fungsi nonnegatif $|y_1(x) - y_2(x)|$ dengan $L = 0$ dan $g(s) = K > 0$, maka diperoleh

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0.$$

Karena modulus suatu fungsi tak pernah negatif, maka

$$|y_1(x) - y_2(x)| = 0$$

$$y_1(x) - y_2\ (x) = 0$$

$$y_1(x) = y_2(x).$$

Terjadi kontradiksi. Terbukti bahwa solusi $y(x)$ tunggal.

2.5 Dasar Teoritik Fungsi Riil

2.5.1 Limit dan Fungsi

Definisi 2.17 Misalkan fungsi f dengan domain definisi D dan x_0 titik limit D. Bilangan L disebut titik limit fungsi f untuk x mendekati x_0, dan ditulis

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk semua $x \in D$ dengan $0 < |x - x_0| < \delta$ berlaku ketaksamaan $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Soemantri, 1994).

Definisi ini secara geometris dapat ditafsirkan apabila diberikan $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$, sehingga untuk semua $x \in D \cap N(x_0, \delta)$ dan $x \neq x_0$, maka $f(x)$ terletak di dalam kitar yang berpusat di L dan beradius δ (Soemantri, 1994).

Definisi 2.18 Dikatakan bahwa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

jika

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0,$$

yaitu jika diberikan $M > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap x di mana $0 < |x - x_0| < \delta$ berlaku $|f(x)| > M$ (Soemantri, 1994).

Definisi 2.19 Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan $x_0 \in D$. Fungsi f dikatakan kontinu di x_0 jika

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f kontinu pada interval I jika f kontinu di setiap titik dari interval I (Taylor dan Mann, 1983).

Definisi 2.20 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$. Jika ada suatu konstanta $K > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ berlaku

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u| \tag{2.51}$$

maka f disebut fungsi Lipschitz atau f memenuhi kondisi Lipschitz pada A (Bartle dan Sherbert, 2000).

Teorema 2.8 Jika $f: A \to \mathbb{R}$ fungsi Lipschitz, maka f kontinu seragam pada A (Bartle dan Sherbert, 2000).

Bukti:

Jika kondisi persamaaan (2.51) terpenuhi, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.

Jika $x, u \in A$ memenuhi $|x - u| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$$

$$|f(x) - f(u)| \leq K\delta < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

oleh karena itu f kontinu seragam pada A.

Teorema 2.9 Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ maka ada bilangan X sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(X)\,(b - a) \tag{2.52}$$

di mana $a \leq X \leq b$ (Taylor dan Mann, 1983).

Bukti:

Misalkan titik $x'_i \in [a, b]$ untuk $i = 1, \ldots, n$ dan

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x'_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a. \tag{2.53}$$

Jika diberikan m dan M sebagai nilai minimum dan nilai maksimum dari $f(x'_i)$ pada interval $[a, b]$ maka

$$m \leq f(x'_i) \leq M. \tag{2.54}$$

Nilai fungsi setiap titik x'_i dengan approksimasi penjumlahan yaitu:

$$f(x'_1)\Delta x_1 + f(x'_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x'_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x_i \tag{2.55}$$

maka dari persamaan (2.55) diperoleh

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x_i\,. \tag{2.56}$$

dari persamaan (2.54) dan (2.55) diperoleh

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \tag{2.57}$$

Karena persamaan (2.53) dan (2.56) maka persamaan (2.57) menjadi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

atau

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Misalkan

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

maka $m \leq \mu \leq M$. Oleh karena itu $f(X) = \mu$ untuk $x = X$ pada interval $a \leq X \leq b$ dan $f(X) = \mu$ memenuhi persamaan (2.52). Teorema ini disebut teorema nilai rata-rata untuk integral.

Teorema 2.10 Jika $f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan

$$F(x) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Maka $F(x)$ diferensiabel, dengan turunan

$$F'(x) = f(x), \;\; a < x < b$$

(Taylor dan Mann, 1983).

Bukti:

Misalkan $x,\ x+\Delta x$ dua titik pada interval $[a,b]$. Maka

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Sesuai dengan teorema nilai rata-rata untuk integral atau teorema 2.9 dan persamaan (2.52) maka

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(X)(x+\Delta x-x)$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=f(X)\Delta x \tag{2.58}$$

di mana $x\le X\le x+\Delta x$. Dari persamaan (2.58) diperoleh

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(X).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f'(X)$$

$$F'(x)=f(x)$$

2.5.2 Turunan

Misalkan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan $x_0\in D$. Jika diketahui bahwa nilai limit

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{ ada,}$$

maka nilai limit ini disebut turunan atau $derivatif$ fungsi f di titik x_0, dan diberikan notasi $f'(x_0)$. Jika $f'(x_0)$ ada maka f dikatakan terdiferensial atau diferensiabel di x_0. Nilai $f(x)-f(x_0)$ dapat dinyatakan dengan Δf dan $x-x_0$ dengan Δx, sehingga

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jika f terdiferensial di semua titik pada D maka dikatakan f terdiferensial pada D (Soemantri, 1994).

Berikut ini diberikan beberapa aturan pencarian turunan:

1. Jika c yaitu setiap bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

2. Jika n suatu bilangan riil, maka

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

3. Jika f terdiferensiabel di x dan c yaitu setiap bilangan riil, maka cf juga terdiferensiabel di x dan

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

4. Jika f dan g terdiferensiabel di x, maka $f \pm g$ dan

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[f(x)]$$

5. Jika f dan g terdiferensiabel di x, maka hasil kali $f \cdot g$, dan

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

6. Jika f dan g kedua-duanya terdiferensiabel di x dan jika $g(x) \neq 0$, maka $\frac{f}{g}$ terdiferensiabel di x dan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

(Anton, dkk., 2009).

2.5.3 Barisan

Definisi 2.21 Barisan yaitu suatu fungsi yang memiliki domain himpunan bilangan bulat (Anton, dkk., 2009).

Definisi 2.22 Misalkan $C = \langle c_n \rangle$ yaitu barisan bilangan riil. C dikatakan konvergen ke c atau C memiliki limit c, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli N sedemikian sehingga memenuhi

$$|c_n - c| < \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq N$ dan dapat ditulis

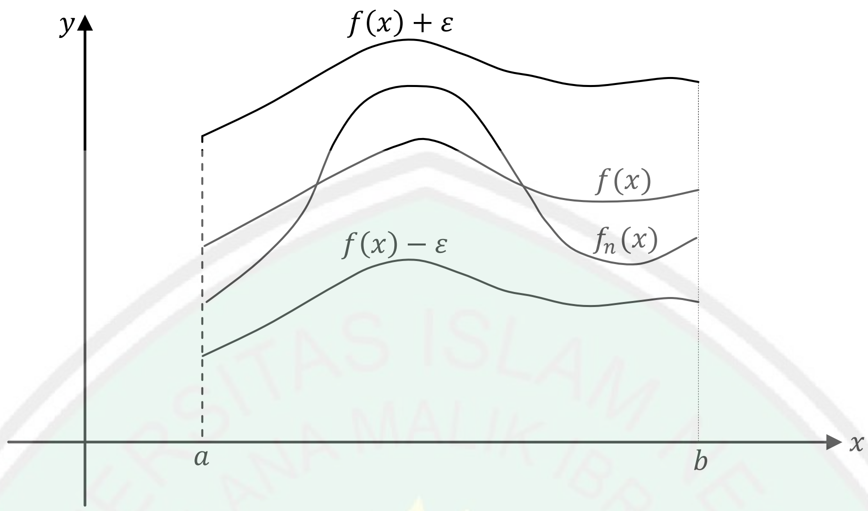
$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Jika suatu barisan memiliki limit, maka barisan itu disebut konvergen. Jika tidak memiliki limit, barisan itu dikatakan divergen (Bartle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.23 Misalkan $F = \langle f_n \rangle$ yaitu barisan fungsi riil dan setiap fungsi riil f terdefinisi untuk setiap x pada interval $a \leq x \leq b$. Suatu fungsi riil f dikatakan limit dari F, jika untuk setiap partikular x dari interval $a \leq x \leq b$ terdapat suatu barisan bilangan riil $\langle f_n(x) \rangle$ sedemikian sehingga memehuhi $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen untuk setiap x dari interval $a \leq x \leq b$. Dan dapat ditulis

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

untuk $x \in [a, b]$. Jika f adalah limit dari F maka dikatakan F konvergen ke banyangan titik dari x oleh f (*pointwise*) pada interval $a \leq x \leq b$ (Ross, 1984).



Gambar 2.2: Barisan $F = \langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada interval $a \leq x \leq b$ (Ross, 1984).

Definisi 2.24 Misalkan $F = \langle f_n \rangle$ yaitu barisan fungsi riil dan setiap fungsi riil f terdefinisi untuk setiap x pada interval $a \leq x \leq b$. F dikatakan konvergen seragam ke f pada interval $a \leq x \leq b$, jika setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat positif N (yang bergantung atas ε) sedemikian sehingga

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq N$ dan $x \in [a, b]$ ditunjukkan oleh gambar 2.1 (Ross, 1984).

Definisi 2.25 Barisan disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $N > 0$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq N$ maka $|c_m - c_n| < \varepsilon$ (Krantz, 2005).

Lemma 2.3 Setiap barisan bilangan riil yang Cauchy adalah terbatas (Bartle dan Sherbert, 2000).

Bukti

Misalkan $C = \langle c_n \rangle$ barisan bilangan riil yang Cauchy.

Pilih $\varepsilon = 1$.

Jika $N \in \mathbb{N}$ dan $n \geq N$, maka

$$|c_n - c_N| < 1.$$

Karena itu, dengan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|c_n| \leq |c_N| + 1, \text{ untuk setiap } n \geq N.$$

Pilih $M = \sup\{|c_1|, |c_2|, \cdots . |c_{N-1}|, |c_N| + 1\}$, maka diperoleh bahwa

$$|c_n| \leq M, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.11 Misalkan $C = \langle c_n \rangle$ barisan bilangan riil. $\langle c_n \rangle$ disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika $\langle c_n \rangle$ konvergen ke c (Krantz, 2005).

Bukti Kanan:

Misalkan $C = \langle c_n \rangle$ konvergen ke c. Sesuai definisi kekonvergenan, Ambil $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli N sedemikian sehingga jika $m, n \geq N$ memenuhi

$$|c_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} |c_m - c_n| &= |c_m - c + c - c_n| \\ &= |(c_m - c) + (c - c_n)| \\ &\leq |c_m - c| + |c - c_n| \\ &\leq |c_m - c| + |c_n - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi barisan $C = \langle c_n \rangle$ yaitu barisan Cauchy.

Bukti Kiri:

Didefinisikan

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < c_n \text{ untuk setiap banyaknya } n \text{ terbatas}\}$$

Karena $C = \langle c_n \rangle$ yaitu barisan Cauchy, maka untuk $\varepsilon > 0$ bilangan asli $N > 0$ sedemikian sehingga jika $m, n \geq N$ maka

$$|c_m - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika $n \geq N$, maka

$$|c_n - c_N| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.59}$$

karena itu

$$c_n > c_N - \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } n \geq N,$$

maka $c_N - \frac{\varepsilon}{2} \in S$ dan diperoleh

$$c \geq c_N - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.60}$$

Sesuai persamaan (2.59) ditunjukkan bahwa

$$c_n < c_N + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ketika } n \geq N$$

maka $c_N + \frac{\varepsilon}{2} \notin S$ dan

$$c \leq c_N + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.61}$$

Sesuai persamaan (2.60) dan (2.61) diperoleh

$$|c - c_N| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli N sedemikian sehingga jika $n \geq N$, maka

$$\begin{aligned} |c - c_n| &= |c - c_N + c_N - c_n| \\ &= |(c - c_N) + (c_N - c_n)| \\ &\leq |c - c_N| + |c_N - c_n| \\ &\leq |c - c_N| + |c_n - c_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi barisan $C = \langle c_n \rangle$ konvergen ke c.

Definisi 2.26 Misalkan $C = \langle c_n \rangle$ yaitu barisan bilangan riil.

1. $\langle c_n \rangle$ dikatakan divergen ke $-\infty$, dan ditulis $\lim\langle c_n \rangle = -\infty$, jika untuk setiap $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$c_n < -K, \quad n \geq N.$$

2. $\langle c_n \rangle$ dikatakan divergen ke $+\infty$, dan ditulis $\lim\langle c_n \rangle = +\infty$, jika untuk setiap $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$c_n > L, \quad n \geq N$$

(Bartle dan Sherbert, 2000).

2.5.4 Deret

Definisi 2.27 Diberikan bentuk deret tak terhingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n + \cdots$$

bilangan-bilangan $y_1, y_2, y_3, \ldots$ disebut dengan istilah suku dari deret (Anton, dkk., 2009).

Definisi 2.28 Misalkan $\langle S_n \rangle$ yaitu barisan jumlah parsial dari deret

$$y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n + \cdots$$

dengan S_n yaitu jumlah parsial dari deret y_n. Jika barisan $\langle S_n \rangle$ konvergen terhadap limit S, maka barisan barisan jumlah parsial itu memiliki deret konvergen ke S, dan S disebut jumlah deret yang dinyatakan

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Jika barisan dari jumlah parsial divergen, maka barisan dari jumlah parsial itu memiliki deret divergen. Deret yang tidak memiliki jumlah disebut deret divergen (Anton, dkk., 2009).

Preposisi 2.1 deret $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif $N \geq 1$ sedemikian sehingga jika $n \geq m > N$ maka

$$\left| \sum_{i=m}^{n} c_i \right| < \varepsilon \tag{2.62}$$

(Krantz, 2005).

Bukti Kanan:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq m > N$ maka diperoleh

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{i=m+1}^{n} c_i \right| < \varepsilon.$$

Karena teorema 2.11, maka barisan $\langle S_N \rangle$ yaitu barisan Cauchy. Sesuai definisi 2.28, bahwa jika barisan $\langle S_N \rangle$ konvergen, maka barisan $\langle S_N \rangle$ memiliki deret konvergen.

Bukti Kiri:

Sesuai definisi, barisan $\langle S_N \rangle$ dari jumlah parsial konvergen jika memiliki deret konvergen. Secara khusus barisan $\langle S_N \rangle$ harus mejadi barisan Cauchy. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $N > 0$ sedemikian sehingga jika $n \geq m > N$ diperoleh

$$|S_n - S_m| < \varepsilon,$$

maka diperoleh bahwa

$$\left| \sum_{i=m+1}^{n} c_i \right| < \varepsilon$$

dan ketaksamaan (2.62) disebut kriteria Cauchy untuk deret.

Teorema 2.12 Jika deret

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i$$

konvergen maka

$$\lim_{i\to\infty} c_i = 0.$$

(Krantz, 2005).

Bukti:

Karena deret konvergen, maka memenuhi kriteria Cauchy. Misalkan $\varepsilon > 0$ ada bilangan positif $N \geq 1$ sedemikian sehingga jika $n \geq m > N$ maka

$$\left|\sum_{i=m}^{n} c_i\right| < \varepsilon. \tag{2.63}$$

Ambil $n = m$ dan $m > N$, maka (2.63) menjadi

$$|c_m| < \varepsilon.$$

Teorema 2.13 Jika $\lim_{n\to+\infty} y_n \neq 0,$ maka deret $\sum y_n$ divergen (Anton, dkk., 2009).

Bukti:

Cukup ditunjukkan bahwa jika deret $\sum y_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Misalkan deret $\sum y_n$ konvergen maka $\lim S_n$ ada untuk S_n jumlah parsial dari deret y_n. Sehingga

$$y_n = S_n - S_{n-1},$$

dan

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_{n-1}) = S.$$

Diperoleh bahwa

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Teorema 2.14 Jika $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0,$ maka deret $\sum y_n$ bisa menjadi deret yang konvergen atau divergen (Anton, dkk., 2009).

Bukti:

Cukup ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ menghasilkan deret konvergen dan juga deret divergen. Misalkan diberikan dua deret berikut ini:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots \text{ dan } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

Deret yang pertama yaitu deret geometri konvergen dan deret yang kedua yaitu deret harmonik divergen.

Teorema 2.15 Misalkan $\langle M_n \rangle$ barisan konstanta positif dan $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ barisan fungsi riil yang terdefinisi pada interval $[a, b]$ sedemikian sehingga $|f_n| \leq M_n$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $n \in \mathbb{N}$ jika deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergen maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergen seragam pada interval $[a, b]$ (Ross, 1984).

Bukti:

Karena deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergen, pilih $\varepsilon > 0$ ada $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku deret

$$\sum_{k=n}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

untuk setiap $m \geq n \geq K$ dan $n, m \in \mathbb{N}$. Dengan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

setiap $m \geq n \geq K$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$ dan setiap $x \in [a, b]$. Di mana $\langle S_n \rangle$ dan $\langle S_m \rangle$ didefinisikan sebagai barisan jumlah parsial. Oleh karena itu deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergen seragam pada interval $[a, b]$. Teorema ini disebut juga dengan teorema Weierstrass M-*test*.

2.5.5 Deret Taylor dan Mclaurin

Misalkan $f(x)$ yaitu fungsi yang analitik untuk semua x dalam selang $(x_0 - r,\ x_0 + r)$ maka $f(x)$ menjadi deret Taylor, yaitu:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.64}$$

Jika didefinisikan $x = x_0 + h$ maka $h = x - x_0$, sehingga persamaan (2.64) menjadi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf^{'}(x_0) + h^2 \frac{f^{''}(x_0)}{2!} + h^3 \frac{f^{'''}(x_0)}{3!} + \cdots + h^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (2.65)$$

Persamaan (2.65) disebut deret Taylor (*Taylor Series*). Jika diberikan $x_0 = 0$ maka diperoleh deret dari persamaan (2.65)

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)(x) + \frac{f^{''}(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}(x)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \quad (2.66)$$

Persamaan (2.66) disebut deret Mclaurin (*Mclaurin Series*) (Anton, dkk., 2009).

Misalkan diberikan fungsi $f(x) = e^x$ dan berdasarkan persamaan (2.64) maka fungsi $f(x) = e^x$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret di sekitar $x = 2$, yaitu:

$$f(x) = f^{'}(x) = f^{''}(x) = f^{'''}(x) = \ \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$

dan

$$f(2) = f^{'}(2) = f^{''}(2) = f^{'''}(2) = \ \ldots = f^{(n)}(2) = e^2 \quad (2.67)$$

Sehingga dari persamaan (2.64) dan (2.67) deret Taylor dari $f(x) = e^x$, di sekitar $x = 2$ yaitu

$$f(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2(x-2)^2}{2} + \frac{e^2(x-2)^3}{6} + \ldots + \frac{e^2(x-2)^n}{n!}$$

Deret Mclaurin dari $f(x) = e^x$, di sekitar $x = 0$ yaitu

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Beberapa deret Mclaurin yang penting yaitu:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$(-\infty < x < \infty)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, x^{2k}}{(2k)!}$$

$(-\infty < x < \infty)$

(Anton, dkk., 2009).

2.6 Kajian Solusi dalam Al-Qur’an

Solusi yaitu uraian berupa penyelesaian dari soal atau masalah yang memberikan suatu kebenaran pernyataan ketika disubstitusikan ke dalam soal atau masalah tersebut. Solusi dapat diselesaikan dengan metode-metode tertentu yang logis. Istilah logis yaitu proses yang berdasarkan metode yang dapat diterima nalar atau logika. Proses berfikir logis seperti ini untuk menyelesaikan suatu masalah telah dituntunkan dalam Al-Qur’an surat Al-Insyiqaq ayat 6:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلۡإِنسَٰنُ إِنَّكَ كَادِحٌ إِلَىٰ رَبِّكَ كَدۡحٗا فَمُلَٰقِيهِ ٦

“Hai manusia, sesungguhnya engkau telah bekerja keras (secara sungguh-sungguh) menuju keridaan Tuhanmu, maka pasti engkau akan menemuinya”.

Surat Al-Insyiqaq ayat 6 secara tersirat Allah telah menginformasikan bahwa setiap manusia memiliki suatu kewajiban masing-masing dalam memenuhi kebutuhan hidup yang harus dikerjakan dengan ikhtiar yang sungguh-sungguh termasuk dalam beribadah mendekatkan diri kepada Allah. Hal itu pula yang telah diteladankan oleh Rasulullah sejak kecil hingga beliau wafat. Misalnya ketika beliau mengembala binatang ternak, berniaga ke negeri Syam, dan berdakwah menegakkan agama Islam dengan penuh semangat, kerja keras dan jujur. Dalam tafsir Al-Misbah, surat Al-Insyiqaq ayat 6 ini menjelaskan bahwa manusia dalam bekerja pada dasarnya melihat hari esoknya, bahkan melihat masanya yang akan datang baik singkat maupun lama. Manusia mau atau tidak, pasti berakhir usahanya dengan kematian dan pertemuan dengan Allah. Ini karena manusia adalah hamba-Nya, sekaligus Dia adalah Pengatur dan Pengendali segala urusannya. Manusia pasti akan berakhir perjalanan, ikhtiar serta hidupnya kepada Allah sebab segala sesuatu akan kembali kepada putusan-Nya (Shihab, 2002).

Secara teori dan fakta, kerja yang apik pasti akan dibarengi hasil yang apik pula. Atas dasar ini, maka hendaknya dalam menghadapi dan menyelesaikan suatu masalah untuk memperoleh solusi atau jalan keluar harus dengan penuh kesungguhan, apik, dan bukan asal jadi. Hal ini tersirat dalam QS. Al-An’am ayat 135 dan hadist Rasulullah:

قُلْ يَٰقَوْمِ ٱعْمَلُوا۟ عَلَىٰ مَكَانَتِكُمْ إِنِّى عَامِلٌ ۖ فَسَوْفَ تَعْلَمُونَ مَن تَكُونُ لَهُۥ عَٰقِبَةُ ٱلدَّارِ ۗ إِنَّهُۥ لَا يُفْلِحُ ٱلظَّٰلِمُونَ ﴿١٣٥﴾

“Katakanlah (Muhammad), “Hai kaumku (orang-orang kafir) berbuatlah sepenuh kemampuan (dan sesuai kehendak kamu), aku pun akan berbuat (demikian). Kelak kamu akan mengetahui siapakah diantara kita yang akan memperoleh hasil (kesudahan) yang baik dari dunia ini”).

“Sesungguhnya Allah senang apabila salah seorang di antara kamu mengerjakan suatu pekerjaan, (bila) dikerjakannya dengan baik (jitu)” (HR. Imam Baihaqi) (Shihab, 2007).

Dalam menyelesaikan masalah harus disertai dengan rasa optimisme dan harapan akan bantuan Ilahi, sebagaimana ditegaskan dalam surat Alam Nasyrah ayat 5-6, *Fa inna ma’a al-‘usri yusra, inna ma’a al-‘usri yusra.* Surat Alam

Nasyrah ayat 5-6 ini menegaskan bahwa satu kesulitan akan dibarengi dengan kemudahan. Karena itu, akhir surat tersebut menyatakan, *Wa ila Rabbika farghab* (hanya kepada Tuhanmulah hendaknya engkau mengharap) (Shihab, 2007).

Manusia dituntut untuk melakukan usaha atau, dalam bahasa Al-Qur'an, *sa'y*. usaha tersebut harus bertolak dari Shafa, yang arti harfiahnya kesucian dan berakhir di *Marwah*. Bila ini terpenuhi, usaha akan berakhir dengan kepuasan atau *Marwah*. Ia akan memperoleh hasil dari sumber yang ia sendiri tidak pernah menduganya, *Siapa yang bertakwa kepada Allah Dia akan memberi jalan keluar (bagi kesulitannya), dan memberinya rezeki dari arah yang tak pernah dia duga (QS. Al-Thalaq : 2-3)* (Shihab, 2007).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Persamaan Riccati

Diberikan suatu persamaan diferensial

$$y(x) = \frac{c\,p(x) + q(x)}{c\,r(x) + s(x)} \tag{3.1}$$

di mana $cr(x) + s(x) \neq 0$. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ yaitu sebarang fungsi-fungsi yang diberikan dan c yaitu sebarang konstanta. Jika $y(x) = y, p(x) = p, q(x) = q, r(x) = r, s(x) = s, cp + q = u$, dan $cr + s = v$ maka turunan persamaan (3.1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{cp + q}{cr + s} \qquad (3.2) \\ &= \frac{u}{v} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(cp' + q')(cr + s) - (cr' + s')(cp + q)}{(cr + s)^2} \\ &= \frac{cp' + q'}{cr + s} - \left(\frac{cp + q}{cr + s}\right)\left(\frac{cr' + s'}{cr + s}\right) \\ &= \frac{cp' + q'}{cr + s} - y\left(\frac{cr' + s'}{cr + s}\right). \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Solusi c untuk persamaan (3.2)

$$y = \frac{cp + q}{cr + s}$$

$$cry + sy = cp + q$$

$$sy - q = cp - cry$$

$$sy - q = (p - ry)c$$

$$c = \frac{sy - q}{p - ry} \tag{3.4}$$

Solusi c untuk persamaan (3.3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cp' + q'}{cr + s} - y\left(\frac{cr' + s'}{cr + s}\right)$$

$$y'(cr + s) = cp' + q' - y(cr' + s')$$

$$cry' + sy' = cp' + q' - cr'y - s'y$$

$$sy' + s'y - q' = c(p' - ry' - r'y)$$

$$c = \frac{sy' + s'y - q'}{p' - ry' - r'y}. \tag{3.5}$$

Dari persamaan (3.4) dan (3.5) diperoleh

$$\frac{sy - q}{p - ry} = \frac{sy' + s'y - q'}{p' - ry' - r'y}$$

$$(sy - q)(p' - ry' - r'y) = (p - ry)(sy' + s'y - q')$$

$$p'sy - rsy'y - r'sy^2 - p'q + qry' + qr'y = psy' + ps'y - pq' - rsy'y - rs'y^2 + q'ry$$

$$qry' - r'sy^2 + p'sy + qr'y - p'q = psy' - rs'y^2 + ps'y + q'ry - pq'$$

$$qry' - r'sy^2 + (p's + qr')y - p'q = psy' - rs'y^2 + (ps' + q'r)y - pq'$$

$$qry' - psy' + rs'y^2 - r'sy^2 + (p's + qr')y - (ps' + q'r)y = p'q - pq'$$

$$-(ps - qr)y' + (rs' - r's)y^2 + (p's + qr' - ps' - q'r)y = -(pq' - p'q). \tag{3.6}$$

Misalkan $W = ps - qr$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$-Wy' + (rs' - r's)y^2 + (p's + qr' - ps' - q'r)y = -(pq' - p'q). \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) dikali dengan W^{-1}

$$-y' + \frac{(rs' - r's)}{W}y^2 + \frac{(p's + qr' - ps' - q'r)}{W}y = -\frac{(pq' - p'q)}{W}. \tag{3.8}$$

Jika $f_2(x) = \frac{rs' - r's}{W}$; $f_1(x) = \frac{p's + qr' - ps' - q'r}{W}$; $f_0(x) = \frac{pq' - p'q}{W}$

untuk $W \neq 0$, maka persamaan (3.8) menjadi

$$-y' + f_2(x)y^2 + f_1(x)y = -f_0(x)$$

atau

$$-\frac{dy}{dx} + f_2(x)y^2 + f_1(x)y = -f_0(x). \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) dikali dengan (-1) menjadi

$$\frac{dy}{dx} - f_2(x)y^2 - f_1(x)y = f_0(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x) \tag{3.10}$$

di mana $f_2(x) \neq 0$. Persamaan (3.10) disebut persamaan Riccati.

3.2 Analisis Eksistensi Solusi Umum Persamaan Riccati

Persamaan Riccati memiliki solusi umum yang diperoleh melalui dua metode, yaitu solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular dan solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular. Solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular dalam penelitian ini diberikan hingga tiga solusi partikular. Sedangkan solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular dapat mereduksi persamaan Riccati menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua yang lebih mudah diselesaikan dibandingkan dengan persamaan Riccati yang asli.

3.2.1 Solusi Umum Persamaan Riccati dengan Solusi Partikular

Ada beberapa bentuk solusi umum persamaan Riccati dengan solusi partikular yaitu:

1. Diberikan persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0,$$

jika mengganti peubah terikat persamaan Riccati $y(x) = y_0(x) + w(x)$ untuk $y_0 = y_0(x)$ solusi partikular maka menurut Polyanin dan Zaitsev (2003) diperoleh bentuk solusi umum sebagai berikut:

$$y(x) = y_0(x) + \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x) f_2(x) dx\right]^{-1}.$$

dengan

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

dan C sebarang konstanta.

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk pertama sebagai berikut:

Diketahui persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0 \tag{3.11}$$

dan

$$y(x) = y_0(x) + w(x). \tag{3.12}$$

Turunan persamaan (3.12) terhadap x

$$y' = y_0' + w'. \tag{3.13}$$

Subtitusi persamaan (3.12) dan (3.13) ke persamaan Riccati (3.11)

$$\begin{aligned} y_0' + w' &= f_2(x)\{y_0(x) + w(x)\}^2 + f_1(x)[y_0(x) + w(x)] + f_0(x) \\ &= f_2(x)\{y_0^2 + 2w(x)y_0 + [w(x)]^2\} + f_1(x)[y_0 + w(x)] + f_0(x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

untuk $y_0 = y_0(x)$. Persamaan (3.14) dapat direduksi menjadi

$$w' = f_2(x)[w(x)]^2 + [2f_2(x)\, y_0 + f_1(x)]w(x). \tag{3.15}$$

Karena y_0 yaitu solusi partikular terhadap persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.14) diperoleh

$$y_0{}' = f_2(x){y_0}^2 + f_1(x)y_0 + f_0(x).$$

Persamaan (3.15) disebut persamaan Bernoulli. Persamaan (3.15) dapat diselesaikan berdasarkan teorema Bernoulli (teorema 2.6) sehingga menjadi persamaan linier dengan transformasi

$$u(x) = [w(x)]^{1-n}. \tag{3.16}$$

Karena $n = 2$ pada persamaan (3.15) maka dari persamaan (3.16) diperoleh

$$u(x) = [w(x)]^{1-2}$$

$$= [w(x)]^{-1}$$

dengan menginverskan kedua ruas diperoleh

$$\{[w(x)]^{-1}\}^{-1} = [u(x)]^{-1}$$

$$w(x) = [u(x)]^{-1}. \tag{3.17}$$

Turunan persamaan (3.17) terhadap x

$$w' = \frac{0\,.\,u - u'}{u^2}$$

$$= -\frac{u'}{u^2} \tag{3.18}$$

untuk $u = u(x)$. Subtitusi persamaan (3.17) ke persamaan (3.15) kemudian hasilnya subtitusi ke persamaan (3.18) diperoleh

$$-\frac{u'}{u^2} = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]u^{-1} + f_2(x)u^{-2}. \tag{3.19}$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.19) dengan $(-u^2)$ maka

$$u' = (-1)[f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\,u - f_2(x). \tag{3.20}$$

Persamaan (3.20) dapat ditulis

$$u' + [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\, u = -f_2(x) \tag{3.21}$$

yang disebut persamaan diferensial biasa linier. Jika masing-masing sisi dari persamaan (3.21) dikalikan dengan fungsi yang tidak diketahui bergantung pada x, misalkan $\Phi(x)$, maka persamaan (3.21) menjadi

$$u'\Phi(x) + [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\, u\, \Phi(x) = -f_2(x)\Phi(x). \tag{3.22}$$

Diketahui dengan benar bahwa

$$\frac{d}{dx}[u\, \Phi(x)] = u'\, \Phi(x) + u\Phi'\,. \tag{3.23}$$

Persamaan (3.23) akan sama dengan sisi sebelah kiri dari persamaan (3.22) jika

$$\Phi' = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\Phi(x). \tag{3.24}$$

Jika peubah-peubah dari persamaan (3.24) dinyatakan terpisah maka

$$\frac{d\Phi(x)}{\Phi(x)} = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx \tag{3.25}$$

yang disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Jika masing-masing sisi persamaan (3.25) diintegralkan diperoleh

$$\ln|\Phi(x)| = \int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan $\exp(1)$ diperoleh

$$\exp(\,\ln|\Phi(x)|) = \exp \int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx$$

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx\right\} \tag{3.26}$$

yang merupakan solusi dari persamaan (3.24).

Sesuai persamaan (3.22), (3.23), dan (3.24)

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x)u] = -f_2(x)\Phi(x)$$

kedua ruas dikalikan dengan dx

$$d[\Phi(x)u] = -\Phi(x)f_2(x)dx$$

kedua ruas diintegralkan

$$\Phi(x)u = (-1)\int \Phi(x)f_2(x)dx + C$$

$$u(x) = \frac{1}{\Phi(x)}\left[(-1)\int \Phi(x)f_2(x)dx + C\right]. \quad (3.27)$$

Karena persamaan (3.27), $w(x) = [u(x)]^{-1}$

$$w(x) = \Phi(x)\left[(-1)\int \Phi(x)f_2(x)dx + C\right]^{-1}$$

$$= \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x)f_2(x)dx\right]^{-1}. \quad (3.28)$$

Dari persamaan (3.12), (3.28), dan (3.26) maka diperoleh solusi umum persamaan Riccati (3.11) yaitu:

$$y(x) = y_0(x) + w(x)$$

$$= y_0(x) + \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x)f_2(x)dx\right]^{-1}.$$

dengan

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

dan C sebarang konstanta.

2. Diberikan persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0.$$

jika mengganti peubah terikat persamaan Riccati $y(x) = y_0(x) - w(x)$ untuk $y_0 = y_0(x)$ solusi partikular maka diperoleh bentuk solusi umum sebagai berikut:

$$y(x) = y_0(x) - \Phi(x)\left[C + \int \Phi(x) f_2(x) dx\right]^{-1}.$$

dengan

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

dan C sebarang konstanta.

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk kedua sebagai berikut:

Diketahui bahwa persamaan Riccati (3.11)

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0$$

dan

$$y(x) = y_0(x) - w(x). \tag{3.29}$$

Turunan persamaan (3.29) terhadap x

$$y' = y_0' - w'. \tag{3.30}$$

Subtitusi persamaan (3.29) dan (3.30) ke persamaan Riccati (3.11)

$$y_0' - w' = f_2(x)\{y_0(x) - w(x)\}^2 + f_1(x)[y_0(x) - w(x)] + f_0(x)$$

$$= f_2(x)\{y_0^2 - 2w(x)y_0 + [w(x)]^2\} + f_1(x)[y_0 - w(x)] + f_0(x) \tag{3.31}$$

untuk $y_0 = y_0(x)$. Persamaan (3.31) dapat direduksi menjadi

$$-w' = f_2(x)[w(x)]^2 - [2f_2(x)\, y_0 + f_1(x)]w(x)$$

kedua ruas dikalikan dengan -1 menjadi

$$w' = [2f_2(x)\, y_0 + f_1(x)]w(x) - f_2(x)[w(x)]^2. \tag{3.32}$$

Karena y_0 yaitu solusi partikular terhadap persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.31) diperoleh

$$y_0{}' = f_2(x)y_0{}^2 + f_1(x)y_0 + f_0(x).$$

Persamaan (3.32) disebut persamaan Bernoulli. Persamaan (3.32) dapat diselesaikan berdasarkan teorama Bernoulli (teorema 2.6) sehingga menjadi persamaan linier dengan transformasi

$$u(x) = [w(x)]^{1-n}. \tag{3.33}$$

Karena pada persamaan (3.32) $n = 2$ maka dari persamaan (3.33) diperoleh

$$\begin{aligned} u(x) &= [w(x)]^{1-2} \\ &= [w(x)]^{-1} \end{aligned}$$

dengan menginverskan kedua ruas

$$\{[w(x)]^{-1}\}^{-1} = [u(x)]^{-1}$$

$$w(x) = [u(x)]^{-1}. \tag{3.34}$$

Turunan persamaan (3.34) terhadap x

$$\begin{aligned} w' &= \frac{0\,.u - u'}{u^2} \\ &= -\frac{u'}{u^2} \end{aligned} \tag{3.35}$$

untuk $u = u(x)$. Subtitusi persamaan (3.34) ke persamaan (3.32) kemudian hasilnya disubtitusikan ke persamaan (3.35) diperoleh

$$-\frac{u'}{u^2} = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]u^{-1} - f_2(x)u^{-2} \tag{3.36}$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.36) dengan $(-u^2)$ maka

$$u' = f_2(x) - [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\,u. \tag{3.37}$$

Persamaan (3.37) dapat ditulis

$$u' + [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\, u = f_2(x) \tag{3.38}$$

yang disebut persamaan diferensial biasa linier. Jika masing-masing sisi dari persamaan (3.38) dikalikan dengan fungsi yang tidak diketahui bergantung pada x, misalkan $\Phi(x)$, maka persamaan (3.38) menjadi

$$u'\Phi(x) + [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\, u\, \Phi(x) = f_2(x)\Phi(x). \tag{3.39}$$

Diketahui dengan benar bahwa

$$\frac{d}{dx}[u\, \Phi(x)] = u'\, \Phi(x) + u\, \Phi'\, . \tag{3.40}$$

Persamaan (3.40) akan sama dengan sisi sebelah kiri persamaan (3.39) jika

$$\Phi' = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]\Phi(x) \tag{3.41}$$

Jika peubah-peubah dari persamaan (3.41) dinyatakan terpisah maka

$$\frac{d\Phi(x)}{\Phi(x)} = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx \tag{3.42}$$

yang disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Jika masing-masing sisi persamaan (3.42) diintegralkan diperoleh

$$\ln|\Phi(x)| = \int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan $\exp(1)$ diperoleh

$$\exp(\,\ln|\Phi(x)|) = \exp \int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx$$

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]dx\right\} \tag{3.43}$$

yang merupakan solusi dari persamaan (3.41).

Sesuai persamaan (3.39), (3.40), dan (3.41) di mana

$$\frac{d}{dx}[\Phi(x)u] = f_2(x)\Phi(x)$$

kedua ruas dikalikan dengan dx

$$d[\Phi(x)u] = \Phi(x)f_2(x)dx$$

kedua ruas diintegralkan

$$\Phi(x)u = \int \Phi(x)f_2(x)dx + C$$

$$u(x) = \frac{1}{\Phi(x)}\left[\int \Phi(x)f_2(x)dx + C\right]. \tag{3.44}$$

Karena dari persamaan (3.34), $w(x) = [u(x)]^{-1}$ maka

$$w(x) = \Phi(x)\left[\int \Phi(x)f_2(x)dx + C\right]^{-1}$$

$$= \Phi(x)\left[C + \int \Phi(x)f_2(x)dx\right]^{-1}. \tag{3.45}$$

Sesuai persamaan (3.29), (3.43), dan (3.45) maka diperoleh solusi umum persamaan Riccati (3.11) yaitu:

$$y(x) = y_0(x) - w(x)$$

$$= y_0(x) - \Phi(x)\left[C + \int \Phi(x)f_2(x)dx\right]^{-1}.$$

di mana

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right\}$$

dan C sebarang konstanta.

3. Diberikan persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0.$$

Jika mengganti peubah terikat persamaan Riccati $y(x) = y_0(x) + [w(x)]^{-1}$ untuk $y_0 = y_0(x)$ solusi partikular, maka diperoleh persamaan diferensial biasa linier

$$w' + f_2(x) + U(x)w = 0$$

di mana $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x)y_0$ dan bentuk solusi umum persamaan Riccati:

$$(y - y_0)\left[C - \int \Psi(x) f_2(x) dx\right] = \Psi(x)\,;$$

untuk

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\,dx\right].$$

$y = y(x)$ didefinisikan sebagai solusi umum persamaan Riccati dan C sebarang konstanta.

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk ketiga sebagai berikut:

Didefinisikan persamaan Riccati (3.11)

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0$$

dan

$$y(x) = y_0(x) + w^{-1} \tag{3.46}$$

untuk $w = w(x)$.

Turunan persamaan (3.46)

$$\begin{aligned} y' &= {y_0}' + w^{-1\prime} \\ &= {y_0}' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

$$y' = {y_0}' + \frac{0.w - 1.\frac{dw}{dx}}{w^2}$$

$$= {y_0}' - \frac{dw}{w^2 dx}$$

$$= {y_0}' - w^{-2}w' \quad (3.47)$$

Subtitusi persamaan (3.46) ke persamaan Riccati (3.11)

$${y_0}' - w^{-2}w' = f_2(x)\left[y_0 + \frac{1}{w}\right]^2 + f_1(x)\left[y_0 + \frac{1}{w}\right] + f_0(x)$$

$$= f_2(x)[{y_0}^2 + 2w^{-1}y_0 + w^{-2}] + f_1(x)[y_0 + w^{-1}] + f_0(x) \quad (3.48)$$

untuk $y_0 = y_0(x)$. Persamaan (3.48) dapat direduksi menjadi

$$-w^{-2}w' = f_2(x)[2w^{-1}y_0 + w^{-2}] + f_1(x)w^{-1}. \quad (3.49)$$

Karena y_0 yaitu solusi partukular persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.48) diperoleh

$${y_0}' = f_2(x){y_0}^2 + f_1(x)y_0 + f_0(x).$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.49) dengan w^2, maka persamaan (3.49) menjadi

$$-w' = [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]w + f_2(x). \quad (3.50)$$

Jika memisalkan $f_1(x) + 2f_2(x)y_0 = U(x)$ dan $-w'$ dipindah ke ruas kanan maka persamaan (3.50) menjadi

$$w' + f_2(x) + U(x)w = 0 \quad (3.51)$$

Persamaan (3.51) yaitu persamaan diferensial biasa linier dan dapat ditulis menjadi

$$[f_2(x) + U(x)w]dx + dw = 0. \quad (3.52)$$

Jika memisalkan $M(x,w) = [\,f_2(x) + U(x)w]$ dan $N(x,w) = 1$, maka persamaan (3.52) menjadi

$$M(x,w)dx + N(x,w)dw = 0.$$

yang disebut persamaan diferensial biasa eksak. Sedemikian sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} = U(x), \quad \frac{\partial N(x,w)}{\partial x} = 0.$$

Karena

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} \neq \frac{\partial N(x,w)}{\partial x}$$

maka persamaan (3.52) tidak eksak kecuali jika $U(x) = 0$. Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.52) dengan $\Psi(x)$ sebagai fungsi yang tidak diketahui terhadap x, maka diperoleh

$$[\,\Psi(x)f_2(x) + \Psi(x)U(x)w]dx + \Psi(x)dw = 0. \tag{3.53}$$

Dengan mendefinikan $\Psi(x)$ sebagai faktor integrasi yang bergantung x terhadap persamaan (3.53) jika dan hanya jika persamaan (3.53) adalah eksak, sehingga jika dan hanya jika

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\Psi(x)f_2(x) + \Psi(x)U(x)w\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\Psi(x)]$$

atau

$$\Psi(x)U(x) = \frac{d}{dx}[\Psi(x)]. \tag{3.54}$$

Persamaan (3.54) dapat dinyatakan

$$\Psi U(x) = \frac{d\Psi}{dx}$$

untuk $\Psi = \Psi(x)$.

Jika peubah-peubah dari persamaan (3.54) dinyatakan terpisah maka

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = U(x)dx \tag{3.55}$$

yang disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Jika masing-masing sisi persamaan (3.55) diintegralkan diperoleh

$$\ln|\Psi| = \int U(x)dx$$

maka

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\,dx\right] \tag{3.56}$$

Di mana $\Psi > 0$. Persamaan (3.56) merupakan solusi dari persamaan (3.54). Persamaan (3.53) dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}\Psi(x)dw &= (-1)\Psi(x)\left[f_2(x) + U(x)w\right]dx\\ &= -\Psi(x)\,f_2(x)\,dx - \Psi(x)Uw\,dx\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan dx

$$\Psi(x)w' + \Psi(x)U(x)w = -\Psi(x)\,f_2(x). \tag{3.57}$$

Karena

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

maka persamaan (3.57) menjadi

$$w'\exp\left[\int U(x)\,dx\right] + \exp\left[\int U(x)dx\right]U(x)w = (-1)\exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)$$

atau

$$\frac{d}{dx}\left\{w\exp\left[\int U(x)\,dx\right]\right\} = (-1)\exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)$$

kedua ruas dikalikan dengan dx

$$d\left\{w\exp\left[\int U(x)\,dx\right]\right\} = (-1)\exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)dx. \tag{3.58}$$

Integral masing-masing sisi dari persamaan (3.58)

$$\exp\left[\int U(x)\,dx\right] w = (-1)\int \exp\left[\int U(x)\,dx\right] f_2(x)dx + C. \quad (3.59)$$

Jika masing-masing sisi persamaan (3.59) dikalikan dengan

$$\exp\left[-\int U(x)\,dx\right]$$

maka persamaan (3.59) menjadi

$$w(x) = (-1)\exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \exp\left[\int U(x)\,dx\right] f_2(x)dx + C\exp\left[-\int U(x)\,dx\right]$$

atau jika disederhanakan menjadi

$$w(x) = C\exp\left[-\int U(x)dx\right] - \exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \Psi(x) f_2(x)dx. \quad (3.60)$$

Karena $y = y_0 + w^{-1}$ sehingga diperoleh

$$(y - y_0)w = 1. \quad (3.61)$$

Subtitusi persamaan (3.60) ke persamaan (3.61)

$$(y - y_0)\left\{C\exp\left[-\int U(x)\,dx\right] - \exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \Psi(x) f_2(x)dx\right\} = 1. \quad (3.62)$$

Jika masing-masing sisi persamaan (3.62) dikalikan dengan

$$\exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

maka persamaan (3.62) menjadi:

$$(y - y_0)\left[C - \int \Psi(x) f_2(x)dx\right] = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

atau

$$(y(x) - y_0)\left[C - \int \Psi(x) f_2(x)dx\right] = \Psi(x).$$

$y = y(x)$ didefinisikan sebagai solusi umum persamaan Riccati dan C sebarang konstanta.

4. Diberikan persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0.$$

Jika mengganti peubah terikat persamaan Riccati $y(x) = y_0(x) - [w(x)]^{-1}$ untuk $y_0 = y_0(x)$ solusi partikular, maka diperoleh persamaan diferensial biasa linier

$$w' - f_2(x) + U(x)w = 0$$

di mana $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x)y_0$ dan solusi umum persamaan Riccati

$$(y - y_0)\left[C + \int \Psi(x) f_2(x) dx\right] = -\Psi(x)\ ;$$

untuk

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right].$$

$y = y(x)$ didefinisikan sebagai solusi umum persamaan Riccati dan C sebarang konstanta.

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk keempat sebagai berikut:

Didefinisikan persamaan Riccati (3.31)

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0$$

dan

$$y(x) = y_0(x) - w^{-1} \tag{3.63}$$

$w = w(x)$.

Turunan persamaan (3.63)

$$y' = {y_0}' - w^{-1\prime}$$

$$= {y_0}' + \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{w}\right)$$

$$= {y_0}' + \frac{0.w + 1.\frac{dw}{dx}}{w^2}$$

$$= {y_0}' + \frac{dw}{w^2 dx}$$

$$= {y_0}' + w^{-2}w' \tag{3.64}$$

Subtitusi persamaan (3.64) ke persamaan Riccati (3.11)

$${y_0}' + w^{-2}w' = f_2(x)\left[y_0 - \frac{1}{w}\right]^2 + f_1(x)\left[y_0 - \frac{1}{w}\right] + f_0(x)$$

$$= f_2(x)[{y_0}^2 - 2w^{-1}y_0 + w^{-2}] + f_1(x)[y_0 - w^{-1}] + f_0(x) \tag{3.65}$$

untuk $y_0 = y_0(x)$. Persamaan (3.65) dapat direduksi menjadi

$$w^{-2}w' = f_2(x)[-2w^{-1}y_0 + w^{-2}] - f_1(x)w^{-1} \tag{3.66}$$

Karena y_0 yaitu solusi partukular persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.65) diperoleh

$${y_0}' = f_2(x){y_0}^2 + f_1(x)y_0 + f_0(x).$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.66) dengan w^2, maka persamaan (3.66) menjadi

$$w' = f_2(x) - [f_1(x) + 2f_2(x)y_0]w. \tag{3.67}$$

Jika memisalkan $f_1(x) + 2f_2(x)y_0 = U(x)$ maka persamaan (3.67) menjadi

$$w' = f_2(x) - U(x)w. \tag{3.68}$$

Persamaan (3.68) yaitu persamaan diferensial biasa linier dan dapat ditulis menjadi

$$w' - f_2(x) + U(x)w = 0$$

atau

$$dw + [U(x)w - f_2(x)]dx = 0. \qquad (3.69)$$

Jika memisalkan $M(x,w) = [U(x)w - f_2(x)]$ dan $N(x,w) = 1$, maka persamaan (3.69) menjadi

$$M(x,w)dx + N(x,w)dw = 0$$

yang disebut persamaan diferensial biasa eksak. Sedemikian sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} = U(x), \quad \frac{\partial N(x,w)}{\partial x} = 0.$$

Karena

$$\frac{\partial M(x,w)}{\partial w} \neq \frac{\partial N(x,w)}{\partial x}$$

maka persamaan (3.69) tidak eksak kecuali jika $U(x) = 0$. Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.69) dengan $\Psi(x)$ sebagai fungsi yang tidak diketahui terhadap x, maka diperoleh:

$$\Psi(x)dw + [\Psi(x)U(x)w - \Psi(x)f_2(x)]dx = 0. \qquad (3.70)$$

Mendefinikan $\Psi(x)$ sebagai faktor integrasi yang bergantung x terhadap persamaan (3.70) jika dan hanya jika persamaan (3.70) adalah eksak, sehingga jika dan hanya jika

$$\frac{\partial}{\partial w}[\Psi(x)U(x)w - \Psi(x)f_2(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\Psi(x)]$$

atau

$$\Psi(x)U(x) = \frac{d}{dx}[\Psi(x)]. \tag{3.71}$$

Persamaan (3.71) dapat ditulis menjadi

$$\Psi U(x) = \frac{d\Psi}{dx}$$

untuk $\Psi = \Psi(x)$. Jika peubah-peubah dari persamaan (3.71) dinyatakan terpisah maka

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = U(x)dx \tag{3.72}$$

yang disebut persamaan diferensial dengan peubah terpisah. Jika masing-masing sisi dari persamaan (3.72) diintegralkan diperoleh

$$\ln|\Psi| = \int U(x)dx$$

maka

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right] \tag{3.73}$$

di mana $\Psi > 0$. Persamaan (3.73) merupakan solusi dari persamaan (3.71). Persamaan (3.70) dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned}\Psi(x)\, dw &= \Psi(x)\left[f_2(x) - U(x)w\right] dx \\ &= \Psi(x)\, f_2(x)\, dx - \Psi(x)U(x)w\, dx\end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan dx

$$\Psi(x)w' + \Psi(x)U(x)w = \Psi(x)\, f_2(x). \tag{3.74}$$

Karena

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\, dx\right]$$

maka persamaan (3.74) menjadi

$$w' \exp\left[\int U(x)\,dx\right] + \exp\left[\int U(x)dx\right]U(x)w = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)$$

atau

$$\frac{d}{dx}\left\{w \exp\left[\int U(x)\,dx\right]\right\} = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)$$

kedua ruas dikali dengan dx

$$d\left\{w \exp\left[\int U(x)\,dx\right]\right\} = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)dx. \tag{3.75}$$

Integral masing-masing sisi dari persamaan (3.75) diintegralkan diperoleh

$$\exp\left[\int U(x)\,dx\right]w = \int \exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)dx + C. \tag{3.76}$$

Jika masing-masing sisi persamaan (3.76) dikalikan dengan

$$\exp\left[-\int U(x)\,dx\right]$$

maka persamaan (3.76) menjadi

$$w(x) = \exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \exp\left[\int U(x)\,dx\right]f_2(x)dx + C\exp\left[-\int U(x)\,dx\right]$$

atau jika disederhanakan menjadi

$$w(x) = C\exp\left[-\int U(x)dx\right] + \exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \Psi(x)f_2(x)dx. \tag{3.77}$$

Karena $y = y_0 - w^{-1}$ sehingga diperoleh

$$(y - y_0)w = -1. \tag{3.78}$$

Subtitusi persamaan (3.77) ke persamaan (3.78) maka diperoleh

$$(y - y_0)\left\{C\exp\left[-\int U(x)\,dx\right] + \exp\left[-\int U(x)\,dx\right]\int \Psi(x)f_2(x)dx\right\} = -1. \tag{3.79}$$

Jika masing-masing sisi persamaan (3.79) dikalikan dengan

$$\exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

maka persamaan (3.79) menjadi

$$(y-y_0)\left[C+\int \Psi(x)f_2(x)dx\right]=(-1)\exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

atau

$$(y-y_0)\left[C+\int \Psi(x)f_2(x)dx\right]=-\Psi(x).$$

$y=y(x)$ didefinisikan sebagai solusi umum persamaan Riccati dan C sebarang konstanta.

5. Diberikan dua solusi partikular yang berbeda yaitu $y_1=y_1(x)$ dan $y_2=y_2(x)$ terhadap persamaan Riccati

$$y'=f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x),\quad f_2(x)\neq 0.$$

maka solusi umum persamaan Riccati, yaitu:

$$y(x)=\frac{Cy_1+U(x)y_2}{C+U(x)}.$$

di mana

$$U(x)=\exp\left[\int f_2(y_1-y_2)\,dx\right]$$

dan C sebarang konstanta (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk kelima sebagai berikut:

Didefinisikan persamaan Riccati (3.11)

$$y'=f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x),\quad f_2(x)\neq 0.$$

$y_1 = y_1(x)$ solusi partikular pertama persamaan Riccati (3.11). Dengan transformasi $y(x) = y_1(x) + u^{-1}$ terhadap persamaan Riccati (3.11) di mana $u = u(x)$ diperoleh

$$y_1{}' + u^{-1'} = f_2(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right]^2 + f_1(x)\left[y_1 + \frac{1}{u}\right] + f_0(x)$$
$$= f_2(x)[y_1{}^2 + 2u^{-1}y_1 + u^{-2}] + f_1(x)[y_1 + u^{-1}] + f_0(x). \quad (3.80)$$

Persamaan (3.80) dapat direduksi menjadi

$$u^{-1'} = f_2(x)[2u^{-1}y_1 + u^{-2}] + f_1(x)u^{-1} \quad (3.81)$$

Karena y_1 yaitu solusi partukular pertama persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.80) diperoleh

$$y_1{}' = f_2(x)y_1{}^2 + f_1(x)y_1 + f_0(x).$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.81) dengan u^2, maka persamaan (3.81) menjadi

$$u' = f_2(x)[2y_1u + 1] + f_1(x)u$$
$$= f_2(x) + [f_1(x) + 2f_2(x)y_1]u. \quad (3.82)$$

Untuk $y_2 = y_2(x)$ sebagai solusi partikular kedua persamaan Riccati (3.11). Dengan transformasi $y(x) = y_2(x) + u_1{}^{-1}$ terhadap persamaan Riccati (3.11) di mana $u_1 = u_1(x)$ dan $u_1 \neq u$ diperoleh

$$y_2{}' + u_1{}^{-1'} = f_2(x)\left[y_2 + \frac{1}{u_1}\right]^2 + f_1(x)\left[y_2 + \frac{1}{u_1}\right] + f_0(x)$$
$$= f_2(x)[y_2{}^2 + 2u_1{}^{-1}y_2 + u_1{}^{-2}] + f_1(x)[y_2 + u_1{}^{-1}] + f_0(x). \quad (3.83)$$

Persamaan (3.83) dapat direduksi menjadi

$$u_1{}^{-1'} = f_2(x)[2u_1{}^{-1}y_2 + u_1{}^{-2}] + f_1(x)u_1{}^{-1}. \quad (3.84)$$

Karena y_2 yaitu solusi partikular kedua persamaan Riccati (3.11) maka dari persamaan (3.83) diperoleh

$$y_2{}' = f_2(x){y_2}^2 + f_1(x)y_2 + f_0(x).$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.84) dengan ${u_1}^2$, maka persamaan (3.84) menjadi

$$\begin{aligned} u_1{}' &= f_2(x)[2y_2u_1 + 1] + f_1(x)u_1 \\ &= f_2(x) + [f_1(x) + 2f_2(x)y_2]u_1. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.82) dengan u_1 diperoleh

$$u_1u' = u_1f_2(x) + u_1u[f_1(x) + 2f_2(x)y_1] \tag{3.86}$$

dan mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.85) dengan u diperoleh

$$uu_1{}' = uf_2(x) + uu_1[f_1(x) + 2f_2(x)y_2]. \tag{3.87}$$

Jika persamaan (3.86) dikurangi dengan persamaan (3.87) diperoleh

$$\begin{aligned} u_1u' - uu_1{}' &= (u_1 - u)f_2(x) + u_1u[f_1(x) + 2f_2(x)y_1 - f_1(x) - 2f_2(x)y_2] \\ &= (u_1 - u)f_2(x) + u_1u[2f_2(x)y_1 - 2f_2(x)y_2] \\ &= (u_1 - u)f_2(x) + 2u_1uf_2(x)[y_1 - y_2]. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Dengan mengalikan persamaan (3.88) dengan $(u_1u)^{-1}$ diperoleh

$$u^{-1}u' - {u_1}^{-1}u_1{}' = f_2(x)(u^{-1} - {u_1}^{-1}) + 2f_2(x)[y_1 - y_2]. \tag{3.89}$$

Karena bentuk solusi umum persamaan Riccati (3.11) dengan solusi partikular y_1, yaitu $y = y_1 + u^{-1}$ maka diperoleh

$$u^{-1} = y - y_1. \tag{3.90}$$

dan bentuk solusi umum persamaan Riccati (3.11) dengan solusi partikular y_2, yaitu $y = y_2 + {u_1}^{-1}$ maka diproleh

$${u_1}^{-1} = y - y_2. \tag{3.91}$$

Persamaan (3.90) dikurangi dengan persamaan (3.91) menjadi

$$u^{-1} - {u_1}^{-1} = y_2 - y_1. \tag{3.92}$$

Subtitusi persamaan (3.92) ke persamaan (3.89) diperoleh

$$\begin{aligned} u^{-1}u' - {u_1}^{-1}{u_1}' &= f_2(x)(y_2 - y_1) + 2f_2(x)[y_1 - y_2] \\ &= f_2(x)y_1 - f_2(x)y_2 \\ &= f_2(x)[y_1 - y_2]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Jika mengalikan masing-masing sisi dari persamaan (3.93) dengan $(u_1 u^{-1})$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1 u^{-2}u' - u^{-1}{u_1}' &= f_2(x)[y_1 - y_2] \\ \frac{u_1 u' - u{u_1}'}{u^2} &= f_2(x)[y_1 - y_2] \\ (-1)\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u}\right) &= f_2(x)[y_1 - y_2]\frac{u_1}{u}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Dengan memisahkan peubah-peubah dari persamaan (3.94) maka

$$(-1)\frac{d\left(\frac{u_1}{u}\right)}{\left(\frac{u_1}{u}\right)} = f_2(x)[y_1 - y_2]dx$$

kedua ruas diintegralkan

$$-\int \frac{d\left(\frac{u_1}{u}\right)}{\left(\frac{u_1}{u}\right)} = \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx$$

$$\begin{aligned} -\ln\left|\frac{u_1}{u}\right| &= \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx + K \\ &= \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx + K. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Karena pada persamaan (3.91) ${u_1}^{-1} = y - y_2$ maka

$$\begin{aligned} [{u_1}^{-1}]^{-1} &= (y - y_2)^{-1} \\ u_1 &= (y - y_2)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Karena pada persamaan (3.90) $u^{-1} = y - y_1$ maka

$$[u^{-1}]^{-1} = (y - y_1)^{-1}$$

$$u = (y - y_1)^{-1} \tag{3.97}$$

Subtitusi persamaan (3.96) dan (3.97) ke persamaan (3.95) diperoleh

$$-\ln\left|\frac{(y-y_2)^{-1}}{(y-y_1)^{-1}}\right| = \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx + K$$

atau

$$-\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right| = \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx + K. \tag{3.98}$$

Jika pada saat $x = 0$ dengan $\frac{y-y_1}{y-y_2} = \frac{y_0 - y_{1_0}}{y_0 - y_{2_0}} = C,$ maka $K = \ln C$. Sehingga persamaan (3.98) menjadi

$$(-1)\ln\left|\frac{y-y_1}{y-y_2}\right| + \ln C = \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx$$

atau

$$(-1)\ln\left|\frac{Cy-Cy_1}{y-y_2}\right| = \int f_2(x)[y_1 - y_2]dx$$

dalam bentuk eksponen, ini menjadi

$$\frac{-(Cy - Cy_1)}{y - y_2} = \exp\left[\int f_2(x)[y_1 - y_2]dx\right]$$

$$= U(x)$$

sehingga diperoleh

$$Cy_1 - Cy = U(x)y - U(x)y_2$$

jika disederhanakan menjadi

$$y[C + U(x)] = Cy_1 + U(x)y_2$$

dan, akhirnya

$$y = \frac{Cy_1 + U(x)y_2}{C + U(x)}.$$

di mana

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(x)[y_1 - y_2]dx\right]$$

dan C sebarang konstanta.

6. Diberikan tiga solusi partikular yang berbeda-beda yaitu $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ terhadap persamaan Riccati

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0.$$

maka solusi umum persamaan Riccati dapat ditemukan tanpa pengintegralan, yaitu:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1}\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

untuk C sebarang konstanta (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum bentuk keenam sebagai berikut:

Didefinisikan persamaan Riccati (3.11)

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0.$$

$y_1 = y_1(x)$ solusi partikular pertama terhadap persamaan Riccati (3.11) dan $y = y(x)$ adalah solusi umum persamaan Riccati (3.11) maka diperoleh

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

$$y - y_1 = \frac{1}{u}$$

$$u = \frac{1}{y - y_1}. \quad (3.99)$$

$y_2 = y_2(x)$ solusi partikular kedua terhadap persamaan Riccati (3.11) dan $y = y(x)$ adalah solusi umum persamaan persamaan Riccati (3.11) maka diperoleh

$$y = y_2 + \frac{1}{u_1}$$

$$y - y_2 = \frac{1}{u_1}$$

$$u_1 = \frac{1}{y - y_2} \tag{3.100}$$

untuk $u_1 \neq u$.

$y_3 = y_3(x)$ solusi partikular ketiga terhadap persamaan Riccati (3.11) dan $y = y(x)$ adalah solusi umum persamaan Riccati (3.11) maka diperoleh

$$y = y_3 + \frac{1}{u_2}$$

$$y - y_3 = \frac{1}{u_2}$$

$$u_2 = \frac{1}{y - y_3} \tag{3.101}$$

untuk $u_2 \neq u_1$ dan $u_2 \neq u$.

Eliminasi persamaan (3.99) dengan persamaan (3.100)

$$u - u_1 = \frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y - y_2}$$

$$= \frac{y - y_2 - (y - y_1)}{(y - y_1)(y - y_2)}$$

$$= \frac{y_1 - y_2}{(y - y_1)(y - y_2)}. \tag{3.102}$$

Eliminasi Persamaan (3.101) dengan persamaan (3.100)

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{y-y_3} - \frac{1}{y-y_2}$$

$$= \frac{y-y_2-(y-y_3)}{(y-y_3)(y-y_2)}$$

$$= \frac{y_3-y_2}{(y-y_3)(y-y_2)}. \tag{3.103}$$

Membagi persamaan (3.102) dengan (3.103)

$$\frac{u-u_1}{u_2-u_1} = \frac{\dfrac{y_1-y_2}{(y-y_1)(y-y_2)}}{\dfrac{y_3-y_2}{(y-y_3)(y-y_2)}}$$

$$= \frac{(y-y_3)(y_1-y_2)}{(y-y_1)(y_3-y_2)}. \tag{3.104}$$

Karena persamaan (3.99), (3.100), dan (3.101) memenuhi persamaan linier dan teorema 2.5 maka

$$\frac{u-u_1}{u_2-u_1} = C. \tag{3.105}$$

Persamaan (3.105) maka persamaan (3.104) menjadi

$$\frac{(y-y_3)(y_1-y_2)}{(y-y_1)(y_3-y_2)} = C$$

untuk C sebarang konstanta.

Berikut ini akan diberikan contoh kasus persamaan Riccati dengan diberikan suatu solusi partikular. Misalkan diberikan persamaan Riccati

$$y' = xy^2 + 2xy + 1 \tag{3.106}$$

dengan solusi partikular $y_0 = y_0(x) = 1$ dan $f_2(x) = x;\ f_1(x) = 2x;\ f_0(x) = 1$. Sesuai dengan bentuk solusi umum persamaan yang pertama, maka persamaan (3.106)

$$y(x) = y_0(x) + w(x)$$

$$= y_0(x) + \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x) f_2(x) dx\right]^{-1}$$

di mana

$$\Phi(x) = \exp\left(\int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx\right)$$

$$= \exp\left(\int [2\,(x)(1) + (2x)]\, dx\right)$$

$$= \exp\left(\int 4x\, dx\right)$$

$$= \exp(2x^2).$$

Sehingga diperoleh $w(x)$

$$w(x) = \frac{\exp(2x^2)}{C - \int \exp(2x^2)\, x\, dx}$$

misal $u = 2x^2$; $du = 4x\, dx$ maka

$$w(x) = \frac{\exp(2x^2)}{C - \frac{1}{4}\int \exp(2x^2)\ (4x\, dx)}$$

$$= \frac{\exp(2x^2)}{C - \frac{1}{4}\int \exp u\ du}$$

$$= \frac{\exp(2x^2)}{C - \frac{1}{4}[\exp u + C]}$$

$$w(x) = \frac{\exp(2x^2)}{C - \frac{1}{4}[\exp(2x^2) + C]}$$

$$= \frac{\exp(2x^2)}{C - \left[\frac{C + \exp(2x^2)}{4}\right]}$$

$$= \frac{\exp(2x^2)}{\frac{3C - \exp(2x^2)}{4}}$$

$$= \frac{4\exp(2x^2)}{3C - \exp(2x^2)}$$

$$= \frac{4\exp(2x^2)}{3C - \exp(2x^2)} \cdot \frac{\exp(-2x^2)}{\exp(-2x^2)}$$

$$= \frac{4}{3C\exp(-2x^2) - 1}$$

karena C sebarang konstanta maka $3C = K$ di mana K yaitu sebarang konstanta. Oleh karena itu diperoleh

$$w(x) = \frac{4}{K\exp(-2x^2) - 1}.$$

Sehingga diperoleh solusi umum persamaan Riccati (3.106) dengan solusi partikular $y_0 = y_0(x) = 1$, yaitu

$$y(x) = y_0(x) + w(x)$$

$$= 1 + \frac{4}{K\exp(-2x^2) - 1}$$

3.2.2 Solusi Umum Persamaan Riccati Tanpa Solusi Partikular

Solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular diperoleh melalui subtitusi

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x) y\, dx\right),$$

maka mereduksi persamaan Riccati

$$y^{'} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0$$

menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua

$$f_2(x)u^{''} - [f_2^{'}(x) + f_1(x)f_2(x)]u^{'} + f_0(x)[f_2(x)]^2u = 0$$

yang sering kali lebih mudah diselesaikan dari pada persamaan Riccati yang asli. (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

Berikut ini akan dijabarkan eksistensi solusi umum sebagai berikut:

Didefinisikan persamaan Riccati (3.11)

$$y^{'} = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \quad f_2(x) \neq 0$$

dan

$$u(x) = \exp\left(-\int f_2(x)y\,dx\right). \tag{3.107}$$

Turunan persamaan (3.107) terhadap x

$$D_x u(x) = D_x e^v = e^v D_x v \tag{3.108}$$

di mana $v = -\int f_2(x)y\,dx$.

Subtitusi persamaan (3.107) ke persamaan (3.108) dan diturunkan terhadap x maka

$$u' = -u(x)f_2(x)y. \tag{3.109}$$

Dari persamaan (3.109) diperoleh

$$y(x) = -\frac{u'}{u(x)f_2(x)}. \tag{3.110}$$

Turunan persamaan (3.110) terhadap x

$$y' = -\frac{u^{''}[u\,f_2(x)] - [u^{'}\,f_2(x) + u\,f_2^{'}]u^{'}}{u^2[f_2(x)]^2} \tag{3.111}$$

untuk $u = u(x)$.

Subtitusi persamaan (3.110) dan (3.111) ke persamaan Riccati (3.11)

$$\frac{\left[u' f_2(x) + u f_2'\right]u' - u''[u f_2(x)]}{u^2[f_2(x)]^2} = f_2(x)\frac{[u']^2}{u^2\,[f_2(x)]^2} - f_1(x)\frac{u'}{u\,f_2(x)} + f_0(x)$$

kedua ruas dikali dengan $u^2[f_2(x)]^2$

$$[u']^2 f_2(x) + u' f_2' \, u - u'' f_2(x)\, u = [u']^2 f_2(x) - u' f_1(x)\, f_2(x)\, u + f_0(x)\ [f_2(x)]^2\, u^2$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u''\, f_2(x)\, u &= u' f_2'\, u + u'\, f_1(x)\, f_2(x)\, u - f_0(x)\, [f_2(x)]^2\, u^2 \\ &= [f_2' + f_1(x)\, f_2(x)]u' u - f_0(x)\, [f_2(x)]^2\, u^2 \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan u

$$f_2(x)\, u'' = [f_2' + f_1(x)\, f_2(x)]u' - f_0(x)\, [f_2(x)]^2\, u. \qquad (3.112)$$

Jika sisi sebelah kanan persamaan (3.112) dipindah ke sisi sebelah kiri maka

$$f_2(x)u'' - \left[f_2' + f_1(x)f_2(x)\right]u' + f_0(x)[f_2(x)]^2 u = 0.$$

yang juga disebut persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua (*a second order linear homogeneous ODE*).

Berikut ini akan diberikan contoh kasus persamaan Riccati tanpa diberikan suatu solusi partikular. Misalkan diberikan persamaan Riccati

$$y' = -[y(x)]^2. \qquad (3.113)$$

Persamaan (3.113) ekuivalen dengan bentuk umum persamaan Riccati

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x)y^2(x) + f_1(x)y(x) + f_0(x)$$

untuk $f_2(x) = -1;\ f_1(x) = f_0(x) = 0.$

Karena $y(x) = -\dfrac{w'}{wf_2(x)}$ maka

$$y(x) = \frac{w'}{w}. \tag{3.114}$$

Turunan persamaan (3.114)

$$y' = \frac{w''w - w'^2}{w^2} \tag{3.115}$$

Subtitusi persamaan (3.114) dan (3.115) ke persamaan (3.113)

$$\frac{w''w - w'^2}{w^2} = -\frac{w'^2}{w^2}$$

kedua ruas dikali dengan w^2

$$w''w^{-1} - w'^2 = -w'^2$$

sehingga diperoleh

$$w''(w)^{-1} = 0$$

$$w'' = 0 \tag{3.116}$$

Solusi persamaan (3.116)

$$w(x) = x + C \tag{3.117}$$

untuk C yaitu sebarang konstanta.

Turunan persamaan (3.117)

$$w' = 1. \tag{3.118}$$

Sehingga diperoleh solusi umum persamaan (3.113) dari persamaan (3.114), (3.117), dan (3.118) yaitu

$$y(x) = \frac{1}{x + C}$$

untuk C yaitu sebarang konstanta.

3.3 Analisis Ketunggalan Solusi Umum Persamaan Riccati

Diberikan solusi umum persamaan Riccati bentuk pertama

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x) f_2(x)\right]^{-1} \\ &\leq y_0 + \Phi(x) g_1(x) \end{aligned} \tag{3.119}$$

Andaikan ada $y_1(x)$ yaitu solusi umum persamaan Riccati lain selain $y(x)$ dan didefinisikan

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \Phi_1(x)\left[C - \int \Phi_1(x) f_2(x)\right]^{-1} \\ &\leq y_0 + \Phi_1(x) g_2(x) \end{aligned} \tag{3.120}$$

Ambil modulus beda dari persamaan (3.119) dan (3.120)

$$\begin{aligned} |y(x) - y_1(x)| &= |\Phi(x) g_1(x) - \Phi_1(x) g_2(x)| \\ &\leq |\Phi(x) g_1(x) - \Phi_1(x) g_2(x)| \end{aligned} \tag{3.121}$$

Sesuai kondisi Lipschitz maka

$$\left|\Phi(x) g_1(x) - \Phi_1(x) g_2(x)\right| \leq K|y(x) - y_1(x)|$$

sehingga persamaan (3.121) menjadi

$$|y(x) - y_1(x)| \leq K|\Phi(x) g_1(x) - \Phi_1(x) g_2(x)|$$

di mana $K > 0$ yaitu konstanta Lipschitz. Dengan menggunakan ketaksamaan Gronwall untuk fungsi nonnegatif $\left|y(x) - y_1(x)\right|$ dengan $L = 0$ dan $g(s) = K > 0$ maka diperoleh

$$|y(x) - y_1(x)| \leq 0$$

Karena modulus suatu fungsi tak pernah negatif, maka

$$\begin{aligned} |y(x) - y_1(x)| &= 0 \\ y(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$

3.4 Analisis Kekonvergenan Solusi Persamaan Riccati

Diberikan persamaan Riccati (3.106)

$$y' = xy^2 + 2xy + 1$$

dengan memberikan solusi partikular $y_0 = y_0(x) = 1$, maka diperoleh solusi umum bentuk pertama yaitu:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + w(x) \\ &= 1 + \frac{4}{K\exp(-2x^2) - 1} \end{aligned} \tag{3.122}$$

Jika diberikan kondisi awal $x = 0$ dan $y(0) = 0$ maka dari persamaan (3.122) diperoleh

$$y(0) = 1 + \frac{4}{K\exp\left(-2 \cdot 0^2\right) - 1}$$

$$0 = 1 + \frac{4}{K \cdot 1 - 1}$$

$$-1 = \frac{4}{K - 1}$$

$$K = -3$$

sehingga diperoleh solusi persamaan Riccati (3.106)

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{4}{K\exp(-2x^2) - 1} \\ &= 1 + \frac{4}{(-3)\exp(-2x^2) - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{-1}\frac{4}{(1 + 3\exp(-2x^2))} \\ &= 1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2x^2)} \end{aligned} \tag{3.123}$$

Bentuk deret solusi persamaan (3.123) yaitu

$$\sum_{x=0}^{\infty} y(x) = \sum_{x=0}^{\infty} 1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2x^2)}$$

$$= \left(1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2 \cdot 0^2)}\right) + \left(1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2 \cdot 1^2)}\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2 \cdot 2^2)}\right) + \left(1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2 \cdot 3^2)}\right) \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{4}{1 + 3}\right) + \left(1 - \frac{4}{1 + 0{,}406}\right) + \left(1 - \frac{4}{1 + 0{,}001}\right) +$$

$$\left(1 - \frac{4}{1 + 4{,}56 \cdot 10^{-8}}\right) + \cdots$$

$$= (1 - 1) + (1 - 2{,}844) + (1 - 3{,}996) + (1 - 3{,}999) + \cdots$$

$$= 0 - 1{,}844 - 2{,}996 - 2{,}999 + \cdots$$

$$= -\infty$$

Sehingga diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{x=0}^{\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \sum_{x=0}^{\infty} 1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2x^2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 0 - 1{,}844 - 2{,}996 - 2{,}999 + \cdots \qquad (3.124)$$

$$= -\infty$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\sum_{x=0}^{\infty} 1 - \frac{4}{1 + 3\exp(-2x^2)}$$

yaitu divergen. Hubungan persamaan (3.124) dengan barisan jumlah parsial, yaitu

$S_0 = y(0) = 0$, $\lim_{x\to 0}\langle S_0\rangle = 0$

$S_1 = y(0) + y(1) = 0 - 1{,}844 = -1{,}844$, $\lim_{x\to 0}\langle S_1\rangle = -1{,}844$

$S_2 = y(0) + y(1) + y(2) = 0 - 1{,}844 - 2{,}996 = -4{,}84$, $\lim_{x\to 0}\langle S_2\rangle = -4{,}84$

$S_3 = y(0) + y(1) + y(2) + y(3) = 0 - 1{,}844 - 2{,}996 - 2{,}999 = -7{,}839$,

$\lim_{x\to 0}\langle S_3\rangle = -7{,}839$

$\vdots$

$S_x = y(0) + y(1) + y(2) + y(3) + \cdots + y(x) = 0 - 1{,}844 - 2{,}996 - 2{,}999 +$

$\cdots = -\infty$, $\lim_{x\to 0}\langle S_x\rangle = -\infty$

maka $\langle S_x\rangle$ divergen.

3.5 Integrasi Solusi Umum Persamaan Riccati dalam Al-Qur'an

Jika ditinjau secara Islam maka surat Ali Imran ayat 186 telah menjelaskan metodologi tentang sikap-sikap dalam menyelesaikan masalah atau ujian dari Allah. Sikap-sikap tersebut yaitu dengan bersabar, berusaha, dan bertakwa karena-Nya seraya memohon pertolongan serta kembali kepada-Nya. Menurut Shihab (2007) berdasarkan pada ayat ketujuh surat Al-Mudatstsir sebagai wahyu kedua atau ketiga, dan riwayat lain yang diterima nabi Muhammad juga sejalan dengan perintah bersabar dalam menghadapi masalah atau ujian harus didasari karena Allah sebagaimana pada surat Ali Imran ayat 186. Beliau menafsirkan bersabar *li Rabbik* berarti bahwa yang dituntut yaitu pelaksanaan perintah Allah dengan penuh ketabahan dan kesabaran, apapun hasil yang dicapai. Karena ketabahan dalam perjuangan dapat memudar apabila diingat bahwa hasil yang ditargetkan terlalu besar dibandingkan dengan sarana dan prasarana yang dimiliki. Akan tetapi, apabila yang menjadi tujuan yaitu dengan pendekatan terhadap perjuangan itu sendiri-terlepas dari apapun hasilnya-maka ia akan berlanjut, apakah yang diharapkan itu tercapai atau tidak. Sebab, sejak semula telah dinyatakan bahwa “yang dituntut yaitu pendekatan terhadap ketabahan dalam perjuangan” bukan “pendekatan terhadap hasil perjuangan”.

Sebuah aktivitas untuk menyelesaiakan suatu masalah atau yang lain dengan menggunakan daya fisik, pikir, kalbu, dan hidup yang dianugerahkan Allah disebut dengan kerja atau usaha. Dalam usaha harus keras atau maksimal disertai dengan pendekatan terhadap keikhlasan dalam melakukannya, dan ini menjadikan pelakunya tidak semata-mata mengandalkan imbalan di sini dan sekarang (duniawi), tetapi pandangan dan visinya harus melampui batas-batas kekinian dan kedisinian, yaitu mengharap ridha Allah agar bahagia di akhirat sana. Dari sini setiap pekerjaan hendaknya dihiasi dengan niat yang tulus, dimulai dengan membaca *basmalah* atau do’a untuk mengingatkan pelakunya tentang tujuan akhir yang diharapkan dari usahanya, dan menyadarkan dirinya tentang anugerah Allah yang menjadikannya mampu melaksanakan pekerjaan itu. Bila dihayati, pasti kerja-sejak proses iterasi atau aksi hingga penyelesaiannya-akan selalu benar, bermanfaat, dan “sesuai” atau-dengan kata lain-menjadi *saleh* (Shihab, 2007).

Metodologi selanjutnya yang diamanatkan dari surat Ali Imran ayat 186 yaitu tentang bertakwa. Menurut Shihab (2007) seseorang yang bertakwa memiliki tiga pendekatan sifat yang harus dimiliki, yaitu iman, pengamalan syariat, dan akhlak atau etika. Substansi iman yang dimaksud yaitu seseorang harus percaya, bukan karena ia tahu, tetapi karena ia tidak tahu. Jika demikian pada saat seseorang beriman, ia harus sadar bahwa ada hal-hal yang tidak dapat terjangkau oleh nalarnya. Sedangkan konsekuensi keimanan, mengantar seseorang untuk lebih percaya kepada yang dijanjikan Allah, melebihi kepercayaannya menyangkut apa yang berada dalam genggaman tangannya sendiri. Untuk pendekatan terhadap pengamalan syariat salah satunya yaitu beribadah shalat memohon kepada-Nya yang melambangkan hubungan harmonis antara hamba dengan Tuhan (Allah). Sedangkan pendekatan terhadap akhlak atau etika yaitu berkaitan dengan pengendalian diri. Misalnya, menahan amarah, memberi maaf, bahkan berbuat baik terhadap yang bermasalah.

Allah telah menjanjikan, *Siapa yang bertakwa kepada Allah, Allah akan memberinya jalan keluar dari kesulitannya*, begitu penegasan surat At-Thalaq ayat 2. Kemudian ayat berikutnya melanjutkan, *dan memberinya rezeki dari arah yang dia tidak duga*. Ayat keempat dalam surat yang sama menegaskan bahwa, *Barangsiapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya.* Sedangkan ayat kelima surat yang sama menyatakan, *Siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah akan mengahapus dosa-dosanya dan akan melipat gandakan pahala baginya* (Shihab, 2007).

Metodologi terakhir yaitu Allah sebagai wakil atau tawakkal kepada-Nya. Perintah tawakkal bukan berarti mengajarkan agar seseorang tidak berusaha atau mengabaikan hukum-hukum sebab dan akibat. Tetapi, perintah tawakkal bertujuan agar seseorang hidup dalam realita. Setiap manusia dituntut untuk berusaha keras hingga berada dalam batas-batas kemampuan, disertai dengan ambisinya yang meluap-luap untuk meraih sesuatu. Akan tetapi, saat gagal meraihnya, setiap manusia tidak boleh meronta atau berputus asa serta melupakan anugerah Allah yang selama ini telah mereka terima (Shihab, 2007).

Berdasarkan surat Ali Imran ayat 186 maka didapatkan analog tentang metodologi dalam penyelesaiakan masalah menurut kajian agama yang sesuai dengan metodologi analisis solusi umum persamaan Riccati, yaitu (1) masalah atau ujian dan cobaan, (2) metode-metode atau kaidah-kaidah tertentu yang syar'i untuk penyelesaian masalah atau ujian dan cobaan, (3) iterasi atau aksi guna mendapatkan penyelesaian masalah atau ujian dan cobaan, (4) memperoleh penyelesaian masalah atau ujian dan cobaan, dan (5) validasi penyelesaian yang diridoi Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa generalisasi solusi umum persamaan Riccati dengan beberapa solusi partikular hingga tiga solusi partikular, yaitu:

1. Diberikan solusi partikular $y_0 = y_0(x)$ terhadap persamaan Riccati. solusi umum persamaan Riccati memiliki bentuk $y(x) = y_0(x) \pm w(x)$ yang dapat ditemukan melalui dua pengintegralan:

   $$y(x) = y_0(x) \pm \Phi(x) \left[C \mp \int \Phi(x) f_2(x) dx \right]^{-1}$$

   dengan

   $$\Phi(x) = \exp \left\{ \int [2f_2(x)y_0(x) + f_1(x)]\, dx \right\}$$

   dan C konstanta sebarang.

2. Diberikan solusi partikular $y_0 = y_0(x)$ terhadap persamaan Riccati. Solusi umum persamaan Riccati memiliki bentuk $y(x) = y_0(x) \pm [w(x)]^{-1}$ yang dapat ditemukan melalui dua pengintegralan dan diperoleh persamaan diferensial biasa linier:

   $$w_x' \pm f_2(x) + U(x)w = 0$$

   di mana $U(x) = f_1(x) + 2f_2(x)y_0$, yaitu:

   $$(y - y_0) \left[C \mp \int \Psi(x) f_2(x) dx \right] = \pm \Psi(x)\,;$$

$$\Psi(x) = \exp\left[\int U(x)\,dx\right]$$

untuk $y = y(x)$ dan C konstanta sebarang.

3. Diberikan $y_1 = y_1(x)$ dan $y_2 = y_2(x)$ dua solusi partikular yang berbeda persamaan Riccati maka solusi umum persamaan Riccati dapat ditemukan dengan hanya satu pengintegralan:

$$y(x) = \frac{Cy_1 + U(x)y_2}{C + U(x)}$$

di mana

$$U(x) = \exp\left[\int f_2(y_1 - y_2)\,dx\right]$$

dan C konstanta sebarang.

4. Diberikan $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $y_3 = y_3(x)$ tiga solusi partikular yang berbeda persamaan Riccati maka solusi umum persamaan Riccati dapat ditemukan tanpa pengintegralan:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1}\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

untuk C konstanta sebarang.

Sedangkan untuk bentuk solusi umum persamaan Riccati tanpa solusi partikular dapat ditemukan dengan mengubah peubah terikat persamaan Riccati dari $y = y(x)$ menjadi $u = u(x)$, yaitu:

$$y(x) = -\frac{u'_x}{u(x)f_2(x)},$$

mereduksi persamaan Riccati menjadi persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua:

$$f_2(x)u''_{xx} - [f'_{2_x}(x) + f_1(x)f_2(x)]u'_x + f_0(x)[f_2(x)]^2u = 0,$$

yang sering kali lebih mudah diselesaikan daripada persamaan Riccati yang asli.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan, peneliti memberikan saran bahwa penelitian ini dapat dilanjutkan:

1. Penelitian ini dapat dikembangkan pada analisis solusi umum persamaan Riccati yang memuat fungsi kompleks dan domain analisis terdefinisi pada domain kompleks, yaitu di domain cincin atau annulus.
2. Penelitian ini dapat dibandingkan antara solusi analitik dengan solusi numerik.
3. Penelitian ini dapat diaplikasikan menjadi bentuk program dengan matlab atau *software* lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abell, M.L. dan Braselton, J.P.. 1993. *Differential Equations with Mathematica*. Boston: Academic Press, Inc.

Anton, H., Bivens, I., dan Davis, S.. 2009. *Calculus Early Transcendentals, 9th Edition*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Ayres, F.. 1952. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R.. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Behloul, D. dan Cheng, S.S.. 2011. Computation of Rational Solutions for A First-Order Nonlinear Differential Equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, **121**, 15-16.

Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th Edition*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa Suatu Pengantar*. Jakarta: Erlangga.

Goldstein, M.E. dan Braun, W.H.. 1973. *Advanced Methods for the Solution of Differential Equations*. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.

Hille, E.. 1997. *Ordinary Differential Equations in the Domain Complex*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Ince, E.L.. 1978. *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications, Inc.

Katsir, I.. 2007. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir Jilid 2*. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir.

King, A.C., Billingham, J., dan Otto, S.R.. 2003. *Differential Equations Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*. New York: Cambridge University Press.

Krantz, S.G.. 2005. *Real Analysis and Foundations, 2nd Edition*. Florida: Chapman & Hall/CRC Press.

Murphy, G.M.. 1960. *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. New York: Van Nostrad Reinhold Company.

Pamuntjak, R.J. dan Santoso, W.. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: FMIPA-ITB.

Polyanin, A.D. dan Zaitsev, V.F.. 2003. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, *2nd Edition*. New York: CRC Press, Inc.

Reid, W.T.. 1972. *Riccati Differential Equations Volume 86*. New York: Academic Press, Inc.

Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations, 3th Edition*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Mishbah, Volume 15*. Jakarta: Lentera Hati.

Shihab, M.Q.. 2007. *Secercah Cahaya Ilahi Hidup Bersama Al-Quran*. Bandung: PT Mizan Pustaka.

Soemantri, R.. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: Erlangga.

Taylor, A.E. dan Mann, W.R.. 1983. *Advanced Calculus, 3th Edition*. New York: JohnWiley & Sons, Inc.

Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : M. Ulul Albab
NIM : 09610031
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Solusi Umum Persamaan Riccati
Pembimbing I : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Januari 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	1 Februari 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	2.
3.	5 Februari 2013	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	2 Februari 2013	ACC Bab I dan Bab II	4.
5.	9 Februari 2013	ACC Bab I dan Bab II Agama	5.
6.	30 April 2013	Konsultasi Kajian Agama	6.
7.	20 Mei 2013	Konsultasi Kajian Agama	7.
8.	27 Mei 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	8.
9.	27 Mei 2013	Konsultasi Bab III	9.
10.	3 Juni 2013	ACC Bab III	10.
11.	5 Juni 2013	ACC Kajian Agama	11.
12.	6 Juni 2013	ACC Keseluruan	12.

Malang, 11 Juni 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001